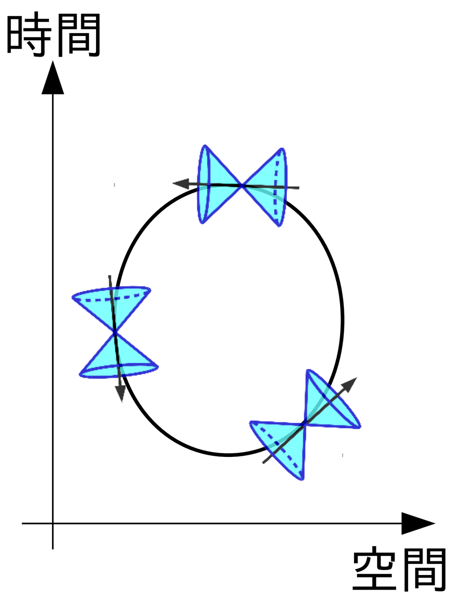
# 軸対称時空における時間的閉曲線
# ～タイムマシンはつくれるか？～

京都大学 基礎物理学研究所 M2 林航大

## Abstract

一般相対性理論の興味深い示唆として、時間的閉曲線の存在がある[1-3]。時間的閉曲線とは時間的な曲線でありながら全く同一の時空点 ( 時間、空間 ともに全く同一の点 ) に戻ってくるものである。この時間的閉曲線の存在は、一般相対性理論の枠組みにおいて、過去の世界への時間旅行が禁止されていないことを意味している。本発表ではまず、文献 [1] に従って、回転する無限に長い円柱形状のダストによって形成される円柱対称時空において時間的閉曲線が存在することを確認する。また文献 [2] に従って、有限の長さの質量を持たない回転する棒にによって形成される軸対称時空においても同様に時間的閉曲線の存在を確認する。

## 1. Introduction




時間的閉曲線
- 時間的な曲線であり、かつ閉曲線であるもの
- 過去の世界への時間旅行を可能とする

↓

- 時間的閉曲線を含む時空を形成することは
  タイムマシンをつくることに対応する

時間的閉曲線が存在する条件
- 次の定常軸対称時空の計量について考える：

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2 + g_{rr}dr^2 + g_{zz}dz^2$$

$$(-\infty < z < \infty,\ r \geq 0,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi,\ -\infty < t < \infty)$$

$$(\ g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(r,z)\ )$$

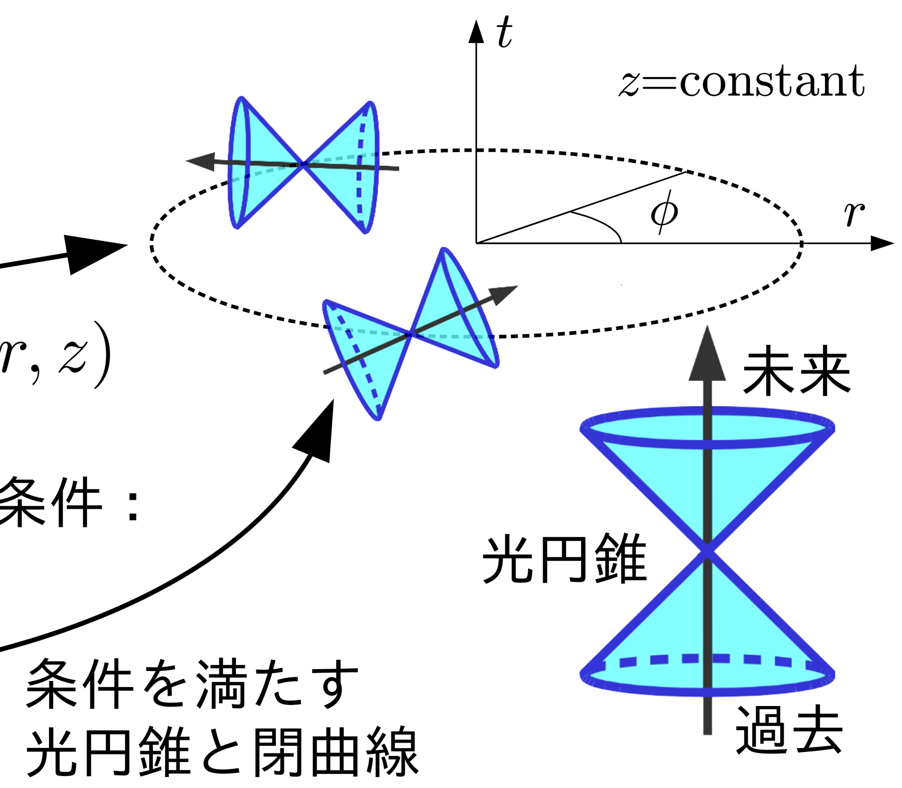
- 閉曲線：

$$\begin{cases} x^\phi = \phi \\ x^\mu = \text{constant}\ (\mu = t, r, z) \end{cases}$$

- この閉曲線が時間的になる条件：

$$ds^2 = g_{\phi\phi}d\phi^2 < 0$$

$$\Rightarrow \quad g_{\phi\phi} < 0$$




## 2. 無限に長い回転する円柱形状のダスト

無限に長い回転する円柱形状のダストによって形成される
定常円柱対称時空に注目し、その性質を見ていく。

計量

ダストのエネルギー密度と４元速度 ( ただし $a$ と $R$ は正の定数 )：

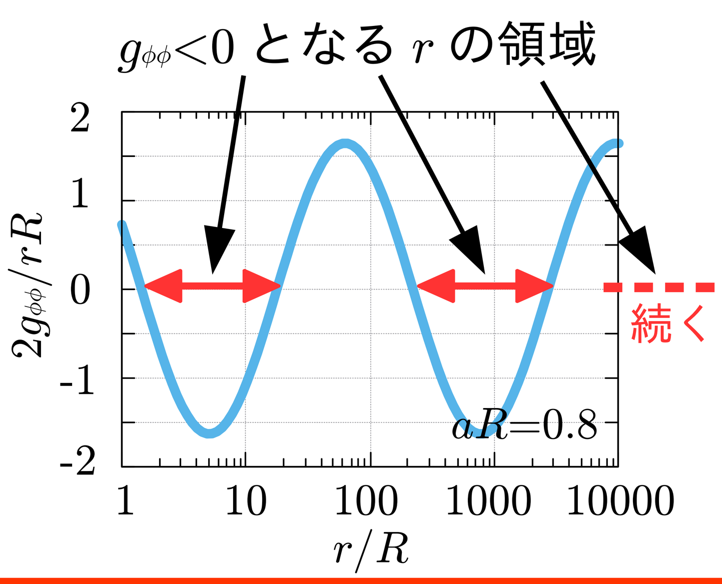
$$8\pi\rho = 4a^2 \mathrm{e}^{a^2r^2}, \quad u^i = \delta^i_t \quad (0 \leq r \leq R)$$

ダストによって形成される、真空領域での計量
( ただし、 $r>R$ 、 $1<aR<1/2$ を仮定する )：

$$\begin{cases} g_{tt} = -rR^{-1}\sin(\epsilon-\theta)\csc(\epsilon) \\ g_{t\phi} = r\sin(\epsilon+\theta)\csc(2\epsilon), \\ g_{\phi\phi} = \dfrac{1}{2}rR\sin(3\epsilon+\theta)\csc(2\epsilon)\sec(\epsilon), \\ g_{rr} = g_{zz} = \mathrm{e}^{-a^2r^2}(R/r)^{2a^2R^2}, \\ \left( \begin{array}{l} \theta = (4a^2R^2-1)^{1/2}\log(r/R), \\ \tan(\epsilon) = (4a^2R^2-1)^{1/2} \end{array} \right) \end{cases}$$

- この計量は物質の共同座標系で表したものである
- 局所平坦な座標系に移ることでダストが角速度 $a$ で
  回転していることが確認される

性質
- 時間的閉曲線が存在する
- エネルギー条件を満たす物質
  によって形成される
- 時空の全領域で特異点が存在しない
- 漸近平坦ではない




## 3. 有限の長さの質量を持たない回転する棒

有限の長さの質量を持たない回転する棒によって形成される、
定常軸対称な時空に注目し、その性質を見ていく。

計量

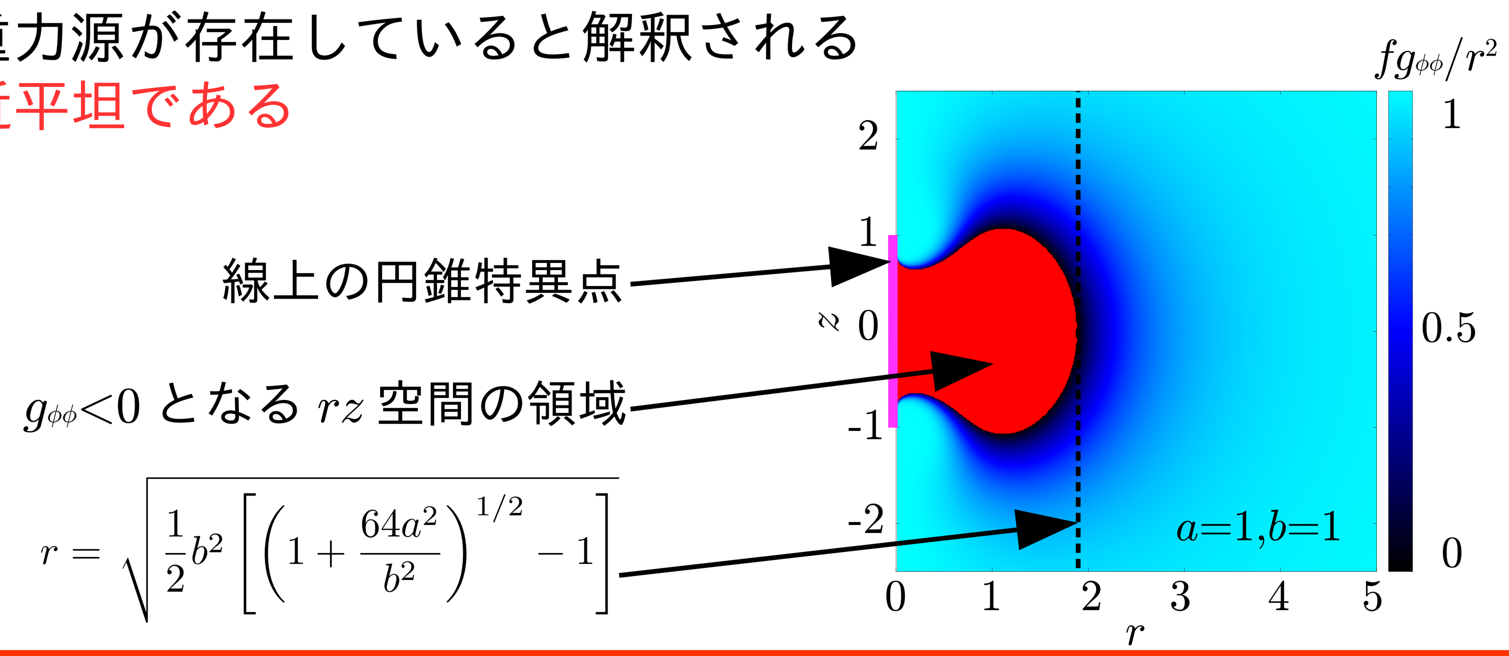
Papapetrou によって求められた、アインシュタイン方程式の
真空解 [4] をもとに以下の解が構成される

$$\begin{cases} g_{tt} = -f, \quad g_{t\phi} = fw, \quad g_{rr} = g_{zz} = f^{-1}\mathrm{e}^{\nu} \\ g_{\phi\phi} = f^{-1}r^2(1-r^{-2}f^2w^2) \end{cases}$$

ここで、 $f$ 、 $w$ 、 $\nu$ は次で表される

$$\begin{cases} f^{-1} = \cosh\left[2a\left(\dfrac{1}{R_-} - \dfrac{1}{R_+}\right)\right], \quad w = -2a\left(\dfrac{z-b}{R_-} - \dfrac{z+b}{R_+}\right), \\ \nu = -a^2\left[r^2\left(\dfrac{1}{R_-^4} + \dfrac{1}{R_+^4}\right) + \dfrac{R_0^2 - b^2}{b^2R_-R_+}\right] + \dfrac{a^2}{b^2}, \\ \left( \quad R_j = [(z+jb)^2 + r^2]^{1/2} \quad (j = +, -, 0) \quad \right) \end{cases}$$

性質
- 時間的閉曲線が存在する
- $-b<z<b$ 、 $r=0$ に線状の特異点が存在する
- $r\to\infty$ で質量ゼロ、角運動量 $4ab$ で回転している
  粒子によって作られる時空に漸近する
  - $-b<z<b$ 、 $r=0$ に、質量ゼロで回転している線状の
    重力源が存在していると解釈される
- 漸近平坦である




## 4. Conclusion

- 無限に長い回転する円柱形状のダストによって形成される定常円柱対称時空と、有限の長さの質量を持たない回転する棒によって形成される定常軸対称時空にに注目した。この二つの時空のいずれにも時間的閉曲線が存在しうることを確認した。しかしながら、二つの時空のいずれも非現実的な性質を持つことも確認された。
- ここで疑問なのが、これらの時空においてその非現実的な性質を取り除いた際に、時間的閉曲線の存在は保たれるのかということである。これは即ち、現実世界において、過去の世界への時間旅行は可能なのかという問いにつながる。
- 今回注目した二つの時空を現実的なものに変更したモデルとして、有限の長さと直径を持つ円柱形状の物質を回転させたものが考えられる。このモデルについて考察することが、過去の世界への時間旅行の可能性を明らかにする次の一歩となると期待される。

参考文献

[1] W.B. Bonnor, 1980, J. Phys. A: Math. Gen. 13,2121
[2] W.B. Bonnor, 2002, Class. Quantum Grav. 19,5951
[3] S.V. Bolokhov et al., 2019, Gravit. Cosmol. 25: 122
[4] A. Papapetrou, 1953, Ann. Phys., Lpz 12 309