

2019年第49回
天文・天体物理若手夏の学校

集録

重宇

謝辞

2019年度天文・天体物理若手夏の学校は、基礎物理学研究所を始め、国立天文台、理論天文学宇宙物理学懇談会、宇宙線研究者会議、光学赤外線天文連絡会、野辺山宇宙電波からのご支援、また、企業・個人(プログラム集参照)からご寄付により成り立っております。事務局一同厚く御礼申し上げます。

重力・宇宙論分科会

index

a1	物部 武瑠	BlackHole まわりのアクシオン雲による重力波放射
a2	植田 郁海	クォーク・ハドロン相転移による背景重力波への影響
a3	福永 颯斗	アクシオンにおける共鳴不安定性
a4	喜久永 智之介	Pulsar Timing Array による M87 からの低周波重力波の制限
a5	高橋 卓弥	インフレーション中の量子ゆらぎと原始ブラックホール
a6	間仁田 侑典	宇宙の加速器の物理
a7	村上 広椰	Non Bunch-Davies 真空における単一スカラー場インフレーションモデルの観測量の推定
a8	三嶋 洋介	Blue gravitational waves from slow-roll inflation
a9	佐藤 靖	$R + R^2$ モデルに対する高階微分項による補正
a10	新井 幸	漸減する宇宙項と間欠的加速膨張
a11	竹村 希心	cubic-order Horndeski 理論においてスケーリング解を持つ最も一般的なラグランジアン
a12	小池 貴博	Infinite Derivative Gravity 理論におけるブラックホールの内部構造に対するスカラー場の影響について
a13	池田 拓人	Gauss-Bonnet 作用における metric 形式と metric-affine 形式の非等価性
a14	楠見 蛭	水面波メタマテリアルの実装とその宇宙論的応用について
a15	神原 亮介	Hawking-like radiation
a16	松本 怜	ブラックホールの無毛定理、地平面の安定性、および熱力学
a17	何 俊逸	発散方程式と静的ブラックホールの唯一性定理
a18	上田 和茂	回転 BH による真空崩壊の触媒作用
a19	杉山素直	すばる HSC の銀河サーベイデータを使った宇宙論パラメタ推定手法の開発
a20	栗田 智貴	宇宙の大規模構造とダークマターハローの形状の相関
a21	三浦 大志	ハッブル定数の不一致問題に対する cosmological backreaction による説明の問題点
a22	小粥 一寛	銀河形状を用いた初期三点相関の検証
a23	山本 菜々花	CMB レンズングを用いた銀河団の質量推定
a24	迫田 康	21cm 線と CMB 弱重力レンズ効果の相互相関による中性水素存在量の推定
a25	古郡 国彦	Ultracompact minihalo の 21cm 線観測による初期パワースペクトルの制限
a26	口ノ町 瑛	21cm-LAE cross-correlation を用いた 21cm 線シグナルの検出可能性
b1	木太久 稜	F(R)gravity での Shuwarzshild-de Sitter black holes の anti-evaporation
b2	遠藤 洋太	Q-balls
b3	野村 皇太	スカラーダークマターとブラックホールヘア
b4	太田 溪介	Infinite Derivative Gravity 理論における特異点解消の構造について
b5	阿部 克哉	原始ブラックホールによる非等方的な Kinetic Sunyaev-Zeld'ovich 効果
b6	田中 章一郎	21cm 線-CMB Lensing 相互相関の検出可能性と宇宙論パラメータの制限
b7	近藤 寛人	HSC データを用いたフィラメント構造の弱重力レンズ効果測定
b8	岡野 創	ヘリカルな磁場生成モデルにおける重力波生成

index

c2	片桐 拓弥	Modeling scalar fields consistent with positive mass
c3	林 航大	軸対称時空における時間的閉曲線
c4	平野 進一	修正重力理論におけるスカラー波の遮蔽機構とその破れ
c5	大倉 靖央	逆散乱法によるアインシュタイン方程式の厳密解の構成
c6	渡慶次 孝気	重力の熱力学的側面
c7	竹林 蒼真	ブラックホール内部の質量パラメータ・インフレーションと宇宙検閲官仮説
c8	村島 崇矩	球形ブラックホールが及ぼす質量インフレーション
c9	藤倉 浩平	A new derivation of string-string interactions
c10	富川 慶太郎	スカラー型ゆらぎから誘起される重力波のゲージ依存性
c11	石川 純也	宇宙論における相転移由来の重力波
c12	佐藤 星雅	Reheating after the hybrid Higgs inflation
c13	佐野 有里紗	Time crystal とその初期宇宙への影響の可能性
c14	橋本 大輝	ダークマターの性質の制限:LSBG を用いたダークマター対消滅の探査
c15	羽柴 聡一郎	右巻きニュートリノの重力的生成によるバリオン数と暗黒物質の生成
c16	Qiu Tian	Constraints on asteroid-mass primordial black holes (PBHs) as dark matter candidates
c17	簗口 睦美	ボイドの形状進化と潮汐場の系統的調査
c18	吉田 貴一	ガウス過程を用いた宇宙の大規模構造の復元
c19	時 聡志	すばる HSC を用いた弱重力レンズの観測による宇宙論
c20	石倉 来実	宇宙マイクロ波背景放射とザックス・ヴォルフェ効果

a1

BlackHole まわりのアクシオン雲による
重力波放射
立教大学大学院 理学研究科
物部 武瑠

BlackHole 周りの axion 雲による重力波放射

物部 武瑠 (立教大学大学院 理学研究科 物理学専攻 修士課程 1 年)

Abstract

弦理論や M 理論では次元のコンパクト化により、小さいが幅広いレンジの質量を持った axion 場の存在が提唱されている。[2] その axion を通して、多くの宇宙論的現象についての新しい見方が考えられている。

その中の一つとして、BlackHole まわりの axion 雲による重力波の放射を考えた [1] をレビューする。回転する BH では BH 近傍のポテンシャルにより、あるモードの波動が散乱され、振幅が増幅し回転エネルギーが取り出される現象が起こる。この現象を superradiance と呼ぶ。superradiance は繰り返しにより不安定になり superradiance instability を引き起こすが、それにより axion 雲はどんどん成長し¹、非線形相互作用が現れるようになる。superradiance instability の終状態 (bosonova) では重力波が放出される。[3]

[1] では bosonova の起こる前の状態での重力波の放出を解析していて、その計算結果として backreaction (ここでは axion 雲からの重力波の放出) はとても小さいことが確かめられた。これにより [3] で bosonova の間の重力波の放出について計算する際に考慮した、bosonova の描写が適切であると確認できた。

1 Introduction

2015 年に連星 BlackHole による重力波が観測されて以来、重力波を主題とした研究がより盛んに行われてきた。ひとえに重力波といっても連星系からのもの、BH 由来のもの、インフレーション由来のものなどさまざまである。近年の技術の進歩により、LIGO や Virgo などの検出器の精度が高まってきたこともあり、以前観測されたものとは異なる由来の重力波の検出を目指して研究が進められている。[1] で計算する axion 場をソースとする重力波は小さすぎて観測は困難であると考えられるが、[3] で考えた bosonova による重力波は改良された LIGO や KAGRA なら観測が期待できるようである。

弦理論や M 理論では 4 次元以上の高次元は折りたたまれて存在していると考えられており、その余剰次元がもつ動的自由度を moduli と呼ぶ。moduli は 4 次元時空では場として振舞うが、その中の一つとして axion がある。質量 μ が $10^{-33} \sim 10^{-10} \text{eV}$ ほどである axion 場 (string axion) の存在が提唱されていて、本論文では $\mu \sim 10^{-10} \text{eV}$ 程度の axion 場を考える。^{2,3}

²準束縛状態が起こるのが太陽質量ほどの回転 BH の周りであり、このコンプトン波長 $1/\mu$ は太陽質量ほどの BH 半径に相当するため

³以下、 $c = G = \hbar = 1$

axion は QCD での強い CP 問題を解決するために導入された。理論では作用に CP 対称性を破るような項を入れることができるが、実験ではその項はほぼゼロとなり CP 対称性は破れない。これを強い CP 問題と呼ぶが、axion の導入により理論でもその項がゼロになることがわかるので、CP 対称性は破れない。他にも、その安定性からダークマターの候補などとして axion は考えられており、様々な宇宙論的事象の説明が期待されている。⁴(axiverse senario)[2],[4]

回転する太陽質量程度の BH の周辺では quasibound-state mode (準束縛状態) が現れる。その mode の振幅は BH の回転 energy を引き出す過程⁵を通してエネルギーを獲得し、指数関数的に増大する。この指数関数的増大による不安定性を superradiant instability と呼ぶ。instability により axion 雲はどんどん成長するが、この成長率は最大でも $M\omega_I \sim 10^{-7}$ ほどであり、成長 (instability) の time scale は $\Delta t \sim 10^7 M \sim 1 \text{minute} (M = M_\odot)$ となる。これはもちろん重力波検出器の観測周期よりも小さい。instability の進行に伴い、axion の非線形相互作用

⁴axion は観測で見つかっていない。axion が絡むと考えられる宇宙での現象を見ることで、axion について新たに情報を得ることが期待される。

⁵エルゴ領域でのエネルギー引き抜き過程。光子を投げ入れたものは penrose 過程と名前がついている。

用⁶が現れるようになり、その終状態として重力波が放出される。⁷ (bosenova⁸) bosenova に至るためにはおおよそ axion 場が獲得するエネルギーが、BH の質量の 0.16% ほどになることが必要である。[3] しかしここでは axion 場をソースとした重力波の放出もあるため、放出エネルギーが大きい場合には instability は進行せず、bosenova を起こすのに必要なエネルギー領域に至らず、bosenova は起こりえない。⁹

[1] では bosenova の起こる前の状態での重力波の放出エネルギーを計算し、axion 場からの重力波の放出がとても小さいことを示す。これが獲得エネルギーよりも小さければ、axion 場は成長を止めず、bosenova へ至ることが確認できる。

2 Methods

BH からエネルギーを得た axion 雲 (場) が成長 (instability の進行) することで bosenova に至る。といった描像を考えるが、superradiance は BH からのエネルギー引き抜き過程となるので、axion 場のエネルギー獲得率 dE_a/dt が、instability の進行による重力波放射 dE_{GW}/dt よりも小さいと、bosenova の起こりうるまで場が成長できない。bosenova が起こりうるためには

$$\frac{dE_a}{dt} > \frac{dE_{GW}}{dt}$$

を満たす必要があり、これを示す。

2.1 superradiance condition

kerrBH 近傍のポテンシャルにより、あるモードの波動が増幅され跳ね返される現象がある。これを superradiance と呼ぶ。superradiance は superradiance

⁶axion 場 Φ のポテンシャル V は一般に $V = f_a^2 \mu^2 \{1 - \cos(\Phi/f_a)\}$ (f_a : axion decay 定数) となり、 \cos の項が非線形項。ただし、非線形相互作用が効いてこない instability が進行しているだけの領域 ([1] で考える領域) ではポテンシャルは単に massive Klein-Gordon のそれになる。($U \sim \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2$)

⁷この重力波が観測できれば axion に関してのなんらかの情報が得られることが期待される。

⁸場が獲得したエネルギーで axion が生成され続け、その密度がどんどん大きくなっていく。そして、その密度が閾値を超えると場は重力波を放出し、基底状態に落ちる。

⁹逆に (獲得エネルギー) > (放出する重力波のエネルギー) となっていれば、bosenova が起こりうる状態まで場が成長する。

condition

$$0 < \omega < m\Omega_H$$

を満たすときに起こる。(ω : 波動の振動数、 m : 方位量子数、 Ω_H : BH の角速度)

Boyer-Lindquist 座標 (t, r, θ, ϕ) でのメトリックは

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} dt^2 - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \left[\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right] \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2$$

with

$$\Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta \equiv r^2 + a^2 - 2Mr$$

と与えられる。BH 周りの場 Φ を

$$\Phi = \text{Re}[\hat{\Phi}], \quad \hat{\Phi} = e^{-i\omega t} R_{lm}^{\omega\mu}(r) S_{lm}^{\omega\mu}(\theta) e^{im\phi}$$

と変数分離し、massive Klein-Gordon equation $\nabla^2 \Phi - \mu^2 \Phi = 0$ を解くことで、動径方向成分 $R_{lm}^{\omega\mu}(r)$ から振幅が増幅するモード ($|A_{in}| < |A_{out}|$)¹⁰ を取り出すと superradiance condition が導出できる。

2.2 superradiant instability

場に質量がある場合、準束縛状態¹¹で波動は superradiance を繰り返す。この繰り返しにより振幅が $\omega_I > 0$ のとき

$$\Phi \propto e^{-i\omega t} = e^{\omega_I t} \quad (\omega = \omega_R + i\omega_I)$$

と指数増大をするので不安定になる。これを superradiant instability と呼ぶ。superradiance condition によると $R \simeq e^{-i(\omega - m\Omega_H)r^*}$ の時¹² $\omega < m\Omega_H$ が条件だったので、代入して計算すると $R \simeq e^{-i(\omega_R - m\Omega_H)r^* + \omega_I r^*}$ と書けるので、instability の時には $\omega_R < m\Omega_H$ が満たされていることになる。¹³

¹⁰ポテンシャルへ向かう波の振幅 < ポテンシャルから出る波の振幅

¹¹mass の効果により、ポテンシャルはくぼみがあるような形になる。

¹²tortoise coordinate : r^* は $dr^* = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr$ で定義する。

¹³暗に $\omega_R > 0$ を仮定している。axion の質量を μ とすればコンプトン波長がその逆数に対応していることから $\mu \approx \omega$ がわかるので、これが positive であることはわかる

2.3 gravitational radiation

重力波の計算については、out-mode の homogeneous 解として、摂動項 $h_{\mu\nu}$ をモード関数 $u_{\mu\nu}$ でモード展開する。これはソースがゼロとして¹⁴BH に落ちていく mode を境界条件で落としたものである。(superradiance を考えているので、ポテンシャルを超えて落ちていくものは無視する。) この $u_{\mu\nu}$ を使って重力波のエネルギー放出率を求める。

2.3.1 Einstein 方程式の線形化

1. メトリックは background と perturbation に分ける

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu}$$

2. $\psi_{\mu\nu}$ を導入

$$\psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}h^\rho{}_\rho$$

3. ゲージ固定

$$\nabla^\nu \psi_{\mu\nu} = 0$$

以上から Einstein 方程式 $G_{\mu\nu} = 16\pi T_{\mu\nu}$ は

$$\Delta_L \psi_{\mu\nu} = 16\pi T_{\mu\nu}$$

と線形化できる。¹⁵(ここで $\Delta_L \varphi_{\mu\nu} = -\nabla^2 \varphi - 2R_{\mu\nu}{}^\rho{}_\sigma \varphi^{\rho\sigma}$)

2.3.2 out-mode solution

いま示したい不等式

$$\frac{dE_{GW}}{dt} < \frac{dE_a}{dt}$$

の左辺に注目する。重力波の放射は動径方向を追うと、BH に落ちていくもの $dE_{GW}^{(bh)}/dt$ と、光的無限遠に飛んでいくもの $dE_{GW}^{(out)}/dt$ に分けることができる。そして superradiance condition $\omega < m\Omega_H$ を考えれば

$$\frac{dE_{GW}^{(bh)}}{dt} < 0$$

¹⁴ソースは BH 近傍のみで、重力波が伝わっていくのはソースのない真空と考えられるため。

¹⁵ $\Delta_L h_{\mu\nu} = 16\pi (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T^\rho{}_\rho g_{\mu\nu})$ と変形もできる。

となることがわかっているので dE_{GW}/dt は結局

$$\frac{dE_{GW}}{dt} = \frac{dE_{GW}^{(out)}}{dt} + \frac{dE_{GW}^{(bh)}}{dt} < \frac{dE_{GW}^{(out)}}{dt}$$

と変形でき、 $dE_{GW}^{(out)}/dt$ を axion 場のエネルギー獲得率と比較すれば良いことがわかる。

ここで out-mode とは、BH に落ちていくモードを境界条件で落としたもののことで homogeneous 解 ($T_{\mu\nu} = 0$) を考えて

$$\hat{h}_{\mu\nu} = \sum_{\bar{j}} C_{\bar{j}} \hat{u}_{\mu\nu}^{(\bar{j})} \quad @J^+$$

のようにモード展開できる。これより線形化した Einstein 方程式は

$$\Delta_L \hat{u}_{\mu\nu}^{(\bar{j})} = 0$$

となる。

2.3.3 重力波のエネルギー放出率

1. 真空での重力波のエネルギー放出率¹⁶¹⁷

$$\frac{dE_{GW}^{(out)}}{dt} = \frac{1}{32\pi} \int_{r=r_{out}} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \dot{h}_{\mu\nu}^{TT} \dot{h}_{\rho\sigma}^{TT} dS$$

2. この時間平均をとり、モード関数を用いて

$$\left\langle \frac{dE_{GW}^{(out)}}{dt} \right\rangle = \frac{\tilde{\omega}^2}{64\pi} \sum_{\bar{j}} |C_{\bar{j}}|^2 J_{\bar{j}}$$

$$J_{\bar{j}} \equiv \int g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \hat{u}_{\mu\nu}^{(\bar{j})TT} \hat{u}_{\rho\sigma}^{*(\bar{j})TT} dS$$

3. 展開係数の $C_{\bar{j}}$ を求める。

- (a) グリーンの定理、4次元時空のガウスの定理などから

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \left(\hat{u}_{\mu\nu}^{*(\bar{j})TT} \nabla^\rho \hat{h}^{\mu\nu} - \hat{h}^{\mu\nu} \nabla^\rho \hat{u}_{\mu\nu}^{*(\bar{j})TT} \right) n_\rho d\Sigma \\ = -16\pi \int_D \hat{u}_{\mu\nu}^{*(\bar{j})TT} \hat{T}^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \end{aligned}$$

- (b) モード関数とエネルギー運動量テンソルの内積

$$\langle u_{\mu\nu}, T^{\mu\nu} \rangle = \int_D u_{\mu\nu}^* T^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x$$

¹⁶ $r = r_{out}$: ソースのない任意の位置 r

¹⁷ h^{TT} : TT ゲージ。真空なら TT ゲージを取るの簡単でこれは $\nabla^\mu h_{\mu\nu}^{TT} = 0$, $g^{\mu\nu} h_{\mu\nu}^{TT} = 0$ を課したもの。

(c) (a) から

$$-16\pi \left\langle \hat{u}_{\mu\nu}^{(j)TT}, \hat{T}^{\mu\nu} \right\rangle = \int_{r=r_{out}} (\hat{u}_{\mu\nu}^{*(j)TT} \partial_r \hat{h}^{\mu\nu} - \hat{h}^{\mu\nu} \partial_r \hat{u}_{\mu\nu}^{*(j)TT}) dS$$

(d) 展開係数は

$$C_{\tilde{j}} = 8\pi i \frac{\left\langle \hat{u}_{\mu\nu}^{(j)TT}, \hat{T}^{\mu\nu} \right\rangle}{\tilde{\omega} J_{\tilde{j}}}$$

4. 重力波放射率をモード関数と内積で表記

$$\left\langle \frac{dE_{GW}^{(out)}}{dt} \right\rangle = \pi \sum_{\tilde{j}} \frac{\left| \left\langle \hat{u}_{\mu\nu}^{(j)TT}, \hat{T}^{\mu\nu} \right\rangle \right|^2}{J_{\tilde{j}}}$$

よってあとは $u^{(j)}$ (と内積 $\langle u, T \rangle$) がわかればよい。

2.4 モード関数を求める

摂動方程式の解でモード関数を表す。Newman-Penrose quantities¹⁸ ψ_0, ψ_4 が満たす Teukolsky 方程式

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{4Mar}{\Delta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial \phi} \\ & + \left[\frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} - \Delta^{-s} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta^{s+1} \frac{d\psi}{dr} \right) \\ & - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - 2s \left[\frac{a(r-M)}{\Delta} + \frac{i \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right] \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \\ & - 2s \left[\frac{M(r^2 - a^2)}{\Delta} - r - ia \cos \theta \right] \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ & + (s^2 \cot^2 \theta - s) \psi = 0 \end{aligned}$$

を解く。

1. 変数分離 $\psi = e^{-i\tilde{\omega}t} e^{i\tilde{m}\phi} {}_s R_{\tilde{\ell}\tilde{m}}^{\tilde{\omega}}(r) {}_s S_{\tilde{\ell}\tilde{m}}^{\tilde{\omega}}(\theta)$ & 動径方向の式

$$\Delta^{-s} \frac{d}{dr} \left(\Delta^{s+1} \frac{d {}_s R_{\tilde{\ell}\tilde{m}}^{\tilde{\omega}}}{dr} \right) + \left[\frac{\tilde{K}^2 - 2is(r-M)\tilde{K}}{\Delta} + \frac{\lambda}{4s\omega r} \right] {}_s R_{\tilde{\ell}\tilde{m}}^{\tilde{\omega}} = 0$$

where $\tilde{K} = (r^2 + a^2)\tilde{\omega} - a\tilde{m}$, $\lambda = {}_s A_{\tilde{\ell}\tilde{m}} + a^2\tilde{\omega}^2 - 2a\tilde{m}\tilde{\omega}$

¹⁸重力波の情報が入った値

2. 動径方向漸近解

$${}_s R_{\tilde{\ell}\tilde{m}}^{\tilde{\omega}} \sim \begin{cases} e^{i(\tilde{\omega} - \tilde{m}\Omega_H)r_*} & (r_* \rightarrow -\infty) \\ Z_{in} \frac{e^{-i\tilde{\omega}r_*}}{r} + Z_{out} \frac{e^{i\tilde{\omega}r_*}}{r^{2s+1}} & (r_* \rightarrow +\infty) \end{cases}$$

3. モード関数

$$\begin{aligned} \hat{u}_{\mu\nu}(\tilde{\ell}, \tilde{m}, \tilde{\omega}, P) = & (-n_\mu n_\nu \mathcal{A} - m_\mu m_\nu \mathcal{B} + n_{(\mu} m_{\nu)} \mathcal{C}) \\ & + {}_2 R_{\tilde{\ell}\tilde{m}}^{\tilde{\omega}}(r) {}_2 S_{\tilde{\ell}\tilde{m}}^{\tilde{\omega}}(\theta) e^{i\tilde{m}\phi - i\tilde{\omega}t} \\ & + P \left(-n_\mu n_\nu \mathcal{A}^* - m_\mu^* m_\nu^* \mathcal{B}^* + n_{(\mu} m_{\nu)}^* \mathcal{C}^* \right) \\ & + {}_2 R_{\tilde{\ell}\tilde{m}}^{\tilde{\omega}}(r) + {}_2 S_{\tilde{\ell}\tilde{m}}^{\tilde{\omega}}(\theta) e^{i\tilde{m}\phi - i\tilde{\omega}t} \end{aligned}$$

ここで $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ は時空の幾何学で決まる量

以上から不等式を計算する。

3 Results&Conclusion

結果は発表時に紹介。ここでは省略する。

Acknowledgement

本講演に際して、多くの助言をいただいた片桐拓弥さんに感謝いたします。

[1] H. Yoshino & H. Kodama, PTEP **2014**, 043E02 (2014)

[2] H. Kodama & H. Yoshino, Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser. **7**, 84 (2012)

[3] H. Yoshino & H. Kodama, Prog. Theor. Phys. **128**, 153 (2012)

[4] H. Yoshino & H. Kodama, Class. Quant. Grav. **32**, no. 21, 214001 (2015)

$${}_s R_{\tilde{\ell}\tilde{m}}^{\tilde{\omega}} = 0$$

a2

クォーク・ハドロン相転移による背景重
力波への影響

名古屋大学大学院 理学研究科

植田 郁海

クォーク・ハドロン相転移による背景重力波への影響

植田 郁海 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙が誕生して間もない頃にクォーク・ハドロン相転移 (QCD 相転移) が起きたであろうことは広く受け入れられている。QCD 相転移とは、それまで自由粒子として存在していたクォークとグルーオンが、宇宙が冷えていくにつれて陽子などのハドロンを形成し始めることである。しかし、宇宙の進化の過程で相転移が起きたことを示す直接的な証拠は未だ得られておらず、その詳細も十分に理解されていない。QCD 相転移が起きたのは宇宙の晴れ上がり以前なので、重力波でのみ直接観測することができる。そのため、QCD 相転移期間に生み出される重力波を観測することは宇宙の進化の過程で相転移が生じた証拠になるとともに、基礎物理学に対する理解を深める上で重要である。

格子 QCD を用いた相転移の非摂動的な解析により、QCD 相転移中では宇宙の状態方程式パラメータと音速が時間とともに変化することが明らかになっている。この時間変化は重力ポテンシャルの振る舞いを変化させる。その結果、重力ポテンシャルの空間的な揺らぎによって生み出される二次の重力波もその影響を受けるため、QCD 相転移が生じた痕跡を求めることができる。そこで、本研究では状態方程式パラメータの時間変化が二次の重力波のシグナルに与える影響を計算する。これにより将来的な観測に対する制限をつけるとともに、QCD 相転移に対する検証可能性を与えることが期待される。

以下ではクォーク・ハドロン相転移の痕跡が重力波のシグナルに現れることを示すとともに、SKA を用いた将来的な観測での検出可能性を議論する。

1 Introduction

2015 年に重力波検出器 LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) によって初めて重力波が検出されたことで重力波天文学が幕を開けた。重力波には天体由来のものやインフレーション由来の密度揺らぎから放出されるものなどいくつか異なる種類がある。この中でもインフレーション由来の密度揺らぎによって放出される重力波は現在直接観測されていない晴れ上がり以前の宇宙の姿を見る手段として期待されている。

晴れ上がり以前に起きた現象のひとつとして QCD 相転移というものがある。QCD 相転移とは宇宙が十分に高温な時に自由粒子として存在していたクォークが宇宙の冷却とともにグルーオンに束縛され、陽子や中性子などのハドロンを形成し始めることである。この相転移は QCD の理論的な特徴から摂動的に扱うことができず、さらに実験的にも宇宙の状態を再現することが困難なため詳細が明らかになっていない。格子 QCD を用いた非摂動的なシ

ミュレーションでは連続的に滑らかに変化するクロスオーバー型の相転移であることが示唆されている [1]。この結果を用いると宇宙の状態方程式パラメータと音速が時間変化するので重力ポテンシャルの振る舞いにも影響が出る [2, 3]。したがって、重力ポテンシャルの空間的揺らぎによって生み出される二次の重力波もまた相転移の影響を受ける。故にインフレーション由来の密度揺らぎに起因する重力波の観測は晴れ上がり以前の宇宙の歴史を明らかにするだけでなく、地上では詳細を明らかにすることが困難な QCD 相転移についても検証することができるため重要となる。

そこで本研究では格子 QCD による相転移の非摂動的なシミュレーションを行った先行研究の結果を利用し、その痕跡がインフレーション起源の二次の重力波のシグナルにどのように現れるかを数値計算を行うことで調べ、その結果が SKA (Square Kilometer Array) や LISA (Laser Interferometer Space Antenna), DECIGO (Deci-hertz Interferome-

ter Gravitational wave Observatory) などの将来的な観測器で検出可能であるかどうかを議論する。

2 インフレーション由来の二次の重力波

この章では線形摂動の組み合わせで書けるインフレーション由来の二次の重力波について具体的に紹介する。

共形ニュートンゲージを用いると線形摂動の範囲内では宇宙の線素が次のように書ける。

$$ds^2 = a^2(\eta) \left\{ -(1 + 2\Phi)d\eta^2 + \left[(1 - 2\Psi)\delta_{ij} + \frac{1}{2}h_{ij} \right] dx^i dx^j \right\}, \quad (1)$$

ここで $\eta = \int dt/a(t)$ を満たす共形時間と呼ばれるものであり、 $a(\eta)$ はスケール因子と呼ばれる宇宙の大きさを表す量である。また、 Φ, Ψ はそれぞれ重力ポテンシャルと空間の揺らぎを表す一次の摂動項である。今回は非等方応力テンソルを無視できるものとして考え、 $\Phi = \Psi$ が成り立つものと仮定する。アインシュタイン方程式に線素から得られる計量を代入し、テンソル型の揺らぎに注目すると重力波の発展方程式が得られる。

$$h_k'' + 2\mathcal{H}h_k' + k^2 h_k = S(\mathbf{k}, \eta), \quad (2)$$

h_k は重力波の振幅を表しており、 ι は共形時間での微分である。また、 \mathcal{H} は共形時間で表したハッブルパラメータであり $\mathcal{H}(\eta) = a(t)H(t)$ で定義される。右辺の S はソース項と呼ばれ、重力波源を表す。

$$S(\mathbf{k}, \eta) = 4 \int_0^\infty d\tilde{k} \int_{-1}^1 d\mu \tilde{k}^4 (1 - \mu^2) \times f(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}, \eta) \psi_{\mathbf{k}-\tilde{\mathbf{k}}} \psi_{\tilde{\mathbf{k}}}, \quad (3)$$

ただし

$$f(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}, \eta) = \frac{10 + 6\omega}{3(1 + \omega)} \Phi(\tilde{k}\eta) \Phi(|\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}|\eta) + \frac{4(1 + 3\omega)}{3(1 + \omega)} \eta \Phi(\tilde{k}\eta) \Phi'(|\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}|\eta) + \frac{(1 + 3\omega)^2}{3(1 + \omega)} \eta^2 \Phi'(\tilde{k}\eta) \Phi'(|\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}|\eta), \quad (4)$$

ここで、重力ポテンシャル $\Phi_k(\eta)$ をインフレーションによって生成された波数 k の初期揺らぎ $\psi_k(0)$ とその時間発展である遷移関数 $\Phi(k\eta)$ に分けて書いた。

$$\Phi_k(\eta) \equiv \Phi(k\eta) \psi_k(0), \quad (5)$$

また、 ω や c_s は状態方程式パラメータおよび音速と呼ばれる量であり、圧力 p と密度 ρ を用いて $\omega = \frac{p}{\rho}$, $c_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S$ と定義される。この重力波の発展方程式を解くことで重力波の振幅 h_k の一般解がグリーン関数 $g_k(\eta; \tilde{\eta})$ を用いて以下のように表すことができる。

$$h_k(\eta) = \frac{1}{a(\eta)} \int d\tilde{\eta} g_k(\eta; \tilde{\eta}) [a(\tilde{\eta}) \mathcal{S}(\mathbf{k}, \tilde{\eta})], \quad (6)$$

ただしグリーン関数は重力波の伝播を表し、以下の式を満たす。

$$g_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) g_k = \delta(\eta - \tilde{\eta}). \quad (7)$$

一方で、重力波のパワースペクトルは次の式によって定義される。

$$\langle h_k(\eta) h_{\mathbf{k}}(\eta) \rangle = \frac{2\pi^2}{k^3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{K}) P_h(k, \eta). \quad (8)$$

式(3),(4),(6),(8)を用いるとパワースペクトルの具体的な形を求めることができる。

$$P_h(k, \eta) = \int_0^\infty d\tilde{k} \int_{-1}^1 d\mu P(|\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}|) P(\tilde{k}) \mathcal{F}(k, \tilde{k}, \mu; \eta), \quad (9)$$

ただし

$$\mathcal{F}(k, \tilde{k}, \mu; \eta) = \frac{(1 - \mu^2)^2}{a^2(\eta)} \frac{k^3 \tilde{k}^3}{|\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}|^3} \int_0^\eta d\tilde{\eta}_1 d\tilde{\eta}_2 a(\tilde{\eta}_1) \times a(\tilde{\eta}_2) g_k(\eta; \tilde{\eta}_1) g_{\mathbf{k}}(\eta; \tilde{\eta}_2) f(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}, \tilde{\eta}_1) \times \left[f(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}, \tilde{\eta}_2) + f(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}, \tilde{\eta}_2) \right], \quad (10)$$

ここで、 $P(k)$ は初期パワースペクトルであり、初期揺らぎの振幅 A_c を用いて以下のように定義される。

$$P(k) = \frac{4}{9} A_c \left(\frac{k}{k_0} \right)^{n_s - 1}, \quad (11)$$

n_s はスペクトル指数と呼ばれる量であり、 k_0 はスペクトルを決める基準となる波数である。こうして得られるパワースペクトルを用いてエネルギー密度パラメータを次の式で求めることができる。

$$\Omega_{\text{GW}}(k, \eta) = \frac{1}{12} \left(\frac{k}{\mathcal{H}} \right)^2 P_h(k, \eta). \quad (12)$$

3 相転移中の熱力学

QCD 相転移がどのように背景重力波のシグナルに出てくるのかを調べるために、相転移によって宇宙の熱力学的状態がどのように変化するかを調べる。

初期宇宙における粒子のエネルギー密度とエントロピー密度は相対論的速度をもつ粒子の有効自由度と呼ばれる量を用いて次のように書くことができる。

$$\begin{aligned}\rho(T) &= \frac{\pi^2}{30} g_*(T) T^4, \\ s(T) &= \frac{2\pi^2}{45} g_{*s}(T) T^3.\end{aligned}\quad (13)$$

g_*, g_{*s} はそれぞれエネルギーの有効自由度およびエントロピーの有効自由度と呼ばれ、相対論的な粒子の自由度を全粒子種で足し合わせたものである。

$$\begin{aligned}g_* &= \sum_{\text{boson}} g_b \left(\frac{T_b}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{\text{fermion}} g_f \left(\frac{T_f}{T}\right)^4, \\ g_{*s} &= \sum_{\text{boson}} g_b \left(\frac{T_b}{T}\right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{\text{fermion}} g_f \left(\frac{T_f}{T}\right)^3,\end{aligned}\quad (14)$$

ただし、 T は宇宙の典型的な温度である。熱力学第一法則と式 (13) を用いると状態方程式パラメータ ω と音速 c_s を有効自由度を用いて書き換えることができる。

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{4g_{*s}}{3g_*} - 1, \\ c_s^2 &= \frac{4(4g_{*s} + Tg'_{*s})}{3(4g_* + Tg'_*)} - 1.\end{aligned}\quad (15)$$

式 (14), (15) から初期宇宙が熱平衡状態にある場合は $g_* = g_{*s}$ となり $\omega = c_s^2 = \frac{1}{3}$ で一定となることがわかる。通常宇宙論では晴れ上がり以前の宇宙は熱平衡状態であると仮定するため、 ω と c_s の値に変化は起きない。しかし、格子 QCD のシミュレーションによる相転移の非摂動的な解析では図 1 のように相転移期間中に熱平衡状態ではなくなることを示唆されている。

この有効自由度の変化によって相転移中での ω, c_s^2 の振る舞いが平衡状態の時から図 2 で表されるように変化する。

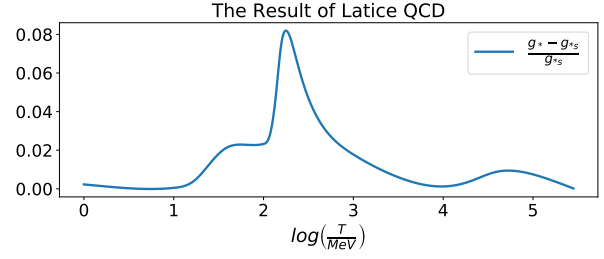


図 1: 相転移中の 2 つの有効自由度の比。縦軸が 2 つの有効自由度の比であり、横軸が温度である。

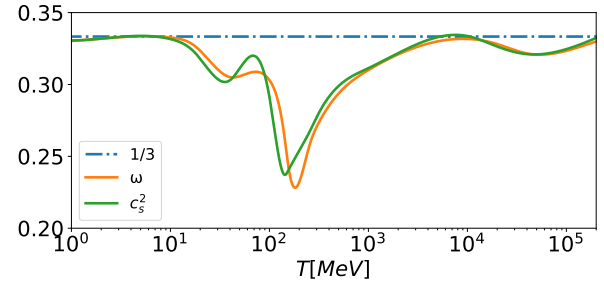


図 2: 状態方程式パラメータと音速の変化。縦軸が ω, c_s^2 であり、横軸が温度である。青い破線は熱平衡状態の時の ω, c_s^2 。緑と黄色の線がそれぞれ非平衡な時の ω, c_s^2 を表す。

4 Results

式 (12) の数値計算を行い、QCD 相転移を考慮した場合とそうでない場合の 2 つを比べたものが図 3 である。相転移の影響を考慮した方が重力波のシグナルが大きくなることからわかる。これは情報の伝達速度である音速の値が相転移中の方が小さくなることで、インフレーション由来の密度揺らぎが高温高密度領域に入った後に揺らぎの情報が相対論的粒子の持つ圧力によって抑圧されるまでに時間を要するようになるためである。

相転移によってどれだけシグナルが増強されたのかを表したのが図 4 である。その変化は図 2 で示唆されている状態方程式パラメータ ω の変化に即していることがわかる。したがって、重力波のシグナルに相転移の痕跡は乗っている。

図 5 は図 3 の数値計算結果を将来的な観測器である SKA や LISA, DECIGO の検出感度と一緒に図示

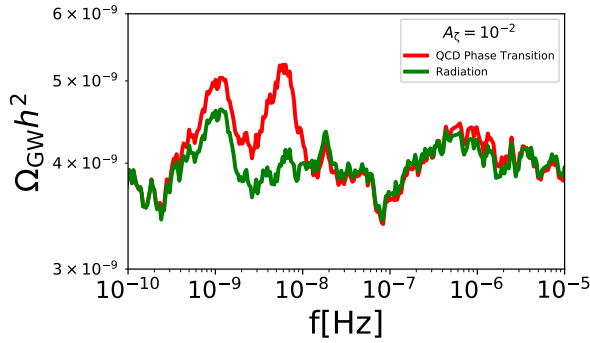


図 3: QCD 相転移による重力波への影響。縦軸はハッブルパラメータの不定性を取り除いた重力波のエネルギー密度パラメータであり、横軸が周波数。初期揺らぎの振幅は $A_\zeta = 10^{-2}$ としている。

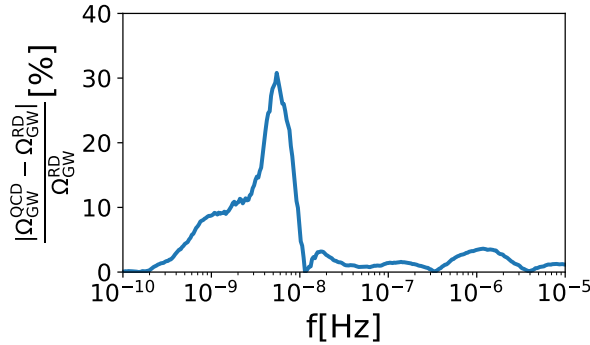


図 4: 相転移によるシグナルの増減。縦軸が増減の絶対値であり、横軸は周波数。

したものである。この結果、QCD 相転移の重力波への影響は SKA ならば観測される可能性があることがわかった。

5 Conclusion

本研究では格子 QCD によるシミュレーション結果を用いて QCD 相転移中に変化する状態方程式パラメータや音速を計算し、その変化がインフレーション由来の二次の重力波のシグナルに与える影響を調べた。その結果、二次の重力波のシグナルに QCD 相転移の痕跡は残り、SKA による将来的な観測で検出される可能性があることがわかった。

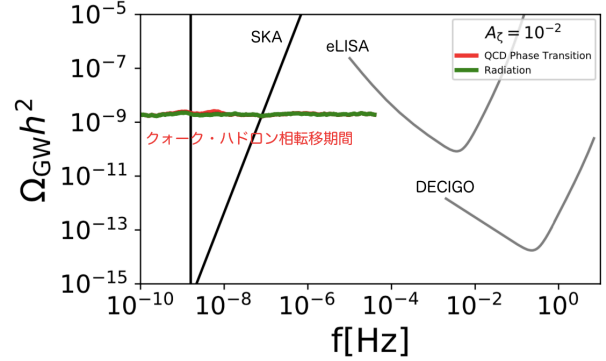


図 5: 重力波の検出可能性

6 Discussion & Future work

インフレーションによって予言されるスケール不変な初期パワースペクトルは CMB の観測により大スケールの近傍宇宙でおよそ $A_\zeta \sim 10^{-9}$ であることがわかっているが、初期宇宙のような小スケールでは観測的な問題から制限がほとんどついていない。このため、初期宇宙では大スケールで観測されている初期パワースペクトルよりも大きな値を持つことが許されており今回は $A_\zeta = 10^{-2}$ を用いている。

今回用いた格子 QCD によるシミュレーション結果は現在考えられている相転移モデルの 1 つでしかない。実際には一次相転移モデルのものや、同じクロスオーバー型でも初期条件が違うものなどモデルは多数存在する。そこで、今後の課題としてはいくつかの相転移モデルで重力波への影響を計算し、それぞれのモデルでシグナルが区別可能であるかを調べていきたい。

Reference

- [1] S. Borsanyi *et al.*, Nature **539**, no. 7627, 69 (2016)
- [2] Byrnes, C. T., Hindmarsh, M., Young, S., et al. 2018, JCAP, 2018, 041
- [3] D. Baumann, P. J. Steinhardt, K. Takahashi and K. Ichiki, Phys. Rev. D **76**, 084019 (2007) doi:10.1103/PhysRevD.76.084019

a3

アクションにおける共鳴不安定性
名古屋大学大学院 理学研究科
福永 颯斗

アクシオンにおける共鳴不安定性

福永 颯斗 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙論において共鳴不安定性は、主にインフレーションからホットビッグバン宇宙への遷移期間である再加熱期に考えられてきた [1]。再加熱期はインフレーションを担うスカラー場であるインフラトンの振動により、共鳴的に他の粒子が生成されると考えられている。一方で、ダークマターの候補の一つであるアクシオンを考えると、再加熱期以降の輻射優勢期にも共鳴不安定がおきることが示唆されている。共鳴不安定によって、一様な場から非一様な場へ効率よくエネルギーが輸送されることから、共鳴不安定は重力波の放出を生み出すための優れた機構とされている。しかし、背景の場が非調和振動をしている場合においては未だ詳しい解析がなされていない。そこで本集録では、まず背景の場が非調和振動をする場合におきる共鳴不安定である Flapping resonance について述べ、背景の場の振動の形式に依存せずに共鳴不安定を特徴付けるパラメータを導入する。この新しいパラメータを用いて最も効率の良い共鳴不安定について述べる。

1 Introduction

宇宙論において共鳴不安定性は再加熱期に考えられてきた。この期間ではインフラトン場のコヒーレントな振動により、他の粒子がサブハッブルスケールに共鳴的に生成される。パラメータ共鳴の効率性や結果的に生じるスペクトルの形状はモデルパラメータに依存している。特に、背景のインフラトン場の振動が調和振動的に示される場合はパラメータ共鳴は Mathieu 方程式で記述される。

近年では、アクシオン宇宙論の観点において輻射優勢期や物質優勢期にもパラメータ共鳴が起きることが示唆されている [2]。アクシオンは典型的に長寿命であるスカラー場であり、振動している期間はダークマターの候補となる。ポテンシャルと初期条件に応じて、アクシオンは効率の良いパラメータ共鳴を引き起こすとされている。

再加熱期における研究から、パラメータ共鳴不安定性は卓越した重力波放出を引き起こす。この過程で一様な場は非一様な空間へと遷移する。また、一般的にアクシオンは自己相互作用を持つ。パラメータ共鳴は自己相互作用から引き起こされるので、輻射優勢期や物質優勢期で振動するアクシオンも重力波放出の起源となりうる。超弦理論から予測されるアクシオンが持ちうる質量の幅は広いとされている。このため様々な質量をもつアクシオンから放出され

る重力波は超弦理論から予言されるアクシオンを調べる新しい窓となる。

膨張宇宙において、典型的に宇宙膨張はパラメータ共鳴を非効率的にする。しかし、アクシオンの振動開始が遅ければ、宇宙膨張に阻害されることなく、効率よくパラメータ共鳴を引き起こす。この場合は背景のアクシオンの運動は調和振動から外れ、摂動の方程式は Mathieu 方程式では記述できなくなる。その代わりに、振動する関数を記述する Hill 方程式を考える必要がある。背景の振動が非調和振動的な結果として、共鳴不安定性は Mathieu 方程式で記述されるものとは異なる。特に [2] では、新しい種類の共鳴不安定性である flapping resonance について着目している。

本集録では、膨張宇宙におけるパラメータ共鳴不安定性を記述する、安定/不安定性図について述べる。Mathieu 方程式における q パラメータを一般化し、新しいパラメータ \tilde{q} を導入する。 \tilde{q} は異なる種類のパラメータ共鳴を分類でき、不安定バンドの幅と成長率を記述することを述べる。

2 Different types of parametric resonance

2.1 Equations

本集録では、一般的なスカラー場 ϕ における共鳴不安定性を調べる。アクシオンにおける応用を考慮に入れた上で、スカラーポテンシャルを $V(\phi) = (mf)^2 \tilde{V}(\tilde{\phi})$, $\tilde{\phi} \equiv \frac{\phi}{f}$ と表記する。ここで、 m, f はそれぞれ ϕ がアクシオンの場合の質量と崩壊定数を意味する。一般的にアクシオンのスカラーポテンシャルは、 $\tilde{V}(\tilde{\phi}) = 1 - \cos \tilde{\phi}$ で表される。一方で dilute instanton gas 近似が破れている場合には、 $|\tilde{\phi}| \geq 1$ において cosine からずれると言われている。例えば、pure natural モデルでは

$$\tilde{V}(\tilde{\phi}) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{(1 + \tilde{\phi}^2/c)^c} \right] \quad (c > 0), \quad (1)$$

で与えられる。これは、 $|\tilde{\phi}| > 1$ で平坦な領域に接続している。

FLRW 宇宙において、スカラー場 ($\tilde{\phi}$) における運動方程式は

$$\frac{\partial^2}{\partial \tilde{t}^2} \tilde{\phi} + 3 \frac{H}{m} \frac{d}{d\tilde{t}} \tilde{\phi} - \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \tilde{\phi}^2} \tilde{\phi} + \tilde{V}_{\tilde{\phi}} = 0, \quad (2)$$

で与えられる。ここで、無次元量 $\tilde{t} \equiv mt$, $\tilde{\mathbf{x}} = m\mathbf{x}$ を用いた。また、 H はハッブルパラメータであり、 a はスケールファクター、 $\tilde{V}_{\tilde{\phi}} \equiv d\tilde{V}/d\tilde{\phi}$ である。簡単のため、スケールファクターは時間の冪乗 ($a \propto t^p$) とすると、ハッブルパラメータは $H/m = p/\tilde{t}$ となる。

一様モードに対しては、場の方程式 (2) は、

$$\frac{d^2}{d\tilde{t}^2} \tilde{\phi} + 3 \frac{H}{m} \frac{d}{d\tilde{t}} \tilde{\phi} + \tilde{V}_{\tilde{\phi}} = 0 \quad (3)$$

となる。まず、二次ポテンシャル ($\tilde{V} = \tilde{\phi}^2/2$) を考える。これは $|\tilde{\phi}| \ll 1$ における、我々の setup に合致する。この場合背景の場の時間発展は二つの段階に分けられる。ハッブルによる摩擦力がポテンシャルの力に優っている場合は ϕ はスローロールする (eg., インフラトン)。逆の場合は、後者が前者を上回り、 $\tilde{\phi}$ は調和振動する。二次ポテンシャルの場合は振動が始まるのは $3H_{\text{osc}} \simeq m$ のときである。

一方で、 \tilde{V} が $|\tilde{\phi}| \geq 1$ において、二次ポテンシャルよりも緩やかな場合、 H_{osc}/m は 1 よりも小さくな

る。宇宙膨張と、ポテンシャルの力が等しくなるときを振動開始と定義すると、

$$\frac{m}{H_{\text{osc}}} \simeq \tilde{t}_{\text{osc}} \simeq \sqrt{\left| \frac{\tilde{\phi}}{\tilde{V}_{\tilde{\phi}}} \right|_{\tilde{\phi}=\tilde{\phi}_i}} \quad (4)$$

となる。後で述べるが、振動開始が遅れると効率の良い共鳴不安定性を引き起こす。

次に、線形摂動 $\delta\tilde{\phi} \equiv \delta\phi/f$ について考える。この時、 $\delta\tilde{\phi}$ の運動方程式は

$$\frac{d^2}{d\tilde{t}^2} \delta\tilde{\phi}_k + 3 \frac{H}{m} \frac{d}{d\tilde{t}} \delta\tilde{\phi}_k + \left(\left(\frac{k}{am} \right)^2 + \tilde{V}_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}} \right) \delta\tilde{\phi}_k = 0 \quad (5)$$

となる。ここで $\delta\tilde{\phi}_k$ は $\delta\tilde{\phi}$ のフーリエモードであり、 $\tilde{V}_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}} \equiv d^2\tilde{V}/d\tilde{\phi}^2$ である。ここで計量の摂動を無視しているが、我々の setup においては、重要な働きはしないため無視している。ここで $\varphi_k \equiv a^{3/2} \delta\tilde{\phi}_k$ を導入すると、(5) 式から一階微分の項が消え、摩擦項のない単振動の方程式になる。ここでこのときの周波数を

$$\omega_k^2 = \left(\frac{k}{am} \right)^2 + \tilde{V}_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}} - \frac{3}{2} \frac{\dot{H}}{m^2} - \frac{9}{4} \left(\frac{H}{m} \right)^2 \quad (6)$$

と定義する。

2.2 Resonance instability

背景の一様モードがポテンシャルの最低値付近で振動を開始すると、パラメータ共鳴が引き起こされる。これにより、一様モードのエネルギーは自己相互作用によって非一様モードに移送される。本節では、flapping resonance を含めた複数の共鳴不安定性について述べる。特に、モード方程式が以下のような、

$$\frac{d^2 \varphi_k(t)}{d\tilde{t}^2} + [A_k - 2q\psi(\tilde{t})] \varphi_k(\tilde{t}) = 0 \quad (7)$$

で記述される場合について考える。ここで $\varphi(\tilde{t})$ は (準) 周期関数である (i.e., 一周期に対しては $\psi(\tilde{t} + T) \simeq \psi(\tilde{t})$ を満たす)。同様に一周期内では A_k, q もほとんど定数である。 φ が完全に周期関数であった場合には、上記の方程式は Hill 方程式と言われる。Hill 方程式は $\psi(\tilde{t})$ が正弦関数であった場合には Mathieu 方程式となる。

$$\frac{d^2 \varphi_k^2(\tilde{t})}{d\tilde{t}^2} + [A_k - 2q \cos 2\tilde{t}] \varphi_k(\tilde{t}) = 0 \quad (8)$$

2.2.1 Parametric resonance for Mathieu equation

ポテンシャルの形と初期条件によって、異なる種類のパラメータ共鳴が起こる。まず、ポテンシャルの形が

$$\tilde{V}(\tilde{\phi}) = \frac{\tilde{\phi}^2}{2} + \frac{\lambda}{4}\tilde{\phi}^4 + \mathcal{O}(\tilde{\phi}^6) \quad (9)$$

で与えられる場合について考える。ただし、 $\lambda < 0$ とし、二次ポテンシャルに対する補正は小さいものと仮定する。このとき、背景の一様モードの運動を $\tilde{\phi}(\tilde{t}) \simeq \tilde{\phi}_* \cos \tilde{t}$ と近似すると、Mathieu 方程式における A_k, q は

$$q = -\frac{3}{4}\lambda\tilde{\phi}_*^2, \quad A_k = \left(\frac{k}{am}\right)^2 - 2q + 1 \quad (10)$$

となる。

ここで、Mathieu 方程式の基本的な性質について述べる。Mathieu 方程式は不安定性を起こすバンドとして、 $A_k \simeq n^2, n = 1, 2, \dots$ を持ち、バンドの幅は $(q/A_k)^n$ である。それゆえ、 q の値を大きくすると、共鳴不安定性は幅広い波数で起こる。このことから $q \gg 1$ のときに起こる共鳴不安定性を broad resonance と呼び、 $q \ll 1$ のときに起こる共鳴不安定性を narrow resonance と呼ぶ。narrow resonance において、主要な不安定性は $n = 1$ のバンドで起こる。この時、成長率 $\tilde{\mu}(\varphi_k \propto e^{\tilde{\mu}\tilde{t}})$ は $\tilde{\mu} = q/2$ である。これが意味するのは、 q の値が大きいとより早く指数関数的成長を導くということである。

2.2.2 Flapping resonance

Flapping resonance は [2] において主張されているが、broad, narrow resonance とは定量的に異なる共鳴不安定性である。この不安定性は振動が変曲点を超えて運動する場合に起こる。この期間では $\tilde{V}_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}}$ の符号が変わるので、(6) 式も符号が変わり、断熱条件が大きく破れる。これは broad resonance が起きる条件と似ているが、broad resonance の場合と異なり、結果として生じるスペクトルにピークが生じる。この機構の詳細は [2] で議論されている。

3 New parameter for classification

3.1 definition

一般的な Hill 方程式における共鳴バンドの構造は、Mathieu 方程式の共鳴バンドに比べると詳しく調べられていない。そこで Hill 方程式によって記述されるパラメータ共鳴の種類を特徴付ける方法について述べる。

Mathieu 方程式における q パラメータが安定/不安定図における共鳴バンドの幅や成長率を表していたことと、 q は (6) 式での振動項の振幅を表していたことから、新しいパラメータとして、

$$q = \sqrt{\frac{\langle(\omega_k^2 - \langle\omega_k^2\rangle)^2\rangle}{2}} (\equiv \tilde{q}) \quad (11)$$

を定義する。これを用いると、パラメータ共鳴は以下のように分類される。

1. $\tilde{q} \gg 1$: Broad resonance
2. $\tilde{q} = \mathcal{O}(1)$: Intermediate resonance
▷ Flapping resonance
3. $\tilde{q} \ll 1$: Narrow resonance

3.2 Stability/ instability chart described by the Hill's equation

Hill 方程式の一般解が

$$\varphi_k(\tilde{t}) = P_1(\tilde{t})e^{\mu_k\tilde{t}} + P_2(\tilde{t})e^{-\mu_k\tilde{t}} \quad (12)$$

で表されることを用いて、成長率を Floquet 解析を用いて計算する。ただし、 $P_i(\tilde{t})(i = 1, 2)$ は周期関数である。図 1 は宇宙膨張を無視した場合において、flapping resonance が起きる場合での、安定/不安定図を表す。図 1 より Mathieu 方程式における安定/不安定図と同様に、ある A_k に対して \tilde{q} を大きくするとバンドの幅は広くなり、成長率も大きくなることがわかる。

一方で宇宙膨張を考慮した上で同様の解析を行う際には、単に μ_k を見るのではなく、成長が宇宙膨張

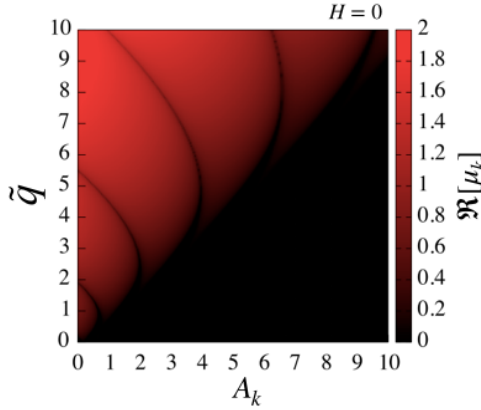


図 1: $\psi(\tilde{t}) = \cos(\tilde{t})$ の場合における、安定/不安定図。ただし、宇宙膨張は無視している。

に比べて十分起こるかどうかを調べなければならない。つまり、十分な成長が起こるためには

$$\Re[\mu_k] \frac{m}{H} \gg 1 \quad (13)$$

を満たさなければならない。

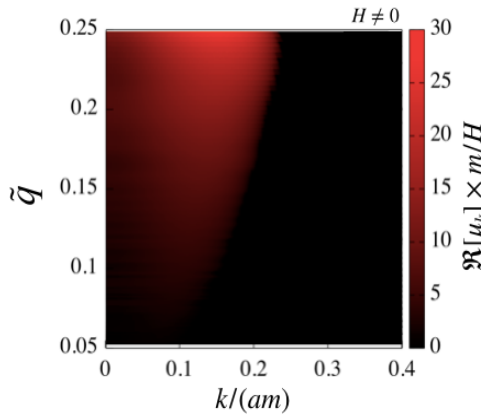


図 2: $\psi(\tilde{t}) \neq \cos(\tilde{t})$ の場合における、安定/不安定図。宇宙膨張を考慮し、色は宇宙膨張に対する成長度合いを記述している。

Mathieu 方程式の安定/不安定図とは異なるが、特徴としては似ており、 \tilde{q} が大きいほど、成長率は大きく、バンド幅は広がっている。ここで narrow resonance と broad resonance とも言えない $\tilde{q} \sim \mathcal{O}(1)$ に位置している共鳴不安定は flapping resonance であり、growth rate の大きさから見て、一番効率の良い共鳴不安定性であることがわかる。

3.2.1 cosine potential

Introduction で述べたように、アクシオンの典型的なポテンシャルは cosine 型をしている。このときに一番効率の良いパラメータ共鳴である flapping resonance が起きるかどうかについて述べる。共鳴不安定性が長く継続するためには振動開始が遅くなければならない ($H_{\text{osc}}/m \ll 1$)。しかし、cosine ポテンシャルの場合は初期条件を調整しても、この値は $\sim \mathcal{O}(0.01)$ にしかならない。このとき flapping resonance は 4 回の振動分しか起きず、十分な成長が見込めない。このことから cosine ポテンシャルにおいては長期間継続する flapping resonance は極端に初期条件を調整しない限り継続しないことが予言される。

4 Conclusion

一般的な Hill 方程式に対して Floquet 解析を行うと、成長率と共鳴バンドの幅は正確に計算可能なパラメータ \tilde{q} によって特徴付けられることがわかった。また flapping resonance は $\tilde{q} = \mathcal{O}(1)$ で起こり、自己共鳴を考えると一番効率の良い共鳴不安定性であると言える。しかし、アクシオンの典型的なポテンシャルである cosine 型の場合には flapping resonance は継続せず、pseudonatural モデルのような平坦な部分が存在する場合に flapping resonance は継続する。本集録で述べていることは、共鳴不安定性に対する定量的な理解をするために線形解析を行ったが、実際には非線形効果が効いてくると、ここまでの解析は適用できなくなる。しかし、線形摂動で生じるスペクトルは \tilde{q} に依存していたため、後に続く非線形のダイナミクスも \tilde{q} に依存すると考えられる。これは後の研究とする。

Reference

- [1] L. Kofan et al. Phys. Rev. D **56**, 3258 (1997)
- [2] N. Kitajima et al. JCAP **1810**, no. 10, 008 (2018)
- [3] H. Fukunaga et al. JCAP **1906**, no. 06, 055 (2019)

a4

Pulsar Timing Array による M87 からの低
周波重力波の制限

熊本大学大学院 自然科学教育部

喜久永 智之介

Pulsar Timing Array による M87 からの低周波重力波の制限

喜久永 智之介 (熊本大学大学院 自然科学教育部)

Abstract

楕円銀河 M87 の中心にある超巨大ブラックホールは、連星を組んでいる可能性が示唆されている。この連星からは $\text{nHz} \sim \mu\text{Hz}$ の低周波重力波が放射されると考えられている。低周波重力波の検出法としては Pulsar Timing Array があり、重力波の検出、あるいは強度へ制限をつけることによりブラックホール連星のモデルの妥当性を評価できる。本研究では、連星の軌道が楕円軌道であると仮定して、放射される重力波の強度を計算した。さらに、NANOGrav により公表された低周波重力波への制限との比較を行なうことにより、ブラックホール連星モデルのパラメータへの制限を与えた。特に、 $e = 0.95$ においては $a = 1\text{pc}$ で $m_2 > 0.6m_1$ となるような SMBH 連星が存在しないことがわかった。

1 Introduction

2017 年の Event Horizon Telescope の観測により、楕円銀河 M87 の中心にある太陽の 6.6×10^9 倍の質量をもつ超巨大ブラックホール (以下、SMBH) が撮像された (Akiyama K. et al. 2019)。この SMBH は地球から 18.4Mpc 離れており、近傍の活動銀河核 (以下、AGN) としてよく研究されている。

Lena D. et al. (2014) では、この AGN と M87 の銀河中心の位置に 1~7pc 程度の顕著な変位が生じていることが報告されている。ここでいう銀河中心とは、銀河バルジの中で最も明るい点を指す。この変位を説明するモデルとして、Yonemaru N. et al. (2016) では主に以下の 2 つのモデルについて議論されている。1 つ目は、AGN の SMBH が銀河中心付近に存在するもう一つの暗い SMBH と連星をなしているモデルである。この場合、連星の重心が銀河中心に対応し、軌道半径が 1pc 以上となる必要がある。2 つ目は、M87 の銀河中心付近に複数の BH が存在し、そのうちのひとつの BH と AGN の SMBH が連星を組むモデルである。この場合には、いくつかの BH と SMBH の重心が銀河中心に対応するので、銀河中心が連星の軌道面内にある必要はなく、連星の軌道半径への制限はない。どちらのモデルでも、SMBH の軌道運動に伴い nHz 以下の低周波重力波が放射される。この重力波の検出、あるいは強度への制限をかけることができれば、これらのモデルの妥当性を評価できると考えられる。この低周波重力波

の検出法として、Pulsar Timing Array (以下、PTA) がある。

パルサーとは、磁極からビーム状の電磁波を放射しながら非常に安定した周期で自転する中性子星である。このビームは地球の方向へ向いたときにのみ検出されるため、地球からはパルサーの自転周期と同じ周期のパルスが観測される。パルス周期の安定性を利用して、パルスの到着時刻を精密に予測できるが、地球とパルサーの間に重力波が存在すると、時空が歪むことでパルスの伝播経路が変化し、パルスの到着時刻も変化する。PTA では、数年~十数年に渡りパルス到着時刻の変化を観測することで、重力波を検出する。この観測期間の逆数が重力波の観測可能周波数に対応している。今のところ低周波重力波の検出に至ってはいないが、今後数年以内に検出できると期待されている。

現在世界で進行中の主な PTA のプロジェクトには北米の North American Nanohertz Observatory for Gravitational waves (NANOGrav)、欧州の European Pulsar Timing Array (EPTA)、豪州の Parkes Pulsar Timing Array (PPTA)、これら 3 つのプロジェクトや他国のプロジェクトのデータを共有して解析を行う International Pulsar Timing Array (IPTA) がある。NANOGrav は、Green Bank Observatory の Green Bank Telescope と Arecibo Observatory の Arecibo Telescope を用いて、45 個のパルサーを 11 年観測したデータを公開している (Arzoumanian Z.

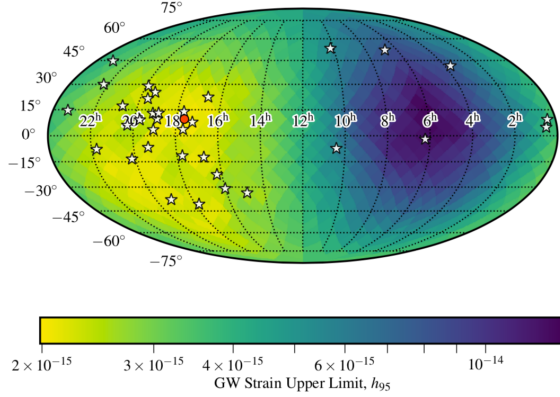


図 1: $f_{\text{gw}} = 8\text{nHz}$ における upper limits (Aggarwal K. et al. 2018)

et al. 2018)。このデータに重力波が含まれている確固たる証拠は得られなかったが、その代わりに、低周波重力波の強度に対して 2 種類の upper limits をかけている (Aggarwal K. et al. 2018)。本研究では、NANOGrav による低周波重力波への制限を用いて、M87 の銀河中心と AGN の変位を説明するモデルへの考察を行う。

2 Methods

モデルの妥当性の評価を行うためには、NANOGrav の解析により得られた SMBH 連星からの重力波への制限と、BH 連星からの重力波強度を比較する必要がある。2.1 節では、NANOGrav による重力波への制限の近似的な表現を与え、2.2 節では楕円軌道の BH 連星からの重力波強度の解析的表現を示す。

2.1 Upper limits

図 1 は、重力波の周波数 f_{gw} が 8nHz のときの信頼度 95 % の upper limits である。M87 は赤経 12 時 30 分、赤緯 +12 度程度に位置しているので、 8nHz における重力波の強度への制限は、大雑把に

$$h_{\text{lim}} \simeq 5.0 \times 10^{-15} \quad (1)$$

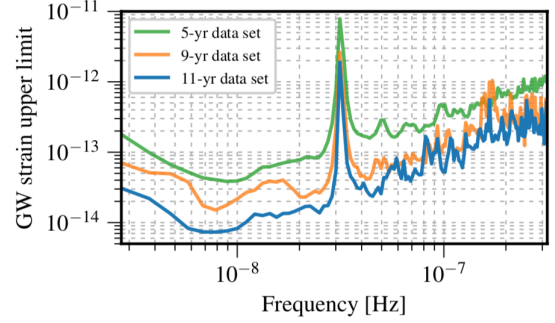


図 2: 天球面上で平均した upper limits (Aggarwal K. et al. 2018)

であると見積れる。

図 2 は、天球面上で平均した重力波の強度への信頼度 95 % の upper limits である。観測期間を t とすると、PTA の低周波側 ($ft \ll 1$) と高周波側 ($ft \gg 1$) の制限は次のように見積れることが知られている (Moore C. J. et al. 2015)。

$$h_{\text{lim}} \propto \begin{cases} f^{-2} & (ft \ll 1) \\ f & (ft \gg 1) \end{cases} \quad (2)$$

図 2 の 11 年データセットの制限曲線を見ると、 6nHz と 10nHz で傾きが変化している。このことと (1)、(2) 式を考慮すると、すべての周波数帯における重力波の強度への制限は

$$h_{\text{lim}} = \begin{cases} 5.0 \times 10^{-15} \left(\frac{f_{\text{gw}}}{6\text{nHz}} \right)^{-2} & (f_{\text{gw}} \leq 6\text{nHz}) \\ 5.0 \times 10^{-15} & (6\text{nHz} < f_{\text{gw}} < 10\text{nHz}) \\ 5.0 \times 10^{-15} \left(\frac{f_{\text{gw}}}{10\text{nHz}} \right) & (10\text{nHz} \leq f_{\text{gw}}) \end{cases} \quad (3)$$

と近似できる。

2.2 Signal model

SMBH 連星は楕円軌道を描くと考えられる。楕円軌道の BH 連星は高調波を含んだ重力波を放射することが知られており、 n 次の高調波の係数は次式で与えられる (Moreno-Garrido C. et al. 1995)。

$$\left| \left(\tilde{h}_\times \right)_n \right|^2 = h_0^2 \cos^2 \Theta \left[\left(\frac{C_n}{2} \right)^2 \sin^2 2\Phi + \left(\frac{S_n}{2} \right)^2 \cos^2 2\Phi \right] \quad (4)$$

$$\left| \left(\tilde{h}_+ \right)_n \right|^2 = h_0^2 \left\{ \frac{\sin^2 \Theta}{4} A_n \left[\frac{\sin^2 \Theta}{4} A_n + \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \Theta) C_n \cos 2\Phi \right] + \left(\frac{1 + \cos^2 \Theta}{2 \cos \Theta} \right)^2 \left| \tilde{h}_\times \left(\Phi + \frac{\pi}{4} \right)_n \right|^2 \right\} \quad (5)$$

ここで、

$$h_0 = \frac{2m_1 m_2}{a(1-e^2)} \frac{2}{R} \quad (6)$$

$$A_n = (1-e^2) J_n(ne) \quad (7)$$

$$S_n = -\frac{(1-e^2)^{3/2}}{e} \frac{2}{n} J'_n(ne) + \frac{(1-e^2)^{5/2}}{e^2} 2n J_n(ne) \quad (8)$$

$$C_n = -\frac{(1-e^2) + (1-e^2)^2}{e^2} J_n(ne) + \frac{(1-e^2)^2}{e} 2J'_n(ne) \quad (9)$$

であり、 $+$, \times は重力波の 2 つの偏光モード、 a は軌道長半径、 e は離心率、 m_1 は AGN の SMBH の質量、 m_2 は伴星となる BH の質量、 $R = 18.4 \text{Mpc}$ は M87 までの距離、 Θ は軌道傾斜角、 Φ は連星の重心から地球へ向かう直線の軌道平面への射影と、重心と近日点を結ぶ線のなす角である (図 3 参照)。また、 J_n は n 次の第 1 種 Bessel 関数である。 $a = 3 \text{pc}$, $m_2 = m_1$, $\Theta = \Phi = 0$ のときの重力波を高調波成分ごとに計算したものが図 4 である。離心率の増加により、高次の高調波成分まで現れることが確認できる。 Θ, Φ は重力波の強度へ大きな影響は与えないため、以下では $\Theta = \Phi = 0$ であるとする。

3 Results

a, e, m_2 を指定すると、図 4 のように重力波の高調波成分を計算できる。 e を指定して各 (a, m_2) に対し

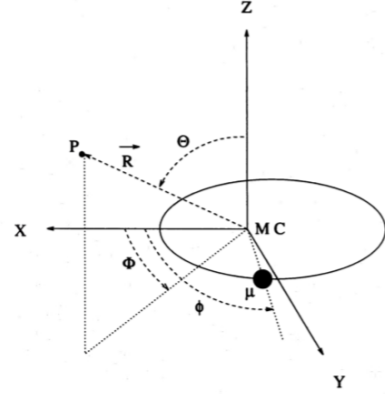


図 3: 連星の重心を原点としたときの観測者と連星の位置関係。MC が重心を表す。(Moreno-Garrido C. et al. 1995)

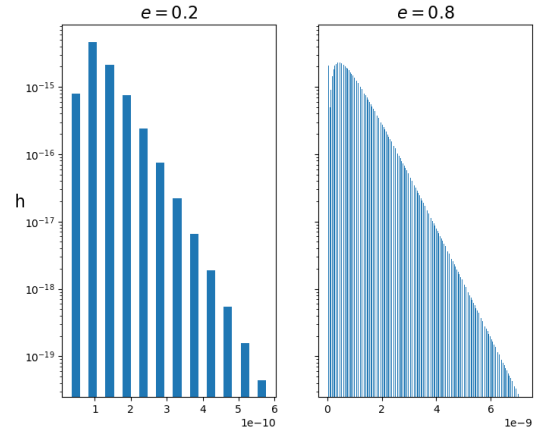


図 4: $a = 3 \text{pc}$, $m_2 = m_1$, $\Theta = \Phi = 0$ における重力波強度の高調波成分を示す。

て高調波成分と (3) 式の比を取り、その最大値をマッピングしたものが図 5 である。値が正の領域は、高調波成分に (3) 式の制限を超えるものがあることを示している。しかし、NANOGrav の解析において低周波重力波は見つかっていないため、このようなパラメータを持つ SMBH 連星は存在しないことがわかる。例えば、 $e = 0.95$ においては $a = 1 \text{pc}$ で $m_2 > 0.6m_1$ となるような SMBH 連星は存在しない。

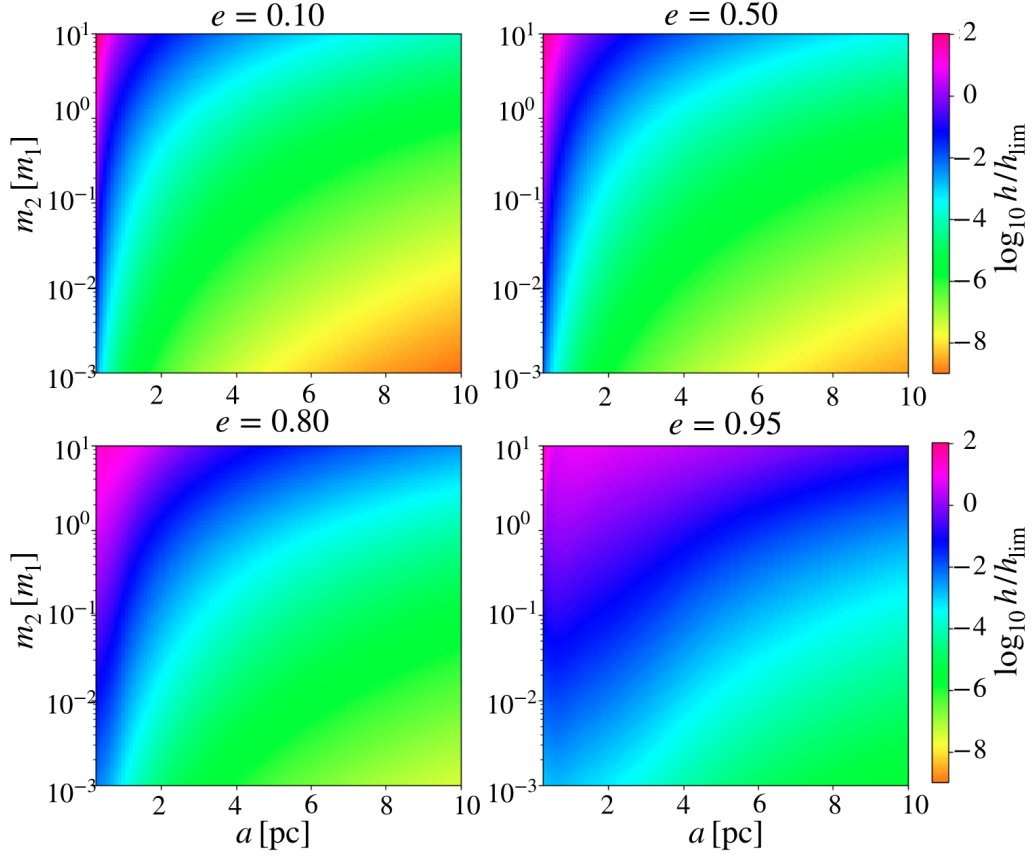


図 5: 重力波の高調波成分と upper limits の比の最大値を示すカラーマップ。横軸の軌道長半径は、 $0.25\text{pc} \leq a \leq 10\text{pc}$ の範囲の値をとる。 $\log_{10} h/h_{\text{lim}}$ の値が正となる領域のようなパラメータをもつ BH 連星は存在しない。

4 Summery and future work

本研究では、M87 の AGN である SMBH が連星を組んでいる可能性に着目し、PTA の観測結果から BH 連星のモデルへ制限を与えた。楕円軌道の BH 連星から放射される重力波の強度を計算し、NANOGrav による制限との比較をすることで、連星のパラメータへ制限を与えた。今回は NANOGrav による制限を 3 つの領域に分けて近似的に計算したが、実際に公開されているデータを用いることでより精密な評価を行えると考えられる。また、PTA の観測は現在も続いている。今後の重力波の検出、もしくはより強い制限をつけた結果の公表により、M87 の BH 連星のモデルへ更なる評価が行えることが期待される。

Reference

- Aggarwal K. et al., 2018, preprint (arXiv:1812.11585)
- Arzoumanian Z. et al., 2018a, ApJS, 235, 37
- Moore C. J. et al., Class. Quantum Grav. 32, 055004(2015).
- Moreno-Garrido C., Buitrago J. and Mediavilla E., Mon. Not. R. Astron. Soc. 274, 115 (1995).
- Akiyama K., et al. 2019, Event Horizon Telescope CollaborationAstrophys. J., 875 (1) (2019),
- Lena D., et al. 2014, ApJ, 795, 146
- Yonemaru N., et al. 2016, PASJ, 68, 106

a5

インフレーション中の量子ゆらぎと原
始ブラックホール
京都大学大学院 理学研究科
高橋 卓弥

インフレーション中の量子ゆらぎと原始ブラックホール

高橋 卓弥 (京都大学大学院 理学研究科)

Abstract

インフレーション中に作られたゆらぎが、ハッブルスケールに再び入るときに振幅が十分大きければ、その領域が直接重力崩壊して原始ブラックホール (PBH) が形成されると考えられている。そのため、PBH を調べることで、インフレーションの情報が得られると期待できる。

本発表では、まず PBH の存在量を評価するにあたって、背景のダイナミクスに対する量子ゆらぎの反作用が大きい場合でも使える、曲率ゆらぎの確率分布関数の計算法を構成する。このとき、摂動論を越えたアプローチとしてストカスティック δN 形式という手法が必要となる。これを用いて、古典極限が適用できる指標を求め、また、量子ゆらぎによる拡散が支配的な時期が、PBH の観測から制限されることをみる。

1 Introduction

インフレーションとは、宇宙初期に急激な加速膨張が起きた時期であり、通常インフラトンと呼ばれるスカラー場によって引き起こされると考えられる。この時のインフラトンの量子ゆらぎが、急激な膨張で引き伸ばされ、宇宙論的なスケールのゆらぎとなり、CMB の非等方性や大規模構造の種になったとして、観測と非常によく合っている。引き伸ばされたゆらぎの波長が、輻射優勢期に再びハッブルスケールに入るとき、そのゆらぎの振幅が十分大きければ、その領域が直接重力崩壊するというシナリオが考えられている。これが原始ブラックホール (PBH) である。これより PBH はインフレーションの情報を持っており、PBH を調べることで、CMB や大規模構造の直接観測からは得られない情報を得ることができる。

PBH の存在量の評価は、PBH が形成されたときの宇宙のエネルギー密度に対する mass fraction, β によって記述される。これは Press-Schechter approach を用いて

$$\beta(M) = 2 \int_{\zeta_c}^{\infty} P(\zeta) d\zeta \quad (1)$$

と見積もることができる。ここで、 M は形成時の PBH の質量、 ζ はハッブルスケールで粗視化された曲率ゆらぎであり、 ζ_c は PBH ができる閾値である。 $P(\zeta)$ は曲率ゆらぎの確率分布関数を表す。PBH は現在観測されておらず、その観測的制限より、 β に

は上からの制限がかかっている。

通常、確率分布関数はガウシアンとして計算され、PBH の制限をインフラトンのポテンシャルへの制限へとつなげられる。しかし、PBH ができるような大きなゆらぎがある場合には、場のダイナミクスにおいて量子ゆらぎによる拡散が無視できなくなり、この近似の妥当性が不明である。そこで、量子ゆらぎの反作用も含めて扱える手法である、ストカスティック δN 形式を用いて確率分布関数を計算する方法を構成する。これを古典極限と統計的極限に用いて、得られる結果について議論する。

2 ストカスティック δN 形式

ここでは、摂動論を越えたアプローチとして今回用いるストカスティック δN 形式について簡潔にまとめる。

2.1 δN 形式

δN 形式とは、長波長モードの曲率ゆらぎを評価する簡便な手法である。まず背景時空として一様等方な FLRW 時空を考える。

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j. \quad (2)$$

これに対してゆらぎを含んだ時空を考える。ここで、長波長のゆらぎ ($k \ll aH$) に注目すると宇宙は局所

的に一様等方にみえると考え (separate universe assumption)。すると時空は

$$ds^2 = -L^2(x)dt^2 + a^2(t)e^{2\psi(x)}\delta_{ij}dx^i dx^j \quad (3)$$

と書ける。このとき、空間の世界線が共動、つまり $dx^i/dt = 0$ となるようにゲージを固定すると、4 元速度 u^μ を用いて局所ハッブルパラメーターは $\tilde{H} = (1/3)\nabla_\mu u^\mu$ で与えられ、初期時刻 t_i から時刻 t までの e-folding 数は

$$N = \int_{t_i}^t \tilde{H} L dt = N_0 + \psi(t, \mathbf{x}) - \psi(t_i, \mathbf{x}) \quad (4)$$

となる。ここで、 $N_0 = \ln(a(t)/a(t_i))$ は背景の e-folding 数である。よって、タイムスライスとして初期時刻では $\psi(t_i) = 0$ の flat slice、時刻 t では密度ゆらぎがゼロの uniform density slice をとれば曲率ゆらぎが

$$\zeta = N - N_0 \equiv \delta N \quad (5)$$

として、e-folding 数のゆらぎそのものとして扱える。

2.2 ストカスティック形式

ストカスティック形式は、量子ゆらぎを古典的な統計ゆらぎとして扱う手法である。まず、次のようにインフラトン場をハッブルスケールで粗視化し、IR モードと UV モードに分ける。

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi_{\text{IR}}(\mathbf{x}) + \phi_{\text{UV}}(\mathbf{x}), \quad (6)$$

$$\phi_{\text{IR}}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \phi_{\mathbf{k}}(t) (1 - \theta(k - \epsilon a H)), \quad (7)$$

$$\phi_{\text{UV}}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \phi_{\mathbf{k}}(t) \theta(k - \epsilon a H). \quad (8)$$

ここで、 $\theta(x)$ は階段関数であり、 ϵ は正の微小定数であり、IR モードの波長がハッブルスケールより十分大きいことを表す。いま、single field の slow roll インフレーションを考えて、IR モードについての運動方程式を書き下すと

$$\frac{d\phi_{\text{IR}}}{dN} = -\frac{V'}{3H^2} + \frac{H}{2\pi}\xi(N) \quad (9)$$

となる。これは古典的な Friedmann 方程式に揺動項にあたる ξ が加わった、Langevin 方程式の形になっ

ている。この揺動項は $\langle \xi(N) \rangle = 0$, $\langle \xi(N)\xi(N') \rangle = \delta(N - N')$ を満たす、統計的な白色雑音である。

物理的には、UV モードの量子ゆらぎが時々刻々とハッブルスケールを越えて、IR モードへと加わっていき、場のダイナミクスにランダム力として寄与する描像となっている。

2.3 ストカスティック δN 形式

ストカスティック形式より、IR モードの場は Langevin 方程式に従って、与えられたポテンシャルに沿った確率過程として時間発展するとみなせる。そこで、まず場の初期値 ϕ_* を設定する。すると場が ϕ_{end} に到達するまでの e-folding 数 \mathcal{N} は確率変数である。したがって、e-folding 数のゆらぎは統計的に記述することができて、 δN 形式と合わせることで、曲率ゆらぎが

$$\zeta = \mathcal{N} - \langle \mathcal{N} \rangle \quad (10)$$

と表せる。

3 確率分布関数の計算

前章で導入した形式を応用して確率分布関数の計算をする。統計量は初期値に依存するが、以下では ϕ_* を単に ϕ と書く。ここで次の事実を用いる。モーメント $f_n(\phi) = \langle \mathcal{N}^n \rangle$ は微分方程式

$$f_n'' - \frac{v'}{v^2} f_n' = -\frac{n}{v M_{\text{pl}}^2} f_{n-1} \quad (11)$$

を満たす [2]。ただし $v \equiv V/24\pi^2 M_{\text{pl}}^4$ であり、 M_{pl} はプランク質量である。

確率分布関数とモーメントを関係づけるために、特性関数 $\chi_{\mathcal{N}}(t, \phi) \equiv \langle e^{it\mathcal{N}(\phi)} \rangle$ を導入する。ここで、 t はダミーパラメーターである。これを Taylor 展開して $\chi_{\mathcal{N}} = \sum_{n=0}^{\infty} (it)^n f_n(\phi)/n!$ と表し、上の微分方程式に代入すると $\chi_{\mathcal{N}}(t, \phi)$ に関する微分方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{v'}{v^2} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{it}{v M_{\text{pl}}^2} \right) \chi_{\mathcal{N}}(t, \phi) = 0 \quad (12)$$

が得られる。曲率ゆらぎの特性関数も同様に定義するとストカスティック δN 形式で得られた関係 (10)

より、 $\zeta = \mathcal{N} - f_1$ であるから、 $\chi_\zeta = e^{-if_1 t} \chi_{\mathcal{N}}$ となる。また、統計平均の定義より

$$\chi_\zeta(t, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\zeta} P(\zeta, \phi) d\zeta \quad (13)$$

であるから、これを Fourier 変換して、曲率ゆらぎの確率分布関数が

$$P(\zeta, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it(\zeta+f_1)} \chi_{\mathcal{N}}(t, \phi) dt \quad (14)$$

と表せる。したがって、微分方程式 (12) を解いて $\chi_{\mathcal{N}}$ を得て、 $f_1 = -i \partial \chi_{\mathcal{N}} / \partial t|_{t=0}$ を計算し、上の表式に代入することで、曲率ゆらぎの確率分布関数が得られる。

4 Result

以上より、曲率ゆらぎの確率分布関数の計算法が構成されたので、そこから得られる結果をまとめる。

4.1 古典極限

まず、量子ゆらぎによる拡散が無視できる古典極限を考える。この極限での leading order (LO) において、式 (12) で拡散項 $\partial^2 / \partial \phi^2$ を落とせばよい。そうして $\chi_{\mathcal{N}}^{\text{LO}}$ を得て、確率分布関数を計算すると $P^{\text{LO}}(\zeta, \phi) = \delta(\zeta)$ となる。これは、ゆらぎの効果を全く入れなかったため妥当な結果である。

次に、next-to-leading order (NLO) として拡散項を $(1/\chi_{\mathcal{N}}^{\text{LO}}) \partial^2 \chi_{\mathcal{N}}^{\text{LO}} / \partial \phi^2$ に置き換えて解いた結果、特性関数は

$$\chi_{\mathcal{N}}^{\text{NLO}}(t, \phi) = \exp(itf_1^{\text{NLO}} - \gamma_1^{\text{NLO}} vt^2) \quad (15)$$

となる。ここで

$$\gamma_1^{\text{NLO}} = \frac{1}{vM_{\text{pl}}^4} \int_{\phi_{\text{end}}}^{\phi} dx \frac{v^4(x)}{v'^3(x)} \quad (16)$$

である。特性関数がガウシアンとなったので、Fourier 変換して得られる確率分布関数もガウシアンとなる。

さらに、next-to-next-to-leading order (NNLO) を考えると、拡散項を $(1/\chi_{\mathcal{N}}^{\text{NLO}}) \partial^2 \chi_{\mathcal{N}}^{\text{NLO}} / \partial \phi^2$ に置き換えて、

$$\chi_{\mathcal{N}}^{\text{NNLO}}(t, \phi) = \exp(-\gamma_1^{\text{NNLO}} vt^2 - i\gamma_2^{\text{NNLO}} v^2 t^3) \quad (17)$$

という形で得られる。よって NNLO で非ガウシアン の補正が得られることになる。

以上より、この古典極限での評価は $|\gamma_1^{\text{NLO}} - \gamma_1^{\text{NNLO}}| \ll \gamma_1^{\text{NLO}}$ であれば適用できる。ポテンシャルの言葉で、これは $|v^2 v'' / v'^2| \ll 1$ のときに満たされる。つまり、 $|v^2 v'' / v'^2|$ が古典的评价が適用できるかどうかの指標を与える。

4.2 統計的極限

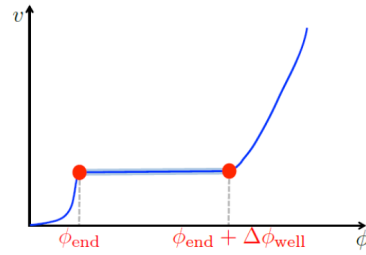


図 1: 量子ゆらぎによる拡散が支配的な時期を表したポテンシャル [1]

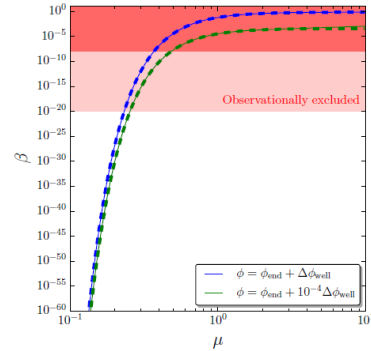


図 2: PBH の存在量と μ の関係 [1]

続いて、反対側の極限である、量子ゆらぎによる拡散が支配的な極限を考える。これは場のダイナミクスに古典的な寄与がない、つまり $v' = 0$ の時期を考えることになる (図 1)。この極限で確率分布関数を求め、式 (1) から PBH の存在量 β を計算した結果が図 2 のようになる。確率分布関数は、量子ゆらぎによる拡散が支配的な時期の幅 $\Delta \phi_{\text{well}}$ の 2 乗とポテ

ンシャルの高さ v_0 の比：

$$\mu^2 = \frac{\Delta\phi_{\text{well}}^2}{v_0 M_{\text{pl}}^2} \quad (18)$$

がパラメーターとして現れる。図 2 の結果において、赤い領域の β は観測的に排除されているので、 $\mu < 0.47$ と制限できる。

一方で、確率分布関数の計算の際に求めた $\chi_{\mathcal{N}}$ から、 $\langle \mathcal{N} \rangle \sim \mu^2$ と見積もることができるので、 μ の制限と合わせて、量子ゆらぎによる拡散が支配的な時期は $\langle \mathcal{N} \rangle < 1$ と結論づけられる。

5 Conclusion

ストカスティック δN 形式を用いることで、背景のダイナミクスに対する量子ゆらぎの反作用が大きい場合でも適用できる、曲率ゆらぎの確率分布関数の計算法を構成した。これを用いて計算した結果、古典極限では、確率分布関数が NLO でガウシアンに回復することを確認し、NNLO で非ガウシアン of 補正が計算できることをみた。また、古典極限が適用できる指標として $|v^2 v''/v'^2|$ を計算すればよいことがわかった。量子ゆらぎによる拡散が支配的な時期は、PBH の観測的制限と比較することで、上限が 1 e-fold 程度であることがわかった。

Acknowledgement

本発表にあたり、議論して下さった京都大学天体核研究室、基礎物理学研究所宇宙グループの皆様、夏の学校の関係者の皆様に感謝いたします。

Reference

- [1] C.Pattison, V.Vennin, H.Assadullahi, & D.Wands, JCAP 1710 (2017), 046
- [2] V.Vennin, & A.A.Starobinsky, Eur. Phys. J. C75 (2015) 413

a6

宇宙の加速器の物理
京都大学大学院 理学研究科
間仁田 侑典

宇宙の加速器の物理

間仁田侑典 (京都大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙初期にはインフレーションとよばれる、宇宙の指数関数的膨張があったと考えられている。インフレーションは 10^{14} GeV を超える可能性がある、地上では到底到達しえない超高エネルギーの物理現象である。そのため、インフレーション由来の初期揺らぎは我々の知らない超高エネルギーの物理の情報を含んでいるだろう。本記事では初期揺らぎの 3 点相関関数から、高エネルギーの物理が抽出できる可能性があることを紹介する。

1 Introduction

宇宙初期にはインフレーションと呼ばれる指数関数的な膨張が存在したと考えられている。インフレーション宇宙論では、指数関数的膨張で生成した揺らぎは現在の宇宙の多種多様な構造物の種となったと考える。

インフレーションは非常に高エネルギーの現象であり、モデルによっては 10^{14} GeV を超える可能性も考えられる。すなわち、インフレーションは近い将来に建設などな地上加速器よりもエネルギーが高い。

インフレーション期には、地上の加速器では捕られないような非常にエネルギーの高い粒子が存在した可能性がある。そこで、本公演ではインフレーション由来の曲率揺らぎ、特に 3 点相関関数から新粒子の情報を取り出す方法を議論する。

インフレーションには様々なモデルが提案されているが、新粒子探査を目的とする場合、特定のポテンシャルや運動項を用いた議論は好ましくない。なぜなら、ポテンシャル依存の議論しかなければ、新粒子の兆候を示すようなシグナルが現れた時に、それが新粒子由来なのか、ポテンシャルの形由来なのか区別できないからである。そこで、具体的なポテンシャルによらずインフレーション理論を構築する方法であるインフレーションの有効場理論を導入する。そのために、まず第 2 章で低エネルギー有効場理論を紹介するため J. Polchinski (1992) をレビューする。次に、第 3 章で単一場インフレーションの低エネルギー有効場理論の紹介として C. Cheung et al. (2008) をレビューする。第 4 章では前章の理論を準単一場イン

フレーションに拡張し、第 5 章で 3 点相関関数を計算する。第 4, 5 章は T. Noumi et al. (2013) のレビューである。

2 低エネルギー有効場理論

まず、低エネルギー有効場の理論の一般論を紹介する。系に特徴的なエネルギー E_0 に対し、着目するエネルギー E が十分小さいときの場合 ϕ のふるまいを考える。 E_0 に対して少し小さな値のカットオフパラメーター Λ を導入し、周波数の大小で、 ϕ を

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_L + \phi_H, \\ \phi_H &: \omega > \Lambda, \\ \phi_L &: \omega < \Lambda,\end{aligned}\tag{1}$$

と分解する。経路積分表示へ移行し、高エネルギー側を積分して、

$$\int \mathcal{D}\phi_L \mathcal{D}\phi_H e^{iS(\phi_L, \phi_H)} = \int \mathcal{D}\phi_L e^{iS_\Lambda(\phi_L)}.\tag{2}$$

ここで、 $S_\Lambda(\phi_L, \phi_H)$ は、

$$e^{iS_\Lambda(\phi_L)} := \int \mathcal{D}\phi_H e^{iS(\phi_L, \phi_H)},\tag{3}$$

によりを定義された汎関数で低エネルギー有効作用という。

低エネルギー有効作用はまた、ある対称性を仮定し、それを満たす全てのオペレーター \mathcal{O}_i の和によって、

$$S_\Lambda = \int d^D x \sum_i g_i \mathcal{O}_i,\tag{4}$$

と表せる. ここで, g_i は結合定数を表し, D は時空の次元を表す.

次元解析を用いて各項の大きさを見積もる. $c = 1, h = 1$ の単位系では \mathcal{O}_i は E^{δ_i} の次元を持つ. そこで, \mathcal{O}_i の積分を, 着目する系のエネルギーの大きさ E を用いて,

$$\int d^3x \mathcal{O}_i \sim E^{\delta_i - D}, \quad (5)$$

と評価できる. この単位系では作用は無次元量なので, 各項の結合定数 g_i は次元 $E^{D - \delta_i}$ を持つ. そこで, 無次元化された結合定数 λ を

$$g_i = \Lambda^{-\delta_i}, \quad (6)$$

により定義すると, 低エネルギー有効作用の \mathcal{O}_i を含む項の大きさは,

$$\lambda_i \left(\frac{E}{\Lambda} \right)^{\delta_i}, \quad (7)$$

と見積もられる. これは, 低エネルギー極限 $E \rightarrow 0$ において $\delta_i < D$ の項は成長し, $\delta_i > D$ の項は減少することを意味する. したがって, 低エネルギー側では質量次元が $\delta_i > D$ のオペレーターの寄与は小さくなる期待できる.

そこで, 見たい精度に応じて適当な質量次元のオペレーターのみを残し, より大きな質量次元のオペレーターを無視するという戦略をとることで, 低エネルギーの物理を抽出することができる. まとめると, 低エネルギー有効場の理論は, ある対称性をみたくオペレーターで, 適当な質量次元以下のもの全ての和により構成された作用により議論される理論である.

低エネルギー有効場理論の 1 つの帰結として, 一般に質量の大きな粒子との結合は十分低エネルギーでは無視できることが知られており, 脱結合とよばれる.

3 単一場インフレーション理論の低エネルギー有効場理論

低エネルギー有効場理論のインフレーションへの応用を紹介する. 観測より宇宙は大局的なスケールでほぼ一様等方であるため, インフレーションはたと

え因果的に結びついていない場所でもほぼ同時に終了したと推測される. 因果律の問題を避けるためには初めから各点にインフレーション終了までの時間を図る時計が備わっていることが必要である. すなわち, インフレーション理論では場が必要で, これをインフラトン場とよぶ. もっとも単純なインフラトン場として実スカラー場 $\phi(x)$ を考える.

インフレーションが終了することから $\dot{\phi} \neq 0$ であるが, これは理論が時間方向の一般座標変換に対する不変性を持たないことを意味する. これは自発的対称性の破れであり massless ボゾン (南部-Goldstone ボゾン) の存在を示唆する.¹

前節で導入した低エネルギー有効作用の構成法に従い, 空間方向の一般座標変換に不変な作用を構築する. 破れずに残った対称性は空間方向の一般座標変換に対する不変性である. この時, ユニタリゲージと呼ばれる座標を導入すると見通しの良い議論を行うことができる. ユニタリゲージとは, タイムスライス $\phi = \text{const.}$ 面で定める座標である. ユニタリゲージの下で, 低エネルギー有効作用は, 以下の”材料”を縮約して得られるスカラー量により構成される.

1. 計量 $g_{\mu\nu}, g^{\mu\nu}$
 2. Riemann 曲率テンソル $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$ とその共変微分
 3. t とその微分 δ_μ^0
 4. $t = \text{一定面上}$ の外的曲率 $K_{\mu\nu}$ とその共変微分
- 外的曲率 $K_{\mu\nu}$ は t の 2 階微分の情報の全てを含む. 低エネルギー有効作用は,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} F(R_{\mu\nu\rho\sigma}, g^{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, \delta_\mu^0, K_{\mu\nu}, \nabla_\mu, t). \quad (8)$$

FRW 背景周りでの摂動論を考える. 摂動の次数毎に, 質量次元の低いオペレーターを並べる. 摂動の 1 次までの低エネルギー有効作用は,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} M_{\text{Pl}}^2 R + c_1(t) g^{00} + c_2(t) + F^{(2)}(\delta g^{00}, \delta K_{\mu\nu}, \delta R_{\mu\nu\rho\sigma}; \delta_\mu^0, g_{\mu\nu}, g^{\mu\nu}, \nabla_\mu, t) \right]. \quad (9)$$

¹Lorentz 対称性が破れているため, 南部-Goldstone の定理をそのまま適用することはできない. 再考の必要がある.

任意関数として導入した $c_1(t), c_2(t)$ は背景の運動方程式から,

$$c_1(t) = M_{\text{Pl}}^2 \dot{H}, \quad (10)$$

$$c_2(t) = -M_{\text{Pl}}^2 (3H^2(t) + \dot{H}(t)), \quad (11)$$

と定まる.

これまでユニタリゲージで議論してきたが, 一般の座標に移るには時間方向の一般座標変換 $t \rightarrow t - \pi(\vec{t}, \mathbf{x})$ を行うだけでよい.

$$\begin{aligned} H(t) &\rightarrow H(t + \pi), \\ g^{00} &\rightarrow (1 + \dot{\pi})^2 g^{00} + 2(1 + \dot{\pi})g^{0i} \partial_i \pi + g^{ij} \partial_i \pi \partial_j \pi, \end{aligned} \quad (12)$$

などにより,

$$\begin{aligned} S = \int d^4 x a^3 &\left[M_{\text{Pl}} R - M_{\text{Pl}}^2 (3H^2(t + \pi) + \dot{H}(t + \pi)) \right. \\ &+ M_{\text{Pl}}^2 \dot{H}(t + \pi) ((1 + \dot{\pi})^2 g^{00} + 2(1 + \dot{\pi}) \partial_i \pi g^{0i} \\ &\left. + g^{ij} \partial_i \pi \partial_j \pi) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

\dots は摂動の 2 次以上の項を表す. 結果として, π とグラビトンの結合項が現れる. leading 項は,

$$\sim M_{\text{Pl}}^2 \dot{H} \dot{\pi} \delta g^{00}, \quad (14)$$

であるが, 実は低エネルギーでは低エネルギーでは脱結合により無視できる. カノニカル化 ($\pi_c \sim M_{\text{Pl}} \dot{H}^{1/2} \pi, \delta g_c^{00} \sim M_{\text{Pl}} \delta g^{00}$) すると, この項は $E_{\text{mix}} \sim \epsilon^{1/2} H$ 以上のエネルギーで無視できることがわかる. ただし, $\epsilon = -\dot{H}/H$ は通常のスローロールパラメタである. このように脱結合極限を取ること

$$S = \int d^4 x a^3 \left[\frac{1}{2} M_{\text{Pl}}^2 R - M_{\text{Pl}}^2 \dot{H} \left(\dot{\pi}^2 - \frac{(\partial_i \pi)^2}{a^2} \right) + \dots \right] \dot{S}_{\text{mix}}^{(2)} = \int d^4 x a^3 \left[(-2\beta_1 + \dot{\beta}_3) \dot{\pi} \sigma + (2\beta_2 - \beta_3) \dot{\pi} \dot{\sigma} \right. \\ \left. + \beta_3 \frac{\partial_i \pi \partial_i \sigma}{a^2} - 3\dot{H} \beta_3 \pi \sigma + \dots \right], \quad (15)$$

π を導入する優位性は脱結合極限により計算が簡単になるところにある.

一度 π を導入できれば後はどの座標で計算しても同じ結果を与えるので, 計算が簡単な座標へ変換する. 変換先の座標として曲率揺らぎ $\zeta = 0$ となるものを選ぶと, 元の座標の曲率揺らぎ ζ と, 新たな座標の π の関係,

$$\zeta \simeq -H\pi, \quad (16)$$

を得る. これは, π の n 点相関関数に $(-H)^n$ を掛けると ζ の n 点相関関数を得ることを意味する.

4 準単一場インフレーションの低エネルギー有効理論

インフラトンの他に Hubble パラメタ程度の質量を持つスカラー粒子が 1 つ存在する場合を考える. このモデルは準単一場インフレーションよばれる. 前章と同様にして準単一場インフレーションモデルの低エネルギー有効作用を求める.

$$S = S_{\text{grav}} + S_{\sigma}^{(2)} + S_{\text{mix}}^{(2)} + S_{\sigma}^{(3)} + S_{\text{mix}}^{(3)} + \dots \quad (17)$$

$S_{\sigma}^{(2)}, S_{\sigma}^{(3)}, S_{\text{mix}}^{(2)}, S_{\text{mix}}^{(3)}$ はそれぞれ, σ の 2 次の項と 3 次の項, σ と π の結合の 2 次の項と 3 次の項を表す. \dots は摂動の 4 次以上の項を表す. 脱結合極限では,

$$\begin{aligned} S_{\text{grav}} = \int d^4 x a^3 &\left[-\frac{M_{\text{Pl}}^2 \dot{H}}{c_{\pi}^2} \left(\dot{\pi}^2 - c_{\pi}^2 \frac{(\partial_i \pi)^2}{a^2} \right) \right. \\ &\left. - M_{\text{Pl}}^2 \dot{H} (c_{\pi}^{-2} - 1) \left(\dot{\pi}^3 - \dot{\pi} \frac{(\partial_i \pi)^2}{a^2} \right) + \dots \right], \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} S_{\sigma}^{(2)} = \int d^4 x a^3 &\left[\frac{\alpha_{\sigma}^2}{2} \left(\dot{\sigma}^2 - c_{\sigma}^2 \frac{(\partial_i \sigma)^2}{a^2} - \frac{\alpha_3 - 3H\alpha_4 - \dot{\alpha}_4}{\alpha_{\sigma}^2} \sigma^2 \right) \right. \\ &\left. + \alpha_{\sigma}^2 (1 - c_{\sigma}^2) \left(\dot{\pi} \dot{\sigma}^2 - \dot{\sigma} \frac{(\partial_i \pi \partial_i \sigma)}{a^2} \right) + \dots \right], \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_{\text{mix}}^{(2)} = \int d^4 x a^3 &\left[(-2\beta_1 + \dot{\beta}_3) \dot{\pi} \sigma + (2\beta_2 - \beta_3) \dot{\pi} \dot{\sigma} \right. \\ &\left. + \beta_3 \frac{\partial_i \pi \partial_i \sigma}{a^2} - 3\dot{H} \beta_3 \pi \sigma + \dots \right], \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} S_{\sigma}^{(3)} = \int d^4 x a^3 &\left[\left(\gamma_1 + H\gamma_2 + \frac{1}{3}\dot{\gamma}_2 \right) \sigma^3 \right. \\ &+ (\gamma_3 - \gamma_5) \sigma \dot{\sigma}^2 + (-\gamma_4 + \gamma_6) \dot{\sigma}^3 \\ &\left. + \gamma_5 \sigma \frac{(\partial_i \sigma)^2}{a^2} - \gamma_6 \dot{\sigma} \frac{(\partial_i \sigma)^2}{a^2} \right], \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
 S_{\text{mix}}^{(3)} = & \int d^4x a^3 [-2\bar{\gamma}_1 \dot{\pi} \sigma^2 + 2\bar{\gamma}_2 \dot{\pi} \sigma \dot{\sigma} \\
 & + 2(-\bar{\gamma}_3 + \bar{\gamma}_5) \dot{\pi} \dot{\sigma}^2 - 2\bar{\gamma}_4 \ddot{\pi} \sigma \dot{\sigma} \\
 & - 2\bar{\gamma}_5 \dot{\pi} \frac{(\partial_i \sigma)^2}{a^2} + 4\bar{\gamma}_6 \dot{\pi}^2 \sigma - 4\bar{\gamma}_7 \dot{\pi}^2 \dot{\sigma}]. \quad (22)
 \end{aligned}$$

$M_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \bar{\gamma}_i (i = 1, 2, 3, \dots)$ は結合定数.²

$$\begin{aligned}
 c_\pi^2 & := \frac{\dot{H} M_{\text{Pl}}^2}{\dot{H} M_{\text{Pl}}^2 - 2M_2^4}, \\
 c_\sigma^2 & := \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}, \\
 \alpha_\sigma & := \alpha_1 + \alpha_2.
 \end{aligned}$$

5 3点相関関数

準単一場インフレーションの一般的な作用が得られた。ここで、相互作用描像へ移行するためハミルトニアンを計算する。 π, σ の運動項と質量項に対応するハミルトニアンを自由場のハミルトニアン H_{free} とする。それ以外の項に対応するハミルトニアンを相互作用ハミルトニアン H_{int} とする。³in-in 形式と呼ばれる方法で 3 点相関関数を計算する。

$$\begin{aligned}
 & \langle \zeta_{\mathbf{k}_1} \zeta_{\mathbf{k}_2} \zeta_{\mathbf{k}_3} \rangle \\
 & = -H^3 \langle \pi_{\mathbf{k}_1}(t) \pi_{\mathbf{k}_2}(t) \pi_{\mathbf{k}_3}(t) \rangle \\
 & = -H^3 \langle 0 | \bar{\text{T}}\text{Exp} \left[i \int_{-\infty}^t dt' H_{\text{int}}(t') \right] \right. \\
 & \quad \times \pi_{\mathbf{k}_1}(t) \pi_{\mathbf{k}_2}(t) \pi_{\mathbf{k}_3}(t) \\
 & \quad \left. \times \bar{\text{T}}\text{Exp} \left[-i \int_{-\infty}^t dt' H_{\text{int}}(t') \right] | 0 \rangle. \quad (23)
 \end{aligned}$$

真空 $|0\rangle$ は H_{free} により定まる真空とする。また、 t は horizon crossing time とする。

3 点相関関数の squeezed limit を。Squeezed limit とは、 $\kappa := k_3/k_1 = k_3/k_2 = k_3/k$ を 0 にする極限である。ただし、 $k := k_1 = k_2$ 。

曲率揺らぎの 3 点相関関数から運動量依存性を引

き出すと, squeezed limit では,

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\kappa := k_3/k_1 = k_3/k_2 \rightarrow 0} \langle \zeta_{\mathbf{k}_1} \zeta_{\mathbf{k}_2} \zeta_{\mathbf{k}_3} \rangle \\
 & \propto \begin{cases} \kappa^{-3/2-\nu} k^{-6} & \text{for } m_\sigma < \frac{3}{2}H \\ \kappa^{-3/2} k^{-6} \sin [i\nu \log \kappa + \delta_\nu] & \text{for } m_\sigma > \frac{3}{2}H \end{cases}. \quad (24)
 \end{aligned}$$

ただし、 $m_\sigma := (\alpha_3 - 3H\alpha_4 - \dot{\alpha}_4/\alpha_\sigma^2)^{1/2}$ は σ の質量、 δ_ν は位相因子である。また ν は,

$$\nu := \left(\frac{9}{4} - \frac{m_\sigma^2}{H^2} \right)^{1/2} \quad (25)$$

と定義される定数である。(24) は 3 点相関関数の squeezed limit で κ 依存性に着目すると σ の質量が読み取れることがわかる。

6 Conclusion

インフレーションの低エネルギー有効場理論を考えることで、具体的な運動項やポテンシャルによらないインフレーション理論を構築した。インフレーションの低エネルギー有効場の理論を準単一場インフレーションモデルに適用して、3 点相関関数の計算を行った。特に 3 点相関関数の squeezed limit の運動量依存性から σ の質量が読み取れることがわかった。これは、もしインフレーション中に新たな massive スカラー粒子が存在した場合、3 点相関関数の解析から新粒子の質量を読み取れる可能性を示唆する。

Reference

- J. Polchinski, arXiv:hep-th/9210046.
- C. Cheung, A. L. Fitzpatrick, J. Kaplan, L. Senatore & C. Creminelli:JHEP **0803** (2008) 014.
- T. Noumi, M. Yamaguchi & D. Yokoyama:JHEP **06** (2013) 051.
- S. Mukohyama, 日本物理学会誌 Vol. 67, No. 2, 2012.

²正確には t の関数。

³摂動論で計算するために $\beta_i, \gamma_i, \bar{\gamma}_i \ll 1$ を仮定する。

a7

Non Bunch-Davies 真空における単一スカラー場インフレーションモデルの観測量の推定

名古屋大学大学院 理学研究科

村上 広椰

Non Bunch-Davies 真空における単一スカラー場インフレーションモデルの観測量の推定

村上 広椰 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

インフレーション理論はビッグバン理論の抱える問題を解決するために生まれた理論であり、多様なモデルが存在する。その中でも最も単純なモデルとして、単一スカラー場インフレーションモデルがある。インフレーションモデルを特徴付ける観測量として、テンソル・スカラー比 r と非ガウス性パラメータ f_{NL} に着目する。ここでテンソル・スカラー比とは、テンソル型の揺らぎ (初期重力波を生む時空の揺らぎ) とスカラー型の揺らぎ (曲率揺らぎと呼ばれる揺らぎで、密度揺らぎの起源となる) それぞれの二点相関関数の大きさの比に対応する量で、非ガウス性パラメータ f_{NL} はインフレーション期につくられる初期揺らぎの三点相関の大きさを表す量である。このモデルでは r はスローロールパラメーター ϵ を用いて理論的に $r = 16\epsilon$ で表され、実際の CMB 観測では、その値は $r < 0.07$ ($\Rightarrow \epsilon < 0.07/16$) に制限されている。また、 f_{NL} は無視できるほど小さな値となる。

上述のテンソル・スカラー比とスローロールパラメーターの関係や f_{NL} の大きさを求める際には、曲がった時空において不定性を持つ真空について、Bunch-Davies 真空と呼ばれる小スケール極限で平坦時空の真空と一致するよう定義された真空を仮定しそれを初期状態とするが、今回は初期状態としてそこから励起された状態を考える。本発表では参考文献 Brahma, & Hossain(2019) 及び Ashoorioon(2019) のレビューとして、初期状態の変更がテンソル・スカラー比や f_{NL} に与える影響について議論する。さらに近年の Planck による制限との比較を行い、string swampland conjecture と呼ばれる弦理論の予言との整合性についても紹介する。

1 Introduction

インフレーション理論は宇宙初期における空間の急激な膨張を仮定してビッグバン宇宙論の不自然な点 (地平線問題、平坦性問題など) を説明する。この理論の仮定は空間の加速膨張のみであり、理論的自由度はとても大きい。Planck 衛星の宇宙マイクロ波背景放射の観測などによりインフレーションモデルに対してはある程度の制限が得られている。特に単純なモデルとして、単一のスカラー場が引き起こすインフレーションモデルに関してポテンシャルの形などについてどのようなモデルが観測と整合するのか広く議論されてきた。

観測と理論モデルが整合するかどうか調べるために用いることのできる観測量の例として、テンソル・スカラー比 r が挙げられる。テンソル・スカラー比はテンソル型の揺らぎ (重力波に対応) のパワースペク

トル (揺らぎの二点相関をフーリエ空間で見たもの) とスカラー型の揺らぎ (密度揺らぎに対応) のパワースペクトルの比をとったものである。この r は、一般的な単一スカラー場モデルにおいてその理論値が $r = 16\epsilon$ となっている。ここで、 ϵ はスカラー場のポテンシャルの勾配の大きさによって決まるパラメーターで、スローロール・パラメーターと呼ばれる。一方で Planck の観測によると $r < 0.07$ という制限があり、単一スカラー場モデルが有効であるためには ϵ は十分に小さい量である必要がある。

しかし、近年議論されている swampland conjecture と呼ばれる弦理論の予言によると、単一スカラー場のポテンシャルの勾配はあまり小さくなることができず、少なくとも $\epsilon > 1/2$ であるとされる。そのため仮に swampland conjecture が正しかった場合、理論値は $r > 8$ となり、単一スカラー場モデルは棄却されてしまう。

本研究では、よく議論がなされている単一スカラー場モデルの棄却を回避するために、インフレーションモデルそのものの変更はせず、前提に仮定されている条件、具体的にはスカラー型揺らぎの初期状態を変えた場合にモデルが受ける影響について議論し、テンソル・スカラー比が観測に合うような条件を考える。また、他の観測量への影響も調べるために、非ガウス性(三点相関の大きさ)の指標となる量 f_{NL} についても議論を行う。

2 Methods

本章ではまず、場の運動方程式を解くことによって得られる揺らぎのモード関数の具体的な形を与え、初期状態の変更とは具体的にどのような操作であるかを紹介する。さらに、モード関数からどのようにパワースペクトル、および f_{NL} が与えられるかを示す。

2.1 揺らぎのモード関数と真空の定義

単一スカラー場インフレーションモデルにおいて、スカラー型の揺らぎについてのモード関数は次のようになることが示されている (Chen(2010))。

$$u(k, \tau) = C_+ \frac{H}{\sqrt{4\epsilon k}} (1 + ik\tau) e^{-ik\tau} + C_- \frac{H}{\sqrt{4\epsilon k}} (1 - ik\tau) e^{ik\tau}, \quad (1)$$

ここで、 H はハッブルパラメーターで、空間の膨張を表すスケールファクター $a(t)$ を用いて $H = \dot{a}(t)/a(t)$ で定義される (ただし、 $\dot{}$ は時間変数 t による微分)。また τ は共形時間と呼ばれる時間変数で、 $\tau \equiv \int 1/ad\tau \sim 1/aH + \mathcal{O}(\epsilon)$ である。

モード関数の係数 C_+, C_- は時間に依存しない複素定数で、モード関数の従う微分方程式の性質から、以下の関係を満たしている必要がある。

$$|C_+|^2 - |C_-|^2 = 1, \quad (2)$$

このようにモード関数には不定性があり、未定の係数は観測者が手で与える必要がある。係数の与え方として一般的に用いられているのが、小スケール極限で平坦時空のモード関数と一致するように係数を選んだ

Bunch-Davies 真空と呼ばれるもので、その係数は次のように与えられる (N. Birrel & P. Davies(1982))。

$$C_+ = 1, \quad C_- = 0, \quad (3)$$

インフレーションモデルについて物理量を計算する際には一般にこの Bunch-Davies 真空が初期状態として仮定されるが、本研究では C_+, C_- を変えたもの (Non Bunch-Davies, 励起されたエネルギー状態を初期状態とすることに対応) について考える。

2.2 スカラー型揺らぎのパワースペクトルとテンソル・スカラー比

パワースペクトルとは、実空間での二点相関関数をフーリエ空間上で見た量であり、スカラー型揺らぎに関して前節に導入したモード関数を用いると次のように書くことができる。

$$P(k) \equiv (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} + \vec{k}') u(k, \tau) u^*(k', \tau) = (2\pi)^3 \frac{H^2}{4\epsilon k^3} |C_+ + C_-|^2, \quad (4)$$

ここで、 $*$ は複素共軛を取ることを表し、また $k \equiv |\vec{k}|$ である。

$|C_+ + C_-|^2 \equiv \gamma$ とおき、Bunch-Davies の時のパワースペクトルを P_{BD} とおけば、Non Bunch-Davies の時のパワースペクトル P_{NBD} は次のように書ける。

$$P_{NBD} = \gamma P_{BD}, \quad (5)$$

これは γ の定義と式 (3) から明らかで、 $\gamma = 1$ は初期状態として Bunch-Davies 真空を考えている場合に一致する。

テンソル・スカラー比 r について、 r はテンソル型揺らぎのパワースペクトルとスカラー型揺らぎのパワースペクトルの比である。 r は初期状態として Bunch-Davies 真空を仮定した一般の場合では次のようになることが知られている。

$$r = 16\epsilon, \quad (6)$$

式 (5) から、スカラー型揺らぎに対して Non Bunch-Davies を仮定するとスカラー型揺らぎのパワースペクトルは γ 倍になるので、 r は次の形に変更されることがわかる。

$$r = 16\epsilon \frac{1}{\gamma}, \quad (7)$$

2.3 スカラー型揺らぎの f_{NL}

本研究では、観測量として二点相関に由来するテンソルスカラー比に加え、三点相関に由来する f_{NL} に着目する。 f_{NL} は三点相関関数をフーリエ空間で見た量であるバイスペクトルとパワースペクトルの二乗の比として定義され、揺らぎの分布がガウス分布からどれだけずれているかを表す量となる。

バイスペクトル $B(k_1, k_2, k_3)$ については、In-In formalism と呼ばれる定式化 (Weinberg(2005)) を用いると、2.1 節のモード関数を用いて計算することができ、これは $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 = 0$ を満たす時のみ値を持つ。実際の観測との比較の際には、三点相関の計算を行うには計算コストがかかりすぎるため、一般に波数ベクトルに対し極限をとった場合について計算が行われる。本研究では、一般に用いられる条件について、 $k_1 = k_2 = k_3$ (equilateral) と $k_2 \sim k_3 \gg k_1$ (local) に着目して計算を行った。

これらの計算の際には、テンプレートと呼ばれる観測と比較の際に良い近似となる f_{NL} の表式が調べられており、equilateral、local についてそれぞれ次のようになる (Planck Collaboration et al.(2019))。

$$f_{\text{NL}}^{\text{equil}} = \frac{5}{3} \frac{B(k_1, k_2, k_3)}{6A^2 F(k_1, k_2, k_3)} \Bigg|_{k_1=k_2=k_3}, \quad (8)$$

$$F(k_1, k_2, k_3) \equiv - \left[\frac{1}{k_1^3 k_2^3} + \text{cycl.} \right] - \frac{2}{(k_1 k_2 k_3)^2} + \left[\frac{1}{k_1 k_2^2 k_3^3} + 5 \text{ perms} \right], \quad (9)$$

$$f_{\text{NL}}^{\text{local}} = \frac{5}{3} \frac{B(k_1, k_2, k_3)}{2A^2 [k_1^{-3} k_2^{-3} + \text{cycl.}]} \Bigg|_{k_2 \sim k_3 \gg k_1}, \quad (10)$$

ここで、cycl. は k の添字 1 ~ 3 を循環させた項を加えることを表し、perms は k の添字 1 ~ 3 を置換した項を加えることを表す。また、 $A = (2\pi)^3 \gamma^2 H^2 / 4\epsilon$ である。

これらの式に $B(k_1, k_2, k_3)$ の具体形を代入すれば最終的に、

$$f_{\text{NL}}^{\text{equil}} = \frac{5}{36} \left(27 - \frac{16}{\gamma^2} \right) \epsilon, \quad (11)$$

$$f_{\text{NL}}^{\text{local}} \sim \frac{5(\gamma^2 - 1)\epsilon k_3}{6\gamma^2 k_1}, \quad (12)$$

となる。

2.4 Planck の観測との比較

まず、テンソル・スカラー比について、swampland conjecture ($\epsilon > 1/2$) と CMB 観測による $r < 0.07$ の制限が整合するような γ は具体的にどれほどの量であるかを式 (7) から見積もった。次に、その γ について、式 (11)、式 (12) を用いて f_{NL} の計算を行った。なお、式 (12) の計算の際には、Planck の観測スケールに合わせて $k_1/k_3 = 2500/10$ として計算した。

なお、CMB 観測結果に関しては Planck Collaboration et al.(2018), 及び Planck Collaboration et al.(2019) の値を用いた。

3 Results

3.1 テンソル・スカラー比との比較

Introduction でも述べたように、swampland conjecture が有効である場合 $\epsilon > 1/2$ である。従って、式 (7) から

$$r > \frac{8}{\gamma}, \quad (13)$$

これと CMB 観測による制限 $r < 0.07$ を合わせると、

$$\gamma > 114 \sim \mathcal{O}(10^2), \quad (14)$$

という値であれば、 $r < 0.07$ を満たすことができる。

3.2 f_{NL} との比較

CMB 観測による f_{NL} への制限は次のようになっている。

$$f_{\text{NL}}^{\text{equil}} = -26 \pm 47 \text{ (68\% CL)}, \quad (15)$$

$$f_{\text{NL}}^{\text{local}} = -0.9 \pm 5.1 \text{ (68\% CL)}, \quad (16)$$

以下では $\epsilon = 1/2$ とする。比較のため Bunch-Davies 真空 ($\gamma = 1$) についての f_{NL} を計算すると以下のようになった。

$$f_{\text{NL}}^{\text{equil}} = -0.76, \quad (17)$$

$$f_{\text{NL}}^{\text{local}} = 1.87, \quad (18)$$

Non Bunch-Davies について、3.1 節の結果を考慮して $\gamma = 100$ について f_{NL} を計算すると次のようになった。

$$f_{NL}^{\text{equil}} = 1.87, \quad (19)$$

$$f_{NL}^{\text{local}} = 105, \quad (20)$$

(15)~(20) の比較を図示したものが次の図 1 と図 2 である。

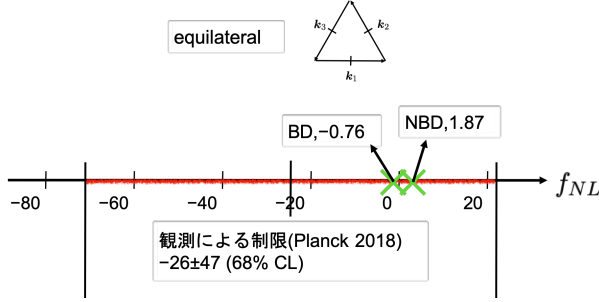


図 1: f_{NL}^{equil} についての比較。BD,NBD はそれぞれ Bunch-Davies、Non Bunch-Davies を表し、赤線の部分は観測で示された f_{NL}^{equil} の範囲を表す。

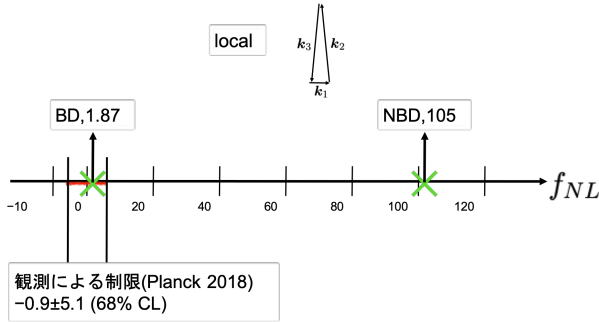


図 2: f_{NL}^{local} についての比較。赤線の部分は観測で示された f_{NL}^{local} の範囲を表す。

4 Conclusion & Future work

本研究では単一スカラー場インフレーションモデルについてのテンソル・スカラー比 r 及び f_{NL} の計算の際に、スカラー型揺らぎの初期状態として Non Bunch-Davies を仮定することによる影響を調べ、swampland conjecture との整合性について考察した。その結果、Bunch-Davies 真空からのずれ γ を $\gamma > \mathcal{O}(10^2)$ とすることで、 r については swampland

conjecture と観測両方に整合する結果を得ることができた。加えて、この条件のもとで f_{NL} について調べてみると、 f_{NL}^{equil} に関しては観測と整合する結果が得られた。しかし、 f_{NL}^{local} に対しては観測による上限を大きく超えた値となってしまう、今回設定した条件では swampland conjecture と観測が合うようにはできなかった。

今後考えられることとして、まず γ に波数依存性を持たせることが挙げられる。 γ は時間依存性のない定数で波数依存性を持っていても構わないので、 f_{NL}^{local} へ大きく寄与するスケールでは Bunch-Davies 真空に近づくような $\gamma(k)$ を選べば f_{NL}^{local} に対する矛盾を回避できる可能性がある。しかし、テンソル・スカラー比に関して、初期揺らぎのパワースペクトルはほぼスケール不変であることが観測によって示されているため、 r に関する swampland conjecture との矛盾の回避が難しいと考えられる。

他の可能性としては、今回はスカラー型の揺らぎに対し Non Bunch-Davies を仮定していたが、テンソル型揺らぎに対して Non Bunch-Davies を仮定した場合も考えられる。この仮定に対しては先行研究がいくつかあり、例えば Ashoorioon(2019)においてテンソル型の真空の変更によりテンソルスカラー比、 f_{NL} 両方に対し観測に整合する可能性が示唆されている。

Reference

- Brahma, S., & Hossain, M. W. 2019, Journal of High Energy Physics, 2019, 6
- Ashoorioon, A. 2019, Physics Letters B, 790, 568
- Chen, X. 2010, Advances in Astronomy, 2010, 638979
- N. Birrel & P. Davies “Quantum fields in curved space”, Cambridge Univ. Press 1982.
- Weinberg, S. 2005, prd, 72, 043514
- Planck Collaboration, Aghanim, N., Akrami, Y., et al. 2018, arXiv e-prints, arXiv:1807.06209
- Planck Collaboration, Akrami, Y., Arroja, F., et al. 2019, arXiv e-prints, arXiv:1905.05697

a8

Blue gravitational waves from slow-roll
inflation

立教大学大学院 理学研究科

三嶋 洋介

Blue gravitational waves from slow-roll inflation

三嶋 洋介 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙マイクロ波背景放射の観測に整合的なスローロール・インフレーション模型を更に峻別するために、原始重力波の観測が期待されている。これまで Horndeski 理論においてスローロール・インフレーション模型を考えると、原始重力波のスペクトル指数が負となることが主張されていた。しかし、原始重力波のスペクトル指数が正になるスローロール・インフレーション模型が一例として発見された。本講演では、この一例を含む形で構成した、原始重力波のスペクトル指数が正となる包括的なスローロール・インフレーション模型を紹介する。

1 Introduction

標準ビッグバン理論の初期条件に関する問題を解決するインフレーションは宇宙の大規模構造の種となる密度ゆらぎを生成できる有用なシナリオであり、これまで様々な模型が考えられてきた。その中で宇宙マイクロ波背景放射の温度ゆらぎの観測と整合する模型として、多くのスローロール・インフレーション模型が提案されている。更に具体的に模型を同定するためにはインフレーション起源の原始重力波を探ることが不可欠である。

先行研究 [1] では、最も一般的な単一場のスカラール・テンソル理論内でスローロール・インフレーション模型を考えると、どの模型でも原始重力波のスペクトル指数が負となることが指摘されていた。ところが、Gauss-Bonnet 項と呼ばれる曲率高次項との相互作用を持つスローロール・インフレーション模型では、原始重力波のスペクトル指数が正となることが確認された [2]。最も一般的な単一場のスカラール・テンソル理論は Gauss-Bonnet 項との相互作用を含む模型を記述できる [3] ため、一見すると 2 つの先行研究の主張は矛盾する。そこで、両者の主張の矛盾を解消することを本研究の主題とする。

2 Gauss-Bonnet inflation

Gauss-Bonnet 項 $R_{\text{GB}}^2 := R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ との相互作用を持つインフレーション

模型を Gauss-Bonnet インフレーションと呼ぶ。この模型は以下の作用で実現される。

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_{\text{pl}}^2}{2} R - \frac{1}{2} \xi(\phi) R_{\text{GB}}^2 + X - V(\phi) \right]$$

ここで、スカラール場 ϕ の運動項を $X := -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi$ とした。この作用において一様等方時空の下で場の運動方程式を求めると

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{1}{3M_{\text{pl}}^2} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V + 12\xi \dot{H}^3 \right) \\ \dot{H} &= -\frac{1}{2M_{\text{pl}}^2} \left\{ \dot{\phi}^2 - 4\ddot{\xi} H^2 - 4\dot{\xi} H (2\dot{H} - H^2) \right\} \\ \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi + 12\xi_\phi H^2 (\dot{H} + H^2) &= 0 \end{aligned}$$

と求まる。ただし、添字の ϕ は $d/d\phi$ を意味する。

以下ではスローロール・インフレーションを考える。スローロール条件として

$$\dot{\phi}^2/2 \ll V, \quad \ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}, \quad 4\dot{\xi}H \ll 1, \quad \ddot{\xi} \ll \dot{\xi}H$$

を満たすとき、この系はアトラクターとなる解を持つことがわかる [4]。このとき、背景場の運動方程式は

$$H^2 \simeq \frac{1}{3M_{\text{pl}}^2} V \quad (1)$$

$$\dot{H} \simeq -\frac{1}{2M_{\text{pl}}^2} \left(\dot{\phi}^2 + 4\dot{\xi}H^3 \right) \quad (2)$$

$$3H\dot{\phi} + V_\phi + 12\xi_\phi H^4 \simeq 0 \quad (3)$$

となる。ここで式 (1-3) を用いると

$$\begin{aligned}\dot{H} &\simeq \frac{1}{6M_{\text{pl}}^2} \frac{H\dot{\phi}}{H^2} (3H\dot{\phi} + 12\xi_{\phi} H^4) \\ &= -\frac{V_{\phi}}{6} \left(\frac{V_{\phi}}{V} + \frac{4}{3M_{\text{pl}}^4} \xi_{\phi} V \right)\end{aligned}$$

となるので

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} \simeq \frac{M_{\text{pl}}^2}{2} \frac{V_{\phi}}{V} Q \quad \left(Q \equiv \frac{V_{\phi}}{V} + \frac{4}{3M_{\text{pl}}^4} \xi_{\phi} V \right)$$

とスローロール・パラメータ ϵ をポテンシャル V と結合関数 ξ で表すことができる。膨張指数は

$$N(t_i) \equiv \int_{t_i}^{t_f} H dt \simeq \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{H^2}{H\dot{\phi}} d\phi = \int_{\phi_e}^{\phi_i} \frac{1}{M_{\text{pl}}^2 Q} d\phi$$

であり、具体的に V と ξ を決めれば求めることができる。

この模型において、一様等方時空からの摂動の下で原始重力波のパワースペクトル求めると、そのスペクトル指数は

$$n_{\text{T}} = -2\epsilon$$

とスローロール・パラメータで表すことができる。ここで、ガウス・ボンネ項との結合関数 $\xi(\phi)$ とポテンシャル V が

$$\begin{aligned}\xi_{\phi} &< -\frac{3M_{\text{pl}}^4}{4} \frac{V_{\phi}}{V^2} \quad \text{for } V_{\phi} > 0 \\ \xi_{\phi} &> -\frac{3M_{\text{pl}}^4}{4} \frac{V_{\phi}}{V^2} \quad \text{for } V_{\phi} < 0\end{aligned}$$

という条件を満たすとき、スペクトル指数が正となることが分かる。

一般に、スカラー場を加えた重力理論では、背景時空からの摂動を考えたときに不安定性を抱えてはならない。これはゴースト不安定性・勾配不安定性と呼ばれ、摂動が従うラグランジアン係数の符号が正となる条件により取り除くことができる。そして、今回のようなスペクトル指数が正となるダイナミクスを実現する条件は、ゴースト不安定性・勾配不安定性を回避できていることも確認される。以上から、原始重力波のスペクトル指数が正となるスローロール・インフレーション模型が存在することを確認できた。

3 General slow-roll dynamics of potential driven inflation

最も一般的な単一場スカラー・テンソル理論は、スカラー場 ϕ と運動項 X による 4 つの任意関数 $G_i(\phi, X)$ ($i = 2, 3, 4, 5$) を決めることで具体的な模型を導くことができる。前節の Gauss-Bonnet インフレーション模型は

$$G_2 = X - V - 4f^{(4)}(\phi)X^2(3 - \ln X),$$

$$G_3 = -2f^{(3)}(\phi)X(7 - 3\ln X),$$

$$G_4 = \frac{M_{\text{pl}}^2}{2} - 2f^{(2)}(\phi)X(2 - \ln X),$$

$$G_5 = 2f^{(1)}(\phi)\ln X$$

と選ぶことで導かれる [3]。ここで、 $f^{(n)}(\phi) = \frac{d^n}{d\phi^n} f(\phi)$ と記した。

先行研究 [1] では、運動項がポテンシャルよりも十分小さいというスローロール近似を一般性を保ったまま考えるために、任意関数 G_i を X のテイラー展開をした形で解析していた。しかし、上述のように Gauss-Bonnet インフレーション模型は任意関数に $\ln X$ 項を含むことで実現される。そこで、任意関数の展開を

$$\begin{aligned}G_i(\phi, X) &= g_i(\phi) + h_i(\phi)X \\ &\quad + \{\lambda_i(\phi) + \xi_i(\phi)X\} \ln X + \mathcal{O}(X^2)\end{aligned}$$

となるように新たに $\lambda_i(\phi), \xi_i(\phi)$ を用いて解析することを考える。作用を考察すると、他の関数を再定義することにより理論を不変に保つことができるため、 $g_3 = 0 = g_5$ としても一般性を失わない。

このとき一様等方時空の下で背景場が従う拘束条件を求めると

$$\begin{aligned}6g_4H^2 &= -g_2 + 6H\lambda_3\dot{\phi} + 6H^3\lambda_5\dot{\phi} \\ &\quad + (2 - \ln X)\lambda_2 - 6H^2\lambda_4\ln X + \mathcal{O}(\dot{\phi}\ln X)\end{aligned} \quad (4)$$

となる。拘束条件において特異な振る舞いをする項を取り除くために、以下では $\lambda_2 = 0 = \lambda_4$ として考える。このとき、背景場の運動方程式は

$$4g_4\dot{H} - 2g_{4\phi}H\dot{\phi} + \dot{\phi}J \approx 0 \quad (5)$$

$$3HJ \approx g_{2\phi} + 12g_{4\phi}H^2 \quad (6)$$

となる。ただし

$$\begin{aligned}
 J := & 6H\lambda_3 + 2H^3\lambda_5 \\
 & + \dot{\phi}(h_2 + \xi_2 + \xi_2 \ln X) \\
 & + 6HX(h_3 + \xi_3 + \xi_3 \ln X) \\
 & + 6H^2\dot{\phi}(h_4 + 3\xi_4 + \xi_4 \ln X) \\
 & + 6H^3X\left(h_5 + \frac{5}{3}\xi_5 + \xi_5 \ln X\right)
 \end{aligned}$$

であり、 $g_{i\phi} = dg_i/d\phi$ とした。

一様等方時空からの摂動量である重力波 h_{ij} と曲率ゆらぎ ζ の運動方程式を記述する作用は、それぞれ

$$\begin{aligned}
 S_T^{(2)} &= \frac{1}{8} \int dt d^3x a^3 \left[\mathcal{G}_T \dot{h}_{ij}^2 - \frac{\mathcal{F}_T}{a^2} (\vec{\nabla} h_{ij})^2 \right] \\
 S_S^{(2)} &= \int dt d^3x a^3 \left[\mathcal{G}_S \dot{\zeta}^2 - \frac{\mathcal{F}_S}{a^2} (\vec{\nabla} \zeta)^2 \right]
 \end{aligned}$$

と表せる。ただし

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_T &\supset G_4, G_5 & \mathcal{G}_T &\supset G_4, G_5 \\
 \mathcal{F}_S &\supset G_3, G_4, G_5 & \mathcal{G}_S &\supset G_2, G_3, G_4, G_5
 \end{aligned}$$

である。このとき、重力波と曲率ゆらぎのゴースト不安定性・勾配不安定性は $\mathcal{F}_T, \mathcal{G}_T > 0$ 及び $\mathcal{G}_S, \mathcal{F}_S > 0$ を要請することで取り除くことができる。

今回の任意関数の展開において $\mathcal{F}_T, \mathcal{G}_T$ をスローロールオーダーの最低次まで、 $\mathcal{G}_S, \mathcal{F}_S$ をスローロールオーダーの 1 次まで計算すると

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_T &\simeq 2g_4, & \mathcal{F}_T &\simeq 2g_4 \\
 \mathcal{G}_S &\simeq \frac{X}{H^2} [h_2 + (3 + \ln X)\xi_2 \\
 &+ 6H^2 \{h_4 + (5 + \ln X)\xi_4\}] \\
 &+ \frac{6\dot{\phi}X}{H} [h_3 + (2 + \ln X)\xi_3 \\
 &+ H^2 \left\{ h_5 + \left(\frac{8}{3} + \ln X \right) \xi_5 \right\}] \\
 \mathcal{F}_S &\simeq 4\frac{\lambda_3\dot{\phi}}{H} + \frac{X}{H^2} [h_2 + (1 + \ln X)\xi_2 \\
 &+ 6H^2 \left\{ h_4 + \left(\frac{13}{3} + \ln X \right) \xi_4 \right\}] \\
 &+ \frac{4\dot{\phi}X}{H} [h_3 + (1 + \ln X) \\
 &\xi_3 + H^2 \{h_5 + (2 + \ln X)\xi_5\}]
 \end{aligned}$$

となることが分かる。

この下で原始重力波のパワースペクトルを計算すると、スペクトル指数 n_T はスローロール・パラメータ $\epsilon := -\frac{\dot{H}}{H^2}, \delta := \frac{\dot{g}_4}{g_4 H}$ を用いて

$$n_T \approx -2\epsilon - \delta$$

となることが分かった。

4 Conclusion

スローロール・パラメータは式 (4-6) に従うダイナミクスにより決定される。またこのダイナミクスはゴースト不安定性・勾配不安定性を取り除く状況のもとで実現されなければならない。これらを考察することにより、原始重力波のスペクトル指数が正となる模型が実現される条件が得られる。この条件は、Gauss-Bonnet インフレーション模型の場合も含むことが確認される。以上より、スローロール・インフレーションにて原始重力波のスペクトル指数が正となる模型を包括的に取り扱う条件を求められた。

Acknowledgement

天文・天体物理若手夏の学校にご賛同いただき、ご支援くださった皆様に感謝致します。また、本研究のために日夜議論にお付き合いいただいた理論物理学研究室の皆様にも深く感謝致します。

Reference

- [1] K. Kamada, T. Kobayashi, T. Takahashi, M. Yamaguchi and J. Yokoyama, *Generalized Higgs inflation*, *Phys. Rev.* **D86** (2012) 023504 [1203.4059].
- [2] S. Koh, B.-H. Lee and G. Tumurtushaa, *Constraints on the reheating parameters after Gauss-Bonnet inflation from primordial gravitational waves*, *Phys. Rev.* **D98** (2018) 103511 [1807.04424].
- [3] T. Kobayashi, M. Yamaguchi and J. Yokoyama, *Generalized G-inflation: Inflation with the most general second-order field equations*, *Prog. Theor. Phys.* **126** (2011) 511 [1105.5723].
- [4] Zong-Kuan Guo and Dominik J. Schwarz *Slow-roll inflation with a Gauss-Bonnet correction* *Phys. Rev. D* **81**, 123520 (2010)

a9

R + R² モデルに対する高階微分項による補正

立教大学大学院理学研究科

佐藤 靖

R + R² モデルに対する高階微分項による 補正

佐藤 靖 (立教大学大学院理学研究科)

Abstract

宇宙の膨張を説明する標準ビッグバン理論は、平坦性問題 や地平線問題という宇宙の初期条件の微調整に関する問題を含んでいる。それらを解決するために、宇宙が初期に加速膨張をするインフレーションシナリオが提唱されている。インフレーションモデルには様々なものがあるが、その一つとして、 $R + R^2$ モデルがある。

一般相対論は量子化の困難から量子重力理論の低エネルギー有効理論であると考えられている。そのため初期宇宙のような高エネルギースケールでは一般相対論よりも高エネルギー領域でも適用される理論で記述されるはずである。シンプルな拡張として、一般相対論の作用にリッチスカラーの二乗を加えた $R + R^2$ モデルが考えられた。[1]

$R + R^2$ モデルに対しても、よりエネルギーの次元が高い項が作用に加えられることが予想される。[2] では高階微分項の一つである $R \square R$ を小さな補正として $R + R^2$ モデルに加える。本講演では、[2] をレビューし、このモデルにおけるテンソル・スカラー比と曲率ゆらぎのスペクトル指数を求め、観測と整合的なインフレーションモデルとなるためには補正項の係数に制限がかかることを示す。

1 Introduction

一般相対論は量子重力理論の低エネルギー有効理論だと考えられている。それゆえ、一般相対論の作用である Einstein-Hilbert 作用にはリッチスカラーよりもエネルギーの次元が高い項を加え、高エネルギー領域での理論を考察する。高次元の項が作用に加わる場合、その効果はプランクスケールを下回るエネルギー領域では抑制される。そのため、そのような理論においては一般相対論は低エネルギー領域での良い近似の理論となり、宇宙論的にも実験のエネルギースケールのにも整合的な結果が得られる。高エネルギー領域での物理理論を考えるため、以下の章では補正を加えた重力理論を考察する。

2 The $R + R^2$ Model

作用にリッチスカラーの二乗 R^2 に比例する項を加えたモデルを $R + R^2$ モデルや Starobinsky モデルという。このモデルはインフレーションを起こすスカラー場を必要とせずにインフレーションを起こすことが可能であり、宇宙マイクロ波背景放射の観測

結果に整合的で、現象論的に最も成功しているインフレーション理論である。作用は

$$S = \frac{M_P^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (R + \alpha R^2) \quad (1)$$

という形をとる。ここで M_P は換算プランク質量である。 α は $[\text{mass}]^{-2}$ の次元を持つ係数である。作用をスカラー場 ϕ を用いて書き換えると

$$S = \frac{M_P^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [\phi R - U(\phi)] \quad (2)$$

となる。ここで $\phi = 1 + 2\alpha R$ である。Conformal 変換

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\chi}{M_P}\right) \quad (3)$$

により、スカラー場 χ を用いて

$$S = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[\frac{M_P^2}{2} \bar{R} - \frac{1}{2} (\bar{\nabla}\chi)^2 - V(\chi) \right] \quad (4)$$

$$V(\chi) = \frac{M_P^2}{8\alpha} \left(1 - e^{-\frac{2}{\sqrt{6}} \frac{\chi}{M_P}} \right)^2 \quad (5)$$

と書き換えられる。

この変換により作用は単一スカラー場のインフレーションとみなすことが出来る。そこからスローロー

ル・パラメータを求め、曲率ゆらぎのスペクトル指数、テンソル・スカラー比を求め、観測結果と比較すると非常によくフィットすることが知られている。 α はインフレーション期の曲率で非常に大きな値となることから、インフレーション中は R^2 の項が優勢になる。

3 $R \square R$ term

$R + R^2$ モデルに対してよりエネルギーの次元が高い項を作用に加える場合、可能性としてリッチスカラーの微分を含む項がある。高階微分項を含む理論を考えても低エネルギー領域で見れば、一般相対論が良い近似となり観測的に矛盾しない理論となる。

一方で、高次の項が加えられた理論はゴーストが現れる問題がある。一般に、高階微分項を作用に加えるとゴーストが現れてしまう。ゴーストを回避するためには工夫が必要で高次の項は小さな補正として扱う。そうすることでゴーストが現れるのが回避できる事が知られている [3]。今回は高階微分を含む項としてシンプルな $R \square R$ の項を加えて解析する。作用は

$$S = \frac{M_P^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [R + R^2 + \gamma R \square R] \quad (6)$$

である。ここで α と γ はそれぞれエネルギーの-2乗と-4乗の次元を持っている。この作用を標準的な取り扱いで解析すると2つのスカラー場でマッピングされるが、このやり方だと一般にスローロール条件を満たさない。[4] そのため、[2] では高階微分項を小さな補正として加え、単一スカラー場で書き換える。スカラー場に $R + R^2$ モデルでの R と ϕ の関係式 $\phi = 1 + 2\alpha R$ を用いて、

$$S = \frac{M_P^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [R + R^2 + \gamma R \square R]_{R=\frac{\phi-1}{2\alpha}} \quad (7)$$

とする。こうすることで、単一スカラー場でマッピングされ、これにより γ の高次の項を無視する事ができる。

また、 γ が小さいと考えることからインフレーション中は $\frac{\gamma}{2\alpha} \square$ という無次元の演算子が小さいとして線形で近似する。すると、 ϕ は

$$\phi = \frac{1}{2\alpha} (e^{2\varphi} - 1) - \frac{\gamma}{2\alpha^2} \square e^{2\varphi} \quad (8)$$

が得られ、この関係式を作用に代入すると、

$$S = \frac{M_P^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [\bar{R} - 6(\bar{\nabla})^2(1 + ke^{2\varphi}) - U(\varphi)],$$

$$\text{where } k = \frac{\gamma}{6\alpha^2} \text{ and } U(\varphi) = \frac{e^{-4\varphi}}{4\alpha} (e^{2\varphi} - 1)^2 \quad (9)$$

となり、単一のスカラー場で書き換えられる。

さらに変換

$$\varphi = \frac{\chi}{\sqrt{6(1 + \gamma/6\alpha^2)}M_P} \quad (10)$$

で定義される場 χ を用いて書くと

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_P^2}{2} \bar{R} - \frac{1}{2} (\bar{\nabla}\chi)^2 - V(\varphi(\chi)) \right] \quad (11)$$

となり、canonical な運動項を持つ単一場のインフレーションに書き換えることが出来る。ポテンシャルは

$$V(\chi) = V(\varphi(\chi)) = \frac{M_P^2}{8\alpha} (1 - e^{-2\varphi(\chi)})^2 \quad (12)$$

という形をとる。以下にポテンシャルの図を示す。

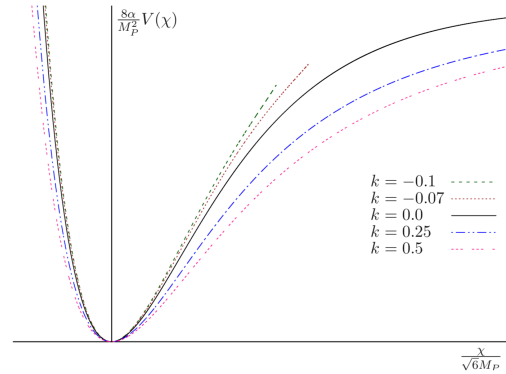


図 1: ポテンシャルの図 [2]

図 1 ではいくつかの k の値ごとにポテンシャルをプロットしている。 k が負の場合、インフレーションを起こせる場の値は大きくなる事が読み取れる。

3.1 Slow-roll conditions

式 (11) は単一場インフレーションに変換されているので、通常と同様の解析が出来て、スローロール・

パラメータ ϵ, η は

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad \eta = \epsilon - \frac{\dot{\epsilon}}{2\epsilon H} = -\frac{\ddot{\chi}}{H\dot{\chi}} \quad (13)$$

である。以下にスローロール・パラメータ ϵ, η の図を示す。

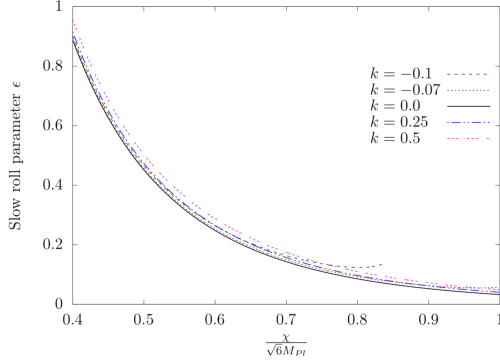


図 2: スローロール・パラメータ ϵ [2]

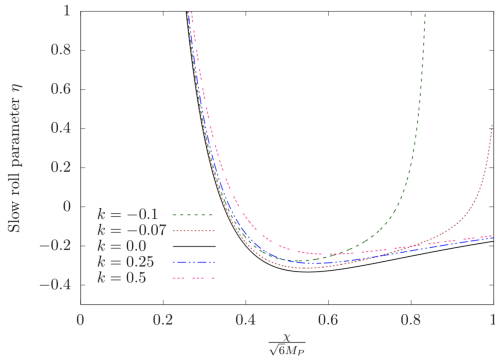


図 3: スローロール・パラメータ η [2]

図 3 から分かるように、 k が負で、例えば $k = -0.1$ の場合、場の値が 0.8 を超えるとスローロール条件が破れる。十分なインフレーションを確保するためには場の値が広い範囲でスローロール条件を満たす必要があるので、補正項の係数 γ については十分なインフレーションを確保できる値に制限が付く事が分かる。

次にスペクトル指数とテンソル・スカラー比を求

める。それらは

$$n_s = -6\epsilon + 2\eta = M_P^2 \left(2\frac{v''}{V} - 3\left(\frac{V'}{V}\right)^2 \right), \quad (14)$$

$$r = 16\epsilon = -8M_P^2 \left(\frac{V'}{V}\right)^2 \quad (15)$$

となる。これから、膨張指数 60 を満たす k の値の範囲は $-0.0045 < k \lesssim 0.30$ と制限される。

n_s と r をプロットすると図 4 のようになる。図か

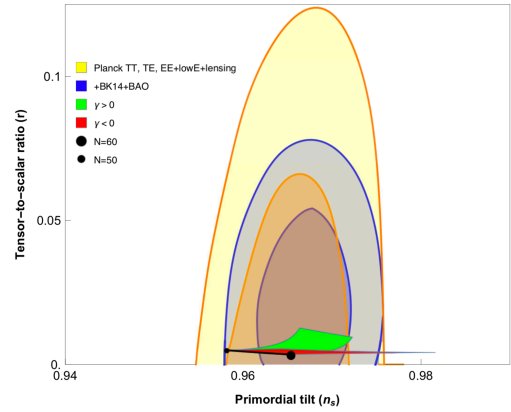


図 4: スペクトル指数とテンソル・スカラー比とプランク衛星による観測的制限 [2]

ら分かるように、 $n_s - r$ プロットは観測的制限にかかわらずに非常によくフィットすることが分かる。

4 Conclusions

R^2 の項を小さな補正項として加えた。

今回の解析では一つのスカラー場でマッピングし、 R^2 の項が自由度を増やさずに解析できた。作用に高階微分を含む項を加えたときの観測的制限の解析法を見つけた。膨張指数が 60 以上を満たす k の範囲には制限があり、 $-0.0045 < k \lesssim 0.30$ となる。

スペクトル指数やテンソル・スカラー比は kN のオーダーでは変化しないことも得られた。

5 reference

- [1] A.A. Starobinsky, A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity, Phys. Lett. B **91** (1980)
- [2] Ana R. Romero Casrellanos et al. JCAP**12**(2018)007
- [3] J.Z. Simon, Higher Derivative Lagrangians, Nonlocality, Problems and Solutions, Phys. Rev. D **41** (1990) 3720
- [4] T. Wang, Note on Non-Gaussianities in Two-field Inflation, Phys. Rev. D **82** (2010) 123515

a10

漸減する宇宙項と間欠的加速膨張
お茶の水女子大学大学院 人間文化創成
科学研究科
新井 幸

漸減する宇宙項と間欠的加速膨張

新井 幸 (お茶の水女子大学大学院 人間文化創成科学研究科)

Abstract

現在物質と宇宙定数のエネルギー密度はほぼ一致しているが、それがなぜ "今" なのか、は "Why now?" 問題と呼ばれる未解決問題である。さらに宇宙定数のエネルギー密度は観測によると $\rho_\Lambda \sim 10^{-47} \text{GeV}^4$ であり、これは場の量子論による理論的な予測より 120 桁小さい [1]。これらの問題を解決すべく、ダークエネルギー (DE) とダークマター (DM) をボゾン場の異なる相とすると、宇宙初期の急激な加速膨張が自発的に起こり、それが終わる過程で真空のエネルギーを消費する、というメカニズムが提案されている。本来宇宙が加速膨張するためには強い負の圧力を持ったスカラー場が必要であるので、インフレーションなどを記述する場合は未知の古典スカラー場などを仮定していた。今回は未知の場としてボーズ・アインシュタイン凝縮体 (BEC) が用いられる (BEC 宇宙論)[2]。本講演では、この BEC 宇宙論による初期宇宙のメカニズムと、これが未解決問題に対してどのような解決策を与えるか紹介する。さらにその結果を最新の Planck 衛星の結果と比較する。

1 解決したい未解決問題

宇宙は物質, 輻射, 宇宙定数といった複数の成分から構成されていると考えられており、それぞれ状態方程式 $P = w\rho$ の係数 $w = 0, 1/3, -1$ に従う。異なる時間依存性を持つにもかかわらず、138 億年という歴史の中で物質と宇宙定数のエネルギー密度が現在ほぼ等しいということは "Why now?" 問題と呼ばれ、宇宙論における未解決問題の一つである。次に宇宙定数のエネルギー密度は観測によるハッブル定数の値 $H_0 = 70 \pm 7 \text{kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ から計算することができる。

$$\rho_\Lambda \sim \left(\frac{H_0}{m_p}\right)^2 m_p^4 \sim 10^{-122} m_p^4 \sim 10^{-47} \text{GeV}^4 \quad (1)$$

一方、宇宙定数のエネルギー密度の起源を真空のエネルギー ρ_{vac} とする。 ρ_{vac} を求めるには運動量 k , 質量 m の場の零点振動のエネルギー $\sqrt{k^2 + m^2}/2$ を全運動量空間について足し上げればよいので、

$$\rho_{vac} = \int_0^{m_{pl}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{k^2 + m^2}}{2} \sim \frac{m_{pl}^4}{16\pi} \sim 10^{74} \text{GeV}^4 \quad (2)$$

式 (1) と式 (2) のエネルギー密度の値を比較すると 100 桁以上異なっており、宇宙定数を真空のエネルギー起源であると考えると都合が悪い。宇宙定数の

起源は未だわかっておらず、宇宙項問題と呼ばれている。

2 ボーズアインシュタイン凝縮体による宇宙論モデルの提案

前述の 2 つの未解決問題の解決法としてボーズアインシュタイン凝縮体 (BEC) を用いた宇宙論が提案されている。宇宙はほぼダークエネルギー (DE) とダークマター (DM) で構成されており、DE の起源を宇宙定数とすると DE と DM の現在の比は "Why now?" 問題でも取り上げたように $\rho_\Lambda/\rho_M \sim \rho_{DE}/\rho_{DM} \sim 1$ となるのが現在の理論的解析と観測から提示されている。この事実より DE と DM には相関があり、統一して考えるのが自然である。そこで加速膨張を起こすために現代宇宙論に標準的に取り入れられているボゾン場を DE と DM の候補として考える。宇宙初期で場は量子的であると考えられるので、本来量子物理で示されるような物質が時間が経つにつれて古典スカラー場としてふるまう相を見つけたい。最も自然なケースはボーズアインシュタイン凝縮である。巨視的な数のボゾン粒子が 1 つの基底状態を共有することで古典的な波、つまり DE としてふるまう。一方励起した状態のボゾンガスは古典的なガス、

DM としてふるまうとみなす。この 2 相はボゾン粒子同士の特別な相互作用を考える必要はなく、ボゾンガスの温度 T がある臨界 T_{cr} を超えると必然的に相転移する。

$$kT < kT_{cr} \equiv \frac{2\pi\hbar^2 n^{1/3}}{(\zeta(3/2))^{2/3} m} \quad (3)$$

この条件を満たすにはボゾンガスは冷たくなければならない。ボゾンガスが冷たいダークマターだとすると $T \propto n^{3/2}$ に従い、常に (3) 式を満たすので現在の宇宙ではボゾンガス、つまりダークマターは常に存在していることになる。

3 'Why now?' 問題

この BEC によるモデルを実際に宇宙論に適用する。一様な BEC の段階的な生成と、その後の崩壊は以下の式で書ける。

$$\begin{aligned} H^2 &= \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}(\rho_g + \rho_\phi + \rho_l) \\ \dot{\rho}_g &= -3H\rho_g - \Gamma\rho_g \\ \dot{\rho}_\phi &= -6H(\rho_\phi - V) + \Gamma\rho_g - \Gamma'\rho_\phi \\ \dot{\rho}_l &= -3H\rho_l + \Gamma'\rho_\phi \end{aligned} \quad (4)$$

第 1 式はフリードマン方程式である。 $\rho_g, \rho_\phi, \rho_l$ はそれぞれボゾンガス, BEC, BEC が崩壊してできた構造の密度である。第 2 式はボゾンガスのエネルギー密度の時間変化の式で Γ は BEC の凝縮率を表す。第 3 式は BEC のダイナミクスを記述するグロスピタエフスキー方程式の相対論形に BEC の定常な凝縮 $\Gamma\rho_g$ を加えた式である。 Γ' は BEC の崩壊率を表す。第 4 式は局所的なエネルギー密度 ρ_l の時間変化を表す式である。

これらの方程式を用いて数値的に密度の時間変化を計算したのが図 1 である。凝縮率は $\Gamma = 0.2601$ を用いた。それぞれ、ボゾンガス ρ_g : grey line, BEC ρ_ϕ : solid line, 局所的な構造 ρ_l : dashed line で表している。

BEC は $z=69, 54, 39, 26, 15$ のときに段階的に崩壊を起こし、その度に少しずつ密度が小さくなっていき $z=0$ の現在の宇宙で ρ_ϕ はほぼ一定になり、 $\rho_{phi} \sim \rho_g$ (つまり $\rho_{DE} \sim \rho_{DM}$) となるのがわかる。

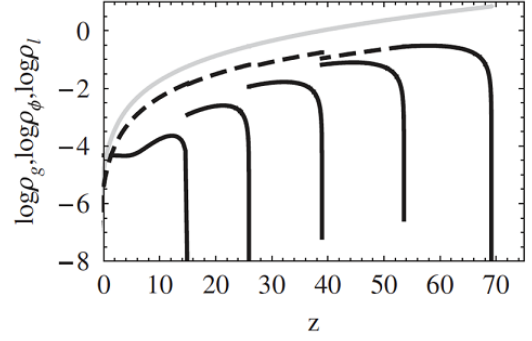


図 1: エネルギー密度の時間変化

4 BEC によるインフレーション

さらに初期宇宙でのメカニズムに適用させるために、式 (4) を書き換える。ボゾンガスの質量は小さいので輻射と同様にふるまうとすると

$$\begin{aligned} H^2 &= \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}(\rho_g + \rho_\phi + \rho_l) \\ \dot{\rho}_g &= -4H\rho_g - \Gamma\rho_g \\ \dot{\rho}_\phi &= -6H(\rho_\phi - V) + \Gamma\rho_g - \Gamma'\rho_\phi \\ \dot{\rho}_l &= -4H\rho_l + \Gamma'\rho_\phi \end{aligned} \quad (5)$$

ここで BEC のエネルギー密度 $\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V$, ポテンシャルエネルギー $V = V_0 + m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{2}\phi^4$ とする。初期の真空エネルギー V_0 は理論による真空エネルギーの値である $V_0 \sim m_{pl}^4$ とする。

まず BEC のプロセスでインフレーションが自然に始まることを示す。ただし BEC のエネルギー密度 ρ_ϕ を DE, ボゾンガスのエネルギー密度 ρ_g を DM のエネルギー密度として、後の議論を進める。インフレーションの初期ではまだ BEC の凝縮が始まっていないので、当然 BEC が崩壊した後の局所的な構造も形成されていない。よって ρ_ϕ, ρ_l と崩壊率 Γ' は無視できる。つまり DE はまだ存在しておらず、DM (ボゾンガスを輻射とみなしている) で満たされているという状態である。さらにインフレーションを起こすためには場の変化はゆっくりでなければならない。式 (5) を整理すると、

$$3H\dot{\phi}^2 = \Gamma\rho_g \quad (6)$$

となる。ボゾンガスが輻射であるとみなしているので $\rho_g(t) = \rho_{gi} \left(\frac{t_i}{t}\right)^2$ 、さらに凝縮率を時間の関数と

して $\Gamma(t) = \Gamma_0 \rho_g(t)$ を代入するとインフレーションの始まりの場 ϕ_{fire} が解けて、

$$\phi_{fire}(t) = 2t_i \left(\frac{\Gamma_0 \rho_{gi}^{3/2}}{3\mu} \right)^{1/2} \left(1 - \left(\frac{t_i}{t} \right)^{1/2} \right) \quad (7)$$

インフレーションが始まった時刻を t_{iinf} とすると、密度は初期の真空エネルギーと定義しているので、

$$\rho_g(t_{iinf}) = \rho_{gi} \left(\frac{t_i}{t_{iinf}} \right)^2 = V_0 \quad (8)$$

この関係を用いると初期条件は

$$\begin{aligned} \phi_{fire}(t_{iinf}) &= 2t_i \left(\frac{\Gamma_0 \rho_{gi}^{3/2}}{3\mu} \right)^{1/2} \left(1 - \left(\frac{V_0}{\rho_{gi}} \right)^{1/2} \right) \\ \delta = \dot{\phi}_{fire}(t_{iinf}) &= 2t_i \left(\frac{\Gamma_0 \rho_{gi}^{3/2}}{3\mu} \right)^{1/2} \left(\frac{V_0}{\rho_{gi}} \right)^{3/4} \end{aligned} \quad (9)$$

次にインフレーションの間、ボゾンガスは BEC に消費されて ρ_ϕ に比べて薄くなっているため ρ_g, Γ' は無視できる。すると BEC は以下の式のように進化する。

$$\dot{V} = -3H\dot{\phi}^2 \quad (10)$$

式 (9) の初期条件を用いて式 (10) を解くと

$$\phi_{inf}(t) = \left(\frac{3H_{inf}}{-2\lambda} \right)^{1/2} \left(t_{iinf} - t + \frac{1}{2} \left(\frac{3H_{inf}}{-\lambda\delta^2} \right)^{1/3} \right)^{-1/2} \quad (11)$$

図 2 はスケールファクターの時間発展を表す。スケールファクターは時間が進むにつれてべき的に大きくなるが、 $t \approx t_s \approx 34.8$ で極値となり加速膨張が終わることがわかる。この極値近傍の加速膨張が停滞するときに "stagflation" と呼び、 t_s を "stagflation point" と呼ぶ。

t_s とは別にインフレーションが終わる時間を t_{einf} とすると、

$$\Delta_{inf} \equiv t_{einf} - t_{iinf} = \frac{1}{2} \left(\frac{3H_{inf}}{-\lambda\delta^2} \right)^2 \quad (12)$$

するとこのインフレーションでの e-folding 数は $N = H_{inf} \Delta_{inf}$ となる。

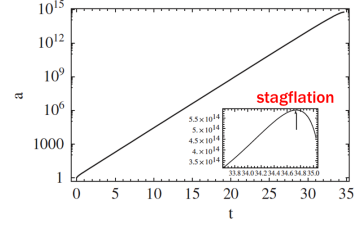


図 2: インフレーション中のスケールファクターの時間変化

BEC による宇宙論を用いたインフレーションのメカニズムは通常のスカラー場によるメカニズムとここまでは振る舞いが似ている。次に BEC 宇宙論に特徴的な stagflation について考えたい。インフレーションの終わりでは ρ_g, Γ, Γ' は無視できるので、式 (5) を整理すると、

$$\dot{H} = -\frac{3}{2}\mu^2\dot{\phi}^2 \quad (13)$$

stagflation のときは加速膨張が停滞しているため $t = t_s$ で $H = 0$ となり、式 (13) は $H = 0, \rho_{phi} = 0, \dot{\rho}_\phi = 0$ となる。しかしこの stagflation の状況は永遠ではない。式 (13) を見ると右辺が BEC 場の運動項となっている。時間が進むにつれて運動項が発展するので有限の時間で stagflation は終わり、このとき運動方程式は

$$\ddot{\phi} = -\frac{3}{\sqrt{2}}\mu\dot{\phi} \quad (14)$$

となる。これを $H < 0, \dot{\phi} > 0$ を踏まえて解くと

$$\phi_{imp} = const - \frac{\sqrt{2}}{3\mu} \ln(t_* - t) \quad (15)$$

この結果だと BEC 場は $t = t_*$ で発散してしまう。しかし実世界では $\phi \rightarrow \inf, \dot{\phi} \rightarrow \infty$ となることはありえない。stagflation が終わった後、 $\dot{\phi} \rightarrow \infty$ となることでたくさんの粒子が生成し、宇宙が再加熱される機構と $t \approx t_s, \rho_\phi \approx 0$ で BEC を形作るモードの不安定性が大きくなることにより BEC が崩壊し、局所的な構造となる機構が考えられる。今回は宇宙項問題に関連した後者に焦点を絞って解説する。この不安定性から BEC が真空のエネルギーを消費することで宇宙項が小さくなるメカニズムを次章で解説する。

5 宇宙項問題

stagflation の時代に戻って考える。現在の宇宙論では観測されている密度揺らぎはインフレーション中に初期宇宙の密度揺らぎが成長したとされているが、BEC 宇宙論では BEC が一様なためインフレーションの間では密度揺らぎが生成、成長しない。そこで stagflation point で揺らぎが生成、成長したと考える。 $\rho_\phi = 0$ より運動方程式 $\dot{\phi} = \sqrt{\kappa}\phi^2$ を解くと、

$$\phi_{stag} = \kappa^{-1/2}(t_s - t)^{-1} \quad (16)$$

となる。このときの不安定さのスケールは（不安定さのスケールについては講演で紹介する。）

$$\left(\frac{k_*}{a}\right)_{stag} = (16\pi)^{1/4} G^{1/4} \kappa^{-1/4} (t_s - t)^{-3/2} \quad (17)$$

これより不安定さのスケールは t_s に近づきながら増加していく。一方 $t \approx t_s$ の範囲で宇宙膨張は止まってしまう。すると BEC は急速に崩壊して密度 ρ_l の局所的な構造となる。式 (17) より $t \approx t_s$ の範囲になる前に BEC が崩壊する時間は十分にある。

$$t_s - t > \frac{a}{k_*} \propto (t_s - t)^{3/2} \quad (18)$$

BEC の全要素が局所的な構造に変化し、そのたびに真空のエネルギーを消費する。これは真空のエネルギーが残っている限り何度も繰り返され、よって真空のエネルギーすなわち宇宙項は 0 に近づく。

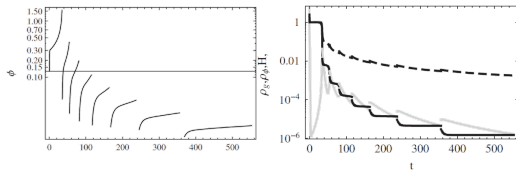


図 3: 場と密度の時間変化

6 観測との比較

まず観測との比較でよく用いられるスペクトル指数 $n_R = 1 - 6\epsilon + 2\eta$ とテンソルスカラー比 $r = P_T/P_R = 16\epsilon$ を BEC 宇宙論の場合について計算する。ボゾン

質量は小さいので無視するとして $V = V_0 - \frac{\kappa}{2}\phi^4$ を用いると、

$$n_R = 1 - \frac{3 \left(1 + \frac{9\mu^2 H_{inf}^2}{16\kappa N^2}\right)}{N \left(1 - \frac{9\mu^2 H_{inf}^2}{16\kappa N^2}\right)^2} = 1 - \frac{3}{N} + O\left(\frac{1}{N^3}\right)$$

$$r = \frac{9\mu^2 H_{inf}^2}{\kappa N^3 \left(1 - \frac{9\mu^2 H_{inf}^2}{16\kappa N^2}\right)^2} = \frac{9\mu^2 H_{inf}^2}{\kappa N^3} + O\left(\frac{1}{N^4}\right) \quad (19)$$

この式に具体的な値を代入して計算すると、

$$n_R \approx 0.95 \text{ for } N = 60$$

$$r \approx 4.2 \times 10^{-12} \text{ for } N = 60 \quad (20)$$

この時 $\mu H_{inf} = 10^{-4}$, $\kappa = 0.1$ を用いた。一方 Planck 衛星における観測の値は [3]

$$n_R = 0.9649 \pm 0.0042$$

$$r < 0.065 \quad (21)$$

WMAP では n_R も範囲内に入ることが確認できていたが、最新の Planck では少しずれてしまうことがわかった。

7 まとめ

BEC を用いた宇宙論で未解決問題へアプローチできることがわかったが、まだ定性的な話も多いのでパラメータなどもっと具体的に詰めていく必要がある。ここに書ききれなかったことも多いので詳細は講演を聞いていただきたい。

8 参考文献

現代宇宙論講義 (辻川信二 2013)

Reference

- [1]Nima Arkani-Hamed, Lawrence J. Hall, Christopher Kolda, & Hitoshi Murayama 2000, Physical Review Letters vol.85, no.21
- [2]Takeshi Fukuyama, & Masahiro Morikawa 2009, Physical Review D80, 063520
- [3]Planck Collaboration: N. Aghanim et al. 2018, Astronomy & Astrophysics manuscript no ms

a11

cubic-order Horndeski理論においてス
ケーリング解を持つ最も一般的 なラグ
ランジアンについて
東京理科大学大学院 理学研究科 辻川研
究室
竹村 希心

cubic-order Horndeski 理論においてスケーリング解を持つ最も一般的なラグランジアンについて

竹村 希心 (東京理科大学大学院 理学研究科 辻川研究室)

Abstract

cubic-order Horndeski 理論は様々なスカラー・テンソル理論を内包しており、模型によっては一様等方な背景時空においてスケーリング解を持つ場合がある。このような解を持つ場合、密度パラメータがその初期値に依らずにスケーリング期に一定値まで成長するため、偶然性問題を緩和することが可能である。本稿は [1] のレビューとして、cubic-order Horndeski 理論においてスケーリング解を持つ最も一般的なラグランジアンを導出し、その物理系で固定点解析を行いスケーリング解と加速膨張解が存在することを示す。また具体的な暗黒エネルギーモデルを考え、スカラー場と CDM とのカップリングがある場合に不安定性を回避出来る条件を示し、宇宙論的なダイナミクスを議論することでモデルパラメータに制限をつける。

1 研究背景

宇宙の後期加速膨張は様々な観測によって独立に示されている。それを説明する試みとして、動的なスカラー場を導入した数多くの理論が提唱されてきた。中でも運動方程式を 2 階微分に保つように構成された最も一般的なスカラー・テンソル理論は、Horndeski 理論という名前で知られている。近年、重力波の速度が 10^{-15} 程度の範囲で光速に近いことを示された為、もし Horndeski 理論に対して重力波の速度が光速と等価であるという条件を課すならば、そのラグランジアンは $L = G_2(\phi, X) - G_3(\phi, X)\square\phi + G_4(\phi)R$ (ただし $X = -\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi/2$) という形に制限される。

重力理論にスカラー場を導入すると、スケーリング解と呼ばれる、スカラー場と物質のエネルギー密度の比が宇宙膨張史の中で一定となる解を持つ場合がある。このような解が存在する場合、初期値に依らず、スケーリング期に宇宙論的パラメータが一定の値を持つようになるため、現在の物質とスカラー場のエネルギー密度が同オーダーとなる問題 (偶然性問題) を緩和することが可能である。

スカラー場のラグランジアンが $L_\phi = X - V(\phi)$ で記述されるクインテッセンスにおいては、 λ, V_0 を定数として、ポテンシャルが $V(\phi) = V_0e^{-\lambda\phi}$ の形の場合にスケーリング解が存在することが知られている [2]。また、スカラー場のラグランジアンが任意関

数 $G_2(\phi, X)$ で記述される k-エッセンスでは、 g_2 を $Y = Xe^{\lambda\phi}$ の任意関数として、 $G_2(\phi, X) = Xg_2(Y)$ の形の場合にスケーリング解が存在することが知られている [3]。

cubic-order Horndeski 理論においては、先行研究によってスケーリング解を持つ一般的なラグランジアンが示された [4]。しかし最近の研究で、同様の理論においてそのラグランジアンに含まれないスケーリング解が示された [5]。また文献 [6] でも同様に、[4] のラグランジアンがより一般化可能であることを示している。本稿ではこのスケーリング解を含むように [4] を拡張した最も一般的なラグランジアンを導出し、固定点解析を行うことによって系の時間発展を議論する。更に具体的な模型を用い、理論の安定性などからパラメータに対して制限を課し、そのダイナミクスについて議論する。

2 背景時空の方程式

以下の cubic-order Horndeski 理論の作用を考える

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2} + L \right) + S_m(\phi, g_{\mu\nu}), \quad (1)$$

$$L = G_2(\phi, X) - G_3(\phi, X)\square\phi.$$

ここで g は計量 $g_{\mu\nu}$ の行列式、 R はリッチスカラー、 G_2 と G_3 は、 ϕ と $X = -\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi/2$ に依存する任意

関数である。ただし、 $c = \hbar = M_{\text{pl}} = 1$ の単位系を用いている。また、エネルギー密度 ρ_m 、圧力 P_m で記述される物質場を、完全流体として扱う。

平坦な一様等方時空における計量

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j, \quad (2)$$

のもとで、作用 (1) は次の運動方程式を与える：

$$3H^2 = \rho_\phi + \rho_m, \quad (3)$$

$$2\dot{H} = -\rho_\phi - P_\phi - \rho_m - P_m, \quad (4)$$

$$\dot{\rho}_m + 3H(1 + w_m)\rho_m = Q(\phi)\rho_m\dot{\phi}, \quad (5)$$

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(1 + w_\phi)\rho_\phi = -Q(\phi)\rho_m\dot{\phi}, \quad (6)$$

ここで

$$\rho_\phi = \dot{\phi}^2 G_{2,X} - G_2 - \dot{\phi}^2 (G_{3,\phi} - 3H\dot{\phi}G_{3,X}), \quad (7)$$

$$P_\phi = G_2 - \dot{\phi}^2 (G_{3,\phi} + \dot{\phi}G_{3,X}), \quad (8)$$

であり、 $Q(\phi)$ は物質場とスカラー場のカップリングである。また、 $G_{i,\phi} = \partial G_i / \partial \phi$ 、 $G_{i,X} = \partial G_i / \partial X$ という記法を用いている。

(3) 式より、密度パラメータ $\Omega_i = \rho_i / 3H^2$ は次の関係に従う：

$$\Omega_\phi + \Omega_m = 1. \quad (9)$$

また、(4) 式より

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{3}{2}(1 + w_{\text{eff}}), \quad w_{\text{eff}} = w_\phi \Omega_\phi + w_m \Omega_m, \quad (10)$$

であり、 w_{eff} は実効的な状態方程式である。

3 スケーリング解を持つラグランジアン

スケーリング解は ρ_ϕ / ρ_m が一定となる解であり、状態方程式、密度パラメータは定数となる。この場合、(3) 式より ρ_ϕ と ρ_m は H^2 に比例するため、 $\dot{\phi} \propto H/Q(\phi)$ が成り立つ。文献 [1] では Q が ϕ の任意関数である場合にも導出を行っているが、本稿の議論では、カップリング Q が定数である場合においてスケーリングラグランジアンを導出する。

スカラー場のエネルギー密度 ρ_ϕ は (7) 式で与えられ、(3) 式で ρ_ϕ / ρ_m が一定の場合 ρ_ϕ は H^2 に比例す

ることから、 $G_2 \propto H^2$ 、 $G_{3,\phi} = \text{Const}$ でなければならない。すなわち、

$$\frac{\dot{G}_2}{HG_2} = 2\frac{\dot{H}}{H^2} = -3(1 + w_{\text{eff}}), \quad (11)$$

$$\dot{G}_{3,\phi} = 0, \quad (12)$$

であり、 $\dot{G}_i = G_{i,\phi}\dot{\phi} + G_{i,X}\dot{X}$ であることを用いると、

$$XG_{2,X} - \frac{1}{\lambda}G_{2,\phi} - G_2 = 0, \quad (13)$$

$$XG_{3,\phi X} - \frac{1}{\lambda}G_{3,\phi\phi} = 0, \quad (14)$$

という方程式を得る。ただし λ は以下のように定義される量である：

$$\lambda \equiv \frac{Q(1 + w_{\text{eff}})}{\Omega_\phi(w_m - w_\phi)}. \quad (15)$$

式 (13), (14) の解はそれぞれ

$$G_2(\phi, X) = Xg_2(Y), \quad (16)$$

$$G_3(\phi, X) = g_3(Y) + h_3(X), \quad (17)$$

ここで $g_2(Y)$ 、 $g_3(Y)$ は $Y \equiv Xe^{\lambda\phi}$ の任意関数である。 $h_3(X)$ は ρ_ϕ の中に $H^2 X h_{3,X}$ という項の形で表れ、これが H^2 に比例するためには、

$$h_3(X) = c + d \ln X = c + d(\ln Y - \lambda\phi), \quad (18)$$

という関係が成り立たなければならない。ただし c, d を定数である。よってラグランジアンは

$$L = Xg_2(Y) - g_3(Y)\square\phi - (c + d \ln Y - d\lambda\phi)\square\phi, \quad (19)$$

となるが、 $c\square\phi$ は表面項で落とすことができ、 $d \ln Y \square\phi$ は $g_3(Y)\square\phi$ に吸収できる。また、 $d\lambda\phi\square\phi$ は表面項を除いて $2d\lambda X$ と一致するので $Xg_2(Y)$ に吸収できる。

以上より、 Q が定数のときの一般的なスケーリングラグランジアンは次のようになる：

$$L = Xg_2(Y) - g_3(Y)\square\phi. \quad (20)$$

4 固定点解析

スケーリング解において、次で定義される無次元量は定数である：

$$x \equiv \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6}H}, \quad y \equiv \frac{e^{-\lambda\phi/2}}{\sqrt{3}H}, \quad Y \equiv Xe^{\lambda\phi} = \frac{x^2}{y^2}. \quad (21)$$

エネルギー密度や状態方程式はこれらの量で表現することができる。

$\epsilon_\phi \equiv \ddot{\phi}/H\dot{\phi}$, $\epsilon_h \equiv \dot{H}/H^2$ と定義すると、 x と y は次の自律方程式に従う：

$$x' = x(\epsilon_\phi - \epsilon_h), \quad (22)$$

$$y' = -y \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \lambda x + \epsilon_h \right). \quad (23)$$

ここで、プライム記号は $N = \ln a$ での微分を表す。この方程式系の固定点は $x' = y' = 0$ から得られ、ここでは特に重要な 2 つの解を紹介する。

Point 1 : ϕ -matter-dominated-epoch

一つ目に重要な固定点は、 $y = 0$ のときである。このとき $Y \rightarrow \infty$ によって発散量が生じるのを防ぐため、 c_n, d_n を定数として g_2, g_3 を

$$g_2(Y) = c_0 + \sum_{n>0} c_n Y^{-n}, \quad g_{3,Y}(Y) = \sum_{n \geq 1} d_n Y^{-n}, \quad (24)$$

という逆冪で定義する必要がある。このとき、固定点として

$$(x_c, y_c) = \left(\frac{\sqrt{6}[Q - 3d_1(w_m - 1)]}{3(s + 2d_1Q)}, 0 \right), \quad (25)$$

を得る。ただし $s \equiv (w_m - 1)(c_0 - 2d_1\lambda)$ である。

この点における密度パラメータ、状態方程式は、 $w_m = d_1 = 0$ のとき

$$\Omega_\phi = w_{\text{eff}} = \frac{2Q^2}{3c_0}, \quad (26)$$

である。 $Q = 0$ のときが通常の物質優勢期に対応しており、(26) 式はカップリング Q によって物質優勢期が修正を受けることを示している。このような時期を ϕ -matter-dominated-epoch(ϕ MDE) と言う。

また、(26) 式より ϕ MDE は

$$\frac{\rho_m}{\rho_\phi} = \frac{3c_0}{2Q^2} - 1 = \text{Const}, \quad (27)$$

を満たすスケーリング解である。

Point 2 : 後期加速膨張期

二つ目に重要な固定点は、

$$(x_c, y_c) = \left(\frac{\lambda - 6Y_c g_{3,Y}}{\sqrt{6}(G_{2,X} - \lambda Y_c g_{3,Y})}, y_c \right), \quad (28)$$

であり、このときの密度パラメータ、状態方程式は

$$\Omega_\phi = 1, \quad w_{\text{eff}} = -1 + \frac{\sqrt{6}}{3} \lambda x_c, \quad (29)$$

となり、 $\lambda x_c < \sqrt{6}/3$ で加速膨張をする。

5 暗黒エネルギーのダイナミクス

ここでは具体的に模型を決め、暗黒エネルギーのダイナミクスを調べる。仮定として、スカラー場が CDM のみとカップルしているとし、また (24) 式の g_2, g_3 について、 Y^{-2} 以下のオーダーは無視する。すなわち、

$$L = X + c_1 e^{-\lambda\phi} + \frac{d_2}{Y} \square\phi, \quad (30)$$

を仮定する。

ラグランジアン (30) のもとで、作用の 2 次摂動からゴースト、ラプラシアン不安定性が生じるのを防ぐ必要がある。ここで

$$q_s = 2 + \frac{4d_2 y^2}{x^4} (3d_2 y^2 - \sqrt{6}x), \quad (31)$$

$$c_s^2 = [6x^4 - 24d_2 \lambda x^2 y^2 - 12d_2^2 y^4 + 4\sqrt{6}d_2 x y^2 (2 - \epsilon_\phi)] / (3q_s x^4), \quad (32)$$

という量に対し、ゴースト、ラプラシアン不安定性を回避する条件はそれぞれ $q_s > 0$, $c_s^2 > 0$ である。

図 1 に密度パラメータの時間発展を示す。ただし $\Omega_c, \Omega_b, \Omega_r$ はそれぞれ CDM、バリオン、輻射の密度パラメータである。初め x の減少に伴い Ω_ϕ は減少するが、 $z = 10^6$ から $z = 20$ 付近の ϕ MDE までに $\Omega_\phi = 2Q^2/3$ まで増加する。

図 2 は状態方程式の時間発展である。現在において w_ϕ と w_{eff} の値は違うが、最終的に同じ値 $w_{\text{eff}} = w_\phi = -0.901$ に収束する。また、輻射優勢期では $y_c = 0$ 周りで w_{eff} を展開すると

$$w_{\text{eff}} = \frac{1}{3} + x^2 + \left[c_1 x + 2d_2 \left\{ \sqrt{6} - (Q + \lambda)x \right\} \right] \frac{y^2}{x} + \mathcal{O}(y^4), \quad (33)$$

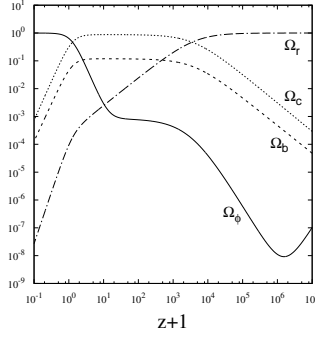


図 1: 密度パラメータの時間発展。モデルパラメータは $c_1 = -1, d_2 = 10^{-3}, Q = 0.04, \lambda = -0.5$ であり、初期条件は $z = 3.18 \times 10^7$ において $x = -10^{-3}, y = 10^{-13}, \Omega_b = 1.5 \times 10^{-5}, \Omega_r = 0.999895$ 。

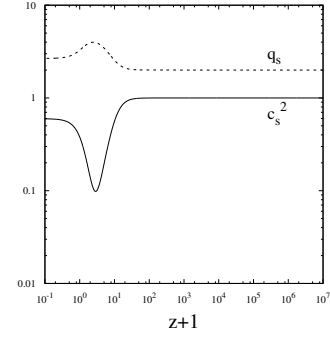


図 3: q_s と c_s^2 の時間発展。モデルパラメータ、初期条件は図 1 と同様。

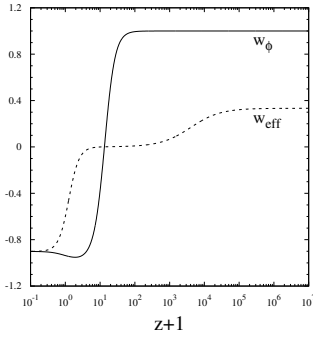


図 2: 状態方程式 w_ϕ, w_{eff} の時間発展。モデルパラメータ、初期条件は図 1 と同様。

であり、 $w_{\text{eff}} \simeq 1/3$ であるためには $|c_1 y^2/x^2| \ll 1, |d_2 y^2/x^2| \ll 1, x^2 \ll 1$ が必要である。

図 3 は q_s, c_s^2 の時間発展である。 ϕ MDE から後期加速膨張期に移る際に c_s^2 が減少しているが、後期加速膨張期では

$$c_s^2 = 1 - \frac{2(6 - \lambda^2)(10 - \lambda^2)}{c_1 \lambda^3} d_2 + \mathcal{O}(d_2^2), \quad (34)$$

と展開でき、 $\lambda = -\mathcal{O}(0.1)$ のとき $c_s^2 > 0$ であるためには $d_2/c_1 \lambda^3 \lesssim 10^{-2}$ が必要である。

6 まとめ

今回の研究ではまず、[4] の拡張として cubic-order Hrondeski 理論においてスケーリング解を持つ最も一般的なラグランジアンを導出した。また、 Q が定数の場合に固定点解析を行い、後期加速膨張期の前に ϕ MDE という、物質優勢期がスカラー場の寄与によって修正を受ける時期が存在することを示した。そしてスカラー場が CDM のみとカップルした場合に、具体的な模型を用いて不安定性が生じない条件を示し、モデルパラメータに対して制限をつけた。

Reference

- [1] N. Frusciante, R. Kase, N. J. Nunes and S. Tsujikawa, Phys. Rev. D 98, no. 12, 123517 (2018) [arXiv:1810.07957 [gr-qc]].
- [2] P. G. Ferreira and M. Joyce, Phys. Rev. Lett. 79, 4740 (1997) [astro-ph/9707286]; Phys. Rev. D 58, 023503 (1998) [astro-ph/9711102].
- [3] F. Piazza and S. Tsujikawa, JCAP 0407, 004 (2004) [hep-th/0405054].
- [4] A. R. Gomes and L. Amendola, JCAP 1403, 041 (2014) [arXiv:1306.3593 [astro-ph.CO]].
- [5] I. S. Albuquerque, N. Frusciante, N. J. Nunes and S. Tsujikawa, Phys. Rev. D 98, no. 6, 064038 (2018) [arXiv:1807.09800 [gr-qc]].
- [6] I. S. Albuquerque, D. Bettoni, G. Domenech and A. R. Gomes, JCAP 1806, 029 (2018) [arXiv:1803.06368 [gr-qc]].

a12

IDG 理論におけるブラックホールの内
部構造に対するスカラー場の影響につ
いて

東京学芸大学大学院 教育学研究科

小池 貴博

IDG 理論におけるブラックホールの内部構造に対するスカラー場の影響 について

小池 貴博 (東京学芸大学大学院 教育学研究科)

Abstract

一般相対性理論 (GR) におけるブラックホールの一般的な性質の 1 つは、その中心に時空特異点が存在することである。そこではブラックホールを構成する物質の密度や曲率が発散し、GR は予言力を失う。この特異点を回避するために、これまで多くの研究がなされてきたが、未だ解決には至っていない。これに対し、無限階の共変微分からなる微分演算子を導入することで、GR を修正した Infinite Derivative Gravity (IDG) 理論が盛んに研究されている。この理論の枠組みにおいて、Biswas らは 4 次元時空の静的球対称真空解を Minkowski バックグラウンドにおいて弱場近似を用いることで解を構築した [1]。この解は、物質として大きさを持たない質点源を仮定しているにもかかわらず、GR で予言される曲率特異点が回避される時空構造を持つ。そこで本発表では、一般に曲率をより激しく発散させるスカラー場を IDG 理論に導入し、この場合においても特異点が回避されるかどうかについて議論する。

1 Introduction

天体物理学においてブラックホールは高い関心が示されている対象であるが、その内部がどうなっているかはよくわかっていない。観測から、ブラックホールのホライゾン外部の領域は一般相対性理論によって良く記述されていることがわかっている。

ところが、ホライゾン内部は強い重力によって全質量が一点に集まっていると考えられるため、その点において物質の密度や曲率が無限大に発散し、一般相対性理論が破綻してしまう。特に、質量を持たないスカラー場が存在する時空では、ホライゾンに隠されていない特異点の存在が知られており、これを裸の特異点と呼ぶ。(3+1) 次元時空において裸の特異点を表す解は JNWW 解として知られている [2]。

この曲率特異点を回避するために、これまでに様々なモデルが考えられている。このような特異点を持たないブラックホールを広くレギュラーブラックホールと呼ぶ。例えば、時空に非可換性を持たせることにより、特異点が回避されるモデルが考えられている [3]。

上述の非可換性を考慮したレギュラーブラックホール時空に対して、スカラー場を導入した場合には原点で曲率が発散する解が得られてしまう。これは、物

質分布が原点において正則であるのに対し、スカラー場の分布が原点において発散してしまうものを仮定したためである。しかし、スカラー場の分布として妥当なものが何であるかについてはよくわかっていない。

これに対し、修正重力理論の 1 つであり、近年盛んに研究されている Infinite Derivative Gravity (IDG) 理論においても同様に静的球対称時空において、中心特異点を回避することが出来ることが示唆されている。この理論では、アインシュタイン-ヒルベルト作用に無限階の共変微分からなる微分演算子を導入することで、宇宙論初期やニュートンポテンシャルによる特異点が回避される。

本発表では、IDG 理論においてスカラー場を導入し、この場合においても特異点が回避されるかどうかについて議論する。

2 Infinite Derivative Gravity

4 次元時空において、最も一般的な 2 次曲率の作用は

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\mathcal{R} + \alpha_c (\mathcal{R}\mathcal{F}_1(\square_s)\mathcal{R} + \mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{F}_2(\square_s)\mathcal{R}^{\mu\nu} + \mathcal{R}_{\mu\nu\rho\sigma}\mathcal{F}_3(\square_s)\mathcal{R}^{\mu\nu\rho\sigma}) \right] \quad (1)$$

で与えられる。

ここで、 $\mathcal{F}_i(\square_s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{i,n} \square_s^n$ 、 $\square_s \equiv \square/M_s^2$ 、 $\square = g_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu$ はダランベール演算子であり、 $G = \frac{1}{M_p^2}$ は万有引力定数、 $\alpha_s \sim \frac{1}{M_s^2}$ は次元を持つカップリング定数である (M_s は理論のスケールを表すパラメータ)。

この作用の変分をとって得られる場の方程式は、複雑な非線形微分方程式となっているため、簡単に解くことが出来ない。そこで、以下では Minkowski バックグラウンド周りでの弱場近似

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad , \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (2)$$

をとることで、線形な微分方程式へと簡単化して議論する。

弱場近似の下で得られる場の方程式は、

$$\begin{aligned} a(\square)\square h_{\mu\nu} + b(\square)\partial_\sigma(\partial_\nu h_\mu^\sigma + \partial_\mu h_\nu^\sigma) \\ + c(\square)(\eta_{\mu\nu}\partial_\rho\partial_\sigma h^{\rho\sigma} + \partial_\mu\partial_\nu h) + \eta_{\mu\nu}d(\square)\square h \\ + f(\square)\square^{-1}\partial_\sigma\partial_\lambda\partial_\mu\partial_\nu h^{\lambda\sigma} = -16\pi G\tau_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} a + b &= 0 \\ c + d &= 0 \\ b + c + f &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

という拘束条件が課されており、これらのパラメータは $\mathcal{F}_i(\square_s)$ の線形結合で書かれる。

3 IDG 理論における singularity free な解

物質場として、質点源

$$\tau_{\mu\nu} = \rho\delta_\mu^0\delta_\nu^0 = m\delta^3(\vec{r})\delta_\mu^0\delta_\nu^0 \quad (5)$$

を仮定する。また線素は、弱場近似の形で

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi(r))dt^2 + (1 - 2\Psi(r))(dr^2 + r^2d\Omega^2) \quad (6)$$

とし、2つのメトリックポテンシャルを求める。

Bianchi 恒等式から、場の方程式 (3) のトレースと (0 0) 成分を解くだけでよい。

ここで、Newton ポテンシャルが静的であることから、トレースと (0 0) 成分はそれぞれ

$$(a - 3c)\square h + (4c - 2a + f)\partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} = 16\pi G\rho \quad (7)$$

$$a\square h_{00} + c\square h - c\partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} = -16\pi G\rho \quad (8)$$

となり、(5) について

$$\begin{aligned} 2(a - 3c)[\nabla^2\Phi - 4\nabla^2\Psi] &= 16\pi G\rho \\ 2(c - a)\nabla^2\Phi - 4c\nabla^2\Psi &= -16\pi G\rho \end{aligned} \quad (9)$$

となる。

ゴーストを回避するための条件として $f(\square) = 0$ ($a(\square) = c(\square)$) とする。その時 Newton ポテンシャルは

$$4a(\nabla^2)\nabla^2\Phi = 4a(\nabla^2)\nabla^2\Psi = 16\pi G\rho = 16\pi Gm\delta^3(\vec{r}) \quad (10)$$

として簡単に解ける。ここで、超弦理論の文脈から $a(\square) = e^{-\frac{\square}{M_s^2}}$ とすることで、

$$\Phi(r) = \Psi(r) = -\frac{Gm}{r} \operatorname{erf}\left(\frac{rM_s}{2}\right) \quad (11)$$

を得る。この時、メトリックポテンシャル (11) は原点 $r = 0$ において正則であり、曲率不変量も有限値をとる。

IDG 理論における特異点解消の構造についての詳細な解説は、共同研究者の太田が発表する。

4 Einstein-Scalar Gravity

スカラー場は、最も単純な種類の「物質」の1つである。これまでにスカラー場は現象論的モデル、特に重力理論において考慮されてきた。例えば宇宙論において、様々なタイプのスカラー場が暗黒エネルギーと暗黒物質をモデル化するために使われてきた。

一般相対性理論においてスカラー場を考慮する Einstein-Scalar Gravity では、ブラックホール解を構成する試みもこれまでになされている。最も単純なスカラー場の分布を仮定すると、よく知られている Janis-Newman-Winicour-Wyman 解 (JNWW 解) が得られる。しかし、この解はホライズンを持たず、裸の特異点と呼ばれる構造を持ち、ブラックホール解ではない。

4次元時空における Einstein-Scalar Gravity における最も単純な作用は

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (\mathcal{R} - 2(\partial\phi)^2) \quad (12)$$

と表され、変分をとって得られる場の方程式は、

$$\nabla^2\phi = 0 \quad (13)$$

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = 2(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial^\rho\phi\partial_\rho\phi) \quad (14)$$

である。

これを解いて得られる解は

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{b}{r}\right)^\gamma dt^2 + \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-\gamma} dr^2 + \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1-\gamma} r^2 d\Omega^2 \quad (15)$$

$$\phi = \frac{q}{b\sqrt{4\pi}} \ln\left(1 - \frac{b}{r}\right) \quad (16)$$

である。ここで、 $b = 2\sqrt{m^2 + q^2}$ 、 $\gamma = \frac{2m}{b}$ である。

5 IDG 理論におけるスカラー場の影響

本研究では、IDG 理論に対し massless スカラー場を導入し、それによる時空構造の影響について調べる。

作用は [4] を参考にし、JNWW 解のように最も単純なものと考え

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\mathcal{R} + \alpha_c (\mathcal{R}\mathcal{F}_1(\square_s)\mathcal{R} + \mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{F}_2(\square_s)\mathcal{R}^{\mu\nu} + \mathcal{R}_{\mu\nu\rho\sigma}\mathcal{F}_3(\square_s)\mathcal{R}^{\mu\nu\rho\sigma}) - 2(\partial\phi)^2 \right] \quad (17)$$

とする。弱場近似の下で、線形化された場の方程式は、

$$e^{-\frac{\square}{M_s}} [\square h_{\mu\nu} + (\eta_{\mu\nu}\partial_\rho\partial_\sigma h^{\rho\sigma} + \partial_\mu\partial_\nu h) - \partial_\sigma(\partial_\nu h_\mu^\sigma + \partial_\mu h_\nu^\sigma) - \eta_{\mu\nu}\square h] = -16\pi G\tau_{\mu\nu} \quad (18)$$

で与えられる。

スカラー場のエネルギー運動量テンソルは

$$\tau_{\mu\nu} = 2(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial^\rho\phi\partial_\rho\phi) \quad (19)$$

で定義される。

線素を

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi(r))dt^2 + (1 - 2\Psi(r))(dr^2 + r^2d\Omega^2) \quad (20)$$

と仮定すると、運動方程式の (0 0) 成分とトレース成分はそれぞれ

$$e^{-\frac{\nabla^2}{M_s}} [\nabla^2 h_{00} - \partial_i\partial_j h^{ij} + \nabla^2 h] = -16\pi G\tau_{00} \quad (21)$$

$$e^{-\frac{\nabla^2}{M_s}} [-2\nabla^2 h + 2\partial_i\partial_j h^{ij}] = -16\pi G\tau \quad (22)$$

であるから、2つのメトリックポテンシャルについての2つの微分方程式を得る:

$$e^{-\frac{\nabla^2}{M_s}} \nabla^2 \Psi = 4\pi G\tau_{00} \quad (23)$$

$$e^{-\frac{\nabla^2}{M_s}} \nabla^2 \Phi = 4\pi G(\tau + 2\tau_{00}) \quad (24)$$

$\tau = -2(\phi')^2$ 、 $\tau_{00} = (\phi')^2$ であるから、これを解くと

$$\Phi(r) = -\frac{Gm}{r} \operatorname{erf}\left(\frac{rM_s}{2}\right) \quad (25)$$

$$\Psi(r) = -\frac{Gm}{r} \operatorname{erf}\left(\frac{rM_s}{2}\right) + \frac{q^2 M_s}{2r} F\left(\frac{rM_s}{2}\right) \quad (26)$$

である。

ここで、

$$F(x) := e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt \quad (27)$$

は Dawson 関数である。

6 得られた解について

得られた解 (20,25,26) は、 $r \rightarrow \infty$ とした時、等方座標系で記述した JNWW 解について弱場近似をとったものに帰着することから、IR 領域において GR の振る舞いと一致する望ましい解が得られたといえる。

ここで注目すべき点は、スカラー場の分布自体は原点で発散するが、メトリックポテンシャル Φ 及び Ψ は原点で正則となり、曲率不変量

$$K \sim \frac{G^2 M_s^6 (10m^2 - 6\sqrt{\pi}mq^2 M_s + \pi q^4 M_s^2)}{6\pi} \quad (28)$$

も原点で有限値をとることである。

1節で取り上げたように、Nicolini のレギュラーブラックホール時空においてスカラー場を考慮すると、物質分布はガウシアンとなり原点で正則となるが、ス

カラー場の分布が原点で発散するものを仮定していたため、曲率不変量も発散してしまった。しかし、今回得られた解は、スカラー場の分布として発散するものを仮定しているにもかかわらず、曲率特異点が生じない解となっている。

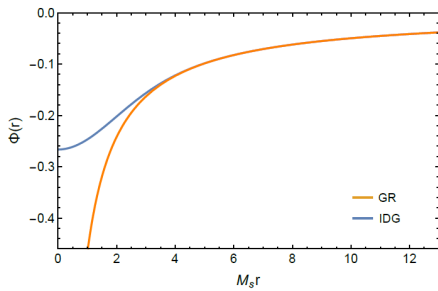


図 1: メトリックポテンシャル

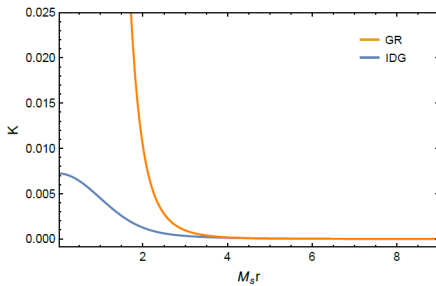


図 2: 曲率不変量

しかし、弱場近似の下で得られた解であるため、この解が強重力領域を正しく記述しているかどうかについては、非線形な場の方程式を解いて厳密解を得なければ議論することは出来ない。したがって、この厳密解を得ることが今後の目標の 1 つである。

また、Nicolini のレギュラーブラックホール時空中において、今回得たスカラー場の分布を用いて非線形方程式の解の構築を試みる。スカラー場がある時空中において、スカラー場のポテンシャルを考慮した上でブラックホール解を構築できることが知られているので、中心に曲率特異点を持たないブラックホール時空と今回得られたようなホライズンも曲率特異点も持たないコンパクトオブジェクト周りの時空の性質を比較する。

Reference

- [1]Biswas et al. 2012, Phys. Rev. Lett. 108, 031101
- [2]Janis et al. 1968, Phys. Rev. Lett. 20, 878
- [3]Nicolini et al. 2006, Phys. Lett. B 632, 547-551
- [4]Buoninfante et al. 2018, Phys. Rev. D 98, 084009

7 Conclusion & Future Work

我々は、IDG 理論において massless スカラー場を考慮し、その場合にも曲率特異点が回避されることを確認した。今回得られた解は、IR 領域における振る舞いが GR と一致し、UV 領域においては曲率が一定値となる時空構造を持つことがわかった。このことから、今回得られた解は、JNWW 解が示す裸の特異点に対して、ホライズンに覆われず特異点のない内部構造を持つコンパクトオブジェクトを表していると言える。

a13

Gauss-Bonnet 作用における metric 形式
と metric-affine 形式の非等価性
立教大学大学院 理学研究科
池田 拓人

Gauss-Bonnet 作用における metric 形式と metric-affine 形式の非等価性

池田 拓人 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

metric-affine 形式で重力理論を修正したとき、それが metric 形式と等価になっているかを議論する。

1 Metric-affine Einstein-Hilbert action

作用中の計量と接続のそれぞれを独立変数として導入する形式を metric-affine 形式という。なお、通常の形式は metric 形式という。

以下では、metric-affine 形式の Einstein-Hilbert 作用は metric 形式と等価であることを見る。

1.1 変分原理

次のような metric-affine 形式の作用を考える。

$$S[g, \Gamma, \psi] = \frac{1}{2\kappa} \int g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma) \sqrt{|g|} d^D x + S_{\text{matter}}[g, \psi] \quad (1.1)$$

なおここで、リーマンテンソルは

$$R_{\mu\nu\sigma}{}^\lambda(\Gamma) = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}{}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}{}^\lambda + \Gamma_{\mu\kappa}{}^\lambda \Gamma_{\nu\sigma}{}^\kappa - \Gamma_{\nu\kappa}{}^\lambda \Gamma_{\mu\sigma}{}^\kappa$$

で定義されている。以下では表記の簡便化のために、

$$\mathcal{R}_{\mu\nu\sigma}{}^\lambda \equiv R_{\mu\nu\sigma}{}^\lambda(\Gamma) \text{ などとかくことにする。}$$

作用 (1.1) の右辺第二項は matter 成分を表しているが、今回の設定では matter 成分は計量と場 ψ のみ依存し、接続 (やリーマンテンソル) には依存しないものとする。

また、今後の便利のために、次のように定義される振率テンソル $T_{\mu\nu}{}^\rho$ と、non-metricity テンソル $Q_{\mu\nu\rho}$ を導入する。

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}{}^\rho &\equiv \Gamma_{\mu\nu}{}^\rho - \Gamma_{\nu\mu}{}^\rho \\ Q_{\mu\nu\rho} &\equiv -\nabla_\mu g_{\nu\rho} \end{aligned}$$

さて、ここでエネルギー-運動量テンソルを

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_{\text{matter}}}{\delta g^{\mu\nu}}$$

で定義して、計量で作用 (1.1) の変分をとると

$$0 = \frac{2\kappa}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \mathcal{R}_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} + \kappa \mathcal{T}_{\mu\nu} \quad (1.2)$$

が得られる。また、接続で作用 (1.1) の変分を取ると

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \delta S(g, \Gamma) \\ &= \int d^D x \sqrt{|g|} (\delta \Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda) \\ &\quad \times \left[\nabla_\lambda g^{\mu\nu} + \left(\frac{1}{2} g^{\sigma\tau} \nabla_\lambda g_{\sigma\tau} + T_{\lambda\sigma}{}^\sigma \right) g^{\mu\nu} - \nabla_\rho g^{\rho\nu} \delta_\lambda^\mu \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{2} g^{\sigma\tau} \nabla_\rho g_{\sigma\tau} + T_{\rho\sigma}{}^\sigma \right) g^{\rho\nu} \delta_\lambda^\mu + g^{\rho\nu} T_{\rho\lambda}{}^\mu \right] \quad (1.3) \end{aligned}$$

となる。

これらの計量と接続のオイラー-ラグランジュ方程式 (1.2)-(1.3) は $D > 2$ の場合には簡単化できて、次のようになる。

$$(1.2) \rightarrow \mathcal{R}_{(\mu\nu)}(\Gamma) = -\kappa \left[\mathcal{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{D-2} g_{\mu\nu} \mathcal{T} \right]$$

$$(1.3) \rightarrow \nabla_\lambda g_{\mu\nu} - T_{\nu\lambda}{}^\sigma g_{\sigma\mu} - \frac{1}{D-1} T_{\sigma\lambda}{}^\sigma g_{\mu\nu} - \frac{1}{D-1} T_{\sigma\nu}{}^\sigma g_{\mu\lambda} = 0$$

ここで、前者はアインシュタイン方程式を表していて、後者は Palatini equation と呼ばれる代数方程式を表している。この式の一般解は

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^\rho = \hat{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\rho - \frac{1}{D-1} T_{\sigma\mu}{}^\sigma \delta_\nu^\rho$$

で与えられる。なお、 $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\rho$ は Levi-Civita 接続を表している。

さらにこの式で $T_{\lambda\sigma}{}^\sigma = -(D-1)A_\lambda$ とおくと

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^\rho = \bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\rho \equiv \hat{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\rho + \mathcal{A}_\mu \delta_\nu^\rho \quad (1.4)$$

と簡明な形で書くことができる。^{*1}

こうして、Palatini equation の一般解を得ることができた。なお、この接続を Palatini 接続と呼ぶ。

1.2 作用の不変性

これらの Palatini 接続 (1.4) 同士は projective 変換と呼ばれる次のような変換で結びついている。

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^\sigma \rightarrow \bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\sigma = \Gamma_{\mu\nu}{}^\sigma + k_\mu \delta_\nu^\sigma$$

いま、簡単のために Levi-Civita 接続からの projective 変換を考えると、変換後の接続について

$$Q_{\lambda\mu\nu} = 2A_\lambda g_{\mu\nu} \quad (1.5)$$

$$T_{\mu\nu}{}^\sigma = A_\mu \delta_\nu^\sigma - A_\nu \delta_\mu^\sigma \quad (1.6)$$

という関係式が成り立っている。このとき曲率の変換性はそれぞれ

$$\bar{R}_{\mu\nu\rho}{}^\lambda = \dot{R}_{\mu\nu\rho}{}^\lambda + F_{\mu\nu} \delta_\rho^\lambda \quad (1.7)$$

$$\bar{R}_{\mu\nu} = \dot{R}_{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \quad (1.8)$$

$$\bar{R} = \dot{R}$$

と書き表せる。なお、ここで、 $F_{\mu\nu}(\mathcal{A}) = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu$ としたほか、式中で上に丸がついている量は Levi-Civita 接続についての、バー付きの量は Palatini 接続についてのリーマンテンソルなどを表している。今後もこのような記法をとる。

これらの曲率の変換性を見ると、projective 変換の下で作用 (1.1) が不変なことがわかる。

ただし、(1.5)、(1.6) から、リーマンテンソル (1.7) とリッチテンソル (1.8) は Levi-Civita 接続の時には満たされていた対称性が満たされなくなっていることには注意する。^{*2}

1.3 測地線方程式の不変性

前節と同様に、Levi-Civita 接続からの projective 変換を考える。

速度ベクトル v^μ 、パラメータ β などと書くことにし、この変換後の接続についての測地線方程式 $v^\mu \nabla_\mu v^\rho = 0$ を書き下すと

$$\frac{dv^\rho}{d\beta} + \bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\rho v^\mu v^\nu = 0$$

となる。この式は $-k_\mu v^\mu \equiv f(\beta)$ とおいて、Levi-Civita 接続を用いて書き直すと

$$\frac{dv^\rho}{d\beta} + \dot{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\rho v^\mu v^\nu = f(\beta) v^\rho$$

のようになる。

この表式はアフィンパラメータ以外を使用した際の測地線方程式に他ならないので、 β をアフィンパラメータ α に取り直すことで

$$\frac{du^\rho}{d\alpha} + \dot{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\rho u^\mu u^\nu = 0$$

と Levi-Civita 接続での測地線方程式に帰着させることができる。なお、ここでパラメータを取り直した際の速度ベクトルを u^μ とした。

1.4 まとめ

こうして、Levi-Civita 接続と Palatini 接続とを比較すると、それぞれで書いた作用と測地線方程式は同じ表式であることがいえた。この意味で、metric 形式と metric-affine 形式とは物理的に等価である。

つまり、metric-affine 形式を修正重力として考えるなら、metric-affine 形式の Einstein-Hilbert 作用は、記述する物理を修正できていないことがわかる。

2 Metric-affine Gauss-Bonnet theory

2.1 Metric-affine Lovelock theory

まず、metric-affine 形式では D 次元で k 次の Lovelock 作用 (Pure Lovelock) は次のように定義される。

$$S = \int d^D x \sqrt{|g|} \delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_k \beta_k}^{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_k \nu_k} \mathcal{R}_{\mu_1 \nu_1}^{\alpha_1 \beta_1} \dots \mathcal{R}_{\mu_k \nu_k}^{\alpha_k \beta_k} \quad (2.1)$$

なお、式中の完全反対称クロネッカーのデルタは次のように定義されている。

$$\delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_k \beta_k}^{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_k \nu_k} = \delta_{\alpha_1}^{[\mu_1} \delta_{\beta_1}^{\nu_1} \dots \delta_{\alpha_k}^{\mu_k} \delta_{\beta_k}^{\nu_k]}$$

^{*1} なお、ここで明らかに $A_\mu = 0$ が Levi-Civita 接続に対応していて、この解が Levi-Civita 接続を拡張したような解になっていることがわかる

^{*2} ここで、リッチテンソルの対称成分だけを抜き出すと $R_{(\mu\nu)}(\Gamma) = R_{\mu\nu}(g)$ となり、Levi-Civita 接続の場合の結果と一致する

ここで、metric-affine 形式の Lovelock 作用を変分するとき便利な量

$$\Sigma^{\mu\nu\alpha}{}_{\beta} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta \mathcal{R}_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}} \quad (2.2)$$

を導入する。これは Lovelock 作用 (2.1) においては次のような表式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Sigma^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} &= g_{\alpha\sigma} \Sigma^{\mu\nu\sigma}{}_{\beta} \\ &= k \delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu\rho_2\lambda_2 \dots \rho_k\lambda_k} \mathcal{R}_{\rho_2\lambda_2}{}^{\gamma_2\epsilon_2} \dots \mathcal{R}_{\rho_k\lambda_k}{}^{\gamma_k\epsilon_k} \end{aligned}$$

さて、この $\Sigma^{\mu\nu\alpha}{}_{\beta}$ を用いると、(2.1) は

$$S = \frac{1}{k} \int d^D x \sqrt{|g|} \mathcal{R}_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta} \Sigma^{\mu\nu\alpha}{}_{\beta} \quad (2.3)$$

と簡明にかける。このとき、計量と接続に関するオイラーラグランジュ方程式はそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mu\nu\rho}{}^{\lambda} \Sigma^{\mu\nu}{}_{\sigma\lambda} + \mathcal{R}_{\mu\nu\sigma}{}^{\lambda} \Sigma^{\mu\nu}{}_{\rho\lambda} \\ - \frac{1}{k} g_{\rho\sigma} \mathcal{R}_{\mu\nu\alpha\beta} \Sigma^{\mu\nu\alpha\beta} = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} \Sigma^{\mu\nu\alpha}{}_{\beta} - \frac{1}{2} Q_{\mu\lambda}{}^{\nu} \Sigma^{\mu\nu\alpha}{}_{\beta} \\ - T_{\sigma\mu}{}^{\nu} \Sigma^{\mu\nu\alpha}{}_{\beta} - \frac{1}{2} T_{\mu\sigma}{}^{\nu} \Sigma^{\mu\sigma\alpha}{}_{\beta} = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

となっている。

ここで接続を Levi-Civita 成分とそれ以外のテンソル成分とに分けて

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^{\rho} = \mathring{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\rho} + K_{\mu\nu}{}^{\rho}$$

とかくことにし、Levi-Civita 接続における共変微分 $\mathring{\nabla}_{\mu}$ を用いると (2.5) は次のように簡単化できる。

$$\mathring{\nabla}_{\mu} \Sigma^{\mu\nu\alpha}{}_{\beta} + K_{\mu\rho}{}^{\alpha} \Sigma^{\mu\nu\rho}{}_{\beta} - K_{\mu\beta}{}^{\rho} \Sigma^{\mu\nu\alpha}{}_{\rho} = 0 \quad (2.6)$$

さらに、これらの式から、接続の運動方程式 (2.6) の必要条件式

$$(K_{\mu\rho\alpha} + K_{\mu\alpha\rho}) \Sigma^{\mu\nu\rho}{}_{\beta} + (K_{\mu\rho\beta} + K_{\mu\beta\rho}) \Sigma^{\mu\nu\rho}{}_{\alpha} = 0 \quad (2.7)$$

が得られる。

2.2 Levi-Civita connection

Levi-Civita 接続では $\mathring{K}_{\mu\nu}{}^{\rho} = 0$ が恒等的に成り立つから、接続の方程式 (2.6) に Levi-Civita 接続を代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned} 0 &= \mathring{\nabla}_{\mu} \mathring{\Sigma}^{\mu\nu\alpha}{}_{\beta} \\ &= k(k-1) \delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu\rho_2\lambda_2 \dots \rho_k\lambda_k} \\ &\quad \times \mathring{\nabla}_{\mu} \mathring{\mathcal{R}}_{\rho_2\lambda_2}{}^{\gamma_2\epsilon_2} \mathring{\mathcal{R}}_{\rho_3\lambda_3}{}^{\gamma_3\epsilon_3} \dots \mathring{\mathcal{R}}_{\rho_k\lambda_k}{}^{\gamma_k\epsilon_k} \end{aligned}$$

これは、Levi-Civita 接続におけるリーマンテンソルの第二ビアンキ恒等式 $\mathring{\nabla}_{[\mu} \mathring{\mathcal{R}}_{\nu\rho]\lambda}{}^{\sigma} = 0$ から、自動的に成立している。

一方、計量の方程式 (2.4) は

$$\begin{aligned} \mathring{\mathcal{R}}_{\mu\nu\rho}{}^{\lambda} \mathring{\Sigma}^{\mu\nu}{}_{\sigma\lambda} + \mathring{\mathcal{R}}_{\mu\nu\sigma}{}^{\lambda} \mathring{\Sigma}^{\mu\nu}{}_{\rho\lambda} \\ - \frac{1}{k} g_{\rho\sigma} \mathring{\mathcal{R}}_{\mu\nu\alpha\beta} \mathring{\Sigma}^{\mu\nu\alpha\beta} = 0 \end{aligned}$$

と書き改められるが、これは metric 形式における重力場の方程式に他ならない。

こうして、metric-affine Lovelock theory は Levi-Civita 接続を解として含むことがわかった。

2.3 Projective symmetry

次に、一般の Lovelock Σ テンソル (2.2) に対して、projective 変換に対する変換性を考えると

$$\begin{aligned} \Sigma^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} &\rightarrow \\ \bar{\Sigma}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} &= k \delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu\rho_2\lambda_2 \dots \rho_k\lambda_k} \\ &\quad \times \left[\mathcal{R}_{\rho_2\lambda_2}{}^{\gamma_2\epsilon_2} + F_{\rho_2\lambda_2} g^{\gamma_2\epsilon_2} \right] \\ &\quad \times \dots \\ &\quad \times \left[\mathcal{R}_{\rho_k\lambda_k}{}^{\gamma_k\epsilon_k} + F_{\rho_k\lambda_k} g^{\gamma_k\epsilon_k} \right] \\ &= \Sigma^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

のように不変となる。

また、これと (1.7) とから、同様の計算により

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{R}}_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} \bar{\Sigma}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} &= [\mathcal{R}_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} + F_{\mu\nu}(A) g^{\alpha\beta}] \Sigma^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \\ &= \mathcal{R}_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} \Sigma^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

が得られる。つまり、projective 変換のもとで作用 (2.3) は不変だから、元々の表式 (2.1) も不変となる。

Einstein-Hilbert 作用の時と同様に、これらの (projective 変換でつながる) 接続の解は、物理的に

等価であることが言えるから、Lovelock theory の運動方程式を満たすような接続のなす空間は、等価な接続のセットのクラス $[\Gamma]$ で構成されていることがわかる。^{*3}ここで、異なるクラスに属する接続は、一般に違った物理を記述する。

2.4 Metric-affine Gauss-Bonnet theory

以下では、Lovelock theory において、Einstein-Hilbert の次の次数である $k = 2$ の時に、非自明な解 ($[\tilde{\Gamma}]$ 以外のクラスに属する解) を探す。

D 次元で $k = 2$ の Lovelock theory は Gauss-Bonnet theory と呼ばれ、そのラグランジアン密度は次で与えられる。^{*4}

$$\mathcal{L}_{\text{GB}}^{(D)}(g, \Gamma) = \sqrt{|g|} \delta_{\alpha\beta\gamma\epsilon}^{\mu\nu\rho\lambda} \mathcal{R}_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}(\Gamma) \mathcal{R}_{\rho\lambda}{}^{\gamma\epsilon}(\Gamma)$$

このとき、 Σ テンソル (2.2) は次のように表される。

$$\Sigma_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = 2\delta_{\alpha\beta\gamma\epsilon}^{\mu\nu\rho\lambda} \mathcal{R}_{\rho\lambda}{}^{\gamma\epsilon}(\Gamma)$$

次に、Weyl 接続と呼ばれる接続を考える。この Weyl 接続は任意のベクトル場 A_μ, B_μ, C_μ を用いて

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\rho = \mathring{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\rho + A_\mu \delta_\nu^\rho + B_\nu \delta_\mu^\rho - C^\rho g_{\mu\nu} \quad (2.8)$$

のように表されている。

この Weyl 接続で書いたリーマンテンソルは次のようになっている。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}}_{\mu\nu\rho}{}^\lambda &= \mathring{\mathcal{R}}_{\mu\nu\rho}{}^\lambda + F_{\mu\nu}(A) \delta_\rho^\lambda \\ &+ \left[\mathring{\nabla}_\mu B_\rho - B_\mu B_\rho \right] \delta_\nu^\lambda - \left[\mathring{\nabla}_\nu B_\rho - B_\nu B_\rho \right] \delta_\mu^\lambda \\ &- \left[\mathring{\nabla}_\mu C^\lambda - C_\mu C^\lambda \right] g_{\nu\rho} + \left[\mathring{\nabla}_\nu C^\lambda - C_\nu C^\lambda \right] g_{\mu\rho} \\ &- B_\sigma C^\sigma \left[\delta_\mu^\lambda g_{\nu\rho} - \delta_\nu^\lambda g_{\mu\rho} \right] \end{aligned}$$

^{*3} つまり、同じクラスに属する接続は projective 変換で結ばれている

^{*4} なお、metric 形式でするように、このラグランジアン密度を曲率テンソルを用いて書き下すと

$$\mathcal{L} = \frac{1}{3!} \sqrt{|g|} \left[\mathcal{R}^2 - \mathcal{R}_{\mu\nu}^{(1)} \mathcal{R}^{(1)\nu\mu} + 2\mathcal{R}_{\mu\nu}^{(1)} \mathcal{R}^{(2)\nu\mu} - \mathcal{R}_{\mu\nu}^{(2)} \mathcal{R}^{(2)\nu\mu} + \mathcal{R}_{\mu\nu\rho\lambda} \mathcal{R}^{\rho\lambda\mu\nu} \right]$$

となる。ここで、 $\mathcal{R}_{\mu\nu}^{(1)} = \mathcal{R}_{\mu\lambda\nu}{}^\lambda$ はリッチテンソルを、 $\mathcal{R}_{\mu\nu}^{(2)} = g^{\rho\lambda} \mathcal{R}_{\mu\rho\lambda\nu}$ はコリッチテンソルを、 $\mathcal{R} = g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{\mu\nu}^{(1)}$ はリッチスカラーを表している。ただし、以下では Σ テンソルによる解析をするので、この表式は使わない

さて、ここで Weyl 接続 (2.8) を接続方程式の必要条件式 (2.7) に代入すると

$$\begin{aligned} 0 &\equiv (\tilde{K}_{\mu\rho\alpha} + \tilde{K}_{\mu\alpha\rho}) \tilde{\Sigma}^{\mu\nu\rho}{}_\beta + (\tilde{K}_{\mu\rho\beta} + \tilde{K}_{\mu\beta\rho}) \tilde{\Sigma}^{\mu\nu\rho}{}_\alpha \\ &= 2(B_\rho - C_\rho) \tilde{\Sigma}_{(\alpha}{}^{\nu\rho}{}_{\beta)} - 2(B_{(\alpha} - C_{(\alpha}) \tilde{\Sigma}^{\mu\nu}{}_{\beta)\mu} \end{aligned}$$

を得る。これは $B_\mu = C_\mu$ の時にのみ満たされる。

この事実から、接続の運動方程式を満たすためには少なくとも $B_\mu = C_\mu$ でなくてはならないことがわかる。さらに projective symmetry から A_μ は好きに選んでも物理的に等価であることがわかっている。簡単のために $A_\mu = B_\mu$ を満たすように選び、(2.8) を以下のように書き換える。このようにしても Weyl 接続のうち、解として存在するクラスは全く失われていない。

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\rho = \mathring{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\rho + B_\mu \delta_\nu^\rho + B_\nu \delta_\mu^\rho - B^\rho g_{\mu\nu} \quad (2.9)$$

このように書き換えた Weyl 接続 (2.9) を接続方程式 (2.6) に代入すれば、煩雑な計算により、 $D = 4$ で任意のベクトル場 B_μ に対して等号が成り立つことがいえる。

さて、metric-affine 形式の Gauss-Bonnet theory は Weyl 接続 (2.9) という、Levi-Civita 接続とは物理的に異なるクラスに属する接続を解に持っていることがわかった。これは、metric-affine 形式の Lovelock theory は一般には metric 形式と等価ではないことを意味する。

つまり、metric-affine 形式は、Lovelock theory をさらに修正できる重力理論として期待ができる。

Reference

- [1] B. Janssen, A. Jiménez-Cano and J. A. Orejuela, Phys. Lett. B **795**, 42 (2019)
- [2] A. N. Bernal, B. Janssen, A. Jimenez-Cano, J. A. Orejuela, M. Sanchez and P. Sanchez-Moreno, Phys. Lett. B **768**, 280 (2017)
- [3] M. Borunda, B. Janssen and M. Bastero-Gil, JCAP **0811**, 008 (2008)
- [4] A. Yale and T. Padmanabhan, Gen. Rel. Grav. **43**, 1549 (2011)
- [5] T. Padmanabhan and D. Kothawala, Phys. Rept. **531**, 115 (2013)

a14

水面波メタマテリアルの実装とその宇宙論的応用について

東京学芸大学大学院 教育学研究科

楠見 蛍

水面波メタマテリアルの実装とその宇宙論的応用について

楠見 蛍 (東京学芸大学大学院 教育学研究科)

Abstract

膨張している現在の宇宙から過去へさかのぼると、宇宙は曲率が発散する特異点から始まったことになる。その特異点を回避するために、Hawking らは「虚時間」という数学的概念を導入した (Hartle et al. 1983)。虚時間から実時間に変化する時、時空構造は $(4+0)$ 次元 Euclidean 空間から $(3+1)$ 次元 Minkowski 時空へと変化する。2010 年、Smolyaninov は比誘電率を正から負に変化させることが可能なメタマテリアルという人工媒体を用いて、その時間符号変化をモデル化できると考えた (Smolyaninov 2010)。その結果、虚時間から実時間に切り替わった瞬間、エントロピーが増大することが示唆された。メタマテリアルとは、自然界の性質にはない振る舞いを示す人工媒体である。はじめは負の屈折率を示すものとして実装された。そこから比誘電率や比透磁率を空間的に自在に設計できるものとして研究され、時間符号変化のモデル化に用いられた。そこで我々は、この時間符号変化の水面波によるモデル実験の実装を目指した。水面波に対して負の屈折率を示すメタマテリアルは、2018 年飯田によって理論的および数値的に示されている (Iida 2018)。本研究ではそれを実装し、負の屈折率の現象を観察した。本発表では、その実験結果の報告と、時間符号変化をはじめとする水面波メタマテリアルの宇宙論への応用の可能性について議論する。

1 はじめに

メタマテリアルとは自然界の物質にはない振る舞いを示す人工媒体の総称である。1999 年、Pendry らは小さな金属の構造体を配列することで、比誘電率と比透磁率を操作し、有効的に負の屈折率を実現するメタマテリアルの存在を理論的に示した (Pendry 1999)。これを皮切りに現在盛んに研究されているが、その中でも宇宙論的応用の可能性が注目されている。

膨張している現在の宇宙から過去へさかのぼると、宇宙は密度と曲率が発散する特異点から始まったことになる。その特異点を回避するために、Hawking らは「虚時間」という数学的概念を導入した (Hartle et al. 1983)。虚時間から実時間に変化する時、時空構造は $(4+0)$ 次元 Euclidean 空間から $(3+1)$ 次元 Minkowski 時空へと変化するが、そこでどのような現象が起きるかは明らかにはなっていない。

2010 年、Smolyaninov らは比誘電率を正から負に変化させることが可能なメタマテリアルを用いて、 $(3+0)$ 次元 Euclidean 空間から $(2+1)$ 次元 Minkowski 時空への低次元での時間符号変化をモデル化できると考えた (Smolyaninov 2010)。その結果、虚時間から実時間に切り替わった瞬間、エントロピー

が増大することが示唆された。しかし、この研究はまだ理論的な予想に留まっているため、実際にこのモデルの実験からどのような現象が観察されるのか確かめる必要がある。

そこで我々は、この時間符号変化の水面波によるモデル実験の実装を目指した。先行研究では光による実験を想定していたが、水の波で実験を行うことは比較的容易に可視化できるという利点がある。水面波に対して負の屈折率を示すメタマテリアルは、2018 年飯田によって理論的および数値的に示されている (Iida 2018)。しかし、実装には至っていなかった。そこで、本研究ではそれを実装し、その結果、負の屈折率を示す水面波の振る舞いを観測することができた。本発表では、その実験結果の報告と、時間符号変化をはじめとする水面波メタマテリアルの宇宙論への応用の可能性について議論する。

本稿では、まず時間符号変化をメタマテリアルでどのようにモデル化するかを述べたあと、負の屈折率を示すメタマテリアルの理論を示し、実験の内容について記述する。

2 時間符号変化

Hartle と Hawking は、宇宙のはじまりの曲率特異点を回避するために、数学的手法として虚時間を導入し、宇宙は実時間では有限な大きさから始まったと仮定した。これは、Minkowski 時空の実時間を虚時間に置き換え ($\tau = it$)、Euclidean 空間を考えることに相当する。これを時間符号変化とよぶ。その結果、時空構造を表す計量はそれぞれ以下のようになる。

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (1)$$

$$ds^2 = d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2)$$

つまり Hawking らのアイデアでは、宇宙初期に、(+, +, +, +) の (4+0) 次元 Euclidean 空間から (+, +, +, -) の (3+1) 次元 Minkowski 時空へ切り替わったことで宇宙が生まれたことになる。この時間符号変化をメタマテリアルでモデル化する。

3 時間符号変化のモデル化

そもそもメタマテリアルは光に対して負の屈折率を示す人工媒体として発明された。自然界の物質は正の屈折率しか持たない。それは、光の屈折率の定義は比透磁率 μ_r と比誘電率 ϵ_r の積の根号で表されると考えられていたためである。しかし、1968 年 Veselago は比透磁率と比誘電率の各々の根号の積であると捉えなおせば、負の屈折率を示す媒体が存在する可能性があると考えた。つまり、屈折率 n を

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} = \sqrt{\epsilon_r} \sqrt{\mu_r}, \quad (3)$$

とすると、比透磁率と比誘電率が各々負であるとき、純虚数同士の積になり負の値をとる。そして、1990 年代後半に Pendry らは金属のリングを配列することで負の屈折率を示すような人工媒体を理論的に示し (Pendry 1999)、2000 年には Shelby らが実際に実装し (Shelby 2000)、そのような人工媒体はメタマテリアル (「メタ」は「超越」という意味を持つ) と名付けられた。それを皮切りに、メタマテリアルの研究は急速に発展していき、負の屈折率を示すものだけでなく、比誘電率や比透磁率を空間的に自在に設

計することができるようになった。

先行研究で考えられたメタマテリアルは、石英をベースとし、その中に間隔 $a (= 10^{-8} \text{m})$ でガリウム製の薄い層を重ねた人工媒体である。本稿ではこのメタマテリアルを “Variable hyperbolic metamaterial (VHM)” と呼ぶことにする。通過する光の波長よりも十分小さい構成単位の構造体を VHM が持っている場合、その構造体の集合は一つの媒質とみなせる。これを有効媒質理論といい、その中の Maxwell-Garnet 近似を用いると、有効的な比誘電率は以下のようになる。

$$\epsilon_1 (= \epsilon_x = \epsilon_y) = n\epsilon_m + (1-n)\epsilon_d, \quad (4)$$

$$\epsilon_2 (= \epsilon_z) = \frac{\epsilon_m \epsilon_d}{(1-n)\epsilon_m + n\epsilon_d}. \quad (5)$$

ここで n はガリウムの体積充填率、 ϵ_m はガリウムの誘電率、 ϵ_d は石英の誘電率である。式 (4) から、ガリウムの固体から液体への相転移によって、 ϵ_1 のみが正から負の値に変わる。この誘電率の符号変化は、VHM 中の波動方程式に影響を及ぼし、その波動方程式を介して時間符号変化へと対応づけられる。

VHM 中の z 方向の電場 ($\phi_{\omega,k}$) は以下で表される。

$$\frac{\omega^2}{c^2} \phi_{\omega,k} = \frac{k_z^2}{\epsilon_1} \phi_{\omega,k} + \frac{k_x^2 + k_y^2}{\epsilon_2} \phi_{\omega,k} (\epsilon_1 > 0), \quad (6)$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} \phi_{\omega,k} = -\frac{k_z^2}{|\epsilon_1|} \phi_{\omega,k} + \frac{k_x^2 + k_y^2}{\epsilon_2} \phi_{\omega,k} (\epsilon_1 < 0). \quad (7)$$

これらの方程式は、波数空間での (3+1) 次元と (4+0) 次元の Klein-Gorden 方程式に対応する。Smolyaninov らは、VHM を用いると (3+0) 次元空間から (2+1) 次元時空の低次元時間符号変化のモデル化ができると解釈した。これは、実験室系に流れる時間自体は人為的に操作をすることが不可能なためである。

このモデル化によって、時間符号変化の際にはエントロピーが増大することが示唆される。これは、メタマテリアルでモデル化した誘電率の符号の変化によって、分散関係が変化し、状態密度が増えることから考えられた。確かに、式 (6) から $\epsilon_1 > 0$ の時は波数分散関係が楕円型であり、式 (7) から $\epsilon_1 < 0$ の時は一葉双曲線型であり (図 1)、誘電率の符号変化によって VHM がもち得る状態密度は増大する (K_M はカットオフ周波数)。したがって、メタマテリアル

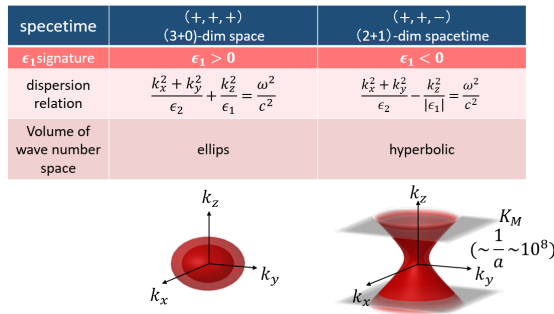


図 1: Dispersion relation of VHM

のモデル化により、虚時間から実時間に切り替わったときにエントロピーが増大することが示唆された。

4 水面波メタマテリアル

メタマテリアルのモデル化によって時間符号変化に関して新たな知見は得られたが、実際に実験を試みなければエントロピーが増大する、というのがどのような現象を引き起こすのかは分からない。しかし、光の実験は波の様子を観察するのが困難である。そこで、我々は水の波のメタマテリアルに注目した。モデル化するにあたって、初めからこの時間符号変化を水の波でモデル化するのではなく、電磁メタマテリアルのときと同様に段階を踏んで、まずは負の屈折率を示すような水面波メタマテリアルの実装を目指した。負の屈折率を示す水面波のメタマテリアルは、2018 年飯田によって理論的・数値的に示されている (Iida 2018)。

すでに負の屈折率を実装していた「伝送線路メタマテリアル」のアナロジーによって、水面波メタマテリアルは構築される。伝送線路は、電力信号を伝送するための配線（同軸ケーブルなど）であり、伝送線路理論とは電気回路理論に距離や時間の概念を入れた理論のことである。通常の電気回路理論では、回路がごく短いので電圧や電流を定数として扱うが、伝送線路理論では回路に流れる電流や電圧の周波数や、波長に対する回路の長さを考慮することで、それらの波動的性質が現れるようになる。伝送線路内の電圧 V と電流 I の関係を表す式は電信方程式とよばれ、これは変形すると波動方程式になる。水路内を

流れる水の波では、水圧 P と全流量 U の波動方程式が立てられる。これらを比較すると、互いのパラメータの関係が類推される (図 2)。ここで、 $d(= \frac{1}{2}\lambda)$ は水面波が影響を受ける有効的な深さを表す。また、 g は重力加速度、 ρ は水の密度、 b は水路の幅であり、 j は虚数単位を表す。これらの関係から、屈折率 n_w

transmission line	water channel
$-\frac{dV}{dx} = j\omega LI$	$-\frac{\partial P}{\partial x} = j\omega \frac{\rho}{bd} U$
$-\frac{dI}{dx} = j\omega CV$	$-\frac{\partial U}{\partial x} = j\omega \frac{bd}{\rho} \left(\frac{\omega}{g}\right)^2 P$
voltage V	water pressure P
current I	full flow U
inductance L	$\frac{\rho}{bd}$
capacitance C	$\frac{bd}{\rho} \left(\frac{\omega}{g}\right)^2$

図 2: Correspondence between transmission line metamaterial and small water channel

を計算すると、以下のようになる。

$$n_w = \frac{2}{l\omega} \sqrt{\tan \frac{kl}{2}} \sqrt{\sin kl}. \quad (8)$$

よって、 n_w は、 kl が $\pi + 2m\pi < kl < 2\pi + 2m\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) を満たすときに負になることが示された。

5 水面波メタマテリアルの実験

前節の理論により水面波メタマテリアルのパラメータを決定し (図 3)、3D プリンターでメタマテリアルを作製した (図 4)。

The structure of the cross water channel	the frequency to get negative refractive index	the frequency that we used
$l: 6.2\text{cm}$ $b: 5.8\text{cm}$	4.4Hz	2.0Hz ~ 4.7Hz

図 3: Set up of the parameter of small water channel metamaterial

これを水槽の中に配置し、水面波メタマテリアル内の波を観察した。実験装置は図 3 に示す。負の屈折

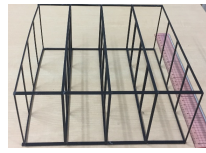


図 4: Small water channel metamaterial

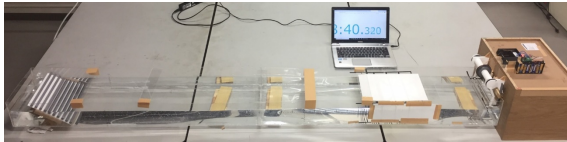


図 5: Experiment instrument

率が実現できていれば、位相速度が入射波の方向とは逆の向きに進む様子が観察されるはずである。波の観察をするために水槽の下にライトを設置し、水槽の上面のスクリーンに波が投影されるようにした。

6 実験結果と考察

実験の結果、特定の周波数 (4.4Hz) で特徴的な波の様子を観察することができた。しかし、波源装置

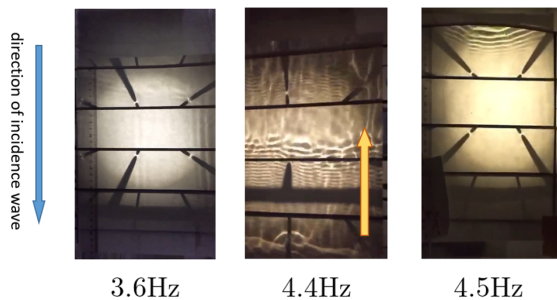


図 6: Experiment instrument

の限界により波の減衰が激しく、水槽の横からの振動の影響により、観測が不明瞭のときもあった。また、メタマテリアル自身が、軽さゆえに共振してしまうため、メタマテリアルの振動を防ぐ必要もある。したがって、より精密な実験が必要であることが分かった。

そこで、2019 年 7 月中旬に大阪大学で精密に実験

を行った。波源装置の周期が機械で制御されており、水槽も横からの振動を受けないようにした。また、メタマテリアルはアルミ製にし、水の波があたっても振動しないようにした。詳細は省くが実験の結果、同様に理論的に考えられる特定の周期で、位相が反対向きに移動する様子が見られた。

しかし、これを時間符号変化のモデル化に用いるには、いくつかの困難があると考えられる。一つ目は、ガリウムの相転移に対応するような屈折率が正から負に変化するような動的な変化をつけるのが難しいこと、二つ目は、VHM に関しては三次元空間のうち xy 方向の誘電率を変化させていたが、このメタマテリアルでは 1 次元の効果しか考えられないことが挙げられる。これは、水路の特性によるものであり、2 次元空間中 (もしくは 3 次元空間中) 1 次元方向のみを負に変更することは困難である。よって、このメタマテリアルではないモデル化を考える必要がある。

7 結論と今後の展望

水の波での時間符号変化のモデルを作るために、第一段階として負の屈折率を示すような水の波のメタマテリアルの実装を試みた。簡易的な実験でも、より精密な実験でも負の屈折率の実現による水の波の振る舞いが観察できた。しかし、時間符号変化のモデル化のための応用が難しいことがわかった。時間符号変化のモデルを作製するためには、均質化法を用いた負の屈折率の実現が適切であると考え、今後はその理論構築・シミュレーション・実装を目指す。

Reference

- Hartle et al. Phys. Rev. D28 (1983) 2960.
- Smolyaninov et al. Phys. Rev. Lett. 105 (2010) 067402.
- Iida&Kashiwagi Journal of Fluid Mechanics 849 (2018) 90.
- Pendry et al. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 47 (1999) 2075.
- Shelby et al. Appl. Phys. Lett. 78 (2000) 489.

a15

Hawking-like radiation

大阪市立大学大学院 理学研究科

神原 亮介

Hawking-like radiation

神原 亮介 (大阪市立大学大学院 理学研究科)

Abstract

一般相対性理論によれば光でさえもその内側から外部に出ることができないブラックホールという存在を予言する。その定義から、ブラックホールに粒子が吸収されることはあっても、そこから粒子が古典的に放出されることはない。しかし、曲がった時空上で場の量子論を考えると、無限遠の過去と未来における真空の定義が一般には異なるため、粒子生成が起きることが知られている。この考えに基づき、ブラックホールからの熱的放射が存在することが 1974 年に Hawking によって見出され、のちに Hawking 輻射と呼ばれている。通常、蒸発しない事象の地平面の存在およびバックリアクションがないことを仮定することによって Hawking 輻射は見出される。しかし、蒸発しないブラックホールは、実際の天文学的なブラックホールの形成や進化を反映していない。したがって、今までの仮定を緩めることを考える。そうすると、事象の地平面がまだ形成されていないブラックホールでも輻射が起こることがわかる。

今回のレビューでは、無限遠の過去と未来における null のアフィンパラメーターの間の関係が指数関数的で、適切な断熱条件が満たされている限り、Hawking 輻射に相当する粒子生成が起きることを検証し、時間依存する Bogoliubov 係数を計算する方法を文献 1 に基づいて考える。

1 Introduction

Hawking は、ある時点で形成されたのち永遠に存在し続ける事象の地平面およびブラックホールからのバックリアクションがないことを仮定することによって、ブラックホールから熱的輻射 (Hawking 輻射) を見出した。ただ、このようなブラックホールは実際の天文学的なブラックホールの形成や進化を反映していない。しかし、1987 年に Hajicek は見かけの地平面でも Hawking 輻射が起こることを示した。その後、見かけの地平面や trapping horizon なしでも良いことが示されている。今回紹介する論文では、過去および未来光的無限遠におけるアフィンパラメーターの指数関数的な関係に注目して、これらの結果をより一般化することを考える。

無限遠の過去 (\mathcal{I}^-) と未来 (\mathcal{I}^+) における null のアフィンパラメーターの間の関係が指数関数的で、適切な断熱条件が満たされている限り、Hawking 輻射に相当する粒子生成が起きることを検証し、時間依存する Bogoliubov 係数を計算する。

2 状況設定

漸近過去でミンコフスキーの構造を持つような漸近的に平坦で球対称な時空を考える。この時空上に、 \mathcal{I}^- 、 \mathcal{I}^+ においてそれぞれアフィンパラメーターとなるような null 座標 $\{U, u\}$ を張る。これらのアフィンパラメーターは $r = 0$ を通る null 曲線を用いて、以下のような関係で結ばれているものとする。

$$U = p(u), \quad u = p^{-1}(U) \quad (1)$$

これらを用いて以下の量を定義する。

$$\kappa(u) = -\frac{d^2U/du^2}{dU/du} = -\frac{\ddot{p}(u)}{\dot{p}(u)} \quad (2)$$

この時、天体を通過する null 曲線 (入ってくるものは u_* 、出ていくものは U_* でラベル付けされているとする) を選ぶと、任意の $U = p(u)$ を対応する $\kappa(u)$ の関数として、

$$U = U_* + C_* \int_{u_*}^u \exp \left[-\int_{u_*}^{\tilde{u}} \kappa(\tilde{u}) d\tilde{u} \right] d\tilde{u} \quad (3)$$

と表すことができる。ここで、 C_* は適当な定数。

ここで、 $\kappa(u)$ を

$$\kappa(u) = \kappa(u_*) + \delta\kappa(u) = \kappa_* + \delta\kappa(u) \quad (4)$$

と展開しておく、

$$\begin{aligned} & \int_{u_*}^u \exp \left[- \int_{u_*}^{\tilde{u}} \kappa(\tilde{u}) d\tilde{u} \right] d\tilde{u} \\ &= \int_{u_*}^u \exp [-\kappa_* (\bar{u} - u_*)] \exp \left[- \int_{u_*}^{\tilde{u}} \delta\kappa(\tilde{u}) d\tilde{u} \right] d\tilde{u} \end{aligned} \quad (5)$$

と書くことができる。ここでは、右辺の 2 つ目の指数関数がほぼ 1 になるような状況について考えていく。

3 指数関数近似

式 (5) の右辺の 2 つ目の指数関数がほぼ 1 になるような状況、すなわち

$$\left| \int_{u_*}^u \delta\kappa(\tilde{u}) d\tilde{u} \right| \leq \epsilon^2 \ll 1 \quad (6)$$

という状況を仮定する。この仮定の下で、式 (5) は

$$\begin{aligned} & \int_{u_*}^u \exp \left[- \int_{u_*}^{\tilde{u}} \kappa(\tilde{u}) d\tilde{u} \right] d\tilde{u} \\ &= \left\{ \frac{1 - \exp [-\kappa_* (u - u_*)]}{\kappa_*} \right\} + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (7)$$

となり、 $\kappa(u)$ を κ_* に置き換えることができた。ただし、条件 (6) は、時間間隔 $(u - u_*)$ が十分短くなければ成り立たないことに注意する必要がある。すなわち、条件 (6) の下で、 u_* に十分近い u に対して $\kappa(u)$ を κ_* に置き換えることができる。

これを用いると、式 (3) は

$$\begin{aligned} U &= p(u) \approx U_* + C_* \int_{u_*}^u \exp [-\kappa_* (\bar{u} - u_*)] d\bar{u} \\ &= \left\{ U_* + \frac{C_*}{\kappa_*} \right\} - \left\{ \frac{C_*}{\kappa_*} e^{\kappa_* u_*} \right\} \exp (-\kappa_* u) \\ &\equiv U_H^* - A_* \exp (-\kappa_* u) \end{aligned} \quad (8)$$

この近似を指数関数近似と呼ぶことにする。ここで、 U_H^* は U と u の関係が指数関数的である限り、地平面が形成され得る場所の最も良い推定値となっている。

4 指数関数近似の妥当性

指数関数近似の条件式 (6) は積分区間 $(u - u_*)$ が十分小さければ常に成り立つ。ここでは、 $(u - u_*)$

がどれだけ小さければ近似を行うのに妥当となるのかについて考える。

考えている領域で $\kappa(u)$ はゆっくり変化していると仮定する。関数 $\kappa(u)$ を用いて、 D を以下のように定義する。

$$D \equiv \sup_{n>0} \left[\frac{1}{(n+1)!} \frac{|\dot{\kappa}_*^{(n)}|}{\kappa_*^{n+1}} \right]^{1/(n+1)}, D < +\infty \quad (9)$$

この時、テイラー展開、無限等比級数の和の公式等を用いると

$$\begin{aligned} \left| \int_{u_*}^u \delta\kappa(\tilde{u}) d\tilde{u} \right| &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} D^{n+1} \kappa_*^{n+1} |u - u_*|^{n+1} \\ &= \frac{x^2}{1-x} \end{aligned} \quad (10)$$

ここで $x \equiv D\kappa_* |u - u_*|$ とした。今、

$$\frac{x^2}{1-x} \leq \epsilon^2 \quad (11)$$

であれば、条件 6 を満たすはずである。 $\epsilon \ll 1$ ということを考慮すると、簡単のためにより厳しい条件

$$x^2 \leq \frac{\epsilon^2}{2} \quad (12)$$

である限り、条件 6 は満たされ続けることが確かに保証される。したがって、指数関数近似の条件 6 の妥当な範囲は少なくとも

$$|u - u_*| \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{2}D\kappa_*} \ll \frac{1}{\sqrt{2}D\kappa_*} \quad (13)$$

となるのがわかる。

最も簡単な場合、すなわち D において $n = 1$ のみが効いてくる場合

$$2D^2 = \frac{|\dot{\kappa}_*|}{\kappa_*^2} \quad (14)$$

を考えると、指数関数近似は少なくとも以下の間隔において保たれる。

$$|\dot{\kappa}_*| (u - u_*)^2 \leq \epsilon^2 \ll 1 \quad (15)$$

以下、この状況を仮定する。もう少し整理すると、シュバルツシルト半径を光が通り抜ける時間スケールは蒸発の時間スケールよりも十分長くあってほし

い、すなわち $\kappa_*|u - u_*| \gg 1$ であってほしいので、指数関数近似の妥当性に対する条件は

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\kappa}_*}{\kappa_*^2} &\ll \epsilon^2 \\ \therefore \frac{\dot{\kappa}_*}{\kappa_*} &\lll 1 \end{aligned} \quad (16)$$

となる。この意味で指数関数近似の妥当性は断熱条件を意味する。

5 Bogoliubov 係数の計算

Bogoliubov 係数の計算に入る前に、Bogoliubov 係数について復習しておこう。曲がった時空上で場の量子論を考える。massless スカラー場の方程式は以下である。

$$\square_x \varphi(x) = 0 \quad (17)$$

この方程式のモード解を $u_i(x)$ とすると

$$\phi(x) = \sum_i \left[a_i u_i(x) + a_i^\dagger u_i^*(x) \right] \quad (18)$$

この時、真空は以下のように定義できる。

$$a_i |0\rangle = 0 \quad (19)$$

一方、別の完全直交系のモード解 $\bar{u}_j(x)$ で展開すると

$$\phi(x) = \sum_j \left[\bar{a}_j \bar{u}_j(x) + \bar{a}_j^\dagger \bar{u}_j^*(x) \right] \quad (20)$$

この時、真空は以下のように定義できる。

$$\bar{a}_j |0\rangle = 0 \quad (21)$$

これらのモード解は完全系なので、一方の解は適当な係数を用いて他方の解で表せる。

$$\begin{aligned} \bar{u}_j &= \sum_i (\alpha_{ji} u_i + \beta_{ji} u_i^*) \\ u_i &= \sum_j (\alpha_{ji}^* \bar{u}_j - \beta_{ji} \bar{u}_j^*) \end{aligned} \quad (22)$$

この変換は Bogoliubov 変換として知られている。これより、直交条件等を用いて計算すると

$$a_i = \sum_j \left(\alpha_{ji} \bar{a}_j + \beta_{ji}^* \bar{a}_j^\dagger \right) \quad (23)$$

この時、バーなしの消滅演算子をバー付きの真空に当てると

$$a_i |\bar{0}\rangle = \sum_j \beta_{ji}^* |\bar{1}_j\rangle \neq 0 \quad (24)$$

となり、一般的には真空にならないことがわかる。このように粒子の”生成”には Bogoliubov 係数 β_{ji} が重要であることがわかる。

さて、実際の Bogoliubov 係数の計算に戻ろう。 \mathcal{I}^- 、 \mathcal{I}^+ 上で適切な規格化をされた massless スカラー場に対する漸近モード解はそれぞれ以下ようになる。

$$\phi^U(\omega; t, \vec{x}) = \frac{Y_{\ell m}}{\sqrt{4\pi\omega r}} \exp(-i\omega U) \quad (25)$$

$$\phi^u(\omega; t, \vec{x}) = \frac{Y_{\ell m}}{\sqrt{4\pi\omega r}} \exp(-i\omega u) \quad (26)$$

Bogoliubov 係数はスカラー積を用いて、

$$\beta(\omega, \omega') = -(\phi^u(\omega; t, \vec{x}), \phi^U(\omega'; t, \vec{x})^*) \quad (27)$$

と書ける。ここで、スカラー積は

$$(f, g) = -i \int d^3x \{ f \partial_t g^* - g^* \partial_t f \} \quad (28)$$

である。これを用いて $\beta(\omega, \omega')$ を計算していくと

$$\begin{aligned} \beta(\omega, \omega') &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} du \{ \exp[-i\omega u] \exp[-i\omega' p(u)] \} \end{aligned} \quad (29)$$

となる。ここで、被積分関数を指数関数近似を用いて展開すると、最終的に

$$\begin{aligned} \beta(u_*; \omega, \omega') &\approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} \exp[-i\omega' U_H^*] \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} du \exp[-i\omega u + i\omega' A_* \exp\{-\kappa_* u\}] \end{aligned} \quad (30)$$

が得られる。

6 ガンマ関数による Bogoliubov 係数の評価

指数関数近似を用いて $\beta(u_*; \omega, \omega')$ の近似式が式 (30) で得られたが、ここからさらに $\beta(u_*; \omega, \omega')$ を計

算していきたい。 $z = \exp(-\kappa_* u)$ とおき、それから実軸上の積分を虚軸上の積分に置き換えると

$$\beta(u_*; \omega, \omega') \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} \frac{1}{\kappa_*} (-i\omega' A_*)^{-i\omega/\kappa_*} \times \int_0^{+\infty} d\bar{z} \bar{z}^{i\omega/\kappa_* - 1} \exp(-\bar{z}) \quad (31)$$

ここで現れた積分はガンマ関数を用いて書き直すことができる。

$$\beta(u_*; \omega, \omega') \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} \frac{1}{\kappa_*} \times (-i\omega' A_*)^{-i\omega/\kappa_*} \Gamma(i\omega/\kappa_*) \quad (32)$$

したがって、ガンマ関数の性質

$$|\Gamma(ix)|^2 = \frac{\pi}{x \sinh(\pi x)} \quad (33)$$

を用いると、 $|\beta(u_*; \omega, \omega')|^2$ は最終的に

$$|\beta(u_*; \omega, \omega')|^2 \approx \frac{1}{2\pi\kappa_*\omega'} \frac{1}{\exp(2\pi\omega/\kappa_*) - 1} \quad (34)$$

これは

$$k_B T_H(u_*) = \frac{\kappa(u_*)}{2\pi} = \frac{\kappa_*}{2\pi} \quad (35)$$

を持った Planck スペクトルである。

7 Conclusion

I^- から出発し、 I^+ に到達する null 曲線を考える。 I^- 上で U 、 I^+ 上で u のアフィンパラメーターの間に

$$U = p(u), \quad u = p^{-1}(U) \quad (36)$$

という関係があるとする。 $\kappa(u)$ を

$$\kappa(u) = -\frac{d^2 U / du^2}{dU / du} = -\frac{\ddot{p}(u)}{\dot{p}(u)} \quad (37)$$

と定義すると、一般性を失わず

$$U = U_* + C_* \int_{u_*}^u \exp \left[-\int_{u_*}^{\bar{u}} \kappa(\bar{u}) d\bar{u} \right] d\bar{u} \quad (38)$$

と書ける。 $\kappa(u)$ が断熱条件

$$|\dot{\kappa}(u_*)| \ll \kappa(u_*)^2 \quad (39)$$

を満たすと仮定すると、時間に依存する Hawking 温度

$$k_B T_H(u_*) = \frac{\hbar \kappa(u_*)}{2\pi} \quad (40)$$

を持った Hawking 放射に相当する Planck スペクトルが存在することを保証するのに十分であることがわかった。

Reference

1. Carlos Barcelo, Stefano Liberati, Sebastiano Sonego & Matt Visser (2011) arXiv:1011.5911 [gr-qc]
2. N.D.Birrell & P.C.W.Davies (1984) "Quantum Fields in Curved Space", Cambridge University Press

a16

ブラックホールの無毛定理、地平面の
安定性、および熱力学

近畿大学大学院 総合理工学研究科

松本 怜

ブラックホールの無毛定理、地平面の安定性、および熱力学

松本 怜 (近畿大学大学院 総合理工学研究科)

Abstract

No-hair 定理により一般相対論におけるブラックホールは、理論上は質量、角運動量、電荷以外の物理量を持ち得ないことが証明されている。しかし今後、現実宇宙のブラックホール観測を通して一般相対論が精密に検証されることを鑑みると、様々な重力理論における No-hair 定理を吟味しておくことが望まれる。例えば、重力を含む最も先進的な理論である弦理論では、単純な形式の No-hair 定理はもはや成り立たないことが分かっている。実際、低エネルギー弦理論での静的球対称荷電ブラックホールを表す解は質量、電荷に加えて、ディラトンの漸近値もその特徴付けに必要となる。一般相対論での非荷電静的ブラックホールを表す Schwarzschild 解は、質量がプランク質量に比べて大きければ、その時空は特異点近傍を除いて弦理論の良い近似である。それは弦理論の古典的な運動方程式が、(Einstein 方程式) + (プランクスケールの補正項) の形になっているからである。曲率がプランクスケールに比べて小さければ、全ての一般相対論での真空解は弦理論の近似解として妥当である。曲率が大きい特異点近くでは弦理論の解は Einstein 方程式では近似できないが、巨大ブラックホールに関しては地平面とその外側では曲率が小さいので、その領域では近似解とすることができる。本発表では、弦理論におけるブラックホールについて、D. Garfinkle, G. T. Horowitz, A. Strominger らの論文 (1991) を紹介する。特に弦理論の有効理論においては、ディラトンの存在がブラックホールの特徴を大きく変える事を見る。さらに内部地平面の安定性とブラックホールの熱力学についても議論する。

1 Introduction

星が重力崩壊を起こして生まれるブラックホールは、宇宙に存在する天体の中でも特に単純な物体であるといえる。元の星は非常に多くの情報を持っているにもかかわらず、そのほとんどは形成されたブラックホールには残らない。一般相対論における定常・軸対称で高々電磁場を含むブラックホールは、「質量、電荷、角運動量」の3つの物理量のみで完全に特徴づけられることが証明されている。これを無毛定理という。故にそのようなブラックホールは Kerr-Newman 解に限られる。これは、ブラックホール背景時空上の試験場としてスカラー場、ベクトル場を考えた場合も同様に成り立つ (J. D. Bekenstein 1972)。

マクロな系の物理を数個の物理量で記述することができるという点で、ブラックホールは熱力学との類似性を持っているであろうことも想像できる。しかし他の重力理論、特に弦理論を考えると一般に無毛定理は成り立たず、スカラー場を持つブラックホールが存在することが知られている。そのようなスカ

ラー場はブラックホールの内部地平面の安定性や熱力学的性質大きく変え得る。本発表では、弦理論におけるブラックホールについて、D. Garfinkle, G. T. Horowitz, A. Strominger らの論文 (1991) を紹介する。特に弦理論の有効理論においては、ディラトンの存在がブラックホールの特徴を大きく変える事を見る。さらに内部地平面の安定性とブラックホールの熱力学についても議論する。

2 スカラー場、ベクトル場を持つ一般相対論的ブラックホール

無毛定理は真空もしくは高々電磁場を含むような時空においては正しい。ではそれ以外の場がある場合にはどうだろうか。スカラー場、ベクトル場については、正則な地平面を持つ定常ブラックホールに対しては無毛定理が成り立つことが示された (J. D. Bekenstein 1972)。

3 弦理論的荷電ブラックホール

一般相対論的ブラックホールについては無毛定理が成り立つことを見たが、今後一般相対論が精密に検証されることを考えると、様々な重力理論におけるブラックホールを吟味しておく必要がある。ここでは最も先進的な重力理論である弦理論を考える。

一般相対論での非荷電静的ブラックホールを表す Schwarzschild 解については、弦理論の古典的な運動方程式が、(Einstein 方程式) + (プランクスケールの補正項) の形になっているため、質量がプランク質量に比べて大きければ特異点近傍を除いて弦理論の良い近似となっている。しかし弦理論では、電磁場がある場合はそれに結合するスカラー場（ディラトン）が存在するため、一般相対論のブラックホールとは異なる様々なブラックホールが存在し得る。弦理論の低エネルギー有効理論として、ディラトンと電磁場が結合した作用

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [-R + (\nabla\phi)^2 + e^{-2\phi} F^2]$$

を考える。このようなブラックホールの解は導かれていて (D. Garfinkel et al. 1991)、そのブラックホールはディラトンを持つ。つまり、そのようなブラックホールは質量、電荷、角運動量、の他に「スカラー場」によっても特徴づけられる。弦理論的荷電ブラックホールを考えると無毛定理は成り立たなくなることが分かる。

4 内部地平面の安定性

荷電ブラックホールは一般に 2 つの地平面（外部地平面、内部地平面）を持つが、弦理論のディラトンブラックホールでは内部地平面が特異点になる。一般相対論的荷電ブラックホールである Reissner-Nordström ブラックホールでは内部地平面は正則であったことを思い出すと、ディラトンの存在によって内部地平面が不安定になったと解釈できる。

内部の Cauchy 地平面が特異点となることで、Cauchy 地平面があってはならないという「強い宇宙検閲官仮説」が成り立ち、裸の特異点は事象の地平面に隠されるという「弱い宇宙検閲官仮説」が成

り立つだけでなく、その内部にも存在しなくなる。これにより物理学がブラックホール内部も含めた時空全体で予言能力を持つことができるので都合が良い結果である。

5 ブラックホールの熱力学

ブラックホールがたった数個の物理量で特徴づけられるという無毛定理の主張は、平衡熱力学系の性質とよく似ている。荷電ブラックホールにおけるブラックホール熱力学の第一法則は

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Phi dQ$$

と書いて、熱力学第一法則との類似性を持つ。実際、ブラックホールはある Hawking 温度 $T_H = \frac{\kappa}{2\pi}$ をもって熱放射 (Hawking 放射) をすることが知られている (S. W. Hawking 1975)。ブラックホールは Hawking 放射によってその質量を減少させる。

Reissner-Nordström ブラックホールの Hawking 温度は

$$T_H = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{2\pi(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2}$$

で表される。これは、 $M \rightarrow Q$ で 0 となる。Reissner-Nordström ブラックホールは $M = Q$ で極大荷電ブラックホールとなり、 $M < Q$ では事象の地平面がなくなり裸の特異点が現れる。つまり Hawking 放射によって質量が減少し続けると、裸の特異点が露出する。しかし今、その Hawking 温度は $M = Q$ で 0 になるのでそのようなことは起こらない。これは、特異点は必ず事象の地平面に隠されるという「弱い宇宙検閲官仮説」を支持する結果である。

次に、弦理論を考えると Hawking 温度は

$$T_H = \frac{1}{8\pi M e^{-2\phi_0}}$$

と変化する。これは極限值 $Q^2 = 2e^{-2\phi_0} M^2$ より小さい値でも 0 にならないので、裸の特異点が現れるように思える。しかし、極大荷電解ではその Hawking 温度は不連続に 0 になる。以上から、弦理論的荷電ブラックホールにおいても裸の特異点が露出することはなく、弱い宇宙検閲官仮説は満たされる。

6 Conclusion

以上では弦理論を考慮すると荷電ブラックホール (Reissner-Nordström ブラックホール) は変更を受け、スカラー場 (ディラトン) を持つブラックホールとなる。そのため無毛定理は成り立たなくなり、ブラックホールはスカラー場を持ちうることが分かった。また、ディラトンの存在はブラックホールの特徴を変え、そのために内部地平面は不安定 (特異点) になること、物理学が予言能力を持ち続けるためにはそのほうが良いことを紹介した。最後に、無毛定理から示唆されるようにブラックホールは熱力学的特徴を持ち、Hawking 放射によってその質量を減少させることを説明した。Hawking 温度を考えることで、弦理論的荷電ブラックホールにおいては熱放射によって特異点が露出することはなく、依然弱い宇宙検閲官仮説を支持する結果になることを説明した。

Acknowledgement

今回の発表の機会を与えてくださった夏の学校運営スタッフの皆様、御支援くださった方々に深く感謝いたします。また、本研究に関して指導および助力してくださった一般相対論・宇宙論研究室の皆様に、この場を借りてお礼申し上げます。

Reference

- J. D. Bekenstein 1972, Phys. Rev. D **5**, 1239
- D. Garfinkle, G. T. Horowitz, & A. Strominger 1991, Phys. Rev. D **43**, 3140
- S. W. Hawking 1975, Commun. Math. Phys. **43**, 199

a17

ブラックホールの唯一性定理
立教大学大学院 理学研究科
何俊逸

ブラックホールの唯一性定理

何 俊逸 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

アインシュタイン方程式は非線形偏微分方程式なので、その解析解を見つけるのは非常に困難である。静的ブラックホールの唯一性定理により、解の形は強く制限される。

カレント J^i の発散は対称テンソル H_{ij} で表すことができ、 H_{ij} は空間の球対称からのずれを表す量であるので、 $H_{ij} = 0$ は空間が球対称であることを意味する。より、カレント J^i について考えると、静的ブラックホールの唯一性も証明できる。

1 Introduction

四次元静的ブラックホールの唯一性定理は Israel と Robinson によって証明された。四次元と漸近的平坦に特有の性質（ガウスボンネの定理、Smarr の積分公式）を用いて証明したので、同じ手法では一般次元、漸近的（反）ド・ジッター時空の場合には拡張できない。Robinson の証明に使ったカレント J^i の発散方程式について一般化をして、一般次元における唯一性の証明にも応用できるかもしれない。

導計量、外的曲率、平均曲率、Shear テンソルはそれぞれ

$$h_{ij} = g_{ij} - n_i n_j \quad (2)$$

$$k_{ij} = h_i^k D_k n_j \quad (3)$$

$$k = h^{ij} k_{ij} \quad (4)$$

$$\sigma_{ij} = k_{ij} - \frac{1}{2} k h_{ij} \quad (5)$$

で与える。後ろの計算に必要な公式は

$$n^i D_i \rho = \rho k, \quad {}^{(2)}R = \frac{2k}{V\rho} + k^2 - k_{ij} k^{ij} \quad (6)$$

2 静的ブラックホールの唯一性定理

ここで、 ${}^{(2)}R$ は h_{ij} のスカラー曲率である。真空アインシュタイン方程式は

$$R_{\mu\nu} = 0 \implies \begin{cases} D^2 V = D_i D^i V = 0 & (7) \\ {}^{(3)}R_{ij} = \frac{1}{V} D_i D_j V & (8) \end{cases}$$

になる。曲率不変量 $\mathcal{K} = R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$ は

$$\mathcal{K} = R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{8}{V^2 \rho^2} \left[k_{ij} k^{ij} + k^2 + \frac{2}{\rho^2} (\mathcal{D}\rho)^2 \right] \quad (9)$$

ここで、 \mathcal{D}_i は h_{ij} の共変微分である。曲率不変量 \mathcal{K} の有限性により、ホライズン $V = 0$ での境界条件は

$$k_{ij}|_{V=0} = 0 \quad \mathcal{D}_i \rho|_{V=0} = 0 \quad (10)$$

無限遠方での境界条件は漸近的平坦とする。

$$V \sim 1 - \frac{M}{r} \quad g_{ij} \sim \left(1 + \frac{2M}{r}\right) \delta_{ij} \quad (11)$$

$$k \sim \frac{2}{r} \quad \rho \sim \frac{r^2}{M} \quad (12)$$

唯一性定理

漸近的平坦かつ真空時空における静的ブラックホールの解は球対称解（Schwarzschild 解）に限る

2.1 幾何学量の定義

4次元時空 M について考える。 M の時間一定面を Σ とする。この時、静的時空 Σ における計量は

$$ds^2 = -V^2(x) dt^2 + g_{ij}(x) dx^i dx^j \quad (1)$$

で与える。 Σ を V で葉層化する二次元 V 一定面を S_V とする。 S_V の法線ベクトルは $n_i = \rho D_i V$ で与える。ただし、 $\rho = (D^i V D_i V)^{-1/2}$ である。 S_V の誘

また、最大最小原理により、

$$0 \leq V < 1 \quad (13)$$

が得られる。

2.2 Robinson の証明

Robinson の論文では発散方程式を導出なしで導入した。

$$\begin{aligned} & D_i \left[-2f_1^R(V) \frac{D_i \rho}{\rho^3} + \frac{f_2^R(V)}{\rho^2} D^i V \right] \\ &= \frac{1}{4} \rho^2 f_1^R(V) V^4 C_{ijk} C^{ijk} \\ & \quad + \frac{3f_1^R(V)}{\rho^2} \left| \frac{D_i \rho}{\rho} - \frac{4V}{1-V^2} D_i V \right|^2 \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、

$$\begin{aligned} f_1^R(V) &= \frac{c_1 V^2 + c_2}{V(1-V^2)^3} \\ f_2^R(V) &= -\frac{2c_1}{(1-V^2)^3} + \frac{6(c_1 V^2 + c_2)}{(1-V^2)^4} \end{aligned} \quad (15)$$

c_1, c_2 は定数である。式 (14) 等号の右側の符号は $f_1^R(V) > 0$ で決めるので、ここで、 $f_1^R(V) > 0$ とすると、 $c_1 + c_2 > 0$ 、 $c_2 > 0$ が得られる。左側を堆積積分し、Stoke の定理により、

$$0 \leq -\frac{\pi}{2M} (c_1 + c_2) - [-4\pi\chi c_2 \rho_0^{-1} + (6c_2 - 2c_1) \rho_0^{-3} A_H] \quad (16)$$

が得られる。ここで、

$$A_H = \int_B dS, \quad \chi = \frac{1}{4\pi} \int_B {}^{(2)}R dS \quad (17)$$

ここで、 χ は Euler 標数である。 $c_1 = 1, c_2 = 0$ と $C_1 = -1, C_2 = 1$ を不等式 (16) に代入すると

$$A_H \geq \frac{\pi}{4M} \rho_0^3, \quad A_H \leq \frac{1}{2} \pi \rho_0^2 \chi \quad (18)$$

が得られる。より $\chi \geq 0$ 、正の Euler 標数は空洞のない幾何学面を要求するので、 $\chi = 2$ である。代入すると、 $A_H \leq \rho_0^2 \pi$ が得られる。Smarr's 積分公式 $\rho_0 M = \frac{1}{4\pi} A_H$ を使うと、

$$A_H = 16\pi M^2 \quad (19)$$

を得る。より、発散方程式 = 0 がわかる。したがって

$$C_{ijk} = 0, \quad \frac{D_i \rho}{\rho} - \frac{4V}{1-V^2} D_i V = 0 \quad (20)$$

Lindblom 恒等式 $C_{ijk} C^{ijk} = \frac{8}{V^4 \rho^4} \left(\sigma_{ij} \sigma^{ij} + \frac{(D\rho)^2}{2\rho^2} \right)$ より、 ${}^{(2)}R = \frac{2k}{V\rho} + k^2 - k_{ij} k^{ij} = \frac{2k}{V\rho} + \frac{1}{2} k^2 > 0$ 、スカラー曲率が正定数であることがわかる。 S_V 面は正曲率空間で、球対称である。微分方程式について解くと、 $\rho(V) = \frac{4M}{(1-V^2)^2}$ で、変数変換すると $V = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}$ (Schwarzschild 解) が得られる。したがって、

4次元唯一性定理

漸近的平坦かつ真空の4次元時空における静的ブラックホールの解は球対称解 (Schwarzschild 解) である。

2.3 発散方程式の一般化

発散方程式は Robinson の証明に非常に重要な役割を果たしている。これから、発散方程式の一般化を考える。目標としてカレント J^i の $D_i J^i = \left[\text{符号が明確な項} \right] \cap (= 0 \text{ の時時空が球対称})$ を満たすような項を見つける。ここで、対称テンソル

$$H_{ij} \equiv D_i D_j V - \frac{2V}{\rho^2(1-V^2)} g_{ij} + \frac{6V}{1-V^2} D_i V D_j V \quad (21)$$

について考える。速度場

$$H_i \equiv \frac{D_i \rho}{\rho} - \frac{4V}{1-V^2} D_i V \quad (22)$$

と与える。定義により、

$$H_{ij} D^j V = -\rho^{-2} H_i \quad H_i^i = 0 \quad (23)$$

が成り立つ。対称テンソル H_{ij} を S_V 面上の幾何学量で書き換えると

$$H_{ij} = \rho^{-1} \sigma_{ij} - 2\rho^{-2} n_{(i} D_{j)} \rho + \frac{1}{2\rho} \left(k - \frac{4V}{\rho(1-V^2)} \right) (h_{ij} - 2n_i n_j) \quad (24)$$

が得られる。カレント J^i を

$$J^i = f_1(V) g_1(\rho) D^i \rho + f_2(V) g_2(\rho) D^i V \quad (25)$$

と仮定すると、その発散は

$$D_i J^i = f_1(V) \rho^3 g_1(\rho) \left[-|H_{ij}|^2 + \frac{|H_{ij}|^2}{\rho^2} \left(3 + \frac{\rho g_1'(\rho)}{g_1(\rho)} \right) \right] + H_i D^i V S_1 + S_2 \quad (26)$$

ここで、

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\rho g_1(\rho) V f_1(V)}{1-V^2} \left[\frac{1-V^2}{V} \left(\frac{1}{V} + \frac{f_1'(V)}{f_1(V)} \right) \right. \\ &\quad \left. + 12 + \frac{8\rho g_1'(\rho)}{g_1(\rho)} + \frac{1-V^2}{V} \frac{f_2(V)}{f_1(V)} \frac{g_2'(\rho)}{g_1(\rho)} \right] \\ S_2 &= \frac{4V}{(1-V^2)\rho^2} S_1 + \frac{V^2 f_1(V) g_2(\rho)}{(1-V^2)^2 \rho^2} \times \\ &\quad \left[\frac{(1-V^2)^2 f_2'(V)}{V^2 f_1(V)} - \frac{8\rho g_1(\rho)}{g_2(\rho)} \left(3 + \frac{2\rho g_1'(\rho)}{g_1(\rho)} \right) \right] \end{aligned}$$

S_1 と S_2 の符号をは明確ではないので、 $S_1 = S_2 = 0$ とおく。この時、 $g_2'(\rho) \propto g_1(\rho)$ または $f_2(V) \propto \frac{V}{1-V^2} f_1(V)$ が得られる。 $g_1(\rho)$ と $g_2(\rho)$ をそれぞれ $g_1(\rho) = -c\rho^{-(c+1)}$ $g_2(\rho) = \rho^{-c}$ にすると、

$$\begin{aligned} f_1(V) &= \frac{(1-V^2)^{1-2c}}{V} [a + b(1-v^2)] \quad (27) \\ f_2(V) &= \frac{2}{(1-V^2)^{2c}} [a(2c-1) + 2bc(1-V^2)] \end{aligned}$$

が得られる。定義から

$$\left| D_{[i} V H_{j]k} - \frac{1}{2\rho^2} H_{[i} g_{j]k} \right| = \frac{1}{2\rho^2} \left[|H_{ij}|^2 - \frac{3}{2\rho^2} |H_i|^2 \right]$$

より、一般化した発散方程式は

$$D_i J^i = \frac{c f_1(V)}{2\rho^c} \left[|2\rho^2 D_{[i} V H_{j]k} - H_{[i} g_{j]k}|^2 + (2c-1) |H_i|^2 \right] \quad (28)$$

$c = 2$ は Robinson の発散方程式になることは簡単に示せる。一般化した発散方程式を 0 非負とすると、 $f_1(V) \geq 0$ $c \geq \frac{1}{2}$ である。この時、 $a \geq 0$ $a + b \geq 0$ 。Stoke の定理により、 $\int_{\Sigma} D_i J^i d\Sigma = \int_{S^\infty} J_i n^i dS - \int_B J_i n^i dS \geq 0$ 。したがって、

$$0 \leq a[A_H \rho_0^{-(1+c)} - \pi(4M)^{1-c}] + (a+b)c \times \rho_0^{-(1+c)} [\pi \chi \rho_0^2 - 2A_H] \quad (29)$$

が得られる。 a, b, c がそれぞれの許される領域内の任意の値をとっても不等式 (29) が常に成り立つはずな

ので、

$$\pi \left(\frac{4M}{\rho_0} \right)^{1-c} \leq \frac{A_H}{\rho_0^2} \leq \frac{\pi}{2} \chi \quad (30)$$

が得られる。 $c = 1$ の時、 $\chi \geq 2$ が得られる、球状トポロジーは $\chi = 2$ の時だけ取れる。 $c = 2$ の時、 $A_H = \pi \rho_0^2$ が得られる。これは $c = 1$ の場合と同じである。より、不等式 (29) は常に等号に保つ。より、 $H_{ij} = 0$ と時空が球対称になってることがわかる。したがって、一般化した発散方程式により、4次元の場合は対称テンソル $H_{ij} = 0$ を示せば、直ちに唯一性が証明できる。

2.4 高次元対称テンソル $H_{ij} = 0$

$(n-1)$ 次元の場合の対称テンソル $H_{ij} = 0$ は

$$\begin{aligned} H_{ij} &= D_i D_j V - \frac{2}{n-3} \frac{V(DV)^2}{1-V^2} g_{ij} + \frac{2(n-1)}{n-3} \frac{V}{1-V^2} D_i V D_j V \\ H_i &= \frac{D_i \rho}{\rho} - \frac{2(n-2)}{n-3} \frac{V}{1-V^2} D_i V \end{aligned} \quad (31)$$

定義により

$$H_{ij} D^j V = -\rho^{-2} H_i \quad H_i^i = 0 \quad (32)$$

一般次元におけるホライズン境界条件は

$$k_{ij}|_{V=0} = 0 \quad \rho|_{V=0} = \rho_0 \quad (33)$$

漸近的平坦条件は

$$V \sim 1 - \frac{m}{r^{n-3}} \quad (34)$$

$$g_{ij} \sim \left(1 + \frac{2m}{(n-3)r^{n-3}} \right) \delta_{ij} \quad (35)$$

$$\rho \sim \frac{r^{n-2}}{(n-3)m} \quad (36)$$

$$k \sim \frac{n-2}{r} \quad (37)$$

$H_{ij} = 0$ とすると、 $H_i = 0$ であるので、漸近的平坦条件と $\sigma_{ij} = 0$ より、

$$[(n-3)\rho]^{n-3} \left(\frac{1-V^2}{2} \right)^{n-2} = m \quad (38)$$

$$k_{ij} = \frac{1}{2\rho} \partial_V h_{ij} = \frac{1}{n-2} k h_{ij} \quad (39)$$

より

$$h_{ij} = [(n-3)m\rho]^{2/(n-2)} \hat{h}_{ij} \quad (40)$$

ここで、 \hat{h}_{ij} は単位球面計量である。したがって、一般次元の $H_{ij} = 0$ なら、空間が球対称であることがわかる。より、一般次元発散方程式は

$$D_i J^i = \frac{(n-3)c}{2\rho^c} f_1(V) \left[2\rho^2 D_{[i} V H_{j]k} - \frac{2}{n-2} H_{[i} h_{j]k} \right]^2 + 2\left(c - \frac{n-3}{n-2} |H_i|^2\right)$$

その後は 4 次元の場合と同じやり方で計算すれば一般次元における唯一性の証明ができるけど、最後の部分にヤマベ定数という数学的に未解決の問題が出てきて、一般化した発散方程式は常に 0 になることがまだ証明できていない。

3 Conclusion

一般化した発散方程式は球対称からのずれを表す量である。予想は Robinson と似ているやり方で一般方程式を使って一般次元における静的ブラックホールの唯一性を証明するけど、ヤマベ定数の問題が未解決なので、高次元における証明はまだ完成していない。

Reference

- [1] M. Nozawa, T. Shiromizu, K. Izumi, and S. Yamada, *Class. Quant. Grav.* 35, 175009 (2018), arXiv:1805.11385 [gr-qc].
- [2] S.W.Hawking, *Commun.Math.Phys.* 25,152(1972)
- [3] L.Smarr, *Phys.Rev.Lett.* 30,71(1973) Erratum: [*Phys.Rev.Lett.* 30,521(1973)]

a18

回転 BH による真空崩壊の触媒作用
広島大学大学院 理学研究科
上田 和茂

回転 BH による真空崩壊の触媒作用

上田 和茂 (広島大学大学院 理学研究科 M2)

Abstract

場の量子論における最も興味深い事実の一つに、我々の宇宙が偽真空状態にあるかも知れない、というものがある。真空崩壊は、宇宙論シナリオに関わる現象の中でも極めて劇的なものの一つである。Ruth Gregory らは、初期宇宙に存在した小さい質量のブラックホール (PBH) による時空の非一様性により、BH 真空崩壊を誘起する触媒として作用し、真空の寿命を顕著に縮めることを示した。これに基づくと、観測宇宙の内部に真空崩壊を誘起するような PBH は 1 つも存在し得ない、という現象論的推察から理論への制限が得られる可能性がある。しかし、先行研究では BH の回転などの影響は考慮されていない。そこで講演者は、カナダの Perimeter Institute の大下翔誉氏らとの共同研究で、BH の回転効果が Hawking 放射と真空の触媒作用に及ぼす寄与について解析を進めている⁽¹⁾。本講演では、現代宇宙論を構成する上で重要となる理論について説明し、大下氏との共同研究から得られた知見に基づき真空崩壊について議論を行う。

1 Introduction

現代宇宙論におけるインフレーション理論の構築には、曲がった時空の場の量子論が用いられている。曲がった時空の場の量子論では、重力の情報を背景計量に含めることで重力の量子化の問題を避けているため、実験的な検証や観測との整合性を確かめる必要がある。逆に、インフレーション理論を検証するには、曲がった時空の場の量子論に現れる量子効果を観測によって確かめる必要があると言える。そこで講演者は Unruh 効果や Hawking 放射などの場がった時空の場の量子論による予言について調べ、量子エンタングルメントをはじめとする量子論的な特徴が量子場の性質にどのように現れるかを調べた。この研究については去年 (2018 年) の夏の学校の重力・宇宙論分科会の b 講演で発表したが、現在も進行中である。講演者は現在、宇宙論シナリオに関係する量子力学的な現象の一つとして、真空崩壊という量子場の相転移現象に着目している。これもまた量子論特有の性質から導出される現象で宇宙論に重要なものの一つであり、粒子の量子トンネル効果の理論を場の理論に応用して導出される現象である。

量子トンネル効果は、シュレディンガー方程式を解いてポテンシャル障壁を透過する波動関数を求め、ポテンシャル障壁を越えたところの波動関数から確率振幅を求めることで 0 でない期待値が得られるこ

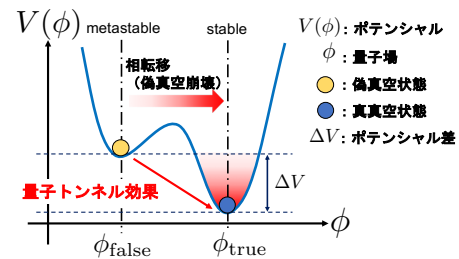


図 1: 真空崩壊の概念図

とにより導出される。量子場の理論における真空は、ポテンシャル $V(\phi)$ が安定点となる基底状態として定義されるため、量子トンネリングで用いる力学変数にスカラー場の自由度を用いて解析を行うと、量子場の理論における真空崩壊を予言することが出来る。

近年の LHC における Higgs 粒子の観測による標準理論のパラメータによると、Higgs 場の凝縮度が現在の値よりも非常に大きい場合、エネルギーが現在の電弱真空よりも下がることを予言され、電弱真空は準安定状態である可能性が指摘されている。つまり、現在の電弱真空は偽真空状態にあり、量子トンネル効果によって、より安定な真真空状態へ相転移する可能性がある。宇宙のどこか 1 点においても真空崩壊が起きると、その 1 点から相転移の前後のポテンシャル差に相当するエネルギーが解放されるため、その点に近接する量子場も真空崩壊を起こ

す。このような連鎖反応によって、宇宙空間に真空崩壊の面が生じる。これは、偽真空に満たされた空間の中に、あたかも真真空に満たされた球体が発生し、広がっていくように見える。そのため、このような崩壊面は真空泡と呼ばれており、光の速度で宇宙に拡張していくと考えられている。標準理論から算出される偽真空崩壊による真空の寿命は、現在の宇宙年齢である 13.8Gyr のオーダーを遙かに凌駕しているため、今のところ真空の相転移が標準理論の正当性を脅かすことは無い。しかし Ruth Gregory らの計算によって、Planck 質量程度の原始ブラックホール (以下 PBH と表記) の存在によって生じる時空の非一様性は真空の寿命を顕著に縮めることが分かった。BH 連星からの重力波や、BH の影の直接観測が成功している現在、BH と真空崩壊の関係性は、宇宙論シナリオを考える上で重要な問題である。そのため、BH 周りでの真空崩壊に関する厳密な理論は不可欠であるが、先行研究では BH の回転の影響が考慮されていない。講演者は大下翔誉氏との共同研究で、この問題について数値計算と近似、およびゲージ変換によってアプローチしている。

2 Method

前半では、BH 周りの Shell の運動を決めるのに必要な接続条件の導出に必要な数学的なツールを簡単に説明する。主に教科書 (2) の 5 章までの内容をレビューする形となるので、詳細な計算に興味がある方は教科書 (2) を参照されたい。後半では、回転 BH の周りの真空泡の有効ポテンシャルを決める方法について述べる。

計量が $g_{\mu\nu}$ で定義されている D 次元多様体の中に存在する曲面を考え、その曲面上の計量 (次元を一つ下げた計量) を考慮したいので、曲面に垂直な成分を落とすような射影演算子として誘導計量を定義する。 n を曲面に垂直なベクトルとすると、

$$g_{ab}n^an^b = \epsilon = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases} \quad (1)$$

が成り立つ。すると、以下の式により誘導計量を定義すれば、確かに射影演算子となっていることが分

かる。

$$q_{ab}n^b = (g_{ab} - \epsilon n_a n_b)n^b = n_a - \epsilon^2 n_a = 0 \quad (2)$$

ここで、 n 次元多様体における一般のベクトルは、超曲面上で、

$$\tilde{V}^a := q_b^a V^b \quad (3)$$

となる。ここで、

$$q_a^b = q_{ac}g^{bc} \quad (4)$$

を用いた。そうすると、この超曲面上のベクトルは、確かに n 方向の成分を持たないことが分かる。

$$n_a \tilde{V}^a = n^a q_a^b V_b = 0 \quad (5)$$

D 次元多様体中の共変微分は、誘導計量が射影演算子であることから、

$$q_c^a q_b^d \Delta_d \tilde{V}^c =: D_b \tilde{V}^a \quad (6)$$

となる。そこで、誘導計量の共変微分を計算すると、

$$\begin{aligned} D_c q_{ab} &= q_c^d q_a^e q_b^f \Delta_d q_{ef} \\ &= q_c^d q_a^e q_b^f \nabla_d (g_{ef} - \epsilon n_e n_f) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

と、0 になることが分かる。これは、 D 次元多様体中の計量の共変微分の性質：

$$\nabla_c g_{ab} = 0 \quad (8)$$

という性質に対応している。すると、以下の方程式が得られる。

$$\partial_i q_{jk} - {}^{(D-1)}\Gamma_{ij}^l q_{lk} - {}^{(D-1)}\Gamma_{ik}^l g_{jl} = 0 \quad (9)$$

よって、 $(D-1)$ 次元の接続は、

$${}^{(D-1)}\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} q^{il} (\partial_j q_{lk} + \partial_k q_{lj} - \partial_l q_{jk}) \quad (10)$$

と求めることができる。この形は基本的に D 次元の接続と同じ形をしている。ここで外的曲率を、曲面の内側と外側における normal ベクトルの変化量

$$K_{ab} := q_a^c q_b^d \nabla_c n_d \quad (11)$$

で定義する。以上の式を変形していくと、以下のガウス方程式：

$$\begin{aligned} {}^{(D-1)}R_{abcd} &= q_a^e q_b^f q_c^g q_d^h {}^{(D)}R_{efgh} \\ &+ \epsilon(K_{ac}K_{bd} - K_{bc}K_{ad}). \end{aligned} \quad (12)$$

と、コダッチ方程式：

$$q_a^b n^c {}^{(D)}R_{bc} = D_b K_a^b - D_a K \quad (13)$$

が導出される。ここまで物理的な過程を用いていないため、これらの式は純粋に数学的な方程式であるが、 (D) 次元と $(D-1)$ 次元の物理量を結びつけるために重要な式である。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (14)$$

物理的な議論をするときには、Einstein 方程式を用いなければならないが、ガウス・コダッチ方程式を組み合わせることで導出されるアインシュタインテンソル $G_{\mu\nu}$ の部分にエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ を代入すると、外的曲率の接続の式が得られる。

$$[K_{\mu\nu}]^- = -\kappa^2(S_{\mu\nu} - \frac{1}{D-2}q_{\mu\nu}S) \quad (15)$$

$S_{\mu\nu}$ は曲面上のエネルギー運動量テンソルである。これが外的曲率の接続条件 (Israel の接続条件) である。ここで、 $[K_{\mu\nu}]^-$ を閉曲面の内側と外側の外的曲率の差：

$$[K_{\mu\nu}]^- = K_{\mu\nu+} - K_{\mu\nu-} \quad (16)$$

として定義した。

Ruth Gregory らは、重力場と物質場の系：

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int_M R + \int_M L_m(g, \phi) \quad (17)$$

の理論を、SdS 時空の計量：

$$ds^2 = f(r)d\tau^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_2^2 \quad (18)$$

と、Schwartzchild 計量を用いて記述した。ここで、 $f(r) \equiv 1 - 2GM/r - r^2/l^2$ である。Ruth Gregory らは、この計量を用いて CDL インスタントンに対応するものを算出することで、異なる真空解の境界面として定義される薄殻の運動方程式を求め、ポテンシャル項を導出し崩壊率を求めた。その結果は、確

かに $M_- = M_+ = \Lambda_- = 0$ の極限では CDL インスタントンの結果を再現しており、BH による時空の非一様性が真空崩壊率に影響することが分かった。しかし多くの場合、BH は角運動量を持っており、回転していると考えられる。そのため、真空泡の外側を Schwartzchild 時空、内側を Schwartzchild-AdS 時空でモデル化した理論は厳密には現実的ではないと考えられる。

そのため我々は、以下の Kerr 時空と Kerr-AdS 時空の計量を用いて回転 BH 周りの時空を記述し、Shell のポテンシャル項を決めるため外的曲率の計算を行った。Kerr 時空の計量は、

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{r_s r}{\Sigma}\right)c^2 dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \\ &+ (r^2 + a^2 + \frac{r_s r a^2}{\Sigma} \sin^2 \theta) \sin^2 \theta d\phi^2 \\ &- \frac{2r_s r a \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi \end{aligned} \quad (19)$$

で表される。ここで、

$$\begin{aligned} \Sigma &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta \\ \Delta &= r^2 - 2GMr + a^2, \end{aligned}$$

である。一方、Kerr-AdS 時空の計量は

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{\Delta}{\rho^2} \left(dt - \frac{a}{\theta} \sin^2 \theta d\phi\right)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \frac{\rho^2}{\Delta_\theta} d\theta^2 \\ &+ \frac{\Delta_\theta \sin^2 \theta}{\rho^2} \left(adt - \frac{r^2 + a^2}{\Sigma} d\phi\right)^2 \end{aligned} \quad (20)$$

で表される。ここで、

$$\begin{aligned} \Sigma &= 1 - a^2 l^{-2} \\ \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta \\ \Delta &= (r^2 + a^2)(1 + r^2 l^{-2}) - 2mr \\ \Delta_\theta &= 1 - a^2 l^{-2} \cos^2 \theta \end{aligned}$$

である。この計量においてゲージ変換を行うと、

$$ds_\pm^2 = g_{tt}^\pm dt_\pm^2 + g_{rr}^\pm dr_\pm^2 + r^2 d\Omega_2^2 \quad (21)$$

のように、計量を対角化することが可能である。ここで、Shell の内側と外側を分かつ境界面を考える。

$$X_\pm^a = (t_\pm(\tau), r_\pm(\tau), \theta, \phi) \quad (22)$$

ここでは、真空の不連続面の厚みを十分に薄いと考
え、薄殻近似：

$$r_+ = r_- = R(\tau) \quad (23)$$

を用いる。そして、イスラエルの接続条件を用いる
と、薄殻の運動方程式の有効ポテンシャルを求める
ことが出来る。

3 Results

本研究では、真空の触媒作用に BH の回転がどの
ような影響を及ぼすかを計算した。その結果、先行
研究で行われていた Schwarzschild 座標を、Boyer-
Lindquist 座標に置き換えて理論を構築すると、先行
研究と類似の形で Shell の運動方程式を導出するこ
とが可能であることが分かった。Kerr 時空の解析結果
によると、BH の回転効果は真空崩壊率に有意に影
響を与えることが分かった。

4 Discussion

スケールの小さい PBH は、Hawking 放射で著し
く角運動量を放出しているため、回転パラメータを
考慮する必要性が疑問視されるかも知れない。しか
し考慮する場の種類 (スピン) によっては、Hawking
放射によって蒸発する PBH は最終的に回転状態に帰
着する可能性が指摘されており⁽⁴⁾、厳密な理論を得
るにはやはり BH の回転による効果を議論する必要
がある。Hawking 放射を考慮する上で重要な factor
となるエントロピーは、

$$s = \frac{\omega_{d-2}}{4} \frac{(r_+^2 + a^2)r_+^{d-4}}{\Theta} \quad (24)$$

である⁽⁵⁾。ここで、

$$\omega_{d-2} = \frac{2\pi(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \quad (25)$$

である。ここで現れる d は次元の数である。これか
ら、回転パラメータはエントロピーを増大させる方
向に作用することが分かる。また、真空崩壊の前後
のエントロピー変化も増大する。これに基づいて計
算すると、エントロピー変化の観点からは、BH の回

転効果は真空崩壊を強化する方向に働くと考えられ
る。しかし、質量の小さい PBH の Hawking 温度は
大きく、その寿命は非常に短い。もし、この宇宙に
真空崩壊を引き起こすような PBH があったとして
も、その PBH が寿命を迎えるよりも前に真空崩壊を
誘起されなければ、PBH は本質的に真空崩壊の触媒
とはなり得ない。そのため、Horizon の内側の観測
的宇宙の範囲内で真空崩壊が起きる可能性は高くな
いと考えられる。

5 Conclusion

イスラエル接続条件によって、Kerr 時空で記述さ
れる時空の真空泡の kinetic ポテンシャルを導出でき
ることを示した。未発表の内容のため、今回は詳細
を割愛した部分が多々あるが、BH の回転効果が真空
泡に影響することを示すことを示した。

References

- (1) N. Oshita, K. Ueda, M. Yamaguchi in prep.
- (2) 白水 徹夜, SGC ライブラリ 90 「アインシュタイン方程式」 2012-05-25 JAN 4910054700527
- (3) R. Gregory, Ian G. Moss, B. Withers, JHEP03 (2014)081
- (4) Brett E. Taylor, Chris M. Chambers, William A. Hiscock, PRD.58.044012(1998)
- (5) Behnam Pourhassan, Mir Faizal, Nuclear Physics B Vol. 913 (2016), p834-851

Acknowledgement

大変お忙しいスケジュールの合間を縫って、懇切
丁寧に指導していただいた Perimeter Institute の大
下翔誉氏に心から感謝申し上げます。

a19

すばる HSC の銀河サーベイデータを用いた宇宙論パラメータ推定手法の開発

東京大学大学院 理学系研究科

杉山素直

すばる HSC の銀河データを使った宇宙論パラメタ推定手法の開発

杉山 素直 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

近傍宇宙の観測と初期宇宙の観測が予言する宇宙論パラメタの相違は、宇宙の標準模型である Λ CDM を超えた新しいモデル/物理を示唆する。宇宙の観測によってこのモデルを制限するために、近傍宇宙の統計精度のより高い宇宙論パラメタの制限が求められている。大規模構造を使った宇宙論パラメタの制限では、HSC で得た銀河の分布と重力レンズを組み合わせた解析、g-g レンズが効果的である。g-g レンズの解析では、大規模構造の摂動論に基づいたモデルの計算が標準的に行われているが、大規模構造の摂動論が小スケールで正しくないために、解析に使用できるデータが限られる問題がある。本研究では大規模構造の摂動論を効果的に用いるためにいくつかの観測量を使って宇宙論パラメタの推定を行い、宇宙論パラメタの統計精度の観点からこれらの観測量を比較する。

1 Intro: 摂動論と重力レンズ

宇宙の加速膨張の発見によって、冷たいダークマター (Cold Dark Matter) と宇宙定数 (Λ) の模型 (Λ CDM) が宇宙の標準模型として確立した。この標準模型 Λ CDM は、様々な観測量 (宇宙背景放射 (Cosmic Microwave Background: CMB) や宇宙の大規模構造 (Large Scale Structure: LSS)) を説明する成功している模型である。ところが、近年の観測の統計量の向上に伴って、CMB で制限した Λ CDM のモデルパラメタ (S_8, h) と大規模構造の観測で制限したモデルパラメタの間に統計的に有意な差 (tension と呼ばれる) があることが明らかになっている (Hikage et al. 2019)。この発見は、宇宙の初期を支配する物 (CMB) と最近の宇宙 (LSS) は同じ Λ CDM で同時に説明できないことを示していて、例えばダイナミカルなダークエネルギーや一般相対論の修正などを示唆する。したがって、CMB と LSS の各々で、 Λ CDM のモデルパラメタを精密に測定し、それらの相違をより詳しく調べることができると、現在の標準模型を超えた宇宙論の解明に繋がると期待されている。

銀河の空間的な分布 (銀河クラスターリング) は、宇宙の初期条件 (インフレーションなど)、加速膨張を起こすダークエネルギー、クラスターリングを起こすダークマター、クラスターリングを阻害するニュートリノ質量などの豊富な情報を含んでいる。特に銀河分布同士の 2 点相関関数 (フーリエ空間ではパワース

ペクトル) は Λ CDM モデルの証拠として強力な力を発揮している。ところが、銀河分布は銀河バイアスと呼ばれる、銀河分布と理論的に予言されるダークマター分布の間の不定性を持っているため、銀河クラスターリングはそれ自身のみでの統計量では、我々が知りたい宇宙論パラメタの精密測定を行うことができない。

重力レンズ効果は、かつてはその発見自体が大きなゴールであったが、現在では宇宙論パラメタを制限するための強力な手法の一つになっている。重力レンズはバリオンのみならず、光の経路上の物質全てが引き起こす効果であるため、銀河クラスターリングのような銀河バイアス不定性を持たない観測量である。したがって銀河クラスターリング統計量と、重力レンズの自己相関であるコズミックシアア (Cosmic Shear) や、銀河クラスターリングと重力レンズの相互相関である galaxy-galaxy lensing (g-g lensing) を組み合わせることで、銀河バイアス不定性を取り除いた宇宙論の推定を行うことが可能となる。

すばる HSC 戦略枠サーベイ (Hyper-Suprime-Cam Subaru Strategic Program: HSC SSP: HSC survey) は口径 8.2m すばる望遠鏡の超広視野主焦点カメラ HSC を用いて、6 年 300 晩をかけて宇宙の広域サーベイを行う。HSC サーベイはワイド、ディープ、ウルトラディープの 3 つのレイヤーからなり、この中でもワイドは重力レンズ宇宙論を行うようにデザイ

ンされていて 5 バンド、1400 平方度の天域を覆う計画である。HSC サーベイのユニークな点はその深さと画像の質の良さにあり、KiDS や DES と比較して、高い赤方偏移かつ低いシェイプノイズでの銀河の歪みの観測が可能である。

観測されたシグナル (= 銀河クラスタリングシグナル、g-g レンズシグナル) を、理論と比較して宇宙論パラメタを制限するためには、理論を正しく計算できること、もしくは正しい理論計算が行える範囲のシグナルしかデータとして使用しないことが必要である。さもなければ、推定された宇宙論パラメタはパラメタバイアスを受けてしまうことになる (推定した宇宙論パラメタが系統誤差の影響で真の宇宙論パラメタから系統的にずれてしまうということ)。現行の銀河サーベイの解析では、大規模構造の摂動論に基づいてダークマターの相関を計算し、その上で銀河バイアスモデルを使って銀河クラスタリングや g-g レンズの統計量を計算している。大規模構造の摂動論は小スケールで正しいパワースペクトルを計算できないため、摂動論が正しいスケール以下のデータをカットして、大スケールのみで宇宙論パラメタの制限を行っている。ここで設定したカットオフスケールが大きいほど、摂動論が有効であるため推定される宇宙論パラメタの系統誤差が小さくなるが、逆に使用できるデータは減ってしまうため推定される統計誤差が大きくなってしまう。したがって、宇宙論パラメタの精密測定を行うためには、大規模構造の摂動論が銀河サーベイデータの解析に有効であるような条件の下で、できる限り小スケールにカットオフスケールを設定する (= できる限り多くのデータを使用する) ことが重要である。

カットオフスケールは、観測量に依存して決まっている。例えば重力レンズ現象は非局所的な現象であるため、摂動論が正しくないようなスケールのシグナルが容易に大スケールまで影響を及ぼしてしまい、結果としてカットオフスケールを比較的大スケールに設定しなければならないという事情がある。このことを解決するために、非局所的な重力レンズ観測量にフィルターをかけて小スケールへの依存性を小さくした観測量が、Baldauf et al. (2010) や共同研究者の Youngsoo によって提案されている。そこで本研究では、各観測量を使った時の宇宙論パラメタ

の統計誤差を調べることで、摂動論の有効性を検証する。

2 Methods

数値計算で作成された Mock カタログをデータとし、摂動論モデルで宇宙論パラメタがどの程度復元するか調べることで、摂動論の有効性を検証する。Mock カタログは、N 体シミュレーションで計算された 1Gpc^3 中のダークマター分布に、Halo Occupation Distribution (HOD) モデルを使って銀河をばらまいて作成されている。一方我々が使うモデルは以下の 2.2 で説明するように、パワースペクトルを決める宇宙論パラメタ $(\omega_c, \omega_b, \omega_\nu, A_s, n_s, w)$ (順に CDM, バリオン, ニュートリノ, スカラー揺らぎ振幅, スペクトル指数, ダークエネルギーの状態方程式でありダークエネルギー密度パラメタ $\Omega_{\text{de}} = 1 - (\omega_c + \omega_b + \omega_\nu)/h^2$ と関係がついている) と、銀河バイアスを特徴付ける nuisance パラメタ b_i がある。今は 1 で説明した tension に注目するため、制限するパラメタは $(\Omega_m, A_s, b_1, b_2)$ に絞る。以下に続く 2 小節では使用する観測量とパワースペクトルの計算方法について記述する。

2.1 Observables

もっとも一般的な、g-g レンズと銀河クラスタリングのシグナルは $(\Delta\Sigma, w_p)$ であり、各々

$$\Delta\Sigma(R) \equiv \Sigma_{\text{crit}} \langle \gamma_t \rangle \quad (1)$$

$$w_p(R) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\Pi \xi_{\text{gg}}(\sqrt{R^2 + \Pi^2}) \quad (2)$$

である、ここで $\langle \gamma_t \rangle$ は tangential shear, Σ_{crit} は critical surface density, ξ_{gg} は銀河の 3 次元実空間相関関数である。

Baldauf et al. (2010) が提案した Annular Differential Surface Density (ADSD) は、観測量 $\Delta\Sigma$ の非局所性からくる困難を解決するための観測量で

$$\Upsilon_{gm} = \Delta\Sigma(R) - \frac{R^2}{R_0^2} \Delta\Sigma(R_0) \quad (3)$$

と計算される。この観測量では R_0 をカットオフスケールにとったことになる。

Youngsoo の提案した観測量は

$$\Sigma(R) = 2 \int_R^{R_{\max}} d \ln R' \Delta \Sigma(R') + \Delta \Sigma(R_{\max}) - \Delta \Sigma(R) + \Sigma(R_{\max}) \quad (4)$$

である。この観測量は

$$\Delta \Sigma(R) = \frac{2}{R^2} \int_0^R dR' R' \Sigma(R') - \Sigma(R) \quad (5)$$

$$\Sigma(R) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Pi \xi_{\text{gm}}(\sqrt{R^2 + \Pi^2}) \quad (6)$$

という関係を逆に解いたものである。逆に解くことによって、 Σ は ξ_{gm} が円柱積分 (=円柱平均) されていない状態になることが確認でき、このことが非局所性の困難を解決している。

2.2 Theory

理論で対応する観測量を計算するためには、与えられたモデルパラメタの下でパワースペクトルを計算する必要がある。銀河バイアスモデルでは銀河の density contrast δ_{g} は、ダークマターの density contrast δ と以下のように関係づいている。

$$\delta_{\text{g}} = b_1 \delta + \frac{b_2}{2} \delta^2 \dots + \epsilon \quad (7)$$

の部分には b_2, b_3 などの高次の項があるが、それらの効果は小さいとして今は 2 次までの銀河バイアスパラメタを使用する。また ϵ はダークマターと銀河の分布は非決定的な関係であることを表す項である。こうすると、g-g レンズと銀河クラスターリングのパワースペクトルは

$$P_{\text{gm}}(k) \equiv \langle \delta_{\text{g}} \delta_{\text{g}} \rangle = b_1 P_{\text{NL}}(k) + b_2 A(k) \quad (8)$$

$$P_{\text{gg}}(k) \equiv \langle \delta_{\text{g}} \delta_{\text{g}} \rangle = b_1^2 P_{\text{NL}}(k) + 2b_1 b_2 A(k) + \frac{b_2}{2} B(k) \quad (9)$$

ここで $P_{\text{NL}} = \langle \delta \delta \rangle$ は非線形マターパワースペクトルであり、式 (8) と (9) の第 2,3 項は大規模構造の摂動

論によって

$$A(k) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} P_{\text{L}}(\mathbf{q}) P_{\text{L}}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) F_2(\mathbf{q}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) \quad (10)$$

$$B(k) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} P_{\text{lin}}(\mathbf{q}) [P_{\text{L}}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) - P_{\text{L}}(\mathbf{k})] \quad (11)$$

と計算される。 F_2 は摂動論の積分カーネルで、非線形効果による異なるスケール間のカップリングを表す。また P_{L} は線形マターパワースペクトルである。線形マターパワースペクトルは Nishimichi et al. (2018) で開発された **Dark Emulator** を、非線形マターパワースペクトルは銀河サーベイデータ解析で広く使用されている **halofit** (Takahashi et al. 2012) を使用する。

3 Results and Discussion

マルコフ連鎖モンテカルロ法 (MCMC) によってパラメタ推定を行った。

図 1 は観測量 ($\Delta \Sigma, w_{\text{p}}$) を使って制限した宇宙論パラメタである (銀河バイアスは興味のないパラメタであるから積分して周辺化してある)。左から順に ($\Delta \Sigma, w_{\text{p}}$) のカットオフスケールが (12, 8), (6, 4), (3, 2) と設定した場合で (単位は Mpc/h)、この観測量では (12, 8) のカットオフスケールが適切であることが確認できる。これは $\Delta \Sigma$ が非局所的な観測量であるために、比較的大スケールでも小スケールのシグナル (Ω_{de} が小スケールのスケール依存性を決めている) の影響を受けてしまうことが原因となっている。また小さいながらも $\ln 10^{10} A_s$ にもパラメタバイアスが起る (A_s が小さく推定された) ことを確認した。考えられる主要な理由は、非線形パワースペクトルが A_s に対して $\propto A_s^3$ の依存性を持つため大きい A_s を禁じる方向に働いていることである。

図 2 は観測量 (Σ, w_{p}) を使用して制限した宇宙論パラメタである。 Σ が非局所的な観測量であることを反映して $\Delta \Sigma$ で制限した場合と比較して Ω_{de} のパラメタバイアスが小さい。ところが A_s のパラメタバイアスが大きくなっている。非線形パワースペクトルの $\propto A_s^3$ 依存性がこの A_s のパラメタバイアスを起こしうることを確認しているが、それ以外にも

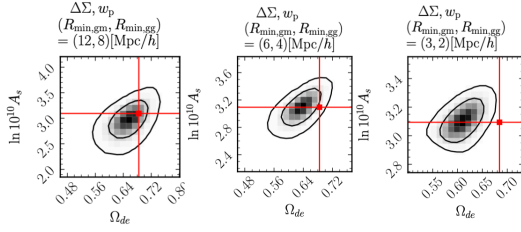


図 1: 観測量 $(\Delta\Sigma, w_p)$ を使って制限した宇宙論パラメータ (Ω_{de}, A_s) 。赤線が正しい宇宙論パラメータ。

$\Delta \rightarrow \Sigma$ の変換時に系統的なバイアスをうむ可能性も考えられ、今後の研究で定量的に詳しく調べていく。

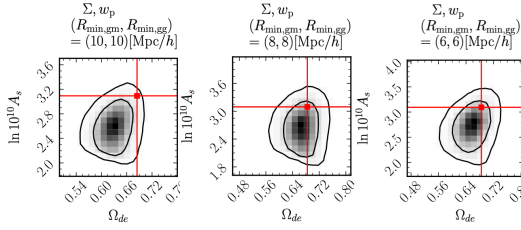


図 2: 観測量 (Σ, w_p) を使って制限した宇宙論パラメータ (Ω_{de}, A_s) 。

図 3 は観測量 $(\Upsilon_{gm}, \Upsilon_{gg})$ を使用して制限した宇宙論パラメータである。もっともうまくいっていない観測量である。 Σ の場合と同様に、非線形パワースペクトルの効果で A_s のパラメータバイアスが生じていると考えられている。また、今回は、先行研究 (Baldauf et al. 2010) で使用されている $\Delta\Sigma \rightarrow \Upsilon$ の変換方法にしたがったが、この方法には data と model の間で共通の変換方法を使用していないため系統的な誤差をうむ可能性がある。またカットオフ付近での S/N が著しく落ちるため、 Σ が復元できた Ω_m を、 Υ では復元できていないと考えられる。

4 Conclusion

観測量 $(\Delta\Sigma, w_p)$ では DES が報告したように、 $(12, 8)[\text{Mpc}/h]$ のスケールカットオフが必要であることが確認された。 Σ では期待されたように Ω_m を復元することができた。一方で、 Σ, Υ では、 $\Delta\Sigma$ か

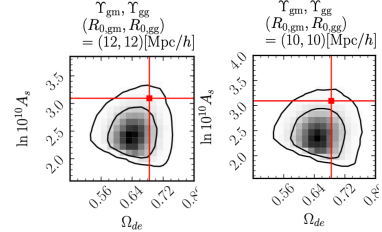


図 3: 観測量 $(\Upsilon_{gm}, \Upsilon_{gg})$ を使って制限した宇宙論パラメータ (Ω_{de}, A_s) 。

らの変換に伴う系統誤差と、非線形パワースペクトルの A_s 依存性に起因して、 A_s に大きなパラメータバイアスをもたらすことが考えられている。今後の研究ではこの系統誤差がパラメータバイアスを説明するのに十分であるかどうかの定量的チェックと、それを踏まえて、パラメータバイアスを生じないような推定パイプラインの作成を行っていく。

Reference

- Tobias Baldauf, Robert E. Smith, Uro š Seljak, and Rachel Mandelbaum. Algorithm for the direct reconstruction of the dark matter correlation function from weak lensing and galaxy clustering. *Phys. Rev. D*, 81:063531, Mar 2010. doi: 10.1103/PhysRevD.81.063531.
- Chiaki Hikage et al. Cosmology from cosmic shear power spectra with Subaru Hyper Suprime-Cam first-year data. *Publ. Astron. Soc. Jap.*, 71(2):Publications of the Astronomical Society of Japan, Volume 71, Issue 2, April 2019, 43, 2019. doi: 10.1093/pasj/psz010.
- Takahiro Nishimichi et al. Dark Quest. I. Fast and Accurate Emulation of Halo Clustering Statistics and Its Application to Galaxy Clustering. 2018.
- Ryuichi Takahashi, Masanori Sato, Takahiro Nishimichi, Atsushi Taruya, and Masamune Oguri. Revising the Halofit Model for the Nonlinear Matter Power Spectrum. *Astrophys. J.*, 761:152, 2012. doi: 10.1088/0004-637X/761/2/152.

a20

宇宙の大規模構造とダークマターハ
ローの形状の相関

東京大学大学院 理学系研究科

栗田 智貴

宇宙の大規模構造とダークマターハローの形状の相関

栗田 智貴 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

宇宙構造形成の標準シナリオである冷たいダークマターモデル (CDM モデル) では、CDM が密集した自己重力系であるダークマターハローの中に銀河が形成される。銀河の形状やその周囲を包むハローの形状は、それらを構成する物質と大規模構造による宇宙広域の潮汐力場との重力相互作用の結果を反映すると考えられる。このような大規模構造と形状の相関は Intrinsic Alignment (IA) と呼ばれ、理論と観測の両面で研究が進展している。本研究では、N 体シミュレーションを用いて大規模構造 (ダークマターの空間分布) とハローの形状の相関を測定し、ハロー質量依存性、赤方偏移依存性を系統的に調べた。特に、従来の 2 次元実空間相関関数に基づく研究とは異なり、ハローの 3 次元空間分布を利用した 3 次元パワースペクトルの測定を行なったことで、摂動理論の高精度かつ容易な検証が可能となった。本研究において、大スケール ($\gtrsim 100\text{Mpc}/h$) の相関が摂動論の予言と合致することを確認し、さらにその相関は高質量のハローほど強く、宇宙の時間進化とともに減衰することを示した。これらの結果は、ハローの形状が構造形成初期の大規模構造の情報を多く含むことを示唆する。

1 Introduction

宇宙構造形成の標準シナリオである冷たいダークマターモデル (CDM モデル) では、CDM が密集した自己重力系であるダークマターハローの中に銀河が形成される。銀河の形状やその周囲を包むハローの形状は、それらを構成する物質と大規模構造による宇宙広域の潮汐力場との重力相互作用の結果を反映すると考えられる。このような大規模構造と形状の相関は Intrinsic Alignment (IA) と呼ばれ、銀河サーベイを用いて宇宙論モデルを検証する上で重要な役割を担っており、現在理論と観測の両面で研究が進展している。

例えば IA は弱い重力レンズ効果の解析に対して深刻な系統誤差を引き起こす可能性がある (1)。弱い重力レンズ効果の精密解析は、ダークマター分布の再構成や宇宙論パラメータの推定を可能にする強力な手法の一つとして現在確立しているが、高精度な結果を得るためには解析における系統誤差のコントロールは不可欠である。また IA を単なる系統誤差の要因としてではなく、シグナルとして考え、IA が含む宇宙論的な情報を引き出す研究も近年進展している。このように IA の物理機構を詳細に理解することは、弱い重力レンズ効果を用いた宇宙論パラメータ

の推定精度の向上や、IA 自身に含まれる宇宙論的な情報の抽出可能性に直結するという点で非常に重要である。

IA の理論的な研究手法として、摂動論によって理論モデルを構築する手法と宇宙論的 N 体シミュレーションを用いる手法の二つがある。摂動論は物理的な描像を理解しやすいという利点があるが、重力による非線形成長に起因して小スケール (短波長) 領域では破綻することが知られている。しかし現状では小スケールにおける摂動論の適用限界は調べられていない。これは N 体シミュレーションの結果と比較して検証する必要がある。また N 体シミュレーションを用いて IA を調べる先行研究 (2) は、大規模構造による潮汐力場とハロー (銀河) の主軸の向き同士の相関のみを測定するものがほとんどである。しかし実際の観測において、特に弱い重力レンズへの系統誤差を評価する際に考慮すべき IA のシグナルは、大規模構造による潮汐力場とハロー (銀河) の形状 (歪みの大きさと向き) の相関である。このようなシグナルのハロー質量依存性や赤方偏移依存性、宇宙論パラメータ依存性について N 体シミュレーションを用いて系統的に調べた研究は未だない。以上の問題点を踏まえ、本研究では IA の性質を N 体シミュレーショ

ンを用いて詳細に調べることが目的とする。

2 Intrinsic Alignment

この章では潮汐力場に起因する IA モデル (1) を簡単にレビューする。このモデルでは、赤方偏移 z において銀河やハローの形状から構築できる歪みテンソル場 $\gamma_{ij}(\mathbf{x}, z)$ は、IA が刻まれる赤方偏移 z_{IA} での潮汐力場 $s_{ij}(\mathbf{x}, z_{\text{IA}})$ に比例する、すなわち

$$\gamma_{ij}(\mathbf{x}; z) \propto s_{ij}(\mathbf{x}; z_{\text{IA}}), \quad (1)$$

が成り立つことを仮定する。ここで

$$s_{ij}(\mathbf{x}; z) \equiv \left(\nabla_i \nabla_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 \right) \Phi(\mathbf{x}; z), \quad (2)$$

であり、 $\Phi(\mathbf{x}, z)$ は重力ポテンシャルである。我々が観測できるのは天球面上に射影された 2 次元の形状であるため、観測量は視線方向 $\hat{\mathbf{n}}$ に対する射影テンソル $\mathcal{P}_{ij}(\hat{\mathbf{n}}) \equiv \delta_{ij} - \hat{n}_i \hat{n}_j$ を用いて

$$\gamma_{ij}^{\text{proj}}(\mathbf{x}; z) \propto \mathcal{P}_i^k(\hat{\mathbf{n}}) \mathcal{P}_j^l(\hat{\mathbf{n}}) s_{kl}(\mathbf{x}; z_{\text{IA}}), \quad (3)$$

となる。簡単のため天球面を平面近似 (すなわち観測領域が曲率を無視できるほど十分狭いとする近似) をし、視線方向を 3 軸に固定すれば、 $\gamma_{ij}^{\text{proj}}$ は

$$\gamma_{ij}^{\text{proj}}(\mathbf{x}; z) = \begin{pmatrix} \gamma_+ & \gamma_\times & 0 \\ \gamma_\times & -\gamma_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

のように表せる。それぞれの 2 成分は

$$\begin{aligned} \gamma_+(\mathbf{x}; z) &\equiv -\frac{C_1}{4\pi G} (\nabla_1^2 - \nabla_2^2) \Phi(\mathbf{x}; z_{\text{IA}}), \\ \gamma_\times(\mathbf{x}; z) &\equiv -\frac{2C_1}{4\pi G} \nabla_1 \nabla_2 \Phi(\mathbf{x}; z_{\text{IA}}), \end{aligned} \quad (5)$$

である。 C_1 は比例係数であり、ハローの場合、質量や赤方偏移、宇宙論パラメータ等に依存する。銀河の場合、そのほかに光度などにも依存する。負符号はハロー (銀河) の形状が潮汐力の短軸方向 (ものを引き延ばす方向) に歪んだ時に $C_1 > 0$ となるようにとっている。

フーリエ空間でのポアソン方程式

$$\Phi(\mathbf{k}, z) = -4\pi G \Omega_m \rho_{\text{cri}} (1+z) k^{-2} \delta(\mathbf{k}, z), \quad (6)$$

を用いると、Eq. (5) は

$$\gamma_{(+,\times)}(\mathbf{k}, z) = -C_1 \Omega_m \rho_{\text{cri}} (1+z_{\text{IA}}) f_{(+,\times)}(\hat{\mathbf{k}}) \delta(\mathbf{k}, z_{\text{IA}}), \quad (7)$$

となる。 ρ_{cri} は現在の臨界密度であり、

$$f_{(+,\times)}(\hat{\mathbf{k}}) = (1 - \mu^2) (\cos 2\phi, \sin 2\phi), \quad (8)$$

$\mu \equiv \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{k}_3$ 、 $\phi = \tan^{-1}(\hat{k}_1/\hat{k}_2)$ である。ここで z_{IA} が物質優勢期である (primordial alignment) と仮定し、Eq. (7) を線形スケールに限定すれば

$$\gamma_{(+,\times)}(\mathbf{k}, z) = -A_I C_1 \rho_{\text{cri}} \frac{\Omega_m}{D(z)} f_{(+,\times)}(\hat{\mathbf{k}}) \delta(\mathbf{k}, z), \quad (9)$$

となる。 $D(z)$ は $D(0) = 1$ に規格化した線形成長因子である。 $C_1 \rho_{\text{cri}} = 0.0134$ と固定して、今定義した A_I を IA の振幅を示す無次元のパラメータとして今後用いる。歪み場は spin-2 の場であるから、座標によらない量を定義するために E/B 分解をすると

$$\gamma_E = \gamma_+ \cos 2\phi + \gamma_\times \sin 2\phi = -A_I C_1 \rho_{\text{cri}} \frac{\Omega_m}{D} (1 - \mu^2) \delta, \quad (10)$$

$$\gamma_B = -\gamma_+ \sin 2\phi + \gamma_\times \cos 2\phi = 0. \quad (11)$$

となる。したがって、形状の E モードは密度揺らぎそのものの (biased) トレーサーになっている。最後に Eq. (10) を用いれば、密度揺らぎと形状の相互パワースペクトルと形状の自己パワースペクトルは以下のようにかけることがわかる。

$$P_{\delta E}(k, \mu, z) = -A_I C_1 \rho_{\text{cri}} \frac{\Omega_m}{D(z)} (1 - \mu^2) P_\delta^{\text{lin}}(k, z), \quad (12)$$

$$P_{EE}(k, \mu, z) = \left[A_I C_1 \rho_{\text{cri}} \frac{\Omega_m}{D(z)} (1 - \mu^2) \right]^2 P_\delta^{\text{lin}}(k, z), \quad (13)$$

(μ に依存した形になっているため、実際は多重極展開

$$P_{XY}^{(\ell)}(k) \equiv (2\ell + 1) \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} P_\ell(\mu) P_{XY}, \quad (14)$$

で議論する。)

3 Simulation

使用したシミュレーションと注目したハロー質量、赤方偏移は下表のとおりである。

宇宙論	Planck 2015
Boxsize	$L = 1\text{Gpc}/h$
粒子数	$(2048)^3$
realization	20
粒子質量	$1.020 \times 10^{10} M_{\odot}/h$
ハロー質量	$10^{12-14} M_{\odot}/h$
赤方偏移	$0 \sim 1.5$

4 Estimate the shear field γ

歪みテンソル場 γ はハローの形状を用いて推定することができる。まずそれぞれのハローに対して慣性モーメント

$$I_{ij} \equiv \sum_p m_p \frac{\Delta x_p^i \Delta x_p^j}{r_p^2} \quad (15)$$

を定義する。ここで Δx_p はそれぞれのメンバー粒子位置のハロー中心からのずれであり、中心から r_p^{-2} で重みをつけている。これは実際に観測された銀河の輝度分布に近くなるようにしたものである。この時視線方向（今回は 3 軸）に対する楕円率は

$$\epsilon_+^{(h)} = \frac{I_{11} - I_{22}}{I_{11} + I_{22}}, \quad \epsilon_{\times}^{(h)} = \frac{2I_{12}}{I_{11} + I_{22}} \quad (16)$$

となる。これを用いて全体の楕円率場

$$\epsilon_{(+,\times)}(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\bar{n}_h} \sum_h \epsilon_{(+,\times)}^{(h)} \delta_D^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_h) \quad (17)$$

を構築する。この場をフーリエ変換、E/B 分解することで $P_{\delta E}, P_{EE}$ を測定する。

5 Results

測定したパワースペクトルを図 1 に示す。黒色は（普通の）マターパワースペクトル、その他はマターとハロー形状の相互パワースペクトルである。マターパワースペクトルより振幅が小さいのは、定義から $-1 < \gamma < 1$ であることが由来である。またハロー質量に関して重いハローほどシグナルが大きい結果となった。重いハローほど変形を受けにくい（逆に軽いハローほどより歪な形をしているため）、重いハローほど歪み自体からくる相関の大きさは小さく

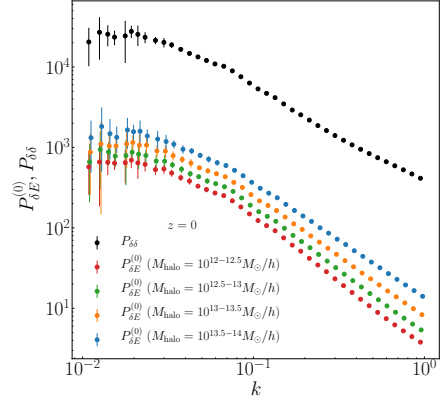


図 1: 相関のシグナルのハロー質量依存性。黒色は matter power spectrum。それ以外は matter-shape power spectra の monopole。

なるはずである。従って今回の結果は重いハローの方が、歪みの向きが潮汐の向きによく一致しているからであると解釈できる。

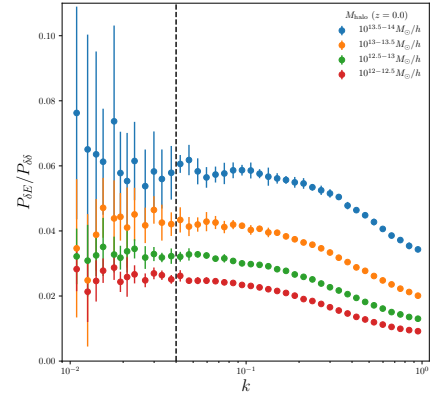


図 2: matter-shape power spectra の monopole と matter power spectrum の比。おおよそ黒色の点線より左側が線型領域である。

図 2 はマターパワースペクトルに対する比のプロットである。線型領域で一定になることは Eq. (12) の予言と合致する。

図 3 は IA の振幅 A_I の測定値である。ハロー質量依存性は前述のとおりである。赤方偏移依存性につ

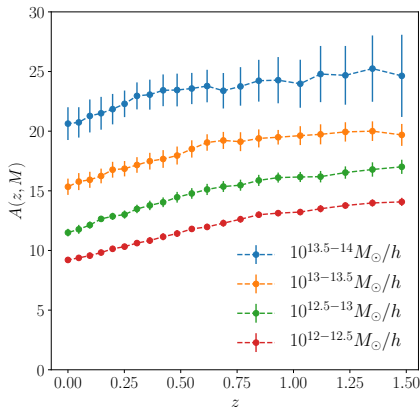


図 3: 振幅 A_l のハロー質量、赤方偏移依存性。

いて、高赤方偏移（昔）ほど、その当時の潮汐力場との相関が強い結果となった。

6 Discussion

高赤方偏移にいるハローの方が相関が強い結果及び、重いハローの方がより現在に近い時刻で形成される（ものが多い）ため、ハローの形状は形成時に最も周りの潮汐力場と相関することが読み取れることを踏まえると、ハローの形状は構造形成初期の潮汐力場（重力場）の情報を多く含む可能性がある。これに関連して、primordial non-gaussianity を含めたシミュレーションを実行し、シグナルの変化が従来の銀河（ハロー）分布を用いた大規模構造のパワースペクトルより sensitive かどうか調べる予定である。

また今回 IA シグナルのハロー質量と赤方偏移への依存性を調べたが、この以外への依存性として宇宙論パラメータ依存性を調べる予定である。さらに本研究では線形領域（大スケール）のみのシグナルに注目したが、高次の摂動の寄与を含めることで、準非線形領域まで拡張したモデルのパラメータ決定も行う予定である。

本研究の結果は、世界各地で現在遂行中・将来計画されている弱い重力レンズ効果の測定プロジェクトに対して、解析の際に考慮する IA のテンプレートを与え、宇宙論パラメータ推定の精度向上に直結

するという点で大きなインパクトがある。また近年進展している、IA に含まれる宇宙論的な情報を引き出す研究に対して有益な情報を与えると考えられる。

Reference

- [1] Hirata, C. M. & Seljak, U., Phys. Rev. D, 70, 063526
- [2] Johnston, H., et al., Astron. Astrophys., 624, A30

a21

ハッブル定数の不一致問題に対する
cosmological backreactionによる説明の
問題点

京都大学大学院 理学研究科

三浦 大志

ハッブル定数の不一致問題に対する cosmological backreaction による説明の問題点

三浦 大志 (京都大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙の膨張率を記述する速度と距離の間の比例係数 H_0 はハッブル定数と呼ばれ、宇宙論モデルを制限する重要なパラメータである。現在の標準的な宇宙論モデルである Λ CDM モデルは様々な観測とほぼ矛盾がない。しかしながら Planck 衛星で観測された宇宙マイクロ波背景放射の非等方性と、標準光源の赤方偏移と光度距離を用いる直接観測で求められた 2 つのハッブル定数の値の間には 4σ 以上の不一致がある。この不一致は標準宇宙論モデルが不十分であることを示唆している可能性があり、重大な問題である。この問題に対して、小スケールでの宇宙の非一様性により背景時空の時間発展が変更される効果 (cosmological backreaction) により直接観測によって測定されたハッブル定数が変更され、ハッブル定数の不一致問題が解決できる可能性があるという主張がある [1][2]。しかしながら、基本的に cosmological backreaction は計量に対する摂動の 2 次のオーダーで影響し、ホライズンより十分内側で Newtonian cosmology に一致する Newtonian gauge ではその backreaction の効果は十分無視できるという主張もある [3]。したがって本講演では、宇宙の非一様性を考慮し、直接観測で測定されるハッブル定数を光の測地線方程式を解く方法である ray-tracing 法を用いて求め、cosmological backreaction がハッブル定数の不一致問題を説明できるかどうかを検証する。その際 Newtonian cosmology で物理量を計算した Newtonian gauge を用いる。その結果、cosmological backreaction の直接観測で測定されるハッブル定数への影響は十分小さく、ハッブル定数の不一致問題を説明できるほどではないことを示す。また、ある重力崩壊領域に対する近似や平均化の手法を用いると、Newtonian cosmology を用いても、先行研究で示唆されるような cosmological backreaction のハッブル定数への誤った影響が得られてしまうことを示す。

1 Introduction

宇宙の膨張率を記述する速度と距離の間の比例係数 H_0 はハッブル定数と呼ばれる。宇宙論モデルを制限する重要なパラメータであるこのハッブル定数の測定において現在問題がある。Planck 衛星で観測された宇宙マイクロ波背景放射の非等方性と、標準光源の赤方偏移と光度距離を用いる直接観測で求められた 2 つのハッブル定数の値の間には 4σ 以上の不一致がある。この不一致は標準宇宙論モデルが不十分であることを示唆している可能性があり、重大な問題である。この問題に対しては様々な解決策が考えられている。例えば、宇宙の晴れ上がり以前の未知の放射成分があればこの不一致は解決される。この解決策の中に、小スケールでの宇宙の非一様性により背景時空の時間発展が変更される効果 (cosmological backreaction)

により直接観測によって測定されたハッブル定数が変更され、ハッブル定数の不一致問題が解決できる可能性があるという主張がある [1][2]。しかしながら、基本的に cosmological backreaction は計量に対する摂動の 2 次のオーダーで影響し、ホライズンより十分内側で Newtonian cosmology に一致する Newtonian gauge ではその backreaction の効果は十分無視できるという主張もある [3]。

2 ハッブル定数の直接観測に対する synchronous-comoving gauge

先行研究 [1] では、直接観測で測定されるハッブル定数を ray-tracing 法を用いて見積もっている。ダス

ト宇宙をでは、ハッブル定数は

$$H_0 = \frac{2(1+z)}{D_L} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right), \quad (1)$$

と計算される。ただし、 D_L は光源の光度距離で、 z は光源の赤方偏移である。よって、 D_L と z を求めることにより、ハッブル定数を求めることができる。これらは、光の測地線ベクトルを用いて計算することができる。

このハッブル定数を計算するときに、synchronous-comoving gauge を用いると cosmological backreaction を誤って見積もってしまうことをこの講演では示す。具体的には synchronous-comoving gauge では流体素片の世界線が交差してしまうと座標が破綻してしまう。そのため、何かこれを回避するような処方箋が必要である。先行研究 [1] では一つの方法として流体素片が turnaround で流体素片の密度や局所膨張率、シアーなどを凍結させている。この処方箋を用いると、ray-tracing 法で cosmological backreaction の見積もりをしたときに誤った効果が得られることを本講演では示す。

3 平均化に対する synchronous-comoving gauge

先行研究 [2] では synchronous-comoving gauge の 2 次摂動を用いて、cosmological backreaction を計算し、ハッブル定数の不一致問題を解決する可能性があることを示している。しかしながら、この cosmological backreaction の見積もりには、平均化の手法を用いているが、その手法は適切ではないことを本講演では示す。

Buchert の方法では流体の任意のコンパクト部分領域 \mathcal{D} 上における Lagrange 座標 \mathbf{q} と T の関数としてのスカラー場 Ψ の空間平均は

$$\langle \Psi(T, q^i) \rangle_{\mathcal{D}} \equiv \frac{1}{V_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} J d^3 q \Psi(T, q^i) \quad (2)$$

と定義される。ここで $dV \equiv J d^3 q$ は時間一定面の体積要素であり、

$$J \equiv \sqrt{\det(\gamma_{ij})} \quad (3)$$

と定義される。またその領域の体積 $V_{\mathcal{D}}$ は

$$V_{\mathcal{D}} \equiv \int_{\mathcal{D}} J d^3 q \quad (4)$$

と定義する。

この平均化の方法であれば、先行研究 [2] で示唆されるような cosmological backreaction の大きな効果は得られないのではないかとこのことを本講演では述べる。

Reference

- [1] K. Bolejko, Physical Review D97, 103529 (2018)
- [2] K. Tomita, Progress of Theoretical and Experimental Physics 2018, 021E01 (2018)
- [3] S. Green and R. Wald, Physical Review D83, 084020 (2011)

a22

銀河形状を用いた初期三点相関の検証
名古屋大学大学院 理学研究科
小粥 一寛

銀河形状を用いた初期三点相関の検証

小粥 一寛 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙初期には急激な加速膨張 (インフレーション) があり, これはスカラー場であるインフラトンにより引き起こされたとされる. インフレーションモデルは数多く提唱されているが, その重要な予言として, インフラトンの量子的ゆらぎにより空間曲率のゆらぎが生じ構造形成のもととなる密度ゆらぎが生成されることが挙げられる. 一方で, 高エネルギー物理では, 自然界の四つの力を統一的に記述する超弦理論が提案されている. 超弦理論は特有の性質として 2 より大きなスピンをもつ粒子 (高スピン粒子) の存在を予言する. この高スピン粒子とインフラトンが相互作用した場合には, 曲率ゆらぎの統計的性質に, 非ガウス性が生じ, その波長間の角度や粒子の質量に依存する固有の特徴が表れることが示されている. 以上のことから, 宇宙論的観測により, このような非ガウス性に迫ることで超弦理論の観測的な検証につながることを期待できる. ゆらぎの分布の非ガウス性は, 三点以上の高次相関によって特徴づけられる. 先行研究では, 銀河形状の観測を用いた初期三点相関の検出可能性が検証された. 早期に形成が始まり十分に時間が経過したと考えられる楕円銀河の形状は, その周囲のダークマターハローの潮汐場と相関することから, 宇宙初期の曲率ゆらぎの情報が含まれるからである. このことから, 銀河形状の観測は角度依存する初期非ガウス性の検証に有用であることが示された. 本研究では, これを応用し高スピン粒子が生成する非ガウス性のうち, 初期三点相関が銀河形状に与える影響を調べ, その検出可能性を検証した. 銀河形状モーメントは, 初期三点相関に表れるスピンと関係し, 4 次モーメントでは初期三点相関におけるスピン 4 粒子の痕跡を検出できる可能性があることがわかった. この発見は今後の初期非ガウス性の探査において重要な指針を与える.

1 導入

インフレーション理論は標準ビッグバン宇宙論における諸問題を解決できると期待されている. この理論モデルは多数提唱されているが共通することは, インフレーションを引き起こしたスカラー場であるインフラトンの量子ゆらぎは, 急激な加速膨張によりゆらぎが引き伸ばされ, 古典的ゆらぎに転じると考えられている. このようなゆらぎが放射や物質のゆらぎの起源となり, その後の時間進化により宇宙の構造が形成される. すなわち, 宇宙の構造を紐解くことは初期宇宙に迫ることをも可能にさせる. さらに, このインフレーション期のエネルギースケールは宇宙マイクロ波背景放射の観測から, $H_{\text{inf}} \lesssim 10^{14} [\text{GeV}]$ であるとされており, 地上実験では困難な高エネルギーな物理を宇宙観測から検証できる可能性が秘められている.

一方で, 高エネルギー物理の観点からは, 自然界の四つの基本的な力を統一できると期待されている超

弦理論がある. この理論は高次スピン ($s = 2, 4, \dots$) をもつ有質量場の存在を予言しており, 特に, 場の質量が $m \sim H_{\text{inf}}$ のとき, インフラトンと相互作用することで, 非等方な曲率ゆらぎが生じることが示されており, さらに, この非等方性は曲率ゆらぎの統計的性質から検証することができるといわれている. 一般に, 曲率ゆらぎはほぼガウス分布に従い, 二点相関の情報のみで理論と観測がよく表されることが知られているが, 理論からはわずかにガウス分布から外れるという非ガウス性の予言もされている. この非ガウス性は, フーリエ空間における曲率ゆらぎの高次相関で表される. インフラトンと高次スピンをもつ有質量場との相互作用による非ガウス性が (Arkani-Hamed & Maldacena 2015) では, より一般的な高次相関の場合に示されているが, ここでは, そのひとつである三点相関のバイスペクトルに着目すると, その大まな特徴としては, スピン依存する冪をもった $(\mathbf{k}_S \cdot \mathbf{k}_L)^s$ の角度依存性, 質量とスピン

に依存する幂をモード比 (k_L/k_S) と振動の 2 点が挙げられる。このような特徴をもつ非ガウス性が、特にスピン 4 以上の場合において観測により検出できれば、新粒子の観測的証拠になり、更には超弦理論の検証にもつながることが期待される。

このゆらぎの非等方性の制限に対する観測手法としては、宇宙マイクロ波背景放射や銀河サーベイ等があるが、ここでは銀河形状を用いた非等方性への制限に着目する。これは、Schmidt et al. (2015) において、銀河形状を用いることでゆらぎに角度依存性を含むバイスペクトルによる影響が調べられ、角度依存性の有無によって、楕円銀河の固有形状の相関に違いが見られることが示され、宇宙マイクロ波背景放射と比べて小スケールにおける観測領域によってその非ガウス性の存在に制限ができることが示された。また、次世代大規模構造サーベイ (例えば、*Large Synoptic Survey Telescope (LSST)* や *Euclid*, *Wide-Field Infrared Survey Telescope (WFIRST)* など) の稼働が間近に迫り、銀河の形状の撮像によるサンプルが劇的に増えることで、より精密な宇宙論としての応用に期待される。

本講演では、はじめにスピン 2 をもつ有質量場とインフラトンの相互作用におけるバイスペクトルの影響が見られると考えられた Kogai et al. (2018) において課題となった点に加え、より高次スピン場により生じる非ガウス性の銀河形状を用いた場合について議論を行う。

2 準備

2.1 初期三点相関関数

スピンをもつ有質量場とインフラトンが相互作用する場合に表れる初期ゆらぎの三点相関関数は、Squeezed-limit ($k_L = k_1 \ll k_2 \sim k_3 = k_S$) な場合、重力ポテンシャル ϕ を用いて

$$B_\phi(\mathbf{k}_S, \mathbf{k}_L) \sim \sum_{s=\text{even}} A_s \left(\frac{k_L}{k_S} \right)^{\Delta_s} P_s(\mathbf{k}_S \cdot \mathbf{k}_L) \times \cos \left(\nu_s \ln \left(\frac{k_L}{k_S} \right) + \varphi_s \right) P_\phi(k_S) P_\phi(k_L), \quad (1)$$

で表される。これは断熱条件を仮定し物質優勢期では、曲率ゆらぎ ζ とポテンシャル ϕ が $\zeta \sim \phi$ の関係であることを用いた。 P_ϕ は ϕ のパワースペクトル、 P_s はルジャンドル多項式、 ν_s は質量とスピンの依存性をもつパラメータ、 φ_s は位相である。ここで、 $\Delta_2 = 0$, $\nu_2 = 0$ の場合は先行研究と同じになる。

2.2 銀河形状関数

銀河の形状を用いた観測を想定するため、はじめに、銀河形状関数について議論する。以下、二次モーメントの場合を示すことにする。慣性モーメントテンソル I_{ij} を用いて、銀河形状関数 g_{ij} を

$$g_{ij} = \frac{1}{I^k_k} \left(I_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} I^k_k \right), \quad (2)$$

と定義する。これが局所的に物質の密度ゆらぎ $\delta(\mathbf{x})$ と潮汐テンソル

$$K_{ij}(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right] \delta(\mathbf{x}), \quad (3)$$

を用いて、 $g_{ij} = G[\delta, K_{ij}]$ の汎関数で表せるとき、バイアス係数 $b_i (i = 1, 2, \dots)$ を用いて局所で展開すると、

$$g_{ij}(\mathbf{x}) = b_1^I K_{ij}(\mathbf{x}) + b_2^I \delta(\mathbf{x}) K_{ij}(\mathbf{x}) + b_t^I \left[K_{ik} K^k_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} (K_{kl})^2 \right] (\mathbf{x}) + \mathcal{O}(\delta^3), \quad (4)$$

と展開できる。

次に、非ガウス性により銀河形状にどのような影響が見られるかを調べるために、密度ゆらぎと銀河形状関数との相関 $\langle \delta(\mathbf{x}) g_{ij}(\mathbf{y}) \rangle$ を考える。このとき g_{ij} の第 2 項、第 3 項は対応するフーリエ空間において実効的に $\langle \delta(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_3) \rangle$ の三点相関が生じる。ところが、物質の密度ゆらぎ δ とポテンシャル ϕ にはポアソン方程式を通じて、

$$\delta(z, \mathbf{k}) = \frac{2}{3} \frac{k^2 T(k) D(z)}{\Omega_{m0} H_0^2} \phi(\mathbf{k}), \quad (5)$$

の関係があるため、ポテンシャルの三点相関とみなすことができる。ここで $T(k)$ は輸送関数、 $D(z)$ は

成長因子 Ω_{m0} は現在の物質の密度パラメータ, H_0 はハッブル定数を表す. また,

$$\begin{aligned} & \langle \phi(\mathbf{k}_1)\phi(\mathbf{k}_2)\phi(\mathbf{k}_3) \rangle \\ & = (2\pi)^3 B_\phi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \quad (6) \end{aligned}$$

の関係から前節で述べた初期三点相関関数に応じて相関に違いが生まれる. このようにして、銀河形状関数は相関をとることで初期ゆらぎの非等方性の痕跡を探ることが可能となる. より一般的には、銀河の数密度は〇次モーメントに対応し、更に三次、四次、…と拡張を行うこともできる. ここでは詳しく述べないが、バイスペクトルで現れた角度依存性におけるスピン(場のスピンに対応する)は、銀河の形状のモーメントと大まかに対応するし、実際に〇次モーメントである銀河の数密度は、局所非ガウス性を特徴づける f_{NL}^{loc} によって非ガウス性の影響が表れる. (Dalal et al. 2007)

3 結果

実際の観測を想定した場合におけるシグナルの検証を行う. そのため、前節では三次元で定義を行ったが、その形状関数を天球面上に射影することで銀河形状の相関を検証する. これは射影テンソルを作用させることで変換でき、射影した形状の相関の評価は、球面調和関数で展開した係数の相関を計算する角度パワースペクトルを用いた. (詳細: (Kogai et al. 2018)) 結果として、初期三点相関関数が式 (1) の場合、銀河の歪みの角度パワースペクトルは、次のような形で得られた.

$$C_l^{EE} = \frac{2}{\pi} \frac{(l-2)!}{(l+2)!} \int k^2 dk P_m(k) [F_l^I(k) + F_l^G(k)]^2. \quad (7)$$

ここで P_m は物質のパワースペクトルで、 F_l^G は弱い重力レンズによる銀河の歪みのカーネルとして

$$\begin{aligned} F_l^G(k) & = \frac{1}{2} \frac{(l+2)!}{(l-2)!} \int_0^{\chi_{max}} \frac{d\chi}{\chi} \frac{3H_0^2 \Omega_{m0}}{k^2} \frac{(1+z)D(z)}{D(0)} \\ & \times j_l(x) \int_x^{\chi_{max}} d\tilde{\chi} H(\tilde{\chi}) \frac{dN_G(\tilde{\chi}-\chi)}{d\tilde{\chi}} \frac{(\tilde{\chi}-\chi)}{\tilde{\chi}}, \quad (8) \end{aligned}$$

F_l^I は銀河固有形状のカーネルとして

$$\begin{aligned} F_l^I(k) & = \frac{1}{2} \frac{(l+2)!}{(l-2)!} \int dz \frac{dN_I}{dz} \frac{D(z)}{D(0)} \frac{j_l(x)}{x^2} \\ & \times \left[b_1^I + 3b_{NG}^I A_2 \left(\frac{k}{k_*} \right)^{\Delta_2} \right. \\ & \left. \mathcal{M}^{-1}(z, k) \cos \left(\nu_2 \ln \left(\frac{k}{k_*} \right) + \Theta_2 \right) \right], \quad (9) \end{aligned}$$

として得られる. ここで、 dN/dz は銀河の赤方偏移分布、 χ は共動距離、 k_* は参照スケールである. この角度パワースペクトルを図 1 に示した. 緑線は波数の角度依存性のみをもつ $\Delta_2 = 0$ に対応し、赤線がスピン 2 の有質量場との相互作用による非ガウス性を加えたものである. 以前も言及を行ったが、大スケール(小さい l) に初期の非等方性の痕跡が見られる. 一方で、 $\Delta_2 = 3/2$ の場合には、積分に含まれる k の冪の違いから、角度パワースペクトルにおいて大きな l 、すなわち小スケール側に初期ゆらぎの非等方性の痕跡が見られることがわかる. (図 2) こ

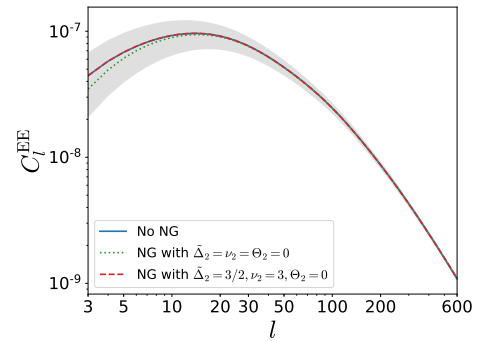


図 1: 銀河形状の角度パワースペクトル. 青線は $A_2 = 0$ の場合、緑線は $\Delta_2 = \nu_2 = \Theta_2 = 0$ で $b_{NG}^I A_2 = 100b_1^I$ の場合、赤線は $\Delta_2 = 3/2, \nu_2 = 3, \Theta_2 = 0$ で $b_{NG}^I A_2 = 8000b_1^I$ の場合である. 灰色は cosmic variance を示す. (Kogai et al. 2018)

までの議論では、線形解析を行っているが、スピン 2 の有質量場との相互作用による非ガウス性は小スケールで表れることから、非線形効果を考慮する必要があった. 今回は非線形効果を非線形領域のパワースペクトルに対して自己相似性から k^n に比例するとし、数値計算により n を求めることで非線形領域

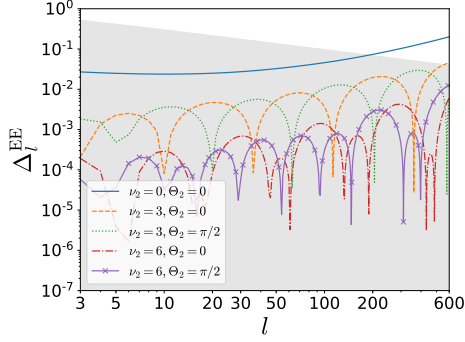


図 2: 銀河形状の角度パワースペクトルの非ガウス性がない場合との比: $\Delta_l^{EE} = |C_l^{EE} - C_{l,Gauss}^{EE}| / C_{l,Gauss}^{EE}$. 灰色は Cosmic variance を表す. (Kogai et al. 2018)

の振る舞いを調べられたもの (Pajer & Zaldarriaga 2013) を用いて評価を行った. その結果が図 3, 図 4 である. 図 3 では, バイスペクトルにスケールによって振幅が変わるスケール依存性がない場合 ($\Delta_2 = 0$) を示しており, 図 4 は $\Delta_2 = 3/2$ の場合を図示した. スケール依存性がない場合には, 大スケールで非ガウス性の相関がどの成分よりも優位になる領域があり, この領域 (桃色・茶色) で非ガウス性の違いが見られるが, $\Delta_2 = 3/2$ でスケール依存性を入れると, 非ガウス性のパラメータにも依存するが, 小スケールで非ガウス性の影響が見られてたものが, 非線形効果に埋もれてしまう可能性がわかった.

4 結論と議論

スピン 2 をもつ有質量場が存在する場合には, 小スケールに非等方性の特徴が表れることが示されたが, 小スケールに特徴が見られるという点から非線形効果の考慮が必要である. これを考慮するとスピン 2 の有質量場との相互作用による非ガウス性よりも非線形効果の方が優位になる可能性が示唆された. 一方, 高次モーメントでは各々のスケール依存性の違いから異なる振る舞いになることが期待される.

Reference

Arkani-Hamed, N., & Maldacena, J. 2015, arXiv:1503.08043
 Schmidt, F., Chisari, N. E., & Dvorkin, C. 2015, *JCAP*, 10, 032

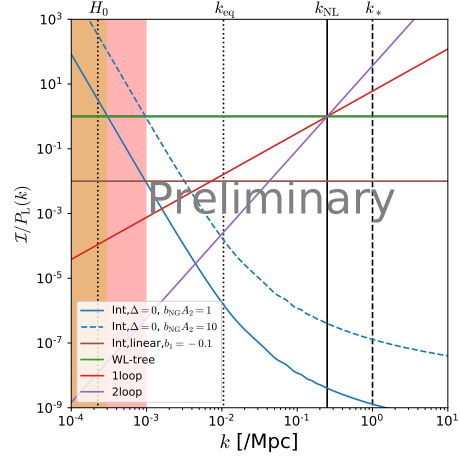


図 3: スケールによる各成分に対する相関 ($\Delta_2 = 0$). 茶線は銀河の固有形状からくる線形成分, 緑線は弱重力レンズ効果による成分, 青線は非ガウス性成分, 赤・紫線は非線形効果.

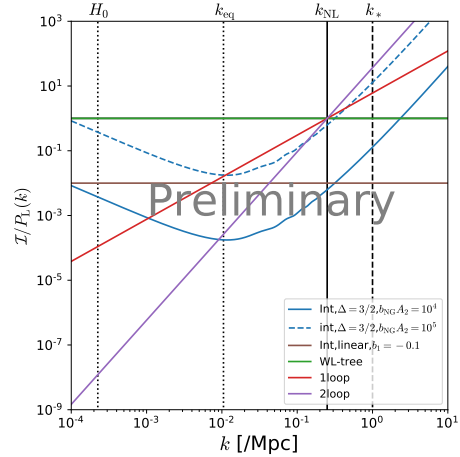


図 4: スケールによる各成分に対する相関 ($\Delta_2 = 3/2$). 色は図 3 と同様.

Kogai, K., Matsubara, T., Nishizawa, A. J., & Urakawa, Y. 2018, arXiv:1804.06284
 Yokoyama, S., & Soda, J. 2008, *JCAP*, 8, 005
 Schmidt, F., & Jeong, D. 2012, *Phys. Rev. D*, 86, 083527
 N. Dalal, O. Dore, D. Huterer and A. Shirokov, 2007, *Phys. Rev. D* **77**, 123514
 E. Pajer and M. Zaldarriaga, *JCAP* **1308**, 037 (2013)

a23

CMB レンズングを用いた銀河団の質量
推定

名古屋大学大学院 理学研究科

山本 菜々花

CMB レンズングを用いた銀河団の質量推定

山本 葉々花 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

銀河団は宇宙の中で最も大きな質量を持つ天体であり、銀河団の質量と数の関係は、原始密度揺らぎや暗黒エネルギーの性質に強く依存する。そのため、観測によって多くの銀河団を発見し、その質量を正しく推定する事は、宇宙論モデルの制限において非常に重要である。近年すばる望遠鏡 *Hyper Suprime-Cam* (HSC) などの観測により $z \leq 1.1$ 程度の遠方銀河団が数多く見つかり、銀河団を用いた精密宇宙論が期待される。また、質量の大部分を暗黒物質が占める銀河団に対し、弱重力レンズ効果を用いることで高精度の質量推定が可能となる。特に、 $z \sim 1, 100$ の最終散乱面から放射される宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) を背景光とする弱重力レンズ効果 (CMB レンズング) を用いると、遠方宇宙における質量分布の情報を手に入れることが出来る。

本発表では、質量推定の前段階として、*Planck* の CMB コンバージェンスマップと *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS) の redMaPPer カタログ (the SDSS DR8 redMaPPer cluster catalog)、HSC の銀河団カタログ (CAMIRA S18A) を組み合わせて銀河団の周囲における CMB レンズングのスタッキング解析を行った結果を報告する。

1 Introduction

SDSS などの観測によって、宇宙は高密度領域や低密度領域から成る大規模構造を形成していることが分かっている。大規模構造は初期密度揺らぎが時間進化することで形成される。銀河団はその中で最も大きな質量を持つ天体である。従って、銀河団の数や質量の関係を調べることは、初期密度揺らぎや暗黒エネルギーの性質を評価し、宇宙論モデルに制限を与えるために非常に重要である。しかし、銀河団質量の大部分は暗黒物質が占めており、光学観測から行われる質量推定は不定性が大きい。そこで、質量分布を直接測ることが出来る弱重力レンズ効果を用いることで、より正確な質量推定が可能になる。

Planck 衛星による宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) の精密測定により、CMB 温度揺らぎの統計的性質がよく理解されるようになった。現在この性質を利用して、観測データをもとに様々な物理量が計算されている。本研究に用いた CMB の弱重力レンズ効果 (CMB レンズング) による温度揺らぎ (コンバージェンス) もその一つである。また光学観測において、これまで SDSS などの観測によって $z \leq 0.6$ の近傍宇宙における銀河団が発見されてきた。さらに、近年

HSC などの観測により、 $z \geq 0.6$ の高赤方偏移銀河団が数多く見つかり、

HSC の最新カタログ CAMIRA S18A には $z \leq 1.1$ までの高赤方偏移銀河団が含まれており、これらの高赤方偏移銀河団に対する CMB レンズングを用いた解析は今までに行われていない。この新たに発見された銀河団に対する解析を行うことが本研究の目的である。今回は、今後それらの高赤方偏移銀河団に対して解析を行うためのテスト計算として、異なる 2 種類のカテゴリ、SDSS の redMaPPer カタログ (Geach, James E. & Peacock, John A. 2017) と HSC の最新カタログ CAMIRA S18A (Oguri, Masamune et al. 2017) と、*Planck* の CMB コンバージェンスマップを組み合わせて $z \leq 0.6$ の銀河団に対するスタッキング解析を行った結果を報告する。解析に用いた銀河団は redMaPPer 26,111 個、CAMIRA 1,751 個である。

本論文の構成は以下のようになっている。まず 2 章で銀河団と宇宙論モデルとの関係を簡単に説明する。次に 3 章で本研究に用いた解析手法を示す。最後に結果と今後の研究課題について議論する。

2 Cluster cosmology

銀河団は宇宙大規模構造の中で最も大きな質量を持つ天体である。大規模構造は初期密度揺らぎが時間進化することで形成された構造であり、銀河団は初期密度揺らぎや暗黒エネルギーなどの性質に強く依存する。従って、銀河団を調べることは宇宙論に制限をつけるために非常に重要である (Weinberg, David H. et al. 2013)。銀河団の数と質量の関係は質量関数によって記述される。質量 M を持つ天体の数は、例えばプレス - シェヒター質量関数によると式 (1) によって記述される。

$$\frac{dn}{dM} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\bar{\rho}_0}{M^2} \left| \frac{d \ln \sigma(M)}{d \ln M} \right| \frac{\delta_c}{\sigma(M)} \exp \left(-\frac{\delta_c^2}{2\sigma^2(M)} \right) \quad (1)$$

$\bar{\rho}_0$ 、 $\sigma(M)$ 、 δ_c はそれぞれ平均密度、密度揺らぎの分散、重力収縮が起きる密度揺らぎの閾値 ($\delta_c = 1.69$) を表す。ここで $\sigma(M)$ は初期密度揺らぎに依存する量であり、暗黒エネルギーの性質とも関係している。従って、観測によって質量関数を求め、理論的に予測される質量関数と比較することで宇宙モデルに制限をつけることができる。しかし、現在観測や理論から銀河団質量の大部分は目に見えない暗黒物質が占めていることが分かっている。つまり、光学観測による質量推定では不定性が大きく質量を正しく推定することは非常に困難である。そこで今回は次に示す弱重力レンズ効果を用いて質量を推定するための解析を行った。

3 Methods

弱重力レンズ効果とは、背景光源からの光が前方の重い天体の近くを通過する際に光路が曲げられる現象である。特に今回用いた CMB レンズは、 $z \sim 1, 100$ の最終散乱面からの放射を背景光として、銀河団によってその光路が曲げられる効果を観測する。弱重力レンズ効果を用いることで、暗黒物質を含む質量分布を直接的に観測することが可能になり、光学観測による質量推定に比べ、より精度の高い銀河団の質量推定が可能になる。また、銀河・銀河間の弱重力レンズと異なり、背景光として CMB を用

いることで高赤方偏移銀河団による弱重力レンズ効果を検出することが出来る。

3.1 レンズポテンシャル

弱重力レンズ効果によって光路が曲げられた場合、観測者は視線方向と異なる方向の CMB 温度を観測することになる。このとき、観測される CMB 温度 $\tilde{T}(\hat{\mathbf{n}})$ はレンズ効果を受けていない温度を用いて $T(\hat{\mathbf{n}} + \boldsymbol{\alpha})$ と表せる。ここで $\boldsymbol{\alpha}$ は弱重力レンズ効果による光路の曲がり角である。曲がり角 $\boldsymbol{\alpha}$ はレンズ天体の質量 (M) に依存し、次のレンズポテンシャルで評価される (Lewis, Antony & Challinor, Anthony 2006)。

$$\boldsymbol{\alpha} = \nabla \psi \quad (2)$$

$$\psi(\hat{\mathbf{n}}, M) \equiv -2 \int_0^{\chi_*} d\chi \frac{f_K(\chi_* - \chi)}{f_K(\chi_*) f_K(\chi)} \Psi(M) \quad (3)$$

ここで $f_K(\chi_*)$ 、 $f_K(\chi)$ 、 $f_K(\chi_* - \chi)$ 、 $\Psi(M)$ はそれぞれ光源までの距離、レンズ天体までの距離、光源とレンズ天体との距離、質量 M のレンズ天体がつくる重力ポテンシャルである。ただし χ は共同距離、 f_K は物理距離を表す。また、レンズポテンシャルは式 (4) で表されるコンバージェンスに変換できる。コンバージェンスはレンズ天体によって光路が曲げられた時の増光の量を表す観測量である。本研究ではコンバージェンス κ について銀河団周りで解析を行った。

$$\kappa \equiv -\frac{\nabla^2 \psi(\hat{\mathbf{n}}, M)}{2} \quad (4)$$

κ はレンズ天体の質量に依存するので、銀河団周りの κ の解析を通して銀河団の質量を推定することができる。

3.2 レンズ再構築

ここでは観測された CMB の温度揺らぎからレンズポテンシャルの推定を行うレンズ再構築について説明する。観測される CMB は大規模構造を通過する間に歪められるため、我々が歪められる前の CMB を観測することは不可能である。この場合、レンズ

効果による歪みを評価することは出来ない。従って、CMB の統計的性質と観測からレンズポテンシャルを推定する必要がある。これをレンズ再構築と呼ぶ。

レンズ効果を受ける前の温度揺らぎは観測方向に依存せず等方的であると考えられている。この場合、温度揺らぎのフーリエモード $\Theta_{\mathbf{l}}$ は他のモード $\Theta_{\mathbf{l}-\mathbf{L}}$ と相関を持たない。従って、CMB の温度場でアンサンブル平均をとると式 (5) のようになる。

$$\langle \Theta_{\mathbf{l}} \Theta_{\mathbf{l}-\mathbf{L}} \rangle_{\text{CMB}} = \psi_{\mathbf{l}} \delta_{\mathbf{l}, \mathbf{l}-\mathbf{L}} \quad (5)$$

ここで $\delta_{\mathbf{l}, \mathbf{l}-\mathbf{L}}$ はクロネッカーデルタである。一方、レンズ効果によって非等方的に歪められた揺らぎは異なるモードと相関を持つようになる (式 (6))。

$$\langle \Theta_{\mathbf{l}} \Theta_{\mathbf{l}-\mathbf{L}} \rangle_{\text{CMB}} = \psi_{\mathbf{l}} f_{\mathbf{l}, \mathbf{L}} \quad (\mathbf{L} \neq 0) \quad (6)$$

ここで $f_{\mathbf{l}, \mathbf{L}}$ は観測から求められる量である。しかし、我々は CMB の温度場を 1 つしか観測することが出来ないため、アンサンブル平均をとることは不可能である。従って式 (6) における $\psi_{\mathbf{l}}$ の推定量を $\hat{\psi}_{\mathbf{l}, \mathbf{L}}$ として、アンサンブル平均をとる代わりに $\hat{\psi}_{\mathbf{l}, \mathbf{L}}$ に対して適当な重み付けをして和をとることで、期待値 $\psi_{\mathbf{l}}$ をとるレンズポテンシャル $\hat{\psi}_{\mathbf{l}}$ が推定できる (Lewis, Antony & Challinor, Antony 2006)。

$$\hat{\psi}_{\mathbf{l}} = \sum_{\mathbf{L}} w_{\mathbf{l}, \mathbf{L}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}, \mathbf{L}} \quad (7)$$

3.3 スタッキング解析

観測されるコンバージェンス ($\kappa_{\text{obs}}(\theta)$) は銀河団以外の構造由来のノイズ ($\varepsilon_{\text{nois}}$) を含む。

$$\kappa_{\text{obs}}(\theta) = \kappa_{\text{signal}}(\theta) + \varepsilon_{\text{nois}} \quad (8)$$

ここで θ はクラスター中心からの距離を表し、ノイズ ε は適当な分散を持ったガウシアンノイズであるとする。従って、観測で得られた複数のシグナルを重ねて平均化することでノイズを除去し、銀河団による純粋なシグナル $\bar{\kappa}_{\text{signal}}$ を得ることが出来る。

$$\bar{\kappa}_{\text{obs}}(\theta) = \bar{\kappa}_{\text{signal}}(\theta) \quad (9)$$

この方法をスタッキングと呼ぶ。また、統計的誤差はデータ数 N に対して $1/\sqrt{N}$ に比例して小さくなる。従って、より多くの銀河団を用いてスタッキング解析を行うことでシグナルの統計的誤差を抑えることができる。

4 Results

SDSS の redMaPPer カタログ、HSC の CAMIRA S18A カタログと、*Planck* 2018 のコンバージェンスマップを用いて、 $z \leq 0.6$ までの銀河団に対するスタッキング解析を行なった結果をそれぞれ図 1、図 2 に示す。

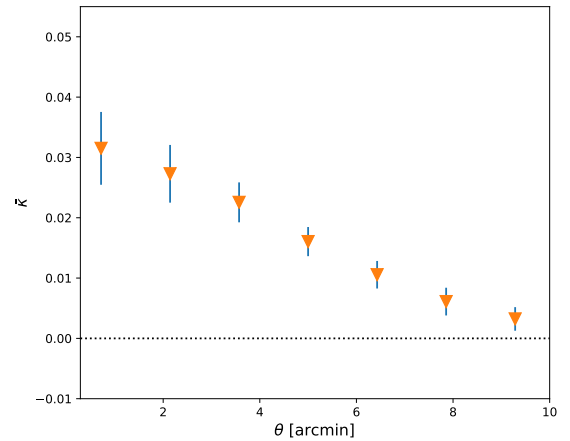


図 1: SDSS redMaPPer カタログに対するコンバージェンス

横軸はクラスター中心からの距離 [arcmin] を示し、縦軸はコンバージェンスの値を示す。誤差はジャックナイフ法で推定した。HSC は SDSS に比べて性能が良く、より暗い低質量銀河団まで検出できる。従ってスタックして平均化されたコンバージェンスの値は小さくなったと考えられる。次に両解析の統計的誤差を比較する。SDSS redMaPPer カタログと HSC CAMIRA S18A カタログで用いた銀河団の数はそれぞれ $N_{\text{red}} = 26,111$ 個、 $N_{\text{cam}} = 1,751$ 個、つま

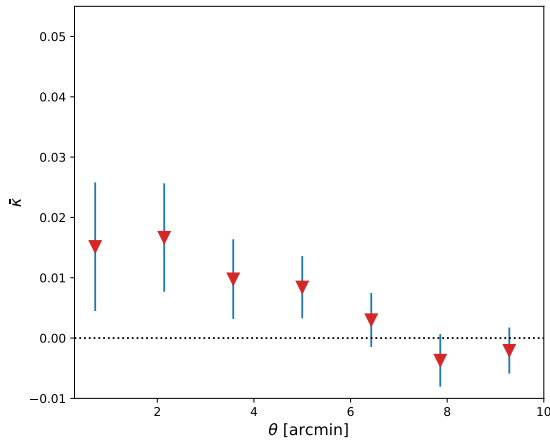


図 2: HSC CAMIRA S18A カタログに対するコンバージェンス

り $\sqrt{N_{\text{red}}/N_{\text{cam}}} \sim 3.8$ である。一方、誤差は (σ) は $\sigma_{\text{red}}/\sigma_{\text{cam}} \sim 1/3$ である。これらの点で図 1、図 2 を比較すると、2 種類の銀河団カタログに対してコンバージェンスの値、誤差の大きさについて矛盾のない解析結果を得たと判断できる。

5 Conclusion and Future work

本研究では、*Planck* 2018 の CMB コンバージェンスマップに対して SDSS redMaPPer (銀河団数 26,111 個) と HSC CAMIRA S18A (1,751 個) の 2 種類の銀河団カタログを用いてスタッキング解析を行った。両カタログの $z \leq 0.6$ までの銀河団に対して解析を行った結果、それぞれのデータの個数、検出可能質量で説明可能なシグナルを検出した。これは、本研究の解析手法を用いて、さらに高赤方偏移銀河団についても同様のスタッキング解析が行えることを示唆している。

冒頭で述べたように、光学観測は年々発展し、HSC CAMIRA S18A カタログには現在 $z \leq 1.1$ までの高赤方偏移銀河団が含まれる。これらの高赤方偏移銀河団に対する重力レンズ効果を用いた解析は行われていない。今後は $z \geq 0.6$ の新たに発見された銀河

団に対して同様に CMB レンズを用いた解析を行っていく。また、これによって統計量が増え、より精密な質量推定が可能になるため、その質量を用いて宇宙論モデルにより強い制限を与えることが出来ると期待される。これらを今後の研究課題とし、取り組んでいくこととする。

Acknowledgement

本発表にあたりご指導して下さった宇宙論研究室のスタッフ、先輩方に感謝申し上げます。特に特任講師の西澤淳さん、特任助教の宮武広直さん、博士課程の箕田鉄兵さん、修士課程の吉田貴一さん、近藤寛人さんには、本当に多くの助言を頂きました。お忙しい中議論に時間を割いて下さったことに、この場を借りて心より感謝申し上げます。

Reference

- Geach, James E. & Peacock, John A. 2017, *Nature Astronomy*, 795-799
- Oguri, Masamune et al. ,2017, *Publications of the Astronomical Society of Japan*,
- Lewis, Antony & Challinor, Anthony, 2006
- Weinberg, David H. et al. , 2013,

a24

21cm 線と CMB 弱重力レンズ効果の相
互相関による中性水素存在量の推定

名古屋大学大学院 理学研究科宇宙論研
究室

迫田 康暉

21cm 線と CMB 弱重力レンズ効果の相互相関による 中性水素存在量の推定

迫田 康暉 (名古屋大学大学院 理学研究科宇宙論研究室)

Abstract

宇宙の再電離は中性水素 (HI) の減少によって特徴付けられる。再電離がどう終わったかを理解するために HI 存在量の推定が行われてきた。これまでは HI 存在量をライマン α 吸収線により測定してきたが、独立した手法として、Square Kilometre Array (SKA) を用いた 21cm 線観測が注目されている。しかし 21cm 線シグナルは前景放射によって汚染されてしまう。この問題を解決するために、CMB 弱重力レンズ効果との相互相関を計測するという手法が考えられる。先行研究 (Tanaka et al. 2019) は観測されるシグナルを仮定し、SKA 観測を用いたの推定精度のみを評価している。しかし相互相関によって正しく HI 存在量が求められるかはわかっていない。本研究では 21cm 線強度マッピングとコンバージェンスマップをシミュレーションにより作成し、これらの相互相関により HI 存在量の推定を行った。その結果、理論で予測される HI 存在量を 95%信頼区間で正しく復元することに成功した。本発表では一連の研究過程と展望について紹介する。

1 イントロダクション

宇宙の晴れ上がり以降、多くのバリオンが宇宙空間に中性水素 (HI) の状態で存在するようになった。宇宙の時間発展に伴い、ダークマターの密度揺らぎが成長し、それが作る重力場に HI が落ち込むことにより、初代天体が生成された。宇宙に星ができると、星や銀河からの紫外線により、周囲に存在する HI は電離されるようになる。この時期を宇宙の再電離という。再電離の進行は HI の減少によって特徴付けられ、宇宙の HI 存在量の推移を探索する試みがなされてきた。キューサーのスペクトルにおける、ライマン α 吸収線の観測により $z \simeq 6$ で再電離が完了したことがわかっている。再電離後の HI 存在量の推移もライマン α 吸収線の観測を用いて、制限がなされている。これらの観測を裏付けるため、従来の観測とは独立した HI 存在量の測定の方法として 21cm 線観測が注目されている。2020 年より運行が開始する大規模電波干渉計の Square Kilometre Array (SKA) により、21cm 線の観測が行われる。これにより再電離以降の電離史の解明が進むことが期待される。しかし HI による 21cm 線のシグナルは、それよりはるかに大きな前景放射によって汚染されてしまうため、観測は非常に困難である。この問題を解決するため

の手法として、21cm 線のシグナルと相関する別の観測との相互相関を計測するという手法がある。

本研究では宇宙の大規模構造によって宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) が曲げられる効果である、CMB 弱重力レンズ効果との相互相関に着目する [Tanaka et al. (2019)]。CMB を強く曲げる領域は高密度領域であり、そこには HI が存在する。したがって 21cm 線のシグナルと CMB 弱重力レンズ効果は相関を持つことが期待される。また、21cm 線の前景放射は CMB 弱重力レンズ効果と相関しないと考えられるため、相互相関により純粋な 21cm 線のシグナルを取り出すことが可能である。先行研究ではシグナルを仮定し、SKA 観測における機器由来のノイズと大気由来のノイズを想定して、HI 存在量の推定精度を予測している。本研究ではシグナルを仮定せず、シミュレーションを用いて模擬的に 21cm 線強度マッピングとコンバージェンスマップを作成し、これらの相互相関から HI 存在量の推定を試みる。そして、相互相関によって正しく HI 存在量が決められるか評価を行う。

2 基礎物理

2.1 21cm 線

HI の 1s 軌道は陽子と電子のスピンの向きによってエネルギー準位が分裂し、これを超微細構造という。分裂したエネルギー準位間の遷移が起こる際、エネルギー差に対応する波長 21cm の電磁波が放出、吸収される。この電磁波のことを 21cm 線と呼ぶ。21cm 線シグナルの放出される地点の赤方偏移に応じて波長 λ が

$$\lambda = 21(1+z)[\text{cm}] \quad (1)$$

と赤方偏移して観測されるため、見る波長を選ぶことで、任意の距離の HI の分布を調べることができる。ここで、 z は宇宙論的赤方偏移である。21cm 線の背景光として、宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) が存在するため、21cm 線は CMB の輝度温度の差として観測され、

$$\delta T_b(\mathbf{n}, z) = T(z) \times \left(1 + \delta_{\text{HI}} - \frac{dv_p}{dr} \frac{1+z}{H} \right), \quad (2)$$

$$T(z) = \frac{3}{32\pi} \frac{hc^3 A_{10}}{k\nu_{21}^2} \frac{\bar{n}_{\text{HI}}(z)}{(1+z)H(z)} \left(1 - \frac{T_\gamma}{T_S} \right), \quad (3)$$

となる。ただし、 A_{10} はアインシュタインの A 係数と呼ばれ、21cm 線の自然放射の度合いを表す。 \bar{n}_{HI} は物理座標における HI の平均数密度であり、 δ_{HI} は HI の密度揺らぎを表す。 $\nu_{21} = 1420[\text{MHz}]$ は静止系での 21cm 線の周波数を表す。 $H(z)$ はハッブルパラメータと呼ばれ、宇宙の膨張率を表す。 v_p は HI の固有速度である。 $T_\gamma(z) = T_{\text{CMB}} \times (1+z)$ は赤方偏移 z における光子の輝度温度である。 T_S はスピン温度と呼ばれる量で、HI の超微細構造の 2 つのエネルギー状態間の占有数の比から定義される温度である。 \mathbf{n} は観測方向を表す単位ベクトルである。 h はプランク定数、 k はボルツマン定数、 c は光速である。今回着目している再電離期以降では、宇宙に存在するガスは X 線による加熱を強く受け、 $T_S \gg T_\gamma$ となるため、式 (3) はスピン温度によらない結果となる。HI の平均数密度 \bar{n}_{HI} を宇宙の臨界密度 $\rho_c = \frac{3H^2 c^2}{8\pi G}$ で規格化した無次元量を HI 存在量と呼び、以下で定義する。

$$\Omega_{\text{HI}} \equiv \frac{\bar{n}_{\text{HI}} m_p c^2}{\rho_c}. \quad (4)$$

m_p は陽子の質量であり、 G は万有引力定数である。

2.2 CMB 弱重力レンズ効果

一般相対性理論により、光の軌道は重力により曲げられることが示される。CMB は我々に届くまでに、銀河団などの高密度領域やボイドと呼ばれる低密度領域を通るため、観測される CMB は元々の CMB に対し、増光や変形を受ける。この効果を CMB 弱重力レンズ効果という。増光はコンバージェンス、変形はシアールと呼ばれる量によって記述される。今回着目するコンバージェンスは以下で表される。

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{n}) &= \int_0^{\chi_{\text{CMB}}} d\chi K \delta(\chi \mathbf{n}, z), \quad (5) \\ K(\chi, z) &= \frac{3}{2} \Omega_{m0} \left(\frac{H_0}{c} \right)^2 \frac{(\chi_{\text{CMB}} - \chi)\chi(1+z)}{\chi_{\text{CMB}}}. \quad (6) \end{aligned}$$

ここで、 $\chi = \chi(z)$ は観測者からレンズ天体までの共動角径距離であり、 δ は物質の密度揺らぎである。物質のうち暗黒物質が 80% 程度を占めるので、今回は簡単のため δ_{dm} で代用する。

3 手法

3.1 相互相関

二つの密度揺らぎを統計的に評価する指標として相互相関がある。3 次元の場合 $A(\mathbf{x}), B(\mathbf{x})$ のフーリエ空間における相互相関はクロスパワースペクトル $P_{AB}(k)$ と呼ばれ、以下で定義される。

$$\langle A_{\mathbf{k}_1} B_{\mathbf{k}_2} \rangle = (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) P_{AB}(k_1). \quad (7)$$

特に 21cm 線強度マップやコンバージェンスマップは各々、3 次元の密度揺らぎの分布を 2 次元球面上に射影したものである。3 次元の場の 2 次元球面上への射影を $\tilde{A}(\mathbf{n}), \tilde{B}(\mathbf{n})$ で表し、以下で定義する。

$$\tilde{A}(\mathbf{n}) = \int d\chi F_A(\chi) A(\chi \mathbf{n}), \quad (8)$$

F_A はカーネルと呼ばれる量である。2 次元球面上に射影された場に対する統計量として角度クロスパワースペクトルというものがあり、これは $\tilde{A}(\mathbf{n}), \tilde{B}(\mathbf{n})$ の球

面調和関数展開係数の積の統計平均として表される。

$$C_l^{AB} = \langle \tilde{A}_{lm} \tilde{B}_{lm}^* \rangle, \quad (9)$$

$$\simeq \int \frac{d\chi}{\chi^2} F_A(\chi) F_B(\chi) P_{AB} \left(\frac{l + \frac{1}{2}}{\chi} \right) \quad (10)$$

角度クロスパワースペクトルは角度スケール $\frac{\pi}{l}$ 離れた 2 点の間の相関の強さを表す。ただし、式 10 への変形では $l \gg 1$ という小角度近似を用いている。A と B にそれぞれ 21cm 線強度マップとコンバージェンスマップを当てはめた時、これらの角度クロスパワースペクトルは以下で表される (Sarkar 2010)。

$$C_l^{\text{HI}-\kappa} \simeq \frac{T(z) K(\chi, z) b_{\text{HI}} D_+(z)^2}{\chi(z)^2} P \left(\frac{l}{\chi} \right). \quad (11)$$

ここで、 $D_+(z)$ は線形成長因子と呼ばれ、揺らぎの時間発展を表す。物質優勢期において、 $D_+ \propto \frac{1}{1+z}$ という時間発展をするため、赤方偏移 z における密度揺らぎは

$$\delta(\chi \mathbf{n}, z) = D_+ \delta(\chi \mathbf{n}, z=0), \quad (12)$$

$$= \frac{1}{1+z} \delta(\chi \mathbf{n}). \quad (13)$$

と書き表すことができる。 $P(k)$ は現在の物質分布における自己相関のパワースペクトルであり、

$$P(k) = \langle \tilde{\delta}_0(\mathbf{k}) \tilde{\delta}_0^*(\mathbf{k}) \rangle. \quad (14)$$

今回は簡単のため HI 分布の密度揺らぎと物質分布の密度揺らぎの間には線形バイアスの関係 $\delta_{\text{HI}} = b_{\text{HI}} \delta$ があると仮定する。コンバージェンスのカーネルは \mathbf{n} に対して大きな広がりを持った形をしており、固有速度はランダムだと考えられるため、固有速度に由来する、21cm 線の輝度温度由来の異方性はキャンセルされるはずである。したがって、この項は無視できる。

3.2 シミュレーション

21cm 線強度マップとコンバージェンスマップをシミュレーションデータから模擬的に再現するためには暗黒物質分布と HI ガスの分布が必要となる。今回は Takahashi et al. (2017) によるレイトレイシングシミュレーションを用いた。N 体シミュレーション

はボックスサイズ $(150 \text{ Mpc}/h)^3$ の 3 次元の N 体シミュレーションから 2 次元のシェルの暗黒物質分布とコンバージェンスマップを作成している。 $z = 5.342$ から現在までの暗黒物質分布はシミュレーションの結果を用い、最終散乱面の赤方偏移 $z_{\text{CMB}} = 1100$ から $z = 5.342$ までの暗黒物質分布は線形理論から計算している。 z_{CMB} から現在まで暗黒物質の周りを通る光の屈折を計算することにより、コンバージェンスマップを作成している。

本研究では、N 体シミュレーションで得られた 2 次元の暗黒物質分布に対して、バイアスパラメータを $b_{\text{HI}} = 2$ [Tanaka et al. (2019)], HI 存在量を $\Omega_{\text{HI}} = 5.2 \times 10^{-4}$ として HI の分布を計算し、式 (2) を用いて 21cm 線の強度マップを作成する。得られた 21cm 線の強度マップとコンバージェンスマップから角度クロスパワースペクトルを測定する。そして、式 (11) の理論モデルを用いて Ω_{HI} を推定する。

4 結果と考察

この節では、得られた結果の紹介を行う。 $C_l^{\text{HI}-\kappa}$ の計算結果を図 1 に示す。丸印は今回シミュレーションより計算した $C_l^{\text{HI}-\kappa}$ の隣接する l における相加平均であり、エラーバーは標準偏差を表す。実線は今回シミュレーションに加えた真の Ω_{HI} の値を式 (11) に代入した理論曲線である。ここで、式 (14) はスペクトル指数を $n_s = 0.965$ 、物質の存在量を $\Omega_{\text{m}0} = 0.316$ として線形理論によって求めた。図 1 より、実線は全てのビンにおいてエラーバーの中に入っていることがわかる。得られたデータに対し、最尤法を用いて HI 存在量を推定した結果を表 1 に示す。推定した誤差の範囲内に入力した HI 存在量は含まれているため、相互相関によって HI 存在量が正しく復元できることがわかった。ただし、式 (11) を見ると、 $b_{\text{HI}} \Omega_{\text{HI}}$ という形で入っているため、バイアスパラメータと HI 存在量は完全に縮退してしまうため、今回の手法で Ω_{HI} を単独で決めることはできないことに注意しておく。

表 1: HI 存在量推定結果と理論値の比較

	入力値 [10^{-4}]	推定値 [10^{-4}]
Ω_{HI}	5.2	$6.0_{-1.3}^{+1.3}$ (95%CL)

5 結論

再電離終了後の HI 存在量の新しい推定手法として、21cm 線強度マッピングがある。しかし強い前景放射が 21cm 線シグナルを汚染してしまう。この問題を解決するために 21cm 線強度マッピングと CMB 弱重力レンズ効果の相互相関を計測する手法がある。本研究では 21cm 線強度マップと CMB 弱重力レンズのコンバージェンスマップをシミュレーションにより作成し、これらの相互相関を測定した。計算結果を理論モデルと比較することで HI 存在量を推定した。その結果推定した HI 存在量はシミュレーションに加えた HI 存在量と整合した。つまり、相互相関により HI 存在量を推定することは可能であると考えられる。

6 展望

今回は暗黒物質と HI の密度揺らぎのずれをを表す HI バイアスを線形バイアスと仮定したという非常に簡単なモデルを用いて HI 存在量の推定を試みた。しかし、実際には小スケールでは星形成や銀河形成過程などにより線形バイアスがからずれるという結果がシミュレーションを用いた先行研究により示唆されている。実際の宇宙に対し、相互相関の手法が HI 存在量推定に有効か判断するためには、より現実の宇宙に近い HI 分布の作成と、より複雑なモデリングが必要となるだろう。

イントロダクションで話したように、相互相関の手法には前景放射の影響を取り除けるという利点があると考えられているが、実際に前景が推定にどれほど影響するか検証する必要がある。将来研究では、試験的に前景をシグナルに加えて CMB 弱重力レンズ効果との相互相関により、HI 存在量を正しく復元するかを確かめる。

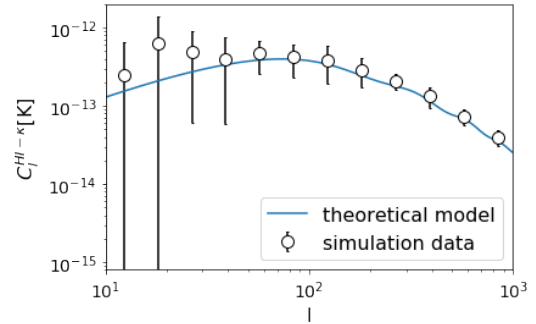


図 1: $C_l^{\text{HI}-\kappa}$ の計算結果と理論曲線の比較。丸印はシミュレーションより得た $C_l^{\text{HI}-\kappa}$ の計算結果であり、実線はシミュレーションに加えた Ω_{HI} を式 (11) に代入した時の理論曲線である。

Acknowledgement

研究、発表練習を支えてくださった名古屋大学宇宙論研究室のみなさまには感謝申し上げます。

Reference

- Guha Sarkar T., 2010, JCAP, 2010, 002
- Tanaka S., Yoshiura S., Kubota K., Takahashi K., Nishizawa A. J., Sugiyama N., 2019, arXiv, arXiv:1904.10363
- Takahashi R., Hamana T., Shirasaki M., Namikawa T., Nishimichi T., Osato K., Shiroiyama K., 2017, ApJ, 850, 24

a25

21-cm線を用いた小スケールの初期パ
ワースペクトルへの制御

名古屋大学大学院 理学研究科 宇宙論研
究室

古郡国彦

21-cm 線を用いた小スケールの初期パワースペクトルへの制限

古郡 国彦 (名古屋大学大学院 理学研究科 宇宙論研究室)

Abstract

ビッグバン理論の宇宙初期に関する諸問題の解決策としてインフレーション理論がある。インフレーションモデルは無数に存在するため、そのモデルを制限する必要がある。その方法の一つに初期パワースペクトルによる制限がある。初期パワースペクトルの制限は宇宙マイクロ波背景放射の観測などから得られてきたが、小スケール側 (波数 $k \geq 1\text{Mpc}^{-1}$) は不定性が大きい。近年注目されている ultracompact minihalo (UCMH) という天体を用いることで小スケール側に制限を課せる可能性がある (Ricotti et al. 2009)。UCMH は、赤方偏移 $z = 1000$ に形成される高密度天体であり、密度揺らぎの大きさが $10^{-3} \leq \delta \leq 0.3$ を満たす時に構造形成されうる。高赤方偏移において形成される UCMH は、空間的にコンパクトであり、初期パワースペクトルの短波長側の波数範囲に制限をつけることが期待される。本研究では、21-cm 線を用いて UCMH の存在量に制限を課し、小スケール側の初期パワースペクトルに制限をつけることを目的とする。21-cm 線とは、中性水素の超微細構造由来の電磁波である。2020 年代前半に観測を開始する Square Kilometre Array (SKA) によって $z = 30$ 程度までの観測が期待される見込みである。宇宙再電離より十分以前であるから、UCMH も中性水素ガスを持つと考えられる。そのため UCMH 内部の中性水素に由来する 21cm 線が観測できると期待される。本講演では、UCMH の中性水素密度分布および温度分布をモデル化することで、個別の UCMH の 21-cm 線シグナル分布を導出する手法を紹介する。(Komatsu & U.Seljak 2001) そして、SKA の感度を考慮することにより、UCMH の存在量に制限を与える可能性について議論する。また、その結果から、 $k \geq 1\text{Mpc}^{-1}$ の小スケール側の初期パワースペクトルの制限について議論する。

1 Introduction

現在、インフレーションモデルを代表する宇宙初期の物理機構に関して、未知な領域が多く存在する。その物理機構から予言される初期パワースペクトルは観測において、 $k \geq 10\text{Mpc}^{-1}$ の小スケールでは不定性が大きい (Bringmann et al. 2012)。その強力な探索手段となる天体の一つに ultracompact minihalo (UCMH) がある。UCMH は宇宙の晴れ上がりの時期に主に形成され、ダークマター (DM) がリアル崩壊して形成されうる天体である。このような宇宙の晴れ上がり付近で形成される天体は、非常にコンパクトな構造であるため、DM の対消滅による γ 線が生じる可能性や重力レンズによる効果が期待されている (Bringmann et al. 2012)。このような天体はまだ検出されていないが、観測からその存在量に制限を与えることができる。 γ 線観測から UCMH の存在量に制限を与えることによって、対応するスケールの初期パワースペクトルに上限を与えてきた (Delos

et al. 2018)。しかし、 γ 線による制限は、ダークマター対消滅を考えているため、ダークマターの性質に依存してしまう。そこで、UCMH の重力ポテンシャル中にバリオンが落ち込み初代星や H_2 ガスの生成源となることが示唆されていることから (Ricotti et al. 2009)、我々は UCMH が中心部に作る深い重力ポテンシャルに中性水素が (H_I) 落ち込み、(H_I) から放射する 21cm 線に着目した。このモデルはよく知られている (H_I) の性質によって決まるため、ダークマターの性質に依らない、より普遍的な予言をすることができる。

UCMH の DM 密度はよく知られていないため、球対称崩壊モデルから予想される DM 密度プロファイルで解析が行われていたが、本来はそれとは異なる DM 密度プロファイルになることが、シミュレーションの結果から示されている (Delos et al. 2018)。我々はこの考え方を元に解析を行う。

具体的な研究手順としては、ピーク統計から

UCMH の存在量を仮定し、背景 21cm 線強度を見積もる。更に次世代電波干渉計である SKA の観測を想定して UCMH の存在量に上限を与える。これによってもたらされる初期パワースペクトルの制限を議論する。

2 Methods/Instruments and Observations

この章では UCMH1 個あたりの輝度温度を計算し、それから UCMH 分布からの背景輝度温度を算出する。そして、UCMH 起源の揺らぎの分散を推定し、初期パワースペクトルの制限を計算する。

2.1 UCMH1 個あたりの輝度温度の見積もり

この節では、UCMH1 個あたりの輝度温度の見積もりをする。手順としては、まず UCMH の DM 密度プロファイルを仮定し、静水圧平衡から (H_I) ガス密度と (H_I) ガス温度のプロファイルを算出し、それから光学的厚みが計算できる。それから更に輻射輸送方程式を解くことで、UCMH1 個あたりの輝度温度を見積もることができる。まず我々は UCMH の DM 密度プロファイルは、

$$\rho_{dm} \left(\frac{r}{r_s} \right) = \frac{\rho_s}{\left(\frac{r}{r_s} \right)^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{r}{r_s} \right)^{\frac{3}{2}}}, \quad (1)$$

を仮定する (Moore et al. 1999)。これから DM 密度プロファイルとガスの圧力の静水圧平衡の関係

$$\rho_{gas}^{-1}(x) \frac{dP_{gas}(x)}{dx} = -\frac{GM(r)}{r^2}, \quad (2)$$

から算出することができる。また、ビリアル半径 $r = r_{vir}$ において、DM 密度とガス密度の勾配が一致するという境界条件を課して、中心温度と比熱比を算出した (Komatsu & U.Selijak 2001)。ガス密度と DM 密度から UCMH の光学的厚みが視線方向 R と衝突パラメータ α の関数として

$$\tau_\nu(\alpha, R) = \frac{3c^2 T_* A_{10}}{8\pi\nu^2} \int_{-R_{max}}^R \frac{n_0(l)\phi_D(\nu, R)}{T_s(l)} dR, \quad (3)$$

が計算される (Furlanetto, & Loeb 2002)。したがって輻射輸送方程式から輝度温度が視線方向 R と衝突パラメータ α の関数として

$$T_b(\alpha) = \int_0^{R_{max}} T_s(l) e^{-\tau_\nu(\alpha, R)} \frac{d\tau_\nu}{dR} dR, \quad (4)$$

が求まる。これを衝突パラメータ α で面積重み付き平均をとることにより、ハロー 1 個あたりの輝度温度 $T_{b,ave}$ の表式

$$T_{b,ave} = \frac{\int_0^1 T_b(\alpha) 2\pi\alpha r_{vir}^2 d\alpha}{\pi r_{vir}^2} = 2 \int_0^1 T_b(\alpha) \alpha d\alpha, \quad (5)$$

が求まる。

2.2 UCMH の平均個数密度の計算

UCMH の初期パワースペクトルを仮定すると UCMH の平均個数密度 n_{UCMH} が算出できる。そこで我々は、UCMH を形成するのに必要な初期パワースペクトルは、ピーク型を仮定した。すなわち、Matter 初期パワースペクトル $\mathcal{P}_\delta(k)$ は、

$$\mathcal{P}_\delta(k) = \mathcal{A} D^2(a) k_s \delta(k - k_s), \quad (6)$$

と書ける。ここで $D(a)$ は線形成長因子である。式 (11) から、曲率初期パワースペクトル $\mathcal{P}_\xi(k)$ に変換すると、

$$\mathcal{P}_\xi(k) = \mathcal{A}_0 k_s \delta(k - k_s), \quad (7)$$

が得られる。

ランダムガウス場のピーク統計において、 $\mathcal{P}_\delta(k)$ の振幅 \mathcal{A} と n_{UCMH} は、関連づけられ、 n_{UCMH} は、ピーク高さを特徴づける量 $\nu = \delta/A^{\frac{1}{2}} a_{coll}$ を用いて、

$$n = \frac{k_s^3}{(2\pi)^2 3^{\frac{3}{2}}} \int_{\delta_c/A^{\frac{1}{2}} a_{coll}}^{\infty} e^{-\nu^2/2} f(\nu) d\nu, \quad (8)$$

となる (Delos et al. 2018)。 k_s はピークの波数で、 $f(\nu)$ は BBKS(1986) Eq.(A.15) を用いた。

2.3 背景輝度温度の計算

宇宙の平均個数分布が求まったので、背景輝度温度 \bar{T}_b を求めることができ、

$$\bar{T}_b = \frac{c(1+z)^4}{\nu_0 H(z)} \int_{M_{min}}^{M_{max}} \Delta\nu_{eff} T_{b,\nu_0} A \frac{dn}{dM} dM, \quad (9)$$

から計算できる。ここで、 $\Delta\nu_{eff}$ は熱ドップラー効果による線プロファイルの広がりを表し、 A はハローの 2 次元視線方向面積を表す。

2.4 初期パワースペクトルの制限の計算

前節で背景輝度温度を求めたが、実際には、ハローの個数密度が観測する場所によってゆらいでいるため、輝度温度は観測方向によって異なる値を示す。SKA では、観測方向による輝度温度の散らばり具合、すなわち輝度温度の分散が観測できる。UCMH が *flatCDM* モデルの密度揺らぎ (δ_{matter}^2) に従うとし、線形バイアスの効果は無視できるほど小さいとして、輝度温度の分散 $\langle T_b^2 \rangle$ が、

$$\langle T_b^2 \rangle = \langle \delta_{matter,w}^2 \rangle \bar{T}_b^2, \quad (10)$$

と書ける。ただし、ここで *flatCDM* モデルの密度揺らぎ (δ_{matter}^2) は観測による波数の制限を考慮して、 $\langle \delta_{matter,w}^2 \rangle$ と記した。従って、輝度温度の分散が求まったため、UCMH のシグナルの探知可能性が議論することができる。21cm 線のその他のシグナルとして考えられるのは、IGM による輝度温度の分散 $\langle T_{b,IGM}^2 \rangle$ とノイズによる輝度温度の分散 $\langle T_{b,NOISE}^2 \rangle$ があるが、 $\langle T_{b,IGM}^2 \rangle \geq \langle T_{b,NOISE}^2 \rangle$ であるため、 $\langle T_{b,UCMH}^2 \rangle \leq \langle T_{b,IGM}^2 \rangle$ となるような制限を課せば UCMH の個数密度に上限がつけられるため、初期パワースペクトルに制限をつけることができる。

2.5 初期 Matter パワースペクトルから初期曲率パワースペクトルへの変換

宇宙の初期 Matter パワースペクトルの高さ A から宇宙の曲率揺らぎ由来のパワースペクトル \mathcal{A}_0 の変換は (11) 式で表される：

$$\mathcal{A}_0 = \frac{(\Omega_r/\Omega_m)^2 A}{81 \left[-\frac{7}{2} + \gamma_E + \ln \left(\frac{4\sqrt{\Omega_r} k_s}{\sqrt{3}H_0\Omega_m} \right) \right]^2}. \quad (11)$$

3 Results

式 (5) から求めた質量ごとの UCMH 1 個あたりの平均輝度温度 $T_{b,ave}$ についてを図 3 に示す。図か

ら、質量が大きくなると、質量の増加に対して、平均輝度温度 $T_{b,ave}$ がほとんど一定になる。これは、質量が十分大きい場合において、UCMH の光学的厚みの減少する影響によって輝度温度の増加が抑制されるためである。

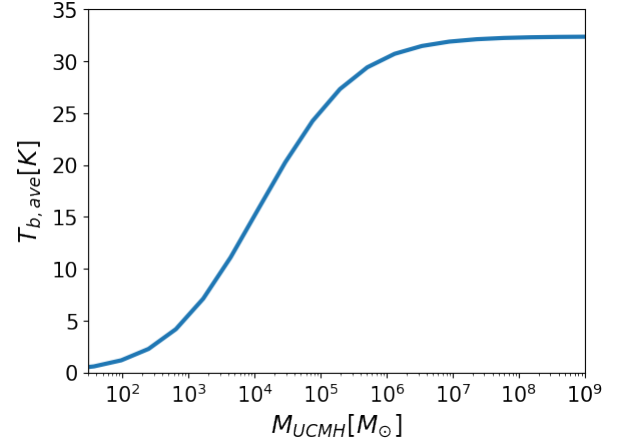


図 1: UCMH 1 個あたりの $T_{b,ave}$ と M_{UCMH} の関係

次に、赤方偏移 $z = 1000$ において、ピーク統計に従う式 (8) に従って求めた UCMH の個数密度 n_{UCMH} と初期パワースペクトルのピークの高さ A の関係を図 1 に示す。 A が大きくなると、個数密度 n_{UCMH} はほとんど一定となる。これは、ピークの高さを大きくしていくと、 $z = 1000$ において、UCMH を作る全てのピークの密度揺らぎ δ_{peak} が δ_c を超えて、個数密度がそれ以上増えないことを示している。式 (10) から UCMH の輝度温度の分散を算出し、IGM の輝度温度と比較して初期パワースペクトルを各ピーク波数 k_s ごとに上限をつけた関係を図?? に示す。またこの図を描く際、式 (11) を用いて、初期物質パワースペクトル A を初期曲率パワースペクトル \mathcal{A}_0 へ変換した。 z_{coll} は、UCMH の形成された赤方偏移を表す。そうすると、 $z_{coll} = 1000$ の時よりも、 $z_{coll} = 800$ の時の強い制限がついていることがわかる。これは、密度揺らぎが線形成長因子で成長していくため、 $z_{coll} = 800$ のが崩壊しているピークが多いためである。

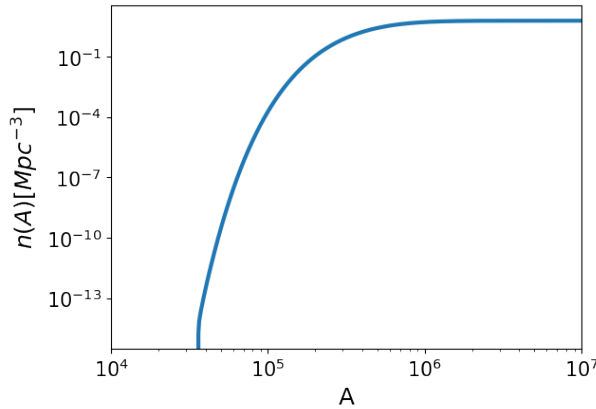


図 2: UCMH 1 個あたりの $T_{b,ave}$ と M_{UCMH} の関係

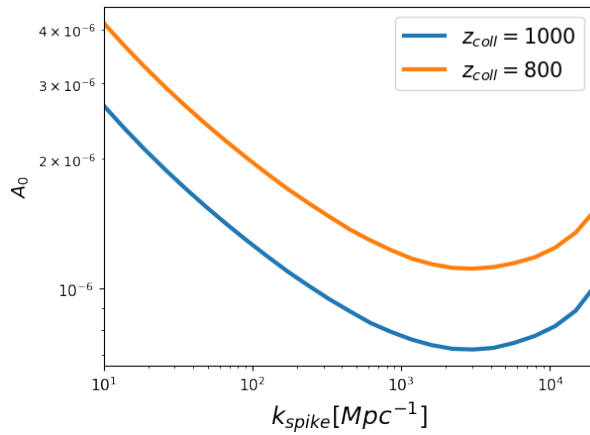


図 3: ピーク波数 k_s と初期曲率パワースペクトル A_0 の関係

4 Conclusion

UCMH の 21cm 線観測による初期パワースペクトルの制限の可能性について議論した。現在の γ 線の制限において、 $10\text{Mpc}^{-1} \leq k \leq 10^4\text{Mpc}^{-1}$ の範囲では、 $A_0 \leq 3 \times 10^{-7}$ より強い制限がかけられており、我々の与える制限よりも強い (Delos et al. 2018)。しかし、 γ 線による制限には、WIMP による対消滅を仮定しているため、DM の性質に大きく依存するのに対し、我々のモデルは DM の性質に依存しないモデルであるため、より普遍的な予言であることが言える。

Reference

- Delos et al. 2018, PHYSICAL REVIEW D 98
 Iliev et al. 2002, Astrophys.J. 572 123
 Ricotti et al. 2009, The Astrophysical Journal, 707
 Bringman et al. 2012, PHYSICAL REVIEW D 85
 J. M. Bardeen, J. R. Bond, N. Kaiser, and A. S. Szalay. (1986), Astrophys.J. 304
 S. Weinberg. 2008, Oxford University Press.
 E. Komatsu & U. Seljak 2001, MNRAS, 327, 1353
 Moore, B., Quinn, T., Governato, F., et al. 1999, MNRAS, 310, 1147.
 Furlanetto, S. R., & Loeb, A. 2002, APJ, 579, 1

a26

21cm-LAE cross-correlation を用いた
21cm線シグナルの検出可能性
熊本大学大学院 自然科学教育部
口ノ町 瑛

21cm-LAE cross-correlation を用いた 21cm 線シグナルの検出可能性

口ノ町 瑛 (熊本大学大学院 自然科学教育部)

Abstract

誕生して間もない宇宙は、高温高密度のプラズマ状態で存在していた。やがて宇宙膨張による温度の低下によって陽子と電子が再結合し、中性水素が生成される。その後、初代星や初代銀河の形成に伴って、宇宙に存在するほとんどの中性水素が電離される。この時期を宇宙再電離期と呼ぶ。

しかし宇宙再電離期について、電離開始時期を始め、電離源や電離プロセスはまだ観測的には未解明である。この宇宙再電離期を捉えるには、当時の宇宙を満たしていた中性水素が放射する電磁波である 21cm 線の観測が有効である。しかし、宇宙再電離期の 21cm 線は非常に微弱であるのに加え、21cm 線の観測は銀河系シンクロトロン放射や系外電波などの強烈な前景放射によって妨げられている。そのため、前景放射の影響を軽減、回避することが求められる。そこで本研究では、21cm 線の放射強度と銀河分布の相互相関に着目した。21cm-LAE 相互相関を計算し、21cm 線シグナルの感度を見積もり、検出可能性を示した。

1 Introduction

暗黒時代の中性水素は、初期の恒星や銀河が放射する紫外線光子や X 線光子によって電離された。この時代は宇宙再電離期と呼ばれる。宇宙再電離期を調査するためには中性水素から放射される 21cm 線の観測が有効であるとされている。現在、Murchison Widefield Array(MWA) や LOw Frequency ARray(LOFAR) などの望遠鏡が 21cm 線の観測を行なっている。これらの望遠鏡の感度は、宇宙再電離期中性水素分布のイメージを得るためには十分でないが、熱雑音だけを考慮するならば、中性水素分布の統計的性質を調査するには十分である。

21cm 線シグナルに対して銀河系シンクロトロンや系外シンクロトロンなどの前景放射は強力である。21cm 線シグナルは一般的に数 mK であるが、前景放射は 4 桁以上大きい。そのため、前景放射に埋もれた 21cm 線シグナルを同定することは極めて困難である。そこで、前景放射の影響を低減するために 21cm 線シグナルと銀河分布の相互相関に焦点を当てる。前景放射は統計的に銀河分布に依存しないために、前景放射と銀河分布は相関を持たないと考えられる。

もし、銀河が電離光子の主な放射源ならば、銀河の周りに中性水素が最初に電離され、電離バブルが

形成される。一方で、電離バブルの外側の領域では中性水素が電離されずに残る。そのため、21cm 線シグナルと銀河分布の間には負の相関があると期待される。この研究では、21cm シグナルと Lyman- α emitter(LAE) の相互相関に注目する。LAE とは 121.6nm の波長の電磁波を強く放射する高赤方偏移銀河のことである。これは、すばる望遠鏡、ケック望遠鏡、ハッブル宇宙望遠鏡によって検出されている。

先行研究では相互相関シグナルの検出能が調査された。この研究のシミュレーションは星形成率、赤方偏移における中性水素率と宇宙マイクロ波背景放射の光学的厚みで構成される。最初に、相互相関の基本的な特徴を確認し、相互相関の赤方偏移による変化を調査する。そして、MWA または Square Kilometre Array(SKA) で、深く狭い観測の Ultra-deep survey または広く浅い観測の Deep survey による 21cm 観測と、LAE の正確な赤方偏移を得ることができる Prime Focus Spectrograph(PFS) の追観測を用いた場合、または用いない場合のすばる望遠鏡の Hyper Suprime-Cam(HSC) による LAE 観測との協力によるクロスパワースペクトルの検出能を示す。

2 21cm-LAE cross correlation

赤方偏移された 21cm 線は、CMB を背景電波源とした相対的な輝度温度 δT_b で観測される。

$$\delta T_b = \frac{T_s - T_\gamma}{1+z} (1 - e^{-\tau_{\nu_0}}) \quad (1)$$

$$\approx 27x_{HI} (1 + \delta_{nl}) \left(\frac{1+z}{10} \frac{0.15}{\Omega_m h^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\Omega_b h^2}{0.023} \right) \text{mK} \quad (2)$$

Ω_m は物質の密度パラメータ、 Ω_b はバリオンの密度パラメータ、 h はハッブル定数で単位は $100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ である。この研究では宇宙再電離期の後期を考えるため、 $T_s \gg T_{\text{CMB}}$ とする。

21cm-LAE クロスパワースペクトルを定義するために、 δT_b の空間的なゆらぎを定義する。

$$\delta_{21}(\mathbf{x}, z) \equiv \frac{\delta T_b(\mathbf{x}, z) - \overline{\delta T_b}(z)}{\overline{\delta T_b}(z)} \quad (3)$$

$\overline{\delta T_b}(z)$ は δT_b の空間平均である。同じように銀河 (LAE) の数密度ゆらぎも定義する。

$$\delta_{\text{gal}}(\mathbf{x}, z) \equiv \frac{n_{\text{gal}}(\mathbf{x}, z) - \bar{n}_{\text{gal}}(z)}{\bar{n}_{\text{gal}}(z)} \quad (4)$$

ここで $n_{\text{gal}}(\mathbf{x}, z)$ は LAE の数密度で、 $\bar{n}_{\text{gal}}(z)$ は $n_{\text{gal}}(\mathbf{x}, z)$ の空間平均である。 δ_{21} と δ_{gal} はどちらも無次元量である。 $\tilde{\delta}_{21}(\mathbf{k})$ と $\tilde{\delta}_{\text{gal}}(\mathbf{k})$ を $\delta_{21}(\mathbf{x})$ と $\delta_{\text{gal}}(\mathbf{x})$ のフーリエ変換と定義すると、クロスパワースペクトル $P_{21,\text{gal}}(\mathbf{k})$ は、

$$\langle \tilde{\delta}_{21}(\mathbf{k}_1) \tilde{\delta}_{\text{gal}}(\mathbf{k}_2) \rangle \equiv (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) P_{21,\text{gal}}(\mathbf{k}_1) \quad (5)$$

で与えられる。ここで、 $\delta_D(\mathbf{k})$ はディラックのデルタ関数である。無次元クロスパワースペクトルは、

$$\Delta_{21,\text{gal}}^2(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} P_{21,\text{gal}}(k) \quad (6)$$

で与えられる。相互相関関数 $\xi_{21,\text{gal}}(\mathbf{r})$ は、

$$\xi_{21,\text{gal}}(\mathbf{r}) \equiv \langle \delta_{21}(\mathbf{x}) \delta_{\text{gal}}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \quad (7)$$

で定義される。

3 Simulation data

3.1 Reionization model

この研究の再電離シミュレーションは、初めに高い解像度を伴う宇宙論的輻射流体力学 (radiation hydrodynamics; RHD) シミュレーションからの電離源のサブグリッドモデルと IGM の clumping factor を組み立て、輻射輸送の計算に対するモデルを使用する。そして銀河の電離光子生成率が基準のモデル (mid model) と、mid model から 1.5 倍大きい early model と、1.5 倍小さい late model でクロスパワースペクトルの比較を行う。

3.2 Galaxy(LAE) model

擬似的な LAE のサンプルは 2 つのステップによって得られる。まず、それぞれの銀河の Ly- α 光度を決定する。次に、与えられた方向に沿った Ly- α の光学的厚みによって IGM を通した Ly- α の遷移率を得る。それぞれの銀河の電離構造は RHD シミュレーションで計算されるため、RHD シミュレーションの結果から銀河の Ly- α 光度を推定することができる。

4 Method

MWA と SKA による 21cm 線の観測と、Subaru HSC と PFS の経過観測による LAE 観測の組み合わせを考える。最初に、

$$P(k, \mu) = (1 + \beta \mu^2)^2 P(k) \quad (8)$$

とする赤方偏移空間の歪曲を考慮したパワースペクトルに変換する。ここで μ は \mathbf{k} と視線の間の角度の cosine である。 $\beta = \Omega_m^{0.6}(z)/b$ と b は bias factor である。bias factor は $b_{\text{gal}}^2(k) = P_{\text{gal}}(k)/P_{\text{DM}}(k)$ によって与えられる。 $P_{\text{DM}}(k)$ はダークマターのパワースペクトルである。ここではこれを $P_{\text{density}}(k) \approx P_{\text{DM}}(k)$ と仮定して計算する。 $P_{\text{density}}(k)$ はガス密度のパワースペクトルである。

系統誤差なしでは、21cm 輝度温度のパワースペクトルの誤差は

$$\delta P_{21}(k, \mu) = P_{21}(k, \mu) + \frac{T_{\text{sys}}^2}{B t_{\text{int}}} \frac{D^2 \Delta D}{n(k_\perp)} \left(\frac{\lambda^2}{A_e} \right)^2 \quad (9)$$

によって与えられ、 T_{sys} はシステム温度で、 $T_{\text{sys}} \sim 280 \left(\frac{1+z}{7.5}\right)^{2.3}$ K と推定される。 B は観測バンドパス、 t_{int} は 21cm 線の観測時間である。 D は 21cm 線の観測体積までの共動距離で、共動的な観測幅 ΔD は $\Delta D = 1.7 \left(\frac{B}{0.1\text{MHz}}\right) \left(\frac{1+z}{10}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\Omega_m h^2}{0.15}\right)^{-\frac{1}{2}}$ によって与えられる。 $n(k_{\perp})$ は波数ベクトルの観測される垂直成分 $k_{\perp} = (1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}} k$ における基線の数密度で、 r^{-2} で連続的に減少すると仮定する。 A_e はそれぞれのアンテナタイルの有効面積で、 λ は観測された 21cm 線の波長である。最初と 2 番目の項はそれぞれ sample variance と熱雑音を表す。

同様に、銀河観測の誤差は

$$\delta P_{\text{gal}}(k, \mu) = P_{\text{gal}}(k, \mu) + n_{\text{gal}}^{-1} \exp\left(k_{\parallel}^2 \sigma_r^2\right) \quad (10)$$

によって与えられ、 n_{gal} は銀河観測における平均数密度である。その逆数はショットノイズであるとされ、 k_{\parallel} は波数の平行成分 $k_{\parallel} = \mu k$ である。 $\sigma_r = c\sigma_z/H(z)$ であり、 σ_z は銀河観測における赤方偏移誤差である。ここでは、最初の項は sample variance で第 2 項がショットノイズと赤方偏移誤差の積である。

21cm 観測と銀河観測の誤差を伴うと、クロスパワースペクトルの誤差は

$$2 \left[\delta P_{21,\text{gal}}^2(k, \mu)\right] = P_{21,\text{gal}}^2(k, \mu) + \delta P_{21}(k, \mu) \delta P_{\text{gal}}(k, \mu) \quad (11)$$

によって与えられる。第 1 項はクロスパワースペクトルの sample variance を表し、第 2 項は $\delta P_{21}(k, \mu)$ と $\delta P_{\text{gal}}(k, \mu)$ の積である。

そして、それぞれの k のビンにおける SN 比の合計である全 SN 比

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{total}}^2 = \sum_i^{N_{\text{bin}}} \left(\frac{\Delta k}{\epsilon k_i}\right) \left(\frac{S}{N}\right)_i^2 \quad (12)$$

を計算する。 N_{bin} はビンの数、 Δk はビンの大きさである。

5 Results

21cm-LAE クロスパワースペクトルは大スケールで負の値、小スケールで正の値をとる。正相関は、LAE 周りの電離領域と電離バブル内の低密度な領域の間の相関によって引き起こされると考えられる。

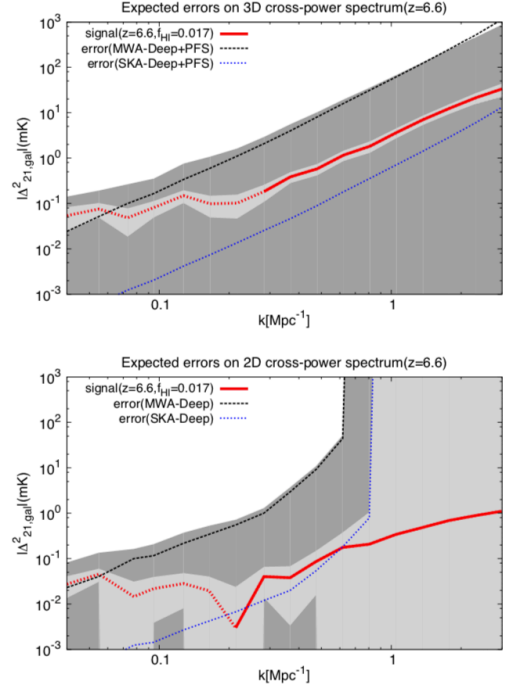


図 1: mid model の $z = 6.6$ における MWA または SKA の Deep survey のクロスパワースペクトル。上図は PFS あり、下図は PFS なしである。

$z = 6.6$ における MWA の Deep survey の全 SN 比は、Ultra-deep survey に比べて PFS ありもなしもわずかに良い。したがって、もし観測領域が平均よりも大きな相互相関振幅を持つなら、シグナルを検出可能である。SKA-low では、感度が改善され、とても大きな SN 比が期待される。 $z = 7.3$ におけるシグナルは、PFS なしではごくわずかであるが、PFS を用いた場合は検出できる。したがって、SKA を用いて宇宙再電離期の後期における相互相関の進化を研究できる。

図 1 と 2 を用いて 3 つの再電離モデルの感度を比較すると、検出可能性は強く再電離モデルに依存することがわかる。early model では、PFS が利用可能であっても、MWA でシグナルを検出するのは非常に困難である。一方、late model では、MWA は小スケールで PFS なしでもシグナルを検出できる。

図 3 は観測の広さと深さに対する late model の MWA-Deep survey と SKA-Deep survey の全 SN 比の等高線を示す。観測領域を固定すると、より深い

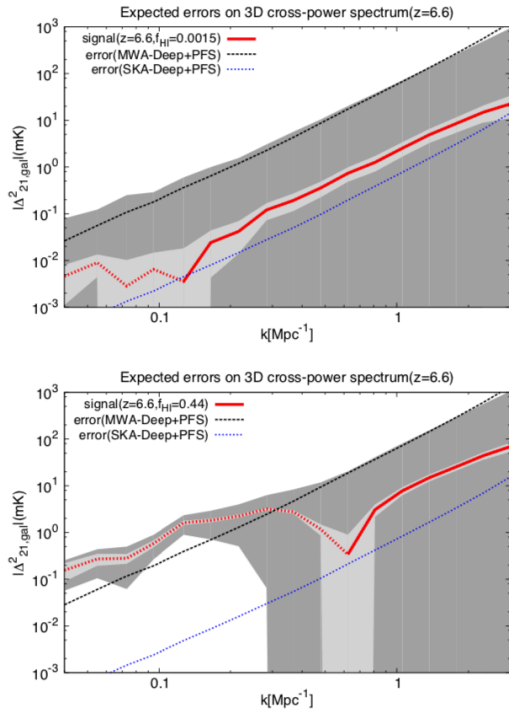


図 2: $z = 6.6$ における PFS を用いた MWA または SKA の Deep survey のクロスパワースペクトル。上図は early model、下図は late model である。

LAE の観測を行っても SN 比があまり改善されないことがわかる。したがって、広く浅い LAE 観測はある観測時間で大きな SN 比を導く。

6 Conclusion

この研究では、21cm 線シグナルの前景放射の影響を取り除くために 21cm-LAE 相互相関シグナルの検出可能性を調査した。LAE が電離光子の主な源ならば 21cm 線放射は LAE の集団と負の相関をもつと予想される。21cm-LAE クロスパワースペクトルは大スケールで負、小スケールで正の値になる。そして、MWA と SKA による 21cm 線の観測と、HSC による LAE 観測の組み合わせを PFS による追観測を仮定して感度を計算し、シグナルと比べた。 $z = 6.6$ において、SN 比は Ultra-Deep survey と比較して常に Deep survey の方が良いが、 $z = 7.3$ を探査できるのは Ultra-Deep survey だけである。また、検出可

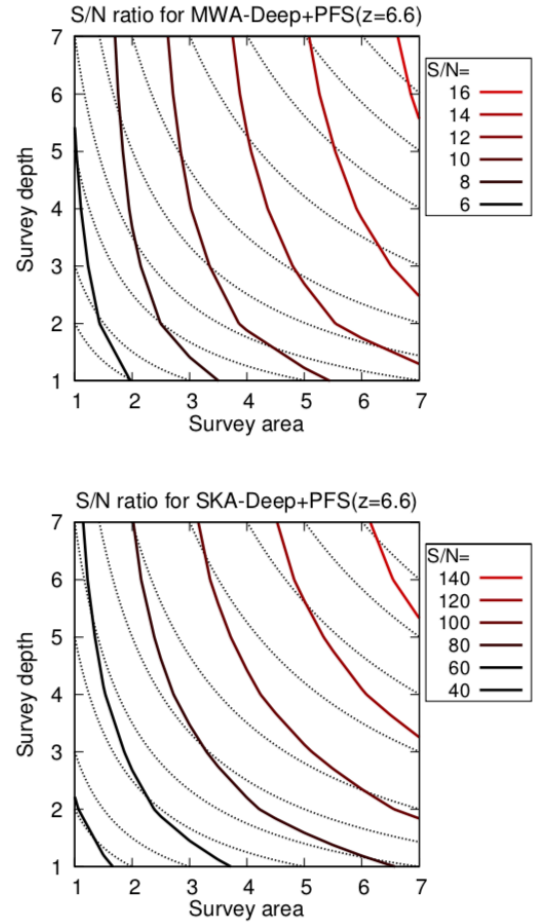


図 3: late model における $z = 6.6$ で PFS を用いた MWA と SKA の Deep survey の SN 比の等高線。

能性が強く再電離モデルに依存することがわかった。HSC Deep field survey と MWA を想定した観測では、もし再電離が比較的ゆっくり続く (late model) ならば、大スケールでシグナルを検出できるが、一方で SKA はすべてのモデルでシグナルを検出するのに十分な感度をもつ。

Reference

Kubota K., et al.(2017),MNRAS,479,2754

b1

$F(R)$ gravity での Shuwarzshild-de Sitter
black holes の Anti-evaporation
名古屋大学大学院 理学研究科
木太久 稜

$F(R)$ gravity での Schwarzschild-de Sitter black holes の Anti-evaporation

木太久 稜 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

ブラックホールの anti-evaporation とはそのブラックホールの (apparent) ホライズンの半径が座標時間の経過とともに増加する現象である。この現象はよく知られるブラックホールの蒸発とは正反対のものである。本講演で、2つのホライズンの半径がほぼ等しい Schwarzschild-de Sitter black hole (Nariai Black hole) は $F(R)$ gravity で anti-evaporation が古典的に起こることを紹介する。これは時空にある形の摂動を加え、その初期の振舞いを見ることによって示される。最後に $F(R)$ に具体的な形を入れそのモデルで anti-evaporation が生じるか議論する。

1 Introduction

Anti-evaporation は R. Bousso & S. Hawking によって初めて発見された。彼らは s 波と one-loop 近似を使って Nariai 時空に量子補正をした (Bousso & Hawking 1998)。そのあと得られた時空にある形の摂動をかけ初期のホライズンの振る舞いを見ると初期条件によっては evaporation つまりホライズンの大きさが減少する、しかし一方で anti-evaporation、つまりホライズンの大きさが増加することが見られた。今回これが $F(R)$ gravity では古典的に生じることを紹介する。

2 $F(R)$ gravity

$F(R)$ gravity は Einstein Hilbert action

$$\int dx^4 \sqrt{-g} \frac{R}{2\kappa} \quad (\kappa = \frac{8\pi G}{c^4})$$

の R を R の関数 $F(R)$ で置き換えて得られる理論である。よって、その作用は

$$\int dx^4 \sqrt{-g} \frac{F(R)}{2\kappa} \quad (1)$$

また場の運動方程式は物質場も入れて

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F(R) - R_{\mu\nu} F'(R) - g_{\mu\nu} \square F'(R) \\ + \nabla_\mu \nabla_\nu F'(R) = -\frac{\kappa}{2} T_{matter\mu\nu} \end{aligned} \quad (2)$$

となる。ここで $F'(R)$ は $F(R)$ を R で微分して得られる関数である。 $F(R) = R$ とすれば確かに Einstein 方程式になっている。この $F(R)$ の形によっては現在の加速する宇宙、また宇宙初期のインフレーションを表すことができる。以下自然単位系 ($c = \hbar = 1$) で考える。

3 Nariai spacetime

まず、真空中の場の方程式 ($T_{matter\mu\nu} = 0$) を考え、 $R = const$ が一定の場合を考える。そうすると、式 (2) は

$$\frac{1}{2} g_{\mu\nu} F(R) - R_{\mu\nu} F'(R) = 0 \quad (3)$$

となる。この式の両辺に $g^{\mu\nu}$ をかけると

$$2F(R) - RF'(R) = 0 \quad (4)$$

が得られる。この式を成立させる R が存在するとしその解を R_0 とする。そうすると次の計量が場の方程式 (2) の解であることが確かめられる。

$$\begin{aligned} ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\ f(r) \equiv \left(1 - \frac{R_0}{12}r^2 - \frac{2MG}{r}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ である。 $R_0 > 0, MG > 0$ の時、この計量を Schwarzschild-de Sitter spacetime という。また、この計量は宇宙項を含んだ真空中の

Einstein 方程式の解にもなっている。

ここでこのブラックホールのホライズンの振舞について考察する。ホライズン位置は $f(r) = 0$ となる r である。 $f(r) = (r - r^3 \frac{R_0}{12} - 2MG)/r$ より分子が 0 になるところを求めればよいが、その分子を $g(r)$ とすると $g(r)$ の極値は $r_{\pm} = \pm \frac{2}{\sqrt{R_0}}$ となる。この $g(r)$ は 3 次関数で、3 次の符号が負、 $g(0) = -2MG < 0$ より $g(r)$ が $r > 0$ で 0 になるには $g(r_+) \geq 0$ である必要がある。また $g(r_+) > 0$ のときホライズンが 2 つあり $g(r_+) = 0$ のときホライズンが 1 つになる。 $g(r_+) = \frac{4}{3\sqrt{R_0}} - 2MG$ よりホライズンが 2 つある時は $g(r_+) = \frac{4}{3\sqrt{R_0}} - 2MG > 0 \Leftrightarrow 0 < MG < \frac{2}{3\sqrt{R_0}}$ である。この 2 つのホライズンを r が小さいほうからブラックホールホライズン、コスモロジカルホライズンという。この 2 つのホライズンの間にある物体を考えると、この物体はコスモロジカルホライズンを超えることはできない。また、ブラックホールホライズンの内側に入ってしまうとそのホライズンの外側には抜け出せない。また、 $g(r_+) = \frac{4}{3\sqrt{R_0}} - 2MG = 0$ のときを考えると $MG = \frac{2}{3\sqrt{R_0}}$ となる。よって $g(r)$ において R_0 を固定したまま MG を変えることは関数を上下に平行移動させていることと同じであるから $MG \rightarrow \frac{2}{3\sqrt{R_0}} - 0$ で $g(r) = 0$ を満たす正の 2 つの r は一致する。つまり 2 つのホライズンはこの極限で一致する。以下

$$\Lambda \equiv \sqrt{\frac{R_0}{4}}$$

とする。このとき 2 つのホライズンが一致する条件は

$$MG \rightarrow \frac{1}{3\Lambda} - 0 \Leftrightarrow 3MGA \rightarrow 1 - 0 \quad (6)$$

となる。今から 2 つのホライズンの大きさがほぼ等しい場合を考える。これは $0 < \epsilon \ll 1$ として

$$(3MGA)^2 = 1 - 3\epsilon^2$$

と書ける。このとき 2 つのホライズンの間の領域を張る次のような座標変換

$$t = \frac{\tau}{\epsilon\Lambda} \quad (7)$$

$$r = \frac{1}{\Lambda}(1 - \epsilon \cos \chi' - \frac{\epsilon^2}{6}) \quad (8)$$

をすると ϵ の 0 次で

$$ds^2 = -\frac{\sin^2 \chi'}{\Lambda^2} d\tau^2 + \frac{1}{\Lambda^2} d\chi'^2 + \frac{1}{\Lambda^2} d\Omega^2 \quad (9)$$

となる。この時空が Nariai space time である。 χ' の定義域は $[0, \pi]$ である。ここで更に

$$\sin \chi' = \frac{1}{\cosh \chi} \quad (10)$$

という座標変換をすると

$$ds^2 = \frac{1}{(\Lambda \cosh \chi)^2} (-d\tau^2 + d\chi^2) + \frac{1}{\Lambda^2} d\Omega^2 \quad (11)$$

となる。座標変数 χ の定義域は $[-\infty, \infty]$ である。

4 Perturbation

上で得られた Nariai spacetime に摂動をかけることを考える。まず以下のような計量を考える。

$$ds^2 = e^{2\rho(\chi, \tau)} (-d\tau^2 + d\chi^2) + e^{-2\psi(\chi, \tau)} d\Omega^2 \quad (12)$$

$\rho = -\ln(\Lambda \cosh \chi)$, $\psi = \ln \Lambda$ のとき Nariai space time(11) を表す。そこで ρ, ψ を以下のように置くと

$$\rho = -\ln(\Lambda \cosh \chi) + \delta\rho, \quad \psi = \ln \Lambda + \delta\psi \quad (13)$$

Nariai spacetime に摂動をかけた時空が得られる。このとき、曲率の変化分は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \delta R &= 4\Lambda^2(\delta\psi - \delta\rho) \\ &+ \Lambda^2 \cosh^2 \chi (2\delta\ddot{\rho} - 2\delta\rho'' - 4\delta\ddot{\psi} + 4\delta\psi'') \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、 $\rho', \dot{\rho}$ はそれぞれ χ, τ についての微分である。 ψ についても同様である。そして場の運動方程式(2)から次の摂動の式が得られる。

$$\begin{aligned} &\frac{-F'(4\Lambda^2) + 2\Lambda^2 F''(4\Lambda^2)}{2\Lambda^2 \cosh^2 \chi} \delta R - \frac{F(4\Lambda^2)}{\Lambda^2 \cosh^2 \chi} \delta\rho \\ &- F'(4\Lambda^2)(-\delta\ddot{\rho} + 2\delta\ddot{\psi} + \delta\rho'' + 2 \tanh \chi \delta\psi') \\ &+ \tanh \chi F''(4\Lambda^2) \delta R' + F''(4\Lambda^2) \delta R'' \\ &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} &-\frac{-F'(4\Lambda^2) + 2\Lambda^2 F''(4\Lambda^2)}{2\Lambda^2 \cosh^2 \chi} \delta R + \frac{F(4\Lambda^2)}{\Lambda^2 \cosh^2 \chi} \delta\rho \\ &- F'(4\Lambda^2)(\delta\ddot{\rho} + 2\delta\psi'' - \delta\rho'' + 2 \tanh \chi \delta\psi') \\ &+ \tanh \chi F''(4\Lambda^2) \delta R' + F''(4\Lambda^2) \delta\ddot{R} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \tanh \chi (-2\delta\dot{\psi}F'(\Lambda^2) + F''(4\Lambda^2)\delta\dot{R}) \\ & + (-2\delta\dot{\psi}'F'(\Lambda^2) + F''(4\Lambda^2)\delta\dot{R}') \\ & = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{-F'(4\Lambda^2) + 2\Lambda^2 F''(4\Lambda^2)}{2\Lambda^2} \delta R - \frac{F(4\Lambda^2)}{\Lambda^2} \delta\psi \\ & - \cosh^2 \chi F'(4\Lambda^2) (-\delta\ddot{\psi} + \psi'') \\ & - \cosh^2 \chi F''(4\Lambda^2) (-\delta\ddot{R} + \delta R'') \\ & = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

式 (17) を解くと

$$-2\delta\psi F'(4\Lambda^2) + F''(4\Lambda^2)\delta R = \frac{C_\tau(\tau)}{\cosh \chi} + C_\chi(\chi) \quad (19)$$

が得られる。ここで、 $C_\tau(\tau), C_\chi(\chi)$ はそれぞれ τ, χ の任意関数である。 $F''(4\Lambda^2) \neq 0$ とし式 (19) を使って式 (18) の δR_0 を消去すると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha \cosh^2 \chi} (2(2\alpha - 1)F'(4\Lambda^2)\delta\psi \\ & + (\alpha - 1) \left(\frac{C_\tau(\tau)}{\cosh \chi} + C_\chi(\chi) \right)) \\ & + \square \left(3F'(4\Lambda^2)\delta\psi + \frac{C_\tau(\tau)}{\cosh \chi} + C_\chi(\chi) \right) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

となる。ここで $\square = -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2}{\partial \chi^2}$ で

$$\alpha \equiv \frac{2\Lambda^2 F''(4\Lambda^2)}{F'(4\Lambda^2)} = \frac{F(4\Lambda)F''(4\Lambda^2)}{F'(4\Lambda^2)^2} \quad (21)$$

である。中辺から右辺には式 (4) を使った。また式 (20) を導出する際も式 (4) を使った。さてこの解の中に anti-evaporation を起こす解があることを示す。そのために $C_\tau(\tau) = C_\chi(\chi) = 0$ とする。そして $\delta\psi$ の形を $\delta\psi = \psi_0 \cosh \omega\tau \cosh^\beta \chi$ とする。このとき式 (20) は $F'(4\Lambda^2) \neq 0$ として

$$\delta\psi \left(4 - \frac{2}{\alpha} - 3\beta(\beta - 1) + 3 \cosh^2 \chi (-\omega^2 + \beta^2) \right) = 0 \quad (22)$$

よって、 $\delta\psi \neq 0$ でこの式が任意の χ で成り立つための必要十分条件は

$$-\omega^2 + \beta^2 = 0, \quad 4 - \frac{2}{\alpha} - 3\beta(\beta - 1) = 0 \quad (23)$$

すなわち

$$\omega = \pm\beta, \quad \beta = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{19\alpha - 8}{3\alpha}} \right) \quad (24)$$

となる。 β は $\alpha < 0$ or $\alpha \geq \frac{8}{19}$ のとき実数となる。

5 horizon tracking

apparent ホライズンがどこに位置しているかを考える。今、計量の形は

$$ds^2 = e^{2\rho(\chi, \tau)} (-d\tau^2 + d\chi^2) + e^{-2\psi(\chi, \tau)} d\Omega^2 \quad (25)$$

である。このとき動径方向に進む光の変位は $ds^2 = 0$ となるように進むので

$$d\tau = \pm d\chi, \quad d\theta = d\phi = 0 \quad (26)$$

となる。よってこの光の測地線の接ベクトルは

$$k^\alpha = \left(\frac{d\tau}{d\lambda}, \pm \frac{d\chi}{d\lambda}, 0, 0 \right) = (e^{-2\rho}, \pm e^{-2\rho}, 0, 0) \quad (27)$$

である。以下、+ の方を outgoing, - を ingoing と呼ぶ。またここで測地線はアフィンパラメーター λ でパラメトライズされているとした。このときこれら光の膨張 θ は

$$\theta = \nabla_\alpha k^\alpha = -2 \left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau} \pm \frac{\partial\psi}{\partial\chi} \right) \quad (28)$$

となる。前に与えた $\delta\psi$ を代入すると

$$\theta = -2\delta\psi (\omega \tanh \omega\tau \pm \beta \tanh \chi) \quad (29)$$

となる。よって、apparent ホライズン上では $\theta = 0$ なので式 (24) より

$$\cosh \omega\tau = \cosh \chi \quad (30)$$

が成立する。これは apparent ホライズンの必要条件を与える。この位置が正しく apparent ホライズンを与えているかどうかは得られた位置 χ の前後で式 (29) の符号を見なければならない。 χ が大きい、または小さいほうのどちらかで θ のどちらともで負になっていればよい。

よって apparent ホライズンが存在するときのホライズンの半径は

$$\frac{e^{-\delta\psi_h}}{\Lambda} = \frac{e^{-\psi_0 \cosh^{\beta+1} \beta\tau}}{\Lambda} \quad (31)$$

となる。摂動は $\tau > 0$ のときかけたとすると apparent ホライズンが存在するためには $\psi_0 > 0$ 、このとき $\beta < -1$ のとき anti-evaporation が生じる。また $\psi_0 > 0$ で $\beta > -1$ の場合 evaporation が起きる (表参照)。

表 1: θ の値: $\psi_0 > 0, \beta = \omega$

χ	...	$-\omega\tau$...	$\omega\tau$...
outgoihg	+	0	-	-	-
ingoihg	-	-	-	0	+

表 2: θ の値: $\psi_0 > 0, \beta = -\omega$

χ	...	$-\omega\tau$...	$\omega\tau$...
outgoihg	-	-	-	0	+
ingoihg	+	0	-	-	-

表 3: θ の値: $\psi_0 < 0, \beta = \omega$

χ	...	$-\omega\tau$...	$\omega\tau$...
outgoihg	-	0	+	+	+
ingoihg	+	+	+	0	-

表 4: θ の値: $\psi_0 < 0, \beta = -\omega$

χ	...	$-\omega\tau$...	$\omega\tau$...
outgoihg	+	+	+	0	-
ingoihg	-	0	+	+	+

6 Application

次のようなモデルを考える。

$$\frac{F(R)}{2\kappa} = \frac{R}{2\kappa} + f_0 M^{4-2n} R^n \quad (32)$$

ここで f_0 は無次元定数で M は質量の次元を持ったパラメータである。もし、 $(n-2)f_0 > 0$ ならば式 (4) より

$$R_0 = 4\Lambda^2 = \{2(n-2)f_0\kappa M^{4-2n}\}^{-\frac{1}{n-1}} \quad (33)$$

である。ここで $R_0 \neq 0$ とした。このとき式 (21) の α は以下ようになる。

$$\alpha = \frac{n}{4} \quad (34)$$

となる。よって β は

$$\beta = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{19n-32}{12n}} \quad (35)$$

となり $\beta < -1$ となるとき $-$ を採用しなければならずまたそのとき $n = -1, -2, -3$ である。このとき anti-evaporation が生じる。

7 Conclusion

今回 Nariai spacetime ある形の摂動を加えると $F(R)$ の形によっては anti-evaporation が起きることを示した。最後に具体的なモデルについて α が実であるための条件をみた。

Acknowledgement

本講演にあたり一緒に議論してくれた研究室の皆様へ深く感謝いたします。

Reference

- R. Bousso and S.W. Hawking, (Anti)evaporation of Schwarzschild-de Sitter black holes, Phys. Rev. D 57, 2436 (1998)
- S. Nojiri and S.D. Odintsov, Anti evaporation of Schwarzschild-de Sitter black holes in f(R)gravity, Classical Quantum Gravity 30, 125003 (2013)

b2

Q-balls

大阪市立大学大学院 理学研究科

遠藤 洋太

Q-balls

遠藤 洋太 (大阪市立大学大学院 理学研究科)

Abstract

波が局在するような解を soliton 解と呼ぶ。その中で non-topological soliton と呼ばれる soliton 解が存在する。ある特定のポテンシャルをしたスカラー場は重力の効果なしに non-topological soliton 解をなすことが分かっている。これが Q-ball である。

先行研究 [S.Coleman (1985)] では、Q-ball の存在性や安定性について議論されており、特定の条件を満たすようなポテンシャルで抽象的に議論を進めている。また、この Q-ball の励起状態についても言及している。本発表では先行研究 [S.Coleman (1985)] のレビューに加え、実際に具体的なポテンシャルを仮定して、Q-ball 解を数値的に導出し、その結果についての安定性を考える。

1 Introduction

1.1 set up

フラットな時空である特定のポテンシャルを持った実スカラー場 2 つの Lagrangian density :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)^2 - U(\phi) \quad (1)$$

となる系を考える。ただし、 $\phi^2 = \phi_1^2 + \phi_2^2$ である。この Lagrangian は SO(2) 変換 :

$$\begin{aligned} \phi_1 &\rightarrow \phi_1 \cos \alpha - \phi_2 \sin \alpha \\ \phi_2 &\rightarrow \phi_1 \sin \alpha + \phi_2 \cos \alpha \end{aligned} \quad (2)$$

に対して不変であり、それに対応する保存カレントが存在して

$$j_\mu = \phi_1 \partial_\mu \phi_2 - \phi_2 \partial_\mu \phi_1 \quad (3)$$

と求めることができる。さらにこの量から conserved charge が

$$Q = \int d^3x j_0 \quad (4)$$

と定義できる。

ここで、ポテンシャルに制限を付けていく。

- $\phi = 0$ で真の真空である : $U(\phi) = 0$
- mass term を持つ : $\mu^2 = U''(0) = \left[\frac{2U}{\phi^2} \right]_{\phi=0}$
- $\frac{U}{\phi^2}$ が $\phi \neq 0$ で最小値を持つ : $\min \left[\frac{2U}{\phi^2} \right] \equiv \frac{2U_0}{\phi_0^2} < \mu^2$

このような条件のポテンシャルの下で Q-ball ができる。

1.2 Q-ball 解

チャージ $Q = const$ の下でエネルギー E が最小になるスカラー場を探す。計算の都合上 ϕ_1, ϕ_2 を 2 次元ベクトルとして考える :

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

このとき energy と charge は

$$E = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \dot{\vec{\phi}} \cdot \dot{\vec{\phi}} + \frac{1}{2} \nabla \vec{\phi} \cdot \nabla \vec{\phi} + U \right] \quad (5)$$

$$Q = i \int d^3x \dot{\vec{\phi}} (\sigma_2 \vec{\phi}) \left(\rightarrow \int d^3x (\dot{\vec{\phi}} \times \vec{\phi})_3 \right) \quad (6)$$

ただし、 σ_2 は Pauli 行列¹、 Q の表式のカッコ内の下付き添え字 3 はスカラー場ベクトル $\vec{\phi}$ の形式的な 3 成分である。ここで新たな量を定義する :

$$\begin{aligned} I &= \int d^3x \vec{\phi} \cdot \dot{\vec{\phi}} \\ &= \int d^3x (\sigma_2 \vec{\phi}) \cdot (\dot{\vec{\phi}}) \\ &\left(\rightarrow \int d^3x |\dot{\vec{\phi}}|^2 \right) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\omega = \frac{Q}{I} \quad (8)$$

この ω は内部空間に対する慣性モーメントのアナロジーで考えられる角運動量に相当するものである²。

$${}^1\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

² Q, I について最後のカッコつきの式はそれぞれ角運動量と慣性モーメントのようなものであることが見やすいように変形しただけである

さらに、Schwarz の不等式³ から

$$\begin{aligned} Q^2 &= \left| \int d^3x \dot{\vec{\phi}}(\sigma_2 \vec{\phi}) \right|^2 \\ &\leq \int d^3x |\dot{\vec{\phi}}|^2 \int d^3x |\vec{\phi}|^2 \\ &= I \int d^3x \dot{\vec{\phi}} \cdot \vec{\phi} \end{aligned} \quad (9)$$

これは ϕ 、 Q を固定した時の E の中の $\dot{\vec{\phi}}$ の下限を記述している。また Schwarz の不等式の等号が成り立つ必要十分条件は

$$\dot{\vec{\phi}} = -i\omega\sigma_2\vec{\phi} \quad (10)$$

である。(10) 式を満たすように $\vec{\phi}$ を選ぶと、エネルギーはパラメータ Q と場 $\vec{\phi}$ の汎関数として書くことができる：

$$E_Q = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \nabla \vec{\phi} \cdot \nabla \vec{\phi} + U \right] + \frac{Q^2}{2I} \quad (11)$$

内部空間の角度変数として ϕ 、 θ を定義し、ベクトル $\vec{\phi}$ を

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi \cos \theta \\ \phi \sin \theta \end{pmatrix} \quad (12)$$

で、定義しなおす ($\phi \geq 0$) と、エネルギーの θ とその微分項に関する依存性は

$$E_Q = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \phi^2 (\nabla \theta)^2 + \dots \right] \quad (13)$$

と書き出せる。 ϕ 固定したときの E_Q を常に最小になるようにすると $\nabla \theta = 0$ が必要となる。この時、一般性を失わずに θ を任意の定数に選べるので、 $\theta = 0$ として考えると、 $\vec{\phi}$ は、

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

と書き直せる。また (10) 式からその時間微分について

$$\dot{\vec{\phi}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \phi \end{pmatrix} \quad (15)$$

が導出される。

³任意の複素ベクトル場に対して、 $|\int dX x^\dagger(X)y(X)| \leq \int |dX x^2(X)| \int |dX y^2(X)|$ を満たす。等号が成り立つのは $x(X) \propto y(X)$ の場合のみである。

ここで位置の正の任意関数 $\phi(x)$ に対して、無限遠でゼロになって、球対称に再構築した関数 $\phi_R(r)$ (球対称単調減少関数) を以下に従うように定義する：

$$\mu_L\{x|\phi_R(x) \geq \varepsilon\} = \mu_L\{x|\phi(x) \geq \varepsilon\} \quad \text{for any } \varepsilon > 0 \quad (16)$$

μ_L は Lebesgue measure である。ここまでやってきた内容の ϕ を ϕ_R で置きなおしても、 U の積分と I は変わらない。また球的再構築理論から

$$\int d^3x (\nabla \phi(x))^2 \geq \int d^3x (\nabla \phi_R(r))^2 \quad (17)$$

であることは言えて、この等号が成り立つのは $\phi = \phi_R$ のときである。つまり、 ϕ を球対称単調減少関数として選ぶと energy を常に最小値にすることができる。

以上の結果から 2 つのスカラー場は

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi(r) \cos \omega t \\ \phi_2 &= \phi(r) \sin \omega t \end{aligned} \quad (18)$$

と置くことができる。ここで $\phi(r)$ は動径方向に単調減少関数である。このとき、スカラー場 ϕ に対する方程式 (EOM) は

$$\frac{d^2 \phi}{dr^2} = -\frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} - \frac{\partial \hat{U}}{\partial \phi} \quad (19)$$

と変形される。ただし、 $\hat{U} = \frac{1}{2} \omega^2 \phi^2 - U(\phi)$ である。これは r を時間、 ϕ を位置とみたとき、摩擦を受けながらポテンシャル \hat{U} 中を動く質点に等しい。

2 Q-ball の数値解

数値的に Q-ball となる解を探してみる。対応するポテンシャル：

$$\hat{U} = \frac{1}{2}(\omega^2 - 1)\phi^2 + \lambda\phi^4 - \kappa\phi^6 \quad (20)$$

ただし、 $\lambda = 0.0046$ 、 $\kappa = 0.000012$ 、 $\omega = 0.70$ とする。このときポテンシャル \hat{U} の概形は fig.1 となる。

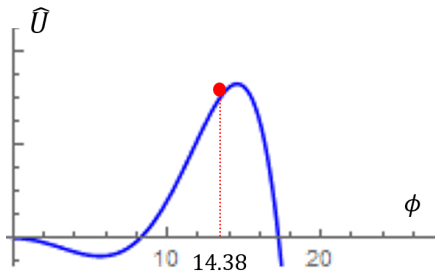


図 1: potential \hat{U} の概形

このポテンシャル中で $\phi(0) = 14.38$ を初期条件とすると Q-ball 解が得られる (fig.2)。

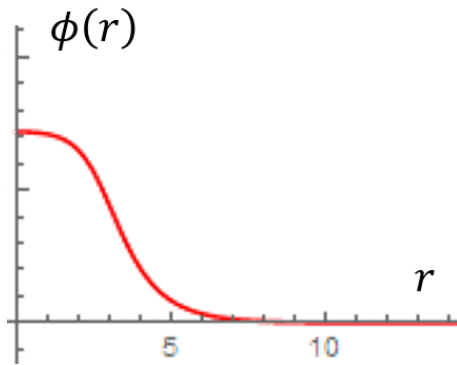


図 2: Q-ball 解の一例

これは Q-ball 解の一例であり、振動数 ω を変えることでそれに対応した Q-ball 解が得られる。

3 安定性

重力込みの massive scalar 場での安定性の確認の手法 [M.Gleiser & R.Watkins (1989)] を用いて解析する。Gleiser ら [M.Gleiser & R.Watkins (1989)] の解析によると、振動する摂動に対してそのゼロモードはチャージ Q が多少の摂動で変わらない点、つまり、 $\frac{dQ}{d\phi(0)} = 0$ となる点に存在するとしている。今回の系も $\frac{dQ}{d\phi(0)} = 0$ となる点まわりを見ると Q-ball の安定性がわかると期待していた。

実際に今回の系について Q と $\phi(0)$ の相関を見ると fig.3 のようになる。

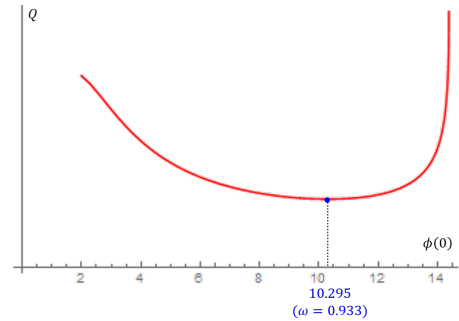


図 3: Q - $\phi(0)$ 相関

[M.Gleiser & R.Watkins (1989)] の手法を用いるために摂動を導入：

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \phi \\ \delta \phi \end{pmatrix} \quad (21)$$

この摂動に対する 1 次までの運動方程式は

$$\partial_0^2 \delta \phi - \omega^2 \delta \phi + \left(\partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r \right) \delta \phi + \frac{\partial U}{\partial \phi} \frac{\delta \phi}{2\phi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \delta \phi = 0 \quad (22)$$

ここでこの摂動が振動数 Ω で振動していた ($\delta \phi \propto e^{-i\Omega t}$) とすると時間微分項が Ω^2 となり、 Ω^2 の固有値問題になる。この Ω^2 の値が Q-ball の安定性を決定する。 $\Omega^2 < 0$ の場合、摂動が発散してしまうので、不安定となる。実際にこの系に対してその Ω^2 の値を求めるとその値は fig.4 となる。

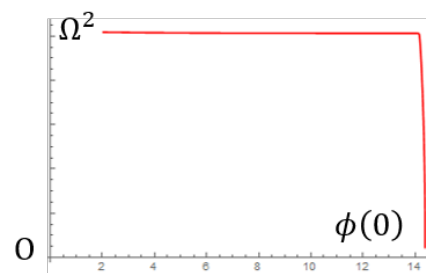


図 4: Ω^2 と $\phi(0)$ の相関

Q-ball となるすべてのスカラー場の初期条件において $\Omega^2 > 0$ が成り立ったのでこの解は安定といえるだろう。

以上のことより安定な Q-ball 解が作れた。

4 Future work

重力がカップルしたような系でスカラー場のふるまいを見ることで、超大質量ブラックホールやダークマターのモデルに拡張できると期待している。

Reference

- S.Coleman, "Q-BALLS", Nucl.Phys.B262 (1985) 263-283
- M.Colpi, S.Shapiro, and I.Wasserman, "Boson Stars: Gravitational Equilibria of Self-Interacting Scalar Fields", Phys.Rev.Lett. 57, 2485(1986)
- M.Gleiser and R.Watkins, "GRAVITATIONAL STABILITY OF SCALAR MATTER", Nucl.Phys.B319(1989)733-746
- H.Ishihara and T.Ogawa, "Homogeneous balls in a spontaneously broken U(1) gauge theory", Phys.Rev.D99,056019 (2019)

b3

スカラーダークマターとブラックホールへア

神戸大学大学院 理学研究科

野村 皇太

スカラーダークマターとブラックホールヘア

野村 皇太 (神戸大学大学院 理学研究科)

Abstract

ブラックホールのまわりに存在する非自明なスカラー場の配位を「ブラックホールのスカラーヘア」と呼ぶ。Hui et al.(2019) は、時間振動するスカラーダークマターがブラックホールを取り巻いていることによってスカラーヘアが生じる状況を考え、ダークマターの質量に応じてスカラーヘアの様相がどのように変わるかを調べた。ダークマターの質量が大きい極限では、スカラー場はブラックホールからの距離の $-3/4$ 乗に比例して減衰する。質量の小さい極限では、スカラー場はブラックホールのまわりで振幅がほぼ一定となる振る舞いを持つ。中程度の質量の領域では、ブラックホールの外側でスカラー場の「定常波」が生じる。スカラー場の質量とスカラーヘアの関係性が明らかになったため、実際に存在するスカラーヘアの分布を観測から知ることができれば、スカラーダークマターの質量の推定に役立つ可能性がある。本発表では、特殊関数を利用してスカラーヘアの質量依存性を解析的に導出した Hui et al.(2019) の方法と結果をレビューする。

1 Introduction

漸近的平坦な静的ブラックホールはそのまわりにスカラー場を持たない、という主張は「ブラックホールの無毛定理」の一種として知られる (Bekenstein 1972)。しかし、ブラックホールから十分に離れた領域でも時間的に発展するようなスカラー場が存在するとして、その定理の仮定を破るならば、非自明なスカラー場の存在が許される。実際、Schwarzschild 時空での Klein-Gordon 方程式は、時間に関して線形に発展するという境界条件の下で非自明な解を持つ (Jacobson 1999)。このスカラー場解は宇宙論的な時間スケールで発展する背景スカラー場と解釈できる。ブラックホール時空上で存在し得るこのようなスカラー場解は、ブラックホールが持つ「スカラーヘア (毛)」と呼ばれる。近年注目されているのは、宇宙に広く存在するダークマターが時間依存性を持つスカラー場からなり、ブラックホールがこのスカラーダークマターをまとっているとするモデルである。スカラーダークマターの候補としては、仮説上の粒子アクシオンがあり、これは 10^{-22} – 10^{-3} eV の質量を持ち、時間的に振動しているとされる。本研究の目的は、ダークマターによって Schwarzschild ブラックホールのまわりにスカラーヘアが生じる状況を考え、そのスカラーヘアの分布を調べることである。

なお、本発表では光速 $c = 1$ 、換算 Planck 定数

$\hbar = 1$ とする単位系を一貫して用いる。

2 Methods

一般相対論における Einstein 方程式の静的球対称真空解は Schwarzschild 解

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1)$$

であり、重力源物体の質量が十分に大きいとき、Schwarzschild ブラックホールを記述する。ここで、 $r_s = 2GM_{\text{BH}}$ は Schwarzschild 半径である (M_{BH} はブラックホールの質量、 G は重力定数)。

Schwarzschild ブラックホールにおいて特徴的な距離のスケールとして、二つの量を導入する。一つは上述の Schwarzschild 半径

$$r_s = 2.95 \text{ km} \left(\frac{M_{\text{BH}}}{M_{\odot}} \right) \quad (2)$$

である (M_{\odot} は太陽質量)。もう一つ、 v_{typical} をブラックホールの周囲の物質の典型的な速度分散として、距離 r_i を $r_s/r_i \equiv v_{\text{typical}}^2$ で定義する。典型的な v_{typical} で規格化すると、

$$\frac{r_s}{r_i} = 10^{-6} \left(\frac{v_{\text{typical}}}{300 \text{ km/s}} \right)^2 \quad (3)$$

である。 $r_s < r < r_i$ の範囲においては、幾何学は Schwarzschild 解で十分に記述される。すなわち、スカラー場による背景時空への反作用は無視できるとする。

本発表では、Schwarzschild 時空における質量 m のスカラー場 ϕ を考え、特に球対称なスカラー場の配位に注目する。このためには、Schwarzschild 計量を背景とする Klein–Gordon 方程式を球面調和関数で展開したのち、 $l = 0$ のモードの方程式

$$\left[-\partial_t^2 - m^2 \left(1 - \frac{1}{r}\right) + \left(1 - \frac{1}{r}\right)^2 \partial_r^2 + \frac{2}{r} \left(1 - \frac{1}{r}\right) \left(1 - \frac{1}{2r}\right) \partial_r \right] \phi = 0 \quad (4)$$

を考えればよい。ここでは $r_s = 1$ とする単位系を用いて表記を簡略化している。また、スカラー場の振動数は $\omega = m$ であるとし、時間依存性は $\phi \propto e^{-imt}$ で表されるとする。

方程式に課される境界条件は、ブラックホールの性質から決まる。ブラックホールの内側から事象の地平線を超えて外向きに流れ出る物質は存在しない。このことから、 $r \rightarrow 1 (= r_s)$ のとき ϕ が純粋な内向きの波動解になるということが境界条件として課される。このとき、(4) の解は合流型 Heun 関数を用いて

$$\phi(t, r) = C e^{-imt} (r - 1)^{-im} \times \text{HeunC}(0, -2im, 0, -m^2, m^2, 1 - r) \quad (5)$$

と書ける (C は定数)。スカラー場の質量 m の値によって、この解の振る舞いは異なる。本研究の特色は、様々な m の領域で合流型 Heun 関数を適切に近似することにより、スカラー場の振る舞いを解析的に導出することにある。

なお、合流型 Heun 関数とは、次の微分方程式

$$\begin{aligned} & \text{HeunC}''(z) + \left(\alpha + \frac{1+\beta}{z} + \frac{1+\gamma}{z-1} \right) \text{HeunC}'(z) \\ & + \frac{1}{2z(z-1)} [(\alpha(2+\beta+\gamma) + 2\delta)z + \beta(1+\gamma) \\ & - \alpha(1+\beta) + 2\eta + \gamma] \text{HeunC}(z) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

と境界条件

$$\begin{aligned} & \text{HeunC}(0) = 1 \\ & \text{HeunC}'(0) = \frac{\beta(1+\gamma) - \alpha(1+\beta) + 2\eta + \gamma}{2(1+\beta)} \end{aligned} \quad (7)$$

を満たす関数 $\text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, z)$ である。

3 Results

今回は、スカラー場の質量 m を四つの領域に分け、それぞれの領域で合流型 Heun 関数を近似することにより、スカラー場の配位を求めた。結果は表 1 の通りである。

	質量	スカラー場の振る舞い
IV	$mr_s \gtrsim 1$	$\phi \propto r^{-3/4} e^{-imt} r^{-i2m\sqrt{rr_s}}$
III	$\sqrt{\frac{r_s}{r_i}} \lesssim mr_s \lesssim 1$	$\phi \propto r^{-3/4} e^{-imt} \times \cos\left(2m\sqrt{rr_s} - \frac{3\pi}{4}\right)$
II	$\left(\frac{r_s}{r_i}\right)^2 \lesssim mr_s \lesssim \sqrt{\frac{r_s}{r_i}}$	$\phi \propto e^{-imt} \left(1 + \frac{imr_s^2}{r} - \frac{1}{2}m^2rr_s\right)$
I	$mr_s \lesssim \left(\frac{r_s}{r_i}\right)^2$	$\phi \propto e^{-imt} \left(1 + \frac{imr_s^2}{r}\right)$

表 1: 質量に応じたスカラー場 $\phi(t, r)$ の振る舞い

また、もとの Klein–Gordon 方程式 (4) を数値的に解き、スカラー場の振幅 $|\phi|$ を求めると、図 1 のようになる。解析的に得た表 1 の結果と、図 1 の振る舞いは一致している。

4 Discussion

Schwarzschild 計量は静的である（時間に依存しない）ため、この時空におけるエネルギー保存則は簡単な形をとり、

$$\partial_t(r^2 T^t_t) + \partial_r(r^2 T^r_t) = 0 \quad (8)$$

と書ける。この式を用い、まずスカラー場のエネルギー流束について考察する。複素スカラー場のエネルギー運動量テンソルは、

$$\begin{aligned} T^{tt} &= \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{-2} |\partial_t \phi|^2 + |\partial_r \phi|^2 \\ &+ m^2 \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{-1} |\phi|^2 \end{aligned} \quad (9)$$

$$T^{rt} = -\partial_t \phi \partial_r \phi^* - \partial_t \phi^* \partial_r \phi \quad (10)$$

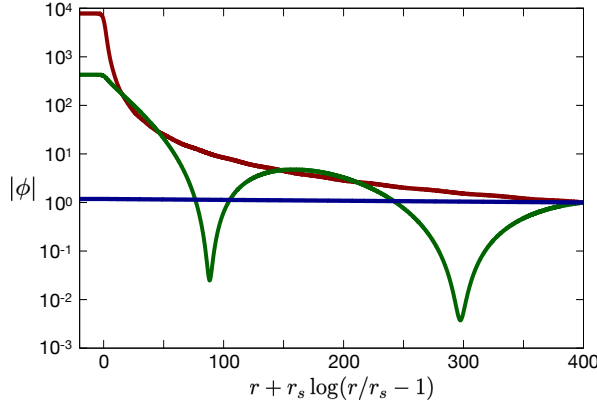


図 1: スカラー場の振幅 $|\phi|$ の振る舞い。赤線は $m = r_s^{-1}$ (表 1 における IV に対応)、緑線は $m = 0.2r_s^{-1}$ (表 1 の III)、青線は $m = 0.02r_s^{-1}$ (表 1 の II あるいは III) である。 $|\phi|$ の値は $r + r_s \log(r/r_s - 1) = 400$ のとき 1 をとるように規格化している。 $(r + r_s \log(r/r_s - 1))$ は計算の際に有用な座標で、事象の地平線では $-\infty$ をとり、ブラックホールの十分外側では r に漸近する。)

の成分を持つ。今回は、スカラー場の時間依存性が $\phi \propto e^{-imt}$ であると仮定しているため、これらの成分は時間に依らない。このことと (8) から、

$$\partial_r(r^2 T^r_t) = 0 \quad (11)$$

となる。 T^r_t はブラックホールからの距離が一定の球面を通過するエネルギー流束を表す量であるから、(11) より、エネルギー流束は距離に依らないことがわかる。ここでは複素スカラー場について考えたが、実スカラー場の場合でも、時間平均した量を考えれば、エネルギー流束は距離に依らない。

以下では、Sec. 3 で示した結果について、質量の大きい順からスカラー場の振る舞いを議論する。

質量の大きい $mr_s \gtrsim 1$ の領域では、スカラー場 ϕ の振幅は距離 r の $-3/4$ 乗に比例して減衰する。この振る舞いは次のように説明される。質量が大きい極限では、場の粒子性が強く現れると期待される。粒子が遠方からブラックホールに落下する際には、エネルギー保存から $v \propto 1/r^{1/2}$ で速度を得る。一方、前述の通り、スカラー場のエネルギー流束は距離に依らない。粒子の場合には、エネルギー密度を ρ とすると、半径 r の球面を単位時間あたりに通過する

エネルギーは $4\pi r^2 \rho v$ と書ける。この量が距離に依らないことから、 ρ の r 依存性が $\rho \propto r^{-3/2}$ と決まる。スカラー場のエネルギー密度は $\rho \sim m^2 \phi^2$ で記述されるため、 $\phi \propto r^{-3/4}$ となる。なお、 $mr_s \gtrsim 1$ という範囲は、

$$\begin{aligned} r_s/r_i &\sim 10^{-6} \\ M_{\text{BH}} &\sim 10 M_{\odot} \end{aligned} \quad (12)$$

の設定の下で $m \gtrsim 10^{-11}$ eV に相当する。

$\sqrt{r_s/r_i} \lesssim mr_s \lesssim 1$ の領域は、(12) の下で質量 10^{-14} – 10^{-11} eV に当たる。この領域では、大まかには振幅が $r^{-3/4}$ に比例して減衰すると同時に、 $\cos(2m\sqrt{rr_s} - 3\pi/4)$ が掛け合わされた振る舞いとなり (表 1 参照)、ブラックホールのまわりにスカラー場の「節」が生じる (図 1 参照)。この「節」の位置は時間に依存しないため、スカラー場が「定常波」をなすことになる。

$(r_s/r_i)^2 \lesssim mr_s \lesssim \sqrt{r_s/r_i}$ の領域 ((12) の下で質量 10^{-23} – 10^{-14} eV) と $mr_s \lesssim (r_s/r_i)^2$ の領域 ((12) の下で質量 $\lesssim 10^{-23}$ eV) は、スカラー場の質量が小さく、波動性が現れる領域である。これらの領域では、スカラー場はブラックホールの外側でほぼ一定の振幅で振動する。表 1 より、領域 II では r^{-1} に比例する項と r に比例する項が、領域 I では r^{-1} に比例する項が主要な補正項として付く。ただし、これらの補正項にはスカラー場の質量 m が掛かっているため、全体に与える寄与は小さい。

5 Conclusion

境界でスカラー場が振動しているという条件を課すことにより、ブラックホールはスカラーヘアを持ち得る。本研究では、スカラーダークマターの質量の値によってスカラーヘアが変容する様が解析的な手法を通して明らかになった。質量の大きい極限では、スカラー場は距離の $-3/4$ 乗に比例する。これは粒子性を強く反映する結果である。質量の小さい極限では、スカラー場の振動の振幅はほぼ一定となるが、それに加えて距離に依存する小さな補正項が付く。この補正項の関数形を求められることは、解析的な手法を採る利点と言える。両極限の間の領域

では、スカラー場は外側に向かって減衰すると同時に、場の値が常にゼロとなる「節」の部分をなす。振る舞いとしては、最も興味深い質量の領域かもしれない。以上のように、スカラー場の質量とスカラーヘアの分布の関係性が明らかになった。実際にスカラーヘアがブラックホールに存在し、その分布の様相が観測から判明したならば、ダークマターの質量についての情報が得られる可能性がある。

今回はスカラー場による背景時空への反作用を無視し、ブラックホールの質量は常に一定であるとした。ダークマターが与える時空への影響や、ブラックホールへのエネルギーの流入による背景時空の変化などを正確に評価することは今後の課題である。また、ダークマターとしてスカラー場ではなくベクトル場を考えたり、Schwarzschild ではない他のブラックホール解（特に Kerr 解）のヘアの形を調べたりすることなどが、本研究の拡張可能性として挙げられる。

Reference

- L. Hui, D. Kabat, X. Li, L. Santoni & S. Wong 2019, arXiv:1904.12803 [gr-qc]
- J. D. Bekenstein 1972, Phys. Rev. D5 1239–1246
- T. Jacobson 1999, Phys. Rev. Lett. 83 2699–2702

b4

Infinite Derivative Gravity 理論における
特異点解消の構造について
東京学芸大学大学院 教育学研究科
太田溪介

Infinite Derivative Gravity 理論における特異点解消の構造について

太田溪介 東京学芸大学大学院 教育学研究科

Abstract

Infinite Derivative Gravity (IDG) 理論は、T.Biswas, E.Gerwick, T.Koivisto, A.Mazumdar (BGKM) によって提唱された修正重力理論の一つである。この理論では、Einstein-Hilbert 作用にリーマンテンソルの無限階の微分を補正項として導入することで、ゴーストフリーで曲率特異点が解消された解が得られる。本発表では、IDG の基礎と特異点解消の機構についてレビューする。また、一般にスカラー場入りの解はより激しく発散することが知られている。そこで、我々はフリースカラー場入りの弱場解を構成し、特異点が回避されることを示した。

1 Introduction

重力場を記述する最も有力な理論は一般相対性理論である。これは、重力波をはじめとして、主に IR 領域での観測によってその有効性が確認されている。一方で、Einstein-Hilbert 作用から導かれるブラックホールの真空解などは、様々な物理量が発散する特異点を必ず持つことが知られている。この発散は、量子重力理論の完成によって解決されることが期待されるが、未完成である。そこで、ボトムアップのアプローチとして、量子重力理論からインスパイアされた「もっともらしい」補正を作用に行うことで有効的に量子重力の効果を取り入れる試みがなされている。つまり、作用に補正項を加えることによって原点近傍で特異点を解消し、十分遠方では一般相対性理論の結果と一致させるのである。

その一例として、fourth order 重力理論がある。これは、補正項として 2 次の曲率量を加えた理論の一般論である。この理論ではくりこみが可能となり、量子的な特異点が除去される。しかし、古典的な発散である曲率特異点は解消されない、また Weyl ゴーストが生じてしまうなどの問題点があった。一方、6 次以上の曲率を考えた理論では、古典的な特異点が解消されることが知られているが、ゴーストが生じる問題は解消されない。これに対して、IDG 理論は超弦理論からインスパイアされて、補正として無限階の微分演算子を導入する理論である。この理論は BGKM によって 2012 年に初めて定式化され (Biswas et al. 2012)、静的球対称時空の弱場解が得られた。

この解はくり込み可能性を保持したまま古典的な特異点を解消し、かつゴーストフリーな理論となる。

本発表では、まず IDG 理論の定式化について紹介し、静的球対称解が古典的な特異点を回避していることを確認する。次に、特異点回避の物理的機構について議論する。最後に、点電荷をソースとする解と、我々が新たに得たフリースカラー場入りの解を紹介し、IDG の有効性を議論する。

2 Linearized static solution

IDG は曲率を 2 次まで含む理論である。この最も一般的な形は、微分演算子 \mathcal{O} を用いて、

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{M_p^2}{2} \left[R + R_{\mu_1 \nu_1 \lambda_1 \sigma_1} \mathcal{O}_{\mu_2 \nu_2 \lambda_2 \sigma_2}^{\mu_1 \nu_1 \lambda_1 \sigma_1} R^{\mu_2 \nu_2 \lambda_2 \sigma_2} \right] \quad (1)$$

と表される。ここに Bianchi 恒等式や Minkowski 時空での微分の可換性を適用することで、

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{M_p^2}{2} \left[R + R \mathcal{F}_1(\square_s) R + R_{\mu\nu} \mathcal{F}_2(\square_s) R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\lambda\sigma} \mathcal{F}_3(\square_s) R^{\mu\nu\lambda\sigma} \right] \quad (2)$$

を得る。ここで、 \mathcal{F}_i は任意の微分演算子である。また、 $M_p^2 = 1/G$ 、 $\square_s = \square/M_s^2$ で、 M_s は理論の有効な範囲を表すパラメータである。この作用の変分をとることで完全な場の方方程式が得られる (Biswas et al. 2013)。しかし、複雑すぎて解くことができないため、Minkowski 時空周りの摂動

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (3)$$

を考えると、場の方程式は

$$a(\square_s)\square h_{\mu\nu} + b(\square_s)h_{\alpha(\mu,\nu)}^{\alpha} + c(\square_s)\left(\eta_{\mu\nu}h_{\alpha\beta}^{\alpha,\beta} + h_{,\mu,\nu}\right) + d(\square_s)\eta_{\mu\nu}\square h + f(\square_s)\square^{-1}h_{\alpha\beta}^{\alpha,\beta}{}_{,\mu,\nu} = -16\pi G\tau_{\mu\nu} \quad (4)$$

ここで、 $\tau_{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソルである。さらに、 \mathcal{F}_i の線形結合により得られる a から f の微分演算子には拘束条件として、

$$\begin{aligned} a+b &= 0, \\ c+d &= 0, \\ b+c+f &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

が課される。ansatz として、

1. デルタ関数型ソース

$$\tau_{\mu\nu} = m\delta^{(3)}(\vec{r})\delta_{\mu}^0\delta_{\nu}^0 \quad (6)$$

2. 弱場近似計量

$$ds^2 = -(1+2\Phi(r))dt^2 + (1-2\Psi(r))dx^2 \quad (7)$$

3. ゴーストフリー

$$f=0 \leftrightarrow a=c \quad (8)$$

を置くことによって、方程式 (4) は簡単になって、

$$a(\nabla_s^2)\nabla^2\Psi = a(\nabla_s^2)\nabla^2\Phi = 4\pi Gm\delta^{(3)}(\vec{r}) \quad (9)$$

ここで、 $\Phi = \Psi$ となり、解くべき方程式は一つになった。さらに、超弦理論の文脈から $a(\square_s) = e^{-\square/M_s^2}$ を仮定する。これによって、ゴーストフリーな理論となるが、ここでは詳しくは触れない。すると、この方程式は簡単に解けて、球対称静的な解が得られる。

$$\Psi(r) = \Phi(r) = -\frac{Gm}{r} \operatorname{erf}\left(\frac{rM_s}{2}\right) \quad (10)$$

次に、古典的特異点が解消されていることを確かめていく。まず、ポテンシャルのふるまいを見ていこう。 $r \rightarrow \infty$ では、 $\operatorname{erf}(r) \rightarrow 1$ となるので、IR 領域では確かに一般相対性理論の結果を回復する。一方で、 $r \rightarrow 0$ では $\operatorname{erf}(r) \rightarrow \frac{2}{\sqrt{\pi}}r$ となりポテンシャルは有限の値、

$$\Phi(r) \sim -\frac{GmM_s}{\sqrt{\pi}} = \text{const.} = -A \quad (11)$$

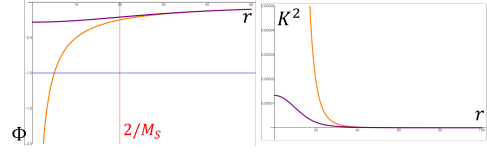


図 1: ポテンシャルとクレッチマン不変量の距離依存性 (オレンジ: 一般相対論、紫: IDG、 $G=1, m=5, M_s=0.1$ とした)

をとる。また、クレッチマン不変量は原点近傍で有限の値、 $K^2 \sim \frac{5G^2M_s^6m^2}{3\pi}$ をとる。したがって、物質分布は原点で発散するにもかかわらず、古典的な特異点が解消されることが分かった。

さて、今考えている解は弱場近似をとったものである。通常、原点付近では重力場が無視できないほど強くなるため、弱場近似は有効ではない。しかし、IDG 理論では重力ポテンシャルが原点近傍で有限の値に収まる。よって、この有限の値 A が 1 より十分小さければ、この理論は原点近傍でも有効だと考えることができる。つまり、 $m \ll \frac{\sqrt{\pi}}{M_s G} \sim \frac{M_s^2}{M_s}$ が要請される。このことから、この解を形成している星の質量の上限を推測することができる。そのために、 M_s の値を見積もろう。卓上実験によって確かめられているニュートン重力が有効な範囲は $r \sim 5.6 \times 10^{-5} \text{m} \leftrightarrow M_s > 0.004 \text{eV}$ である。よって、質量の上限は $m_{\text{upper}} \sim 10^{23} \text{kg}$ となる。これは月や地球の質量と同じオーダーである。

3 Regularized source

ここでは、特異点が解消される仕組みを考える。IDG でよく用いる場の方程式は

$$e^{-\frac{\nabla^2}{M_s^2}}\nabla^2\Phi(r) = \delta^{(3)}(\vec{r}) \quad (12)$$

である。関数 $f(x)$ の微分を f' と表すとすると、左辺は大まかに $\Phi'' - \Phi'''' + \Phi'''''' \dots$ と展開できる。 $r \rightarrow 0$ でのふるまいを考えると、左辺は r の偶数べきの係数を取り出して和をとったことになる。このような有限の値を無限に足し上げることによって原点で発散するデルタ関数のふるまいを表す。また、もう一つの解釈として、無限階の微分演算子によって重力場からみた物質分布がガウシアンになるとも言える。

実際、

$$\nabla^2 \Phi(r) = e^{\frac{V^2}{M_s^2}} \delta^{(3)}(\vec{r}) = \frac{\sqrt{\pi^3}}{8} e^{-\frac{r^2 M_s^2}{4}} \quad (13)$$

となる。ただし、6 次以上の曲率を含む理論でも有効的な物質分布がなめされて、曲率特異点が解消されることが分かっている。無限階微分の場合の解釈はここで与えたが、有限の高階微分による特異点回避の解釈に対しては、さらなる検討が必要だろう。

では、物質分布がガウシアン型になることは物理的にどのような意味を持つのか考えてみよう。ポテンシャルの勾配をとって重力を計算すると、

$$F(r) = -\text{grad}\Psi(r) = -Gm \left[\frac{M_s e^{-r^2}}{\sqrt{\pi} r} - \frac{\text{erf}(rM_s/2)}{r^2} \right] \quad (14)$$

となる。 $r \rightarrow 0$ の極限をとると、 $F \rightarrow 0$ となる。よって、原点近傍では重力がゼロになる。つまり、原点近傍で時空は平坦になっていることが期待される。このことを確かめるために、Weyl テンソルを計算すると、原点近傍で全成分が 0 に近づくことが分かる。よって、時空構造は原点近傍で局所的に平坦であると考えられる。実際に、(7)、(11)において、座標変換 $\tau = \sqrt{\frac{1-2A}{1+2A}} t$ を行うと、原点近傍での計量は、

$$ds^2 = (1+2A)(-d\tau^2 + dx^2) \quad (15)$$

となる。一般相対性理論では物質同士が近づけば近づくほど、重力は無限に大きくなっていく。いずれは時空上の 1 点に集まって特異点を形成し、Schwarzschild ブラックホールとなる。一方、IDG 理論では原点付近は重力は非常に弱くなるため、物質は十分に集まることができない。そのため、ガウシアン型の物質分布になると考えられる。結果として、星の重力崩壊によってブラックホールが形成されないことが考えられる。

実際に、IDG 理論で課される質量に対する条件 $m \ll \frac{M_p^2}{M_s}$ から、球対称弱場解がブラックホール解になっていないことが確かめられる。まず、一般相対性理論の Schwarzschild 解の event horizon は $r_{Sch} = 2\frac{m}{M_s^2}$ に形成される。これをニュートンポテンシャルと比較すると、 $r < r_{Sch}$ においては $|\Phi| > 1$ となる。よって、ブラックホールの horizon 内部ではポテンシャルが十分大きくなることが推測される。一方で、IDG 理論は $r < r_s = \frac{2}{M_s}$ の範囲で効いてくる。この二つのスケ-

ルの大小は IDG 理論に課される制約 $m \ll \frac{M_p^2}{M_s}$ より、 $r_{Sch} < r_{IDG}$ であることが分かる。よって、 $r < r_{Sch}$ の範囲であってもポテンシャルは 1 より十分小さいため、ブラックホールにはならないことが推測される。

ここで、IDG と似たモチベーションである Nicolini の研究について紹介しておこう (Nicolini et al. 2006)。Nicolini は物質分布をガウシアンに変更して、非線形なアインシュタイン方程式を解き、正規化されたブラックホール解を得た。一方、IDG 理論では無限階微分の効果によって、線形近似の範囲で物質分布が正規化される。一見、Nicolini の理論と IDG 理論が等価であるように思える。しかし、Nicolini は場の方程式の厳密解を得たという点が大きく異なっている。この違いは、Nicolini が非可換幾何学からインスパイアされたため、ダランベルシヤンの変分を考えていないことに起因する。これにより場の方程式は簡単になり、厳密解が得られる。しかし、厳密には BGKM のようにダランベルシヤンの変分も考える必要があり、その意味で Nicolini のモデルは不完全であると考えられる。実際、Nicolini の解では特定の値の角度方向の圧力が存在することが要請されたり、ガウシアン型の物質分布が存在することの物理的説明がなされたりしないなどの指摘がある。Nicolini の解は非線形方程式が解けることや、解と物質分布とに 1 対 1 対応があるという利点はあるものの、IDG 理論の方がより現実の物理を反映しているといえるだろう。

4 Various solution

IDG 理論は重力項のみに補正項を加える理論である。そのため、原点で発散するような物質分布を持つ他の解に対しても、特異点がなめされると期待される。ここでは、電磁気的な点電荷をソースとする解 (Buoninfante et al. 2018) とフリースカラー場入りの解を簡単に紹介する。特に、フリースカラー場入りの解は今回我々が初めて導いた解である。

まず、電磁気的な点電荷をソースとする解は、(4) においてエネルギー運動量テンソルを

$$\tau_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(\eta_{\rho\nu} F_{\mu\sigma} F^{\rho\sigma} - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right) \quad (16)$$

として場の方程式を解くと、弱場近似の解として

$$\begin{aligned}\Phi(r) &= -\frac{GM}{r} \operatorname{erf}\left(\frac{M_s r}{2}\right) + \frac{GQ^2 M_s}{2r} F\left(\frac{M_s r}{2}\right) \\ \Psi(r) &= -\frac{GM}{r} \operatorname{erf}\left(\frac{M_s r}{2}\right) + \frac{GQ^2 M_s}{4r} F\left(\frac{M_s r}{2}\right) \\ F_{10}(r) = E(r) &= \frac{Q}{r^2}\end{aligned}\quad (17)$$

を得る。ここで、 $F(x)$ は Dawson 関数であり、 $r \rightarrow 0$ で $F(r) \sim 1/2r$ 、 $r \rightarrow \infty$ で $F(r) \sim r$ を示す。よって、 $r \rightarrow \infty$ としたときの解は、等方座標系でとった Reissner-Nordström 解の弱場近似解に一致するので妥当である。また、物質項には変更を加えていないので、電場は原点近傍で発散する。しかし、ポテンシャルや曲率不変量は、 $r \rightarrow 0$ において有限の値に収束し、特異点が解消される。ここで、無限階の微分を導入した

$$S = \int d^4x -\frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu} \mathcal{F}(\square \sigma^2) F^{\mu\nu} + A_\mu Q \delta_0^\mu \delta^{(3)}(\vec{r}) \quad (18)$$

から得られる静電場解は次のようになる。

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi r \sigma} F\left(\frac{r}{2\sigma}\right) \quad (19)$$

この電場のふるまいは IDG で得られるメトリックの形と酷似している。よって、物質項に無限回の微分を導入することと、IDG で特異点のない解が得られたことは関連があると考えられる。しかし、厳密な対応関係はなく、現在解析中である。

次に、今回我々が構成した、球対称解を ansatz としておいたスカラー場 $\phi(r)$ 入りの解を示す。作用にフリーなスカラー場を導入して

$$S = S_{IDG} + \int d^4x \sqrt{-g} \frac{M_p^2}{2} \left[-\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right] \quad (20)$$

得られる方程式を解くと、

$$\begin{aligned}\Phi(r) &= -\frac{GM}{r} \operatorname{erf}\left(\frac{M_s r}{2}\right) \\ \Psi(r) &= -\frac{GM}{r} \operatorname{erf}\left(\frac{M_s r}{2}\right) + \frac{q^2 M_s}{2r} F\left(\frac{M_s r}{2}\right) \\ \phi(r) &= -\frac{2q}{r}\end{aligned}\quad (21)$$

となる。ここでも、 $r \rightarrow \infty$ としたときの解をみると、等方座標系でとった JNWW 解の弱場近似解に一致するので妥当である。また、スカラー場も原点に特異点をもつ。しかし、ポテンシャルや曲率不変量は、 $r \rightarrow 0$ において有限の値をとる。先行研究では、Nicolini の

手法では、特異点を回避するスカラー場入りの解は得られなかった。IDG 理論では、フリースカラー場を物質項としても見ることができるため、点電荷ソースの場合と同じように特異点が回避される。この解についての詳しい解析については、共同研究者の小池が詳しく発表する。以上より、IDG 理論では特異点をもつ物質分布に対して、かなり広い範囲で重力場の特異点を回避することができる。これは IDG 理論の利点の一つを示している。

5 Conclusion & Future works

修正重力理論の一つである IDG 理論をレビューした。線形化した場の方程式を解いて、静的球対称な解を得た。その結果得られた解は、ポテンシャルやクレッチマン不変量は原点近傍で有限の値に収束し、ソースがデルタ関数であるにもかかわらず特異点を回避する。物理的には IDG 理論では重力が原点近傍で 0 になり、時空は局所的に平坦となる。これによって、物質は十分に集まることができず、現実的な物質分布はガウス関数型になると期待される。その帰結として、得られた解がブラックホール解になっていないことが示唆される。また、ソースとして原点で発散するプロファイルをもつ点電荷やフリースカラー場を考え、その解も特異点を解消することが分かった。以上より、IDG 理論は様々な物質をソースとする重力場において特異点を解消させることができるといえる。

しかし、今回得られた解は弱場近似解である。よって、理論のふるまいを理解するためには非線形方程式を厳密に解く必要があると考える。すでに 1 + 1 次元時空で拡張した方程式がいくつか得られており、これらが比較的簡単になることが分かっている。この方程式の厳密解を得ることが今後の目標である。

Reference

- Biswas et al., Phys. Rev. Lett. 108 (2012) 031101.
- Biswas et al., Class. Quantum Gravity 31 (2013) 015022.
- Nicolini et al., Phys. Lett. B 632 (2006) 547-551.
- Buoninfante et al. Phys. Rev. D 98 (2018) 084009.

b5

初代星による非等方的な Sunyaev-Zel'dovich 効果

名古屋大学大学院 理学研究科

阿部 克哉

初代星による非等方的な Sunyaev-Zel'dovich 効果

阿部 克哉 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

初代星は赤方偏移 $z = 20$ 程度の初期の宇宙で形成される天体である。この天体は、宇宙の中性元素に対する電離・加熱源になるという点、星形成の過程で作った重元素を超新星爆発により宇宙空間に放出するという点、さらには銀河中心に存在する超大質量ブラックホール形成の種になりうるという点から、宇宙の構造形成と熱史に対して非常に重要な役割を担っていると考えられており、長年着目されている。本研究では、上記の特徴の 1 点目に着目する。初代星は、誕生後およそ 10^6 年の寿命を経て超新星爆発し、超新星残骸を周囲のガスに放出する。その超新星残骸が球状に膨張しながら周囲のガスをかき集め衝撃波を作り、シンクロトロン放射や熱制動放射が放出される。これらの放射により初代星周辺のガスは電離・加熱され、Thermal Sunyaev-Zel'dovich 効果 (TSZ 効果) と Kinetic Sunyaev-Zel'dovich 効果 (KSZ 効果) を引き起こす。本研究ではまず、初代星周辺のガスの電離・温度構造を明らかにするため、輻射輸送方程式を数値的に解いた。そして、初代星由来の TSZ 効果と KSZ 効果から生じる宇宙マイクロ波背景放射の温度に関する角度パワースペクトルの理論的シグナルを計算した。この結果、得られたスペクトルの形がシルクスケールよりも小さなスケールにて平坦になるため、小スケールにて支配的な寄与をもたらす可能性が明らかになった。このシグナルを South Pole Telescope の観測結果と比較することにより、初代星の観測可能性について議論する。

1 Introduction

現在までの様々な観測や実験によって、宇宙誕生からおおよそ 38 万年後に宇宙の晴れ上がりを迎えて以降、宇宙の暗黒時代が始まることがわかっている。宇宙の暗黒時代とは、明るく輝く天体が存在せず文字通り宇宙が暗黒に満ちている時代である。その時代に終始符を打ったと考えられているのが初代星と呼ばれる天体である。初代星は赤方偏移 $z = 20 - 30$ 程度の初期の宇宙で形成された天体で、その後の宇宙の構造形成や熱史に関わる非常に大きな 3 つの役割を持っている。1 つ目は、当時の中性であった元素をイオン化、加熱する光子を放射することである。これにより、暗黒時代に中性であったガスが電離・加熱され、宇宙の再電離期が始まる。2 つ目は、当時の宇宙にはほとんど存在していなかった重元素を初代星の形成過程段階で作ることができ、さらにそれらの作られた重元素を初代星の超新星爆発によって銀河間ガスに放出することができる。これらの放出された重元素はその後の星形成、銀河形成等のさまざまな天体の形成に非常に大きな影響を与える。3 つ目は、超大質量ブラックホールの種になりうる

ことである。銀河中心には、 $10^6 - 10^10 M_{\odot}$ まで及ぶ超大質量ブラックホールが存在していると考えられているが、その形成過程は現段階では様々なモデルがあり決着がつかない。その中でも有力な候補になっているのが、初代星から超大質量ブラックホールを形成するモデルである。このような重要な役割をはじめ、近年高赤方偏移の宇宙観測が進んでいることから初代星は宇宙論において盛んに研究が行われている。本研究では、上記 1 点目に着目する。初代星がおおよそ 10^6 年程度の寿命を迎えると、超新星爆発を起こし、自身の質量のおおよそ 0.1% 程度のエネルギーを放出する。これらの放出された超新星残骸は、ガス中を高速で膨張し、強い衝撃波を生じさせる。衝撃波によって圧縮・加熱されたガスは外側に広がっていくとともにシンクロトロン放射や熱制動放射を放出する。これらの放射により、初代星周辺のガスは電離・加熱され、それゆえ Thermal Sunyaev-Zel'dovich 効果 (TSZ 効果) と Kinetic Sunyaev-Zel'dovich 効果 (KSZ 効果) を引き起こす。本研究では、初代星によるこれら 2 つの効果を計算し、さらに生じる宇宙マイクロ波背景

放射 (CMB) の温度ゆらぎの角度パワースペクトルを理論的に求める。また、求めたシグナルと South Pole Telescope (SPT) の観測結果 (Henning, et al. (2018)) と比べることで、初代星の観測可能に関して議論する。

以下の計算では Λ CDM 宇宙論モデルを採用し、次の宇宙論パラメータを用いた (Planck Collaboration, et al. (2018))。 ($\Omega_m, \Omega_b, h, n_s, \sigma_8$)=(0.32, 0.049, 0.67, 0.97, 0.81)。

2 Methods

この章ではまず、初代星周辺のガスの電離・加熱に関わる物理と輻射輸送シミュレーション、そして初代星周辺のガスの電離・温度構造から生じる TSZ・KSZ 効果の見積もり方を説明する。さらに後半では、そこから生じる CMB 温度揺らぎの角度パワースペクトルの理論的な見積もり方を説明する。

2.1 初代星由来の放射

本研究では全ての初代星の質量 M_{fs} は $100M_\odot$ であるとし、その初代星が超新星爆発する際、 $E_{sn} = 10^{46} J$ のエネルギーに相当する超新星残骸を放出するとする。超新星爆発が起きた後は 3 つの段階が存在する (坂下&池内 (1996))。(1) 超新星爆発により放出された超新星残骸がまず球状に等速で膨張し、周囲の物質をかき集めていく。この段階は自由膨張段階と呼ばれる。(2) かき集めた物質の質量が超新星残骸の質量より大きくなると、Sedov 段階と呼ばれる断熱過程に入る。(3) その後、放射により超新星残骸の内部エネルギーが失われていくと次第に膨張は止まり、超新星残骸は周囲の銀河間物質と混ざり合って一体になってしまう。本研究では、(2) の Sedov 段階に着目する。超新星残骸がつくる衝撃波面に関しては、Sedov 段階において解析解が存在する。

$$R_{sn}(t) = 12.5 \text{ [pc]} \left(\frac{t}{10^4 \text{ yr}} \right)^{2/5} \times \left[\left(\frac{E_{sn}}{10^{44} \text{ J}} \right) \left(\frac{n_{sn}}{10^6 \text{ m}^{-3}} \right)^{-1} \right]^{1/5} \quad (1)$$

$$V_{sn}(t) = 490 \text{ [km/s]} \left(\frac{t}{10^4 \text{ yr}} \right)^{-3/5} \times \left[\left(\frac{E_{sn}}{10^{44} \text{ J}} \right) \left(\frac{n_{sn}}{10^6 \text{ m}^{-3}} \right)^{-1} \right]^{1/5} \quad (2)$$

$$T_{sn}(t) = 3.34 \times 10^6 \text{ [K]} \left(\frac{t}{10^4 \text{ yr}} \right)^{-6/5} \times \left[\left(\frac{E_{sn}}{10^{44} \text{ J}} \right) \left(\frac{n_{sn}}{10^6 \text{ m}^{-3}} \right)^{-1} \right]^{2/5} \quad (3)$$

さらに、ガス比熱比 γ を用いて衝撃波面の前後の密度に関する関係 (Rankine-Hugoniot 関係)

$$\rho_{sn} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_{outer} \quad (4)$$

と超新星残骸がかき集めた物質の質量保存則により、衝撃波面を含むシエルの厚みは

$$\Delta R_{sn}(t) = \frac{\gamma - 1}{3(\gamma + 1)} R_{sn}(t) \quad (5)$$

であることがわかる。本研究では、初代星の周りのガスは水素原子ガスのみで構成されていることを仮定するとため、 $\gamma = 5/3$ である。

次にこの衝撃波シエルから放出される熱制動放射とシンクロトロン放射の強度に関して説明する。

熱制動放射

熱制動放射とは、自由電子がイオン化原子のクーロン力によって加速されることによって生じる放射である。本研究における熱制動放射のパワー $[W/H_z/m^3]$ は以下の式で与えられる (Rybicki&Lightman (1986))。

$$P_{brems}(\nu) = \frac{2^5 \pi e^6}{3 m_e c^3} \left(\frac{2\pi}{3 k_B m_e} \right)^{1/2} T_{sn}^{-1/2} n_e n_p e^{-\frac{h\nu}{k_B T_{sn}}} \bar{g}_{ff}, \quad (6)$$

ここで、 m_e は電子の質量、 c は光速、 e は電子の電荷の大きさ、 k_B はボルツマン定数、 ν は周波数、そして \bar{g}_{ff} はガウンと因子と呼ばれる量子補正因子であり、およそ $\bar{g}_{ff} \sim 1$ である。

シンクロトロン放射

まず仮定として、超新星爆発により放出されたエネルギー E_{sn} のうち、 f_B の割合で磁場エネルギー E_B に、 f_{rel} の割合で相対論的電子のエネルギー E_{rel} に変換されるとする。さらに、磁場が一様に分布して

いることを仮定すると、磁場の強さは以下を解くことによって得ることができる。

$$f_B E_{\text{sn}} = \frac{1}{2} V_{\text{sn}} B^2 \quad (7)$$

ここで $V_{\text{sn}} = 4\pi R_{\text{sn}}(t)^2 \Delta R_{\text{sn}}(t)$ である。観測から、超新星残骸中の相対論的電子のエネルギー分布はローレンツ因子 γ_L におけるべき p_e が $p_e = 2$ のべき乗分布であることが示唆されている。よって相対論的電子の数密度 n_e は以下の通りである。

$$n_e = \int_{\gamma_{L,\min}}^{\gamma_{L,\max}} d\gamma C_e \gamma_L^{-p_e}. \quad (8)$$

ここで、 $\gamma_{L,\min}$ は中性水素のイオン化エネルギーに相当するシンクロトロン放射を放出するための値であり、 $\gamma_{L,\max}$ は電子の加速の time scale とシンクロトロン放射冷却の time scale のつりあうための値である。これらは以下の式でそれぞれ与えられる。

$$\gamma_{L,\min} = \sqrt{\frac{2 \times 13.6 \text{eV} m_e c}{0.87 \hbar e B}}, \quad (9)$$

$$\gamma_{L,\max} \approx 1.2 \times 10^6 \sqrt{\left(\frac{B}{1 \text{ Gauss}}\right)^{-1} \left(\frac{V_{\text{sn}}}{3 \times 10^6 \text{m/s}}\right)}. \quad (10)$$

相対論的電子の数分布が上記のべき乗分布で与えられる場合のシンクロトロン放射のパワーは以下の通りである (Rybicki&Lightman (1986))。

$$P_{\text{sync}}(\nu) \approx \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \alpha C_e (\hbar \omega_B) \times \Gamma\left(\frac{p_e}{4} + \frac{19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{p_e}{4} - \frac{1}{12}\right) \left(\frac{\nu}{3\omega_B}\right)^{-\left(\frac{p_e-1}{2}\right)}, \quad (11)$$

ここで、 α は超微細構造定数、 ω_B はシンクロトロン周波数、 $\omega_B = \frac{eB}{m_e c} = 1.67 \times 10^7 \frac{B}{\text{G}} \text{s}^{-1}$ である。また、 ν は、 $\nu \approx 0.435 \gamma_L^2 eB/m_e c$ によりローレンツ因子と関係づいている。よって、式 (9),(10) に対応する範囲が存在する。

2.2 輻射輸送シミュレーション

次に Sec.2.1 で述べた放射による、初代星周辺のガスの電離・加熱に関する輻射輸送シミュレーション

を説明する。本研究においては以下の 2 つの式を解くことで、1 次元の輻射輸送計算を行った。

$$\frac{dx_e}{dt} = k_{\text{HI},\gamma} - \alpha_B n_{\text{H}} x_e^2, \quad (12)$$

$$\frac{dT_{\text{gas}}}{dt} = (\gamma - 1) \frac{\mu m_p}{k_B \rho} \left(\frac{k_B T_{\text{gas}}}{\mu m_p} \frac{d\rho}{dt} + \Gamma - \Lambda \right), \quad (13)$$

ここで $x_e, \alpha_B, n_{\text{H}}, T_{\text{gas}}, \mu, m_p, \rho$ はそれぞれ電離率、再結合率 (Peebles (1993))、水素の数密度、ガス温度、平均分子量、陽子の質量、ガス質量密度であり、 $k_{\text{HI},\gamma}(R)$ は以下の式 (14) で表される、初代星由来の放射光度 L_{fs} による電離率である。

$$k_{\text{HI},\gamma}(R) = \frac{(1 - x_e(R))}{4\pi R^2} \int_{\nu_L}^{\infty} \frac{L_{\nu,\text{fs}}}{h\nu} \sigma_{\text{HI},\nu} e^{-\tau_{\nu}(R)} d\nu \quad (14)$$

ここで $R, \nu_L, \sigma_{\text{HI},\nu}, L_{\nu,\text{fs}}, \tau_{\nu}$ はそれぞれ初代星からの距離、Lyman limit 周波数、電離光子の吸収断面積、 L_{fs} の周波数ごとの光度、周波数ごとの中性水素ガスによる光学的厚みである。

また、本研究ではガス質量密度として

$$\rho_{\text{gas}} = \begin{cases} \rho_{\text{h}}, & R(t) < r_{\text{vir}} \\ \rho_{\text{IGM}}, & R(t) > r_{\text{vir}} \end{cases} \quad (15)$$

を設定した。ここで、 ρ_{h} はハローガス質量密度でハロー内の密度揺らぎは $\delta_{\text{h}} = 177$ とした。また、 ρ_{IGM} は銀河間ガスの質量密度、そして r_{vir} はハローのビリアル半径である。

さらに式 (13) の Γ は加熱率である。加熱過程として中性水素が光電離されることによる加熱のみを考慮した。

$$\Gamma = \frac{n_{\text{HI}}(R)}{4\pi R^2} \int_{\nu_L}^{\infty} \frac{L_{\nu,\text{pbh}}}{h\nu} (h\nu - h\nu_L) \sigma_{\text{HI},\nu} e^{-\tau_{\text{HI},\nu}(R)} d\nu \quad (16)$$

また式 (13) の Λ は冷却率であり、本研究では再結合放射冷却、衝突電離冷却、水素原子冷却、コンプトン冷却の 4 つを考慮し、冷却の time scale の関係から熱制動放射とシンクロトロン放射冷却は無視した (Fukugita&Kawasaki (1994))。

2.3 CMB 温度揺らぎの非等方性

Section. 2.1,2.2 によって得られた結果を用いて、初代星由来の TSZ 効果と KSZ 効果により生じる CMB 温度揺らぎの角度パワースペクトルを計算する。TSZ 効果による角度パワースペクトルの表式は以下の通りである。

$$C_l^{\text{TSZ}(1fs)} = g^2(x) \int_{z_i}^{z_{ini}} dz \frac{d^2V}{dzd\Omega} n_{fs} |y_l(z)|^2 \quad (17)$$

$$C_l^{\text{TSZ}(2fs)} = g^2(x) \int_{z_i}^{z_{ini}} dz \frac{d^2V}{dzd\Omega} P\left(\frac{l}{d(z)}\right) n_{fs}^2 |y_l(z)|^2 \quad (18)$$

ここで (1fs) は初代星 1 つが作る加熱電離領域内の相関、(2fs) は初代星間の相関、 x は $x \equiv h\nu/k_B T_e$ 、そして $g(x)$ は以下で定義される関数である。また、 $z_{ini} = 20, z_i = 10$ とし、ハローの分布は一般的な宇宙の物質分布に従うとした。

$$g(x) \equiv \frac{x}{1 - e^{-x}} \left(\frac{x}{\tanh(x/2)} - 4 \right). \quad (19)$$

また、 y_l は以下に定義される Compton y-parameter と呼ばれる物理量をフーリエ変換した値である。

$$y \equiv \frac{c\sigma_T}{m_e c^2} \int dt n_H x_e k_B T_{gas}. \quad (20)$$

また、初代星の数密度 n_{fs} は”ハロー 1 つに対し、初代星が中心に 1 つ存在する”という仮定から、Press Schechter 理論を用いて見積もることができる。

$$C_l^{\text{KSZ}(1fs)} = \frac{1}{3} v_{rms}^2 \int_{z_i}^{z_{ini}} dz \frac{d^2V}{dzd\Omega} n_{fs} |x_{el}(z)|^2 \quad (21)$$

$$C_l^{\text{KSZ}(2fs)} = \frac{1}{3} v_{rms}^2 \int_{z_i}^{z_{ini}} dz \frac{d^2V}{dzd\Omega} P\left(\frac{l}{d(z)}\right) \times n_{fs}^2 |x_{el}(z)|^2 \quad (22)$$

ここで v_{rms} は光子とハローの相対速度の二乗平均平方根、 x_{el} は x_e プロファイルをフーリエ変換した値である。

3 Results

結果は Fig. 1 の通りである。赤線が本研究のセットアップにおける KSZ 効果によるシグナル、青点線は TSZ 効果によるシグナル、黒実線は Primordial なシグナル、黒点は SPT による観測結果である。

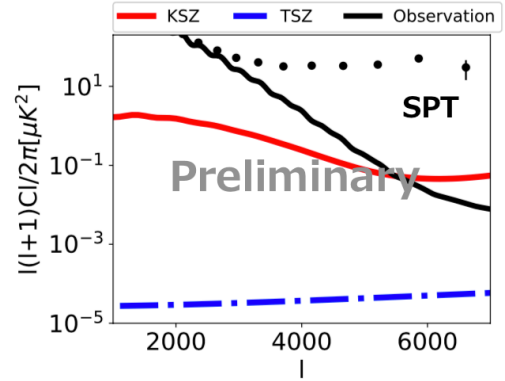


図 1: CMB 温度揺らぎの角度パワースペクトル

4 Conclusion

本研究では、初代星の超新星爆発由来の放射による周囲のガスの電離・加熱がもたらす影響を見積もり、CMB 温度揺らぎの角度パワースペクトルを計算した。その結果、シルクスケールより小さいスケールにおいてスペクトルの形が平坦になることがわかった。これは、SPT の観測結果にマッチしているゆえ初代星の存在の証明につながるかもしれない。

Acknowledgement

共同研究者の名古屋大学在籍の田代寛之氏をはじめとし、同大学の長谷川賢二氏、田中俊行氏には本研究に関する多くの知識と計算チェックをしていただいた。改めて感謝申し上げます。

Reference

- Fukugita, M., & Kawasaki, M. 1994, *mnras*, 269, 563
- Peebles, P. J. E. 1993, Princeton University Press
- 坂下志郎 & 池内了 1996, 培風館
- Rybicki, George B. & Lightman, Alan P. 1986, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics
- Planck Collaboration et al. 2018, J. A. Rubiño-Martín
- J. W. Henning, et al. 2018, *ApJ*, 852, 97

b6

21cm 線-CMB Lensing 相互相関の検出可
能性と宇宙論パラメータの制限
熊本大学大学院 自然科学教育部
田中 章一郎

21cm 線-CMB Lensing 相互相関の検出可能性と 宇宙論パラメータの制限

田中 章一郎 (熊本大学大学院 自然科学教育部)

Abstract

中性水素 (H_I) 強度マッピングは、宇宙全体の中性水素の割合を表す宇宙論パラメータ Ω_{HI} の赤方偏移進化を測定することができる。この宇宙論パラメータ Ω_{HI} は再電離後における構造形成を理解する上で重要なパラメータである。 Ω_{HI} についての制限は、Square Kilometre Array(SKA) を用いた H_I 観測により改善することができる。しかし、 H_I 観測は、銀河系内外からの非常に強力な前景放射によって妨げられ、未だ宇宙論的スケールでの観測には至っていない。また、 Ω_{HI} の制限を行う研究は多くなされてきたが、誤差が大きいことに加えて各赤方偏移ごとの制限にばらつきがみられる。そこで本研究では、前景放射の影響を減らすことができる相互相関という手法を用いた 21cm 線-CMB Lensing 相互相関の検出可能性を示した。これに加えて、Fisher 解析を用いて Ω_{HI} の制限の精度向上を行なった。

1 Introduction

近年の宇宙論的観測の目覚ましい進歩により、宇宙論パラメータは非常に高い精度で制限されている。さらなる精度の向上には、宇宙論的スケールに渡って正確なダークマター分布の測定が求められる。

再電離期後 ($z < 6$) では、Intergalactic medium(IGM) における水素のほとんどは電離されてしまうが、ごく一部は高密度領域 (主に銀河内部) に残る (Zwaan et al. 1997, 2005; Briggs 1990) したがって、中性水素 (H_I) からの 21cm 線はダークマター分布をトレースすることができる。そのため、21cm 線の観測は Square Kilometre Array(SKA) のような将来の電波観測のキーサイエンスとなっている (Santos et al. 2015)。

遠方銀河からの 21cm 線は非常に弱く、未だに直接観測にはいたっていない。加えて、銀河からの全前景放射は非常に強く、21cm 線の観測を妨げている。そのために、前景放射の除去は解決すべき重要な課題となっている。除去の他に、21cm 線と他の宇宙論探査との相互相関により前景放射の影響を回避することが期待されている。実際に、Chang et al. (2010) では Green Bank Telescope からの 21cm 線強度マップと DEEP2 optical galaxy redshift survey を用いて測定された $z < 1$ における 10,000 の銀河分布との相互相

関パワースペクトルを測定した。これにより正相関が得られ、 4σ での 21cm 線の検出を示した。

H_I 質量密度の量を表す Ω_{HI} は再電離後における銀河の特性や進化を理解するために重要なパラメータである。高赤方偏移におけるキューサーのスペクトルは damped Lyman- α によって吸収される。その吸収によって H_I の量について推定することができる。また、キューサーは広範囲に測定されることから、 Ω_{HI} は様々な赤方偏移で制限される。その上、21cm 線と銀河の相互相関によって低赤方偏移 ($z < 3.5$) においても制限されている (Padmanabhan et al. 2015)。しかし、この制限は他の一般的な宇宙論パラメータに比べてあまり良くない。

本研究で用いる cosmic microwave background(CMB)Lensing の観測量である convergence field と 21cm 線の相互相関は先行研究 Sarkar (2010) により初めて提唱された。CMB 光子は大規模構造の重力ポテンシャルによって偏向され、二次的な CMB 非等方性として現れる。この CMB Lensing は $z < 3$ での構造に影響を受けやすく、そのために再電離期の 21cm 線と良く相関する。また、Sarkar (2010) は 21cm-CMB Lensing cross-power spectrum(CPS) による 21cm 線の検出は期待できることを示した。しかし、前景放射の除去後におけるエラーに大きく寄与する熱雑音については考慮されていなかった。

そこで、本研究では現在計画中の大型電波干渉計 SKA による観測を想定し、Planck により観測された convergence field マップを用いて CPS の検出可能性を示した。これに加えて、Fisher 解析を行い宇宙における中性水素の量を表す Ω_{HI} の制限の予測を行った。

2 21cm-CMB Lensing cross correlation

convergence field(κ)により定量化される CMB Lensing は視線方向の積分として表される。

$$\kappa(\hat{\mathbf{n}}) = \frac{3}{2}\Omega_{\text{m}0} \left(\frac{H_0}{c}\right)^2 \int_0^{x_{\text{LSS}}} dx F(x)\delta(x\hat{\mathbf{n}}, z), \quad (1)$$

$$F(x) = \frac{S_K(x_{\text{LSS}} - x)S_K(x)D_+(x)}{S_K(x_{\text{LSS}})a(x)}, \quad (2)$$

$\Omega_{\text{m}0}$ は物質密度パラメータを表し、 H_0 はハッブルパラメータ、 z_{LSS} は最終散乱面の赤方偏移、 $a(z)$ はスケールファクター、 x は共同角径距離、 δ は現在の密度ゆらぎ、 D_+ は成長因子を表す。convergence field は最終散乱面から現在までの密度ゆらぎの積分として計算される。

ここで Sarkar (2010) に従い、21cm-CMB Lensing cross power spectrum(CPS) の導出を簡単に表す。始めに、球面調和展開を用いて convergence field を展開する。

$$\kappa(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{l,m}^{\infty} a_{lm}^{\kappa} Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}), \quad (3)$$

$Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}})$ は球面調和関数である。展開係数 a_{lm}^{κ} は立体角 $\omega(\hat{\mathbf{n}})$ における積分により次のように与えられる。

$$a_{lm}^{\kappa} = \int d\omega(\hat{\mathbf{n}}) \kappa(\hat{\mathbf{n}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{n}}), \quad (4)$$

$\omega(\hat{\mathbf{n}})$ は立体角である。さらに、レーリー展開を用いると

$$a_{lm}^{\kappa} = 6\pi\Omega_{\text{m}0} \left(\frac{H_0}{c}\right)^2 (-i)^l \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int_0^{x_{\text{LSS}}} dx \times F(x)\delta(\mathbf{k})j_l(kr)Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) \quad (5)$$

$\delta(\mathbf{k})$ は $\delta(\mathbf{r})$ をフーリエ変換したものであり、 $j_l(x)$ は球ベッセル関数を表す。

21cm 線の観測量である輝度温度は次のように表される。

$$T(\nu, \hat{\mathbf{n}}) = \bar{T}[1 + \delta_{\text{HI}}(z, \hat{\mathbf{n}}r_{\text{HI}})] \left(1 - \frac{T_{\gamma}}{T_S}\right) \left[1 - \frac{1+z}{H(z)} \frac{\partial \nu(z, \hat{\mathbf{n}}r_{\text{HI}})}{\partial r}\right], \quad (6)$$

T_{γ} と T_S はそれぞれ、CMB 温度、スピン温度を表す。平均輝度温度と平均中性水素率はそれぞれ以下のように書かれる。

$$\bar{T}(z) = 4.0\text{mK}(1+z)^2 \bar{x}_{\text{HI}}(z) \left(\frac{\Omega_b h^2}{0.02}\right) \left(\frac{70}{H_0[\text{km/s/Mpc}]}\right), \quad (7)$$

$$\bar{x}_{\text{HI}} = 50\Omega_{\text{HI}} h^2 \left(\frac{0.02}{\Omega_b h^2}\right), \quad (8)$$

次に、convergence field と同様に球面調和展開を行う。

$$a_{lm}^{\text{HI}} = 4\pi\bar{T}(z)(-i)^l \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k}, z) J_l(kr) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}), \quad (9)$$

$$J_l(x) \equiv \left(b - f \frac{d^2}{dx^2}\right) j_l(x). \quad (10)$$

この時、constant HI bias モデルを想定している ($\delta_{\text{HI}} = b\delta$)。式. (5)、式. (9) を使い、リンバー近似を行うことにより 21cm 線-CMB Lensing CPS が計算される。

$$C_l^{\text{HI}-\kappa} \approx \frac{\pi}{2} A(z_{\text{HI}}) b \frac{F(x(z_{\text{HI}}))}{x^2(z_{\text{HI}})} P\left(\frac{l}{r_{\text{HI}}}\right), \quad (11)$$

$$A(z) = \frac{3}{\pi} \Omega_{\text{m}0} \left(\frac{H_0}{c}\right)^2 \bar{T}(z) D_+(z), \quad (12)$$

r_{HI} は赤方偏移 z_{HI} での共同距離を表す。 $P(\mathbf{k})$ は現在のダークマター線形パワースペクトルを表し、CAMB (Lewis et al. 2000; Lewis, & Challinor 2011) を用いて計算した。

また、のちのエラー計算のために、CMB Lensing auto-power spectrum と 21cm 線 auto-power spectrum を書き表す。

式. (5) と flat sky approximation を用いることで、CMB Lensing auto-power spectrum は次のように与えられる。

$$C_l^{\kappa} \approx \frac{9}{4} \Omega_{\text{m}0}^2 \left(\frac{H_0}{c}\right)^4 \int dx \frac{F^2(x(z))}{x^2(z)} P\left(\frac{l}{x(z)}\right). \quad (13)$$

また、式. (9) と flat sky approximation により (Datta et al. 2007) 21cm 線 auto-power spectrum は次のよう

に求められる。

$$C_l^{\text{HI}}(z_{\text{HI}}) = \frac{\bar{T}^2}{\pi r_{\text{HI}}^2} \bar{x}_{\text{HI}}^2 D_+^2 \int_0^\infty dk_{\parallel} [b + f\mu^2]^2 P(k), \quad (14)$$

波数ベクトル \mathbf{k} は、大きさ $k = \sqrt{k_{\parallel}^2 + l^2/r_{\text{HI}}^2}$ である。 k_{\parallel} は視線方向の波数である。

3 Error formula

21cm 線-CMB Lensing CPS の検出可能性を予測するために、CPS のエラーを導入する。CPS のエラーは (Sarkar 2010) によって与えられる。

$$(\Delta C_l^{\text{HI}-\kappa})^2 = \frac{(C_l^{\kappa} + N_l^{\kappa})(C_l^{\text{HI}} + N_l^{\text{HI}}) + (C_l^{\text{HI}-\kappa})^2}{(2l+1)\sqrt{N_c} f_{\text{sky}} \Delta l}, \quad (15)$$

Δl は multipole l のバンドを表し、 f_{sky} は天球面における観測領域の割合である。 N_c は 21cm 線観測のチャンネル数である。式 (15) の第二項は常に初項よりも小さい。

本研究では、instrumental noise について SKA-Planck 観測を想定する。次世代の電波望遠鏡である SKA は 2020 年代に建設が計画されており、SKA-mid によって低赤方偏移 ($z < 3$) での 21cm 線を観測することが予定されている。南アフリカに建設予定である SKA-mid は 190 のアンテナからなり、single dish モードと interferometer モードとして稼働する予定である。Planck 観測のエラーについては (Planck Collaboration VI 2018) を基に算出し、SKA 観測のエラーについては (Bull et al. 2015) を基に計算し、instrumental noise を評価した。

推定される累積 Signal to Noise ratio は

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{N}\right)^2 &\equiv \sum_l \left(\frac{C_l^{\text{HI}-\kappa}}{\Delta C_l^{\text{HI}-\kappa}}\right)^2 \\ &= \sum_l \frac{(2l+1)\sqrt{N_c} f_{\text{sky}} (C_l^{\text{HI}-\kappa})^2}{(C_l^{\kappa} + N_l^{\kappa})(C_l^{\text{HI}} + N_l^{\text{HI}}) + (C_l^{\text{HI}-\kappa})^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

となる。

4 Fisher analysis

Ω_{HI} と他の宇宙論パラメータの将来の制限を推定するために Fisher 解析を行った。パラメータ p_i 、 p_j に

表 1: チャンネル数 N_c 、各赤方偏移でのバンド幅、観測可能な multipole の範囲。IF は interferometer、SD は single dish を表す。

redshift	B	N_c
$z = 0.5$	710MHz	71.0
$z = 1.5$	237MHz	23.7
$z = 2.5$	118MHz	11.8

SKA-MID (IF)	SKA-MID (SD)
$599 \leq l \leq 2000$	$8 \leq l \leq 598$
$359 \leq l \leq 2000$	$8 \leq l \leq 358$
$257 \leq l \leq 2000$	$8 \leq l \leq 256$

おける Fisher 行列は次のように計算される (Tegmark et al. 1997; Coe 2009)。

$$F_{ij} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial p_i \partial p_j} \right\rangle_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_{\text{fid}}}, \quad (17)$$

$$\ln \mathcal{L}(\mathbf{p}) = \sum_{l=l_{\text{min}}}^{l_{\text{max}}} \left[\frac{C_l^{\text{HI}-\kappa}(\mathbf{p}) - C_l^{\text{HI}-\kappa}(\mathbf{p}_{\text{fid}})}{\Delta C_l^{\text{HI}-\kappa}(\mathbf{p}_{\text{fid}})} \right]^2, \quad (18)$$

$$\mathbf{p} = (\Omega_{\text{HI}}, \Omega_c h^2, n_s, H_0)$$

\mathbf{p}_{fid} は fiducial パラメータである。パラメータのエラーは covariance 行列を用いることで評価される。covariance 行列は Fisher 行列の逆行列に対応する。

$$\sigma(p_i) = \sqrt{[\mathbf{F}^{-1}]_{ii}}. \quad (19)$$

本研究では、 Ω_{HI} を除く他の宇宙論パラメータは Planck2018 により厳しく制限されていることから、これらを prior として用いることで Ω_{HI} のよりよい制限を得ることができる。

5 Conclusion & Discussion

Fig. 1 は、SKA-mid(SD) を想定した個々の multipole モードと multipole について累積した Signal to Noise ratio(S/N) を表す。累積 S/N は、 $z=0.5$ と 1.5 で 10 に達し、 $z=2.5$ では 5 に達するだけである。これらは $l = 200$ で飽和する。SKA-mid(IF) は累積 S/N にそれ

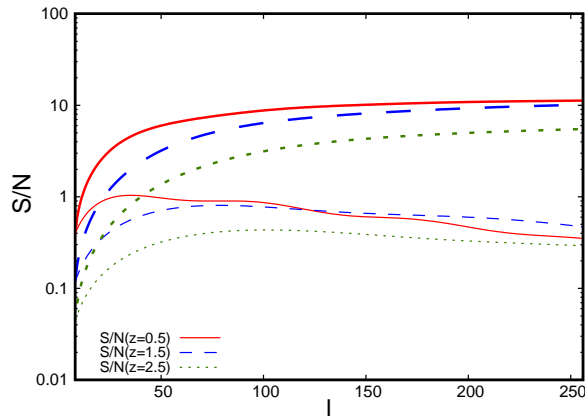


図 1: 細い線は個々の multipole モードでの S/N、太線は累積 S/N を表す。

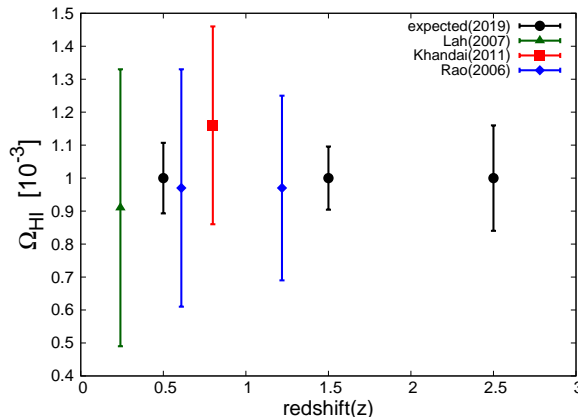


図 2: これまでの研究の Ω_{HI} 制限の結果と本研究の結果との比較。 Ω_{HI} の現在の制限は Lah et al. (2007); Khandai et al. (2011); Rao et al. (2006) から得られている。今回の予測のために、HI bias が分かっていることを想定して、 Ω_{HI} に対する 1D-Fisher 解析の結果をプロットしている。

ほど寄与しない。 Interferometer モードでは $S/N \sim 0.4$ となるだけである。この結果が示すように、21cm 線-CMB Lensing CPS の検出は SKA-mid(SD)-Planck 観測のみで達しうる。

Fig. 2 は、現在の Ω_{HI} の制限と本研究から予想される制限との比較を表す。 HI bias については他の観測から判明していることを想定しており、今回の結果は目安ではあるが 1σ において見込まれる制限である。21cm 線-CMB Lensing CPS からの制限はおお

よそ 10% の誤差で制限できることがわかった。そしてこの結果は $z = 0.5, 1.5, 2.5$ でのこれまでの制限と同等またはよりよい結果となった。

Reference

- Ando, R., Nishizawa, A. J., Hasegawa, K., Shimizu, I., & Nagamine, K. 2019, MNRAS, 484, 5389
- Bharadwaj, S., & Ali, S. S. 2004, MNRAS, 352, 142.
- Briggs, F. H. 1990, AJ, 100, 999.
- Bull et al. 2015, ApJ 803, 21 (2015) Author A. N., 2013, Journal of Improbable Astronomy, 1, 1
- Chang, T.-C., Pen, U.-L., Bandura, K., & Peterson, J. B. 2010, Nature, 466, 463, [arXiv:1007.3709]
- Coe, D. 2009, arXiv e-prints, arXiv:0906.4123.
- Datta, K. K., Choudhury, T. R., & Bharadwaj, S. 2007, MNRAS, 378, 119.
- Furlanetto, S. R., Oh, S. P., & Briggs, F. H. 2006, Phys. Rep., 433, 181.
- Khandai, N., Sethi, S. K., Di Matteo, T., et al. 2011, MNRAS, 415, 2580.
- Lah, P., Chengalur, J. N., Briggs, F. H., et al. 2007, MNRAS, 376, 1357.
- Lewis, A., Challinor, A., & Lasenby, A. 2000, Apj, 538, 473.
- Lewis, A., & Challinor, A. 2011, CAMB: Code for Anisotropies in the Microwave Background, ascl:1102.026.
- Padmanabhan, H., Choudhury, T. R., & Refregier, A. 2015, MNRAS, 447, 3745.
- Planck Collaboration, Aghanim, N., Akrami, Y., et al. 2018, arXiv e-prints, arXiv:1807.06209.
- Rao, S. M., Turnshek, D. A., & Nestor, D. B. 2006, Apj, 636, 610.
- Santos, M., Bull, P., Alonso, D., et al. 2015, Advancing Astrophysics with the Square Kilometre Array (AASKA14), 19.
- Sarkar, T. G. 2010, Journal of Cosmology and Astro-Particle Physics, Issue 02, 002.
- Tegmark, M., Taylor, A. N., & Heavens, A. F. 1997, Apj, 480, 22.
- Zwaan, M. A., Briggs, F. H., Sprayberry, D., et al. 1997, Apj, 490, 173.
- Zwaan, M. A., Meyer, M. J., Staveley-Smith, L., et al. 2005, MNRAS, 359, L30.

b7

HSC データを用いたフィラメント構造
の弱重力レンズ効果測定
名古屋大学大学院 理学研究科
近藤 寛人

HSC データを用いたフィラメント構造の弱重力レンズ効果測定

近藤 寛人 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

SDSS を始めとする大規模銀河探査から、我々の宇宙が密な領域と疎な領域が折り重なった泡状構造をなしていることが観測されている。そのうち密な領域は、球状のハローとその間をつなぐ線状のフィラメント構造から構成される。これらの密な領域は、弱重力レンズ効果を用いることでダークマターを含めた質量分布を測定することが可能である。特にハローの弱重力レンズ効果解析は、盛んに行われており、宇宙論パラメータに対する制限にも用いられている。しかしフィラメント構造における弱重力レンズ効果は、十分に研究されていない。

本研究では、Sloan Digital Sky Survey (SDSS) III/Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (BOSS) CMASS の銀河間に存在するフィラメント構造 ($z \sim 0.55$) に対してすばる望遠鏡 Hyper Suprime-Cam (HSC) first-year galaxy shape catalogue を用いて弱重力レンズ効果解析を行い、フィラメント構造からの弱重力レンズ信号を 3.9σ の優位性で検出した。また Λ CDM モデルに基づいたシミュレーションにおいても同様の解析を行い、比較することによりフィラメント構造が Λ CDM モデルの示唆する大規模構造と一致していることを確認した。本稿ではそれらの解析手法と結果について報告する。

1 導入

現在最も支持されている宇宙論モデルとして、宇宙膨張を促進する宇宙項 Λ と冷たいダークマターを含む Λ CDM モデルがある。 Λ CDM モデルに基づいた N 体シミュレーションでは、ダークマターの構造として球状のハローとその間をつなぐ線状のフィラメント構造が形成される。実際の観測では、ダークマターは光を放射しないためダークマターの構造を直接観測することはできず、内部で形成された銀河の空間分布を通して観測されてきた。

しかし、相対論的效果を考えると、ダークマター構造の背後に存在する銀河の形状は、重力場による光の経路の歪みから若干の変化が生じる。これを弱重力レンズ効果と呼び、膨大な数の銀河像を平均することで、微小な銀河像の変化を取り出し、ダークマター構造を直接的に測定することが可能になる。ハロー内のダークマター分布は、弱重力レンズ効果によって広く研究されているが、ハローと比較して質量が小さく、弱重力レンズ効果の小さいフィラメント構造においては、まだ十分に研究されていない。先行研究として、SDSS LRG 間のフィラメント構造の弱重力レンズ効果の測定 [1] があり、 $z \leq 0.5$ のフィラ

メント構造を測定している。

私たちは、より高赤方偏移の銀河である SDSS-BOSS の隣接するペアの間に存在するフィラメント構造 ($z \leq 0.7$) を Subaru Hyper Supreme-Cam (HSC) の初年度データを用いて測定する。また HSC コラボレーションにて、 Λ CDM モデルを仮定した N 体シミュレーションに基づいて作成された擬似銀河カタログにおいても同様の測定を行い、現実のダークマターフィラメント構造が Λ CDM モデルの予言と一致していることを確認する。

本稿の構成は、以下のようになっている。第 2 章では、解析に使用したカタログについて簡潔に述べる。第 3 章では、弱重力レンズ効果の測定について述べる。第 4 章において測定結果を示し、第 5 章でそれらをまとめる。

2 データ

この章では、SDSS-III/BOSS CMASS 銀河カタログからのフィラメント構造を挟んだ銀河ペアカタログ作成、背景銀河として用いた HSC の銀河形状カタログ、シミュレーションから作成された擬似銀河形

状カタログについて説明を行う。

2.1 CMASS 銀河ペアカタログ

フィラメント構造は、大質量ハローの間をつなぐようにして存在することが予測される。そのため大質量ハローに存在するであろう SDSS-III/BOSS CMASS 銀河カタログ [2] から隣接する銀河ペアを選択し、フィラメントの解析でスタックする銀河ペアカタログを作成する。

はじめに HSC 初年度データと重複する領域を取り出し、赤方偏移 $0.43 < z < 7.0$ のカットを行う。またペアの条件として、視線方向の間隔が $|\Delta\chi| < 6 h^{-1}\text{Mpc}$ かつ、投影距離が $6 h^{-1}\text{Mpc} < R < 14 h^{-1}\text{Mpc}$ であることを用いる。これらの条件は、銀河ペアが異なるハロー内に存在するとともに、フィラメントの弱重力レンズ効果測定が行える範囲であることを保証する。

結果として、HSC 初年度データ領域で 69,447 個の銀河ペアを作成し、その赤方偏移分布を図 1 に示す。

2.2 HSC 銀河形状カタログ

本研究で用いる HSC 銀河形状カタログ [3] は、HSC の第一回データリリースによるものであり、全部で 6 個の観測領域からなる。136.9 deg² の観測領域を持ち、銀河の個数密度は 21.8 arcmin⁻² である。また赤方偏移分布のピークが $z \sim 0.7$ に存在する。

2.3 擬似銀河カタログ

本研究では、フィラメント構造からの弱重力レンズ信号の理論予測及び共分散を得るために Shirasaki et al. [4] で作成された模擬銀河カタログを用いる。このカタログでは、 ΛCDM モデルに基づいたダークマター N 体シミュレーションを行い、レイトレーシングすることで弱重力レンズ効果を含めた銀河形状が作成されている。

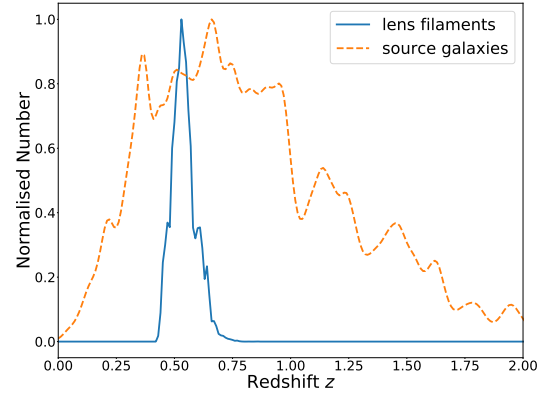


図 1: フィラメントと背景銀河の赤方偏移分布。それぞれ最大のビンで規格化してあり、弱重力レンズ効果解析に十分な背景銀河が確保されていることを示す。

3 弱重力レンズ効果測定

3.1 弱重力レンズ効果

弱重力レンズ効果は、遠方銀河から発せられた光の軌跡が手前にある物質のつくる重力場によってわずかに歪められる効果である。背景銀河像の微小な歪みの測定から、手前にある暗黒物質を含めた物質分布を再構築することが可能である。弱重力レンズ効果は、背景銀河が持つ形状と比較して非常に微小な効果であるため、個々の銀河像においては測定できないが、個々の銀河固有の楕円率がランダムな方向を向いていると仮定すると、複数の銀河の形状を平均することで、弱重力レンズ信号を測定することができる。

弱重力レンズ効果において、銀河の形状変化の測定量であるシア γ_t は、背景銀河の楕円率 $e_{t,i}$ を用いて式 (1) のように表される。

$$\gamma_t = \frac{\sum_i w_i e_{t,i}}{2\mathcal{R}(1 + \hat{m}) \sum_i w_i} \quad (1)$$

ここで w_i は各背景銀河に対するウェイト、応答係数 \mathcal{R} 、補正バイアス \hat{m} を用いる。

またフィラメントまでの距離 $D_A(z_l)$ 、背景銀河までの距離 $D_A(z_s)$ 、フィラメントと背景銀河の距離 $D_A(z_l, z_s)$ を用いて表される臨界面密度 Σ_{cr} をシ

アー γ にかけることで、質量面密度 $\Delta\Sigma$ を得る。

$$\Sigma_{\text{cr}}^{-1}(z_l, z_s) = \frac{4\pi G}{c^2} \frac{D_A(z_l) D_A(z_l, z_s)}{D_A(z_s)} \quad (2)$$

3.2 エスティメーター

本研究では、ハローの間をつなぐフィラメント構造を解析するため弱重力レンズ信号にハローの影響が生じる。フィラメントに比べてハローは大質量であるため及ぼす弱重力レンズ効果が大きく、その寄与を取り除くことが必要である。そこで Clampitt J., et al.[1]にて示された図2のようなエスティメーターを $\Delta\Sigma$ に対して用いることにより、ハローの球対称成分を含まない弱重力レンズ信号を取り出す。またエスティメーターにおける1つのピンは緑矢印で示された領域を平均したものである。

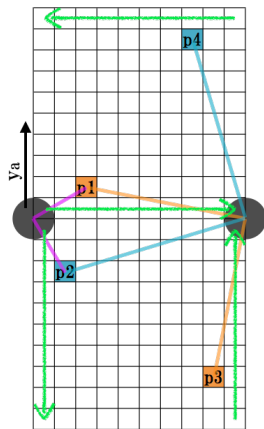


図 2: フィラメント信号測定のためのエスティメーター。両端の黒丸が CMASS 銀河を含むハローを表し、その間をつなぐようにフィラメント構造が存在する。球対称な天体の生み出すシアは、180 度対称性を持つため、図 2 における p1~p4 のように各ハローに対して 90 度となる点のペアを 2 組平均化することで打ち消すことができる。また以降の各ピンはフィラメントに沿う矢印のフィラメントからの距離で定義する。

4 結果

4.1 フィラメント信号

図 3 に CMASS 銀河ペアをスタックし、エスティメーターを用いて、フィラメントからの弱重力レンズ信号を測定した結果を示す。測定の結果 3.9σ の優位性でフィラメント構造を検出している。また理論曲線は、模擬銀河カタログを用いて今回の測定領域を 108 リアライゼーション分測定した結果を平均して求めている。観測の信号と理論曲線が不一致のように見えるが、今回の測定に用いたエスティメーターの各ピンは強く相関しているため、自由度 5 のカイ二乗検定において $\chi^2 = 8.1$ であり、p 値は 0.15 である。これはフィラメント構造において観測からの測定と Λ CDM モデルによるシミュレーションからの示唆が相反せず、フィラメント構造は、 Λ CDM モデルを支持している。

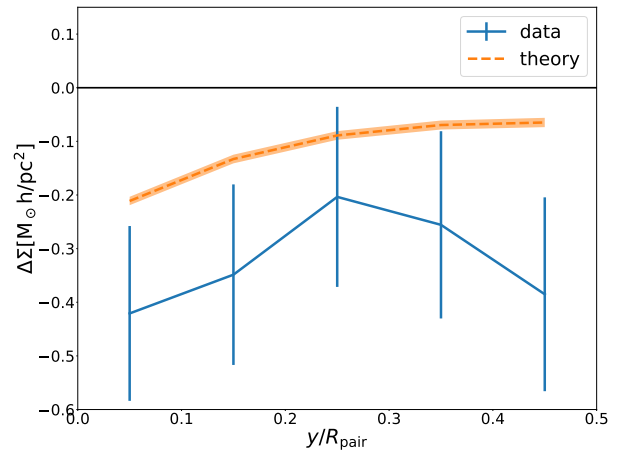


図 3: フィラメント構造の弱重力レンズ信号。実線が観測、破線がシミュレーションによる理論予測を示す。フィラメントと並行または垂直な要素を取り出しており、負の値は垂直な成分が大きいことを示す。

4.2 2D マップ

全ての銀河ペアをスタックしたシアマップを図 4 に示す。球形のハロー由来のシアの間にはフィラメント構造による鉛直方向のシアの存在が見られる。またハローから十分離れた位置でもハローペア取り

巻くようなシアアが存在しており、ペアとして取り出したハローと異なる他のハローが影響していることが考えられる。

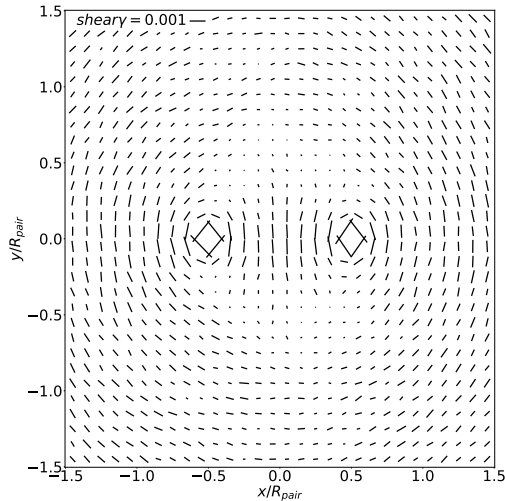


図 4: 銀河ペアスタック後のシアーマップ。

シアアは物質密度を示すコンバージェンスに変換可能である [5]。ここではシアアの畳み込みから作成したコンバージェンスマップを図 5 に示す。コンバージェンスマップでは、フィラメント構造がハローの半径と同程度まで見られる。これは実際のフィラメント構造が糸のように細くまとまった構造ではなく、幅を持った広がりのある構造であることを示唆している。

5 要約

本研究では、HSC の銀河形状カタログを用いて SDSS-III/BOSS CMASS の銀河ペア間に存在するフィラメント構造を解析し、 3.9σ の優位性でフィラメント構造を検出した。 Λ CDM モデルに基づいたシミュレーションと観測からの測定を比較では、フィラメント構造が Λ CDM モデルを支持することを確認した。またフィラメント構造は、幅を持った広がりのある構造である。

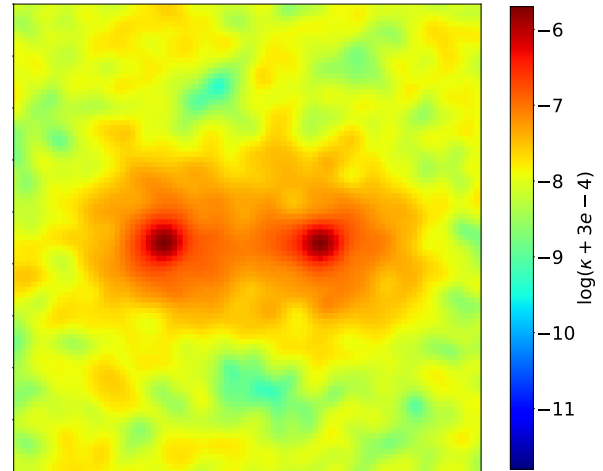


図 5: 銀河ペアスタック後のコンバージェンスマップ。

Reference

- [1]Clampitt J., et al., 2016, MNRAS, 457.2391
- [2]Alam S., et al., 2015, ApJS, 219, 12
- [3]Mandelbaum R., et al., 2018a, PASJ, 70, S25
- [4]Shirasaki M., et al., 2017, MNRAS, 470, 3476
- [5]Miyazaki S., et al., 2015, Astrophys. J., 807, 22

b8

ヘリカルな磁場生成モデルにおける重
力波生成

早稲田大学大学院

岡野 創

ヘリカルな磁場生成モデルにおける重力波生成

岡野 創 (早稲田大学大学院)

Abstract

我々の宇宙には、中性子星や銀河をはじめとした、磁場をもつ物体が多数存在する。磁場の強さは磁場の相関長 (スケール) が小さいほど大きくなり、中性子星では 10^{12} G を超え、銀河団では 10^3 G であるなど多岐にわたる。そして、2010 年の TeV Blazar の観測から Void の宇宙にも磁場が存在し、100Mpc あたりに 10^{16} G を超える磁場があることがわかった。これは種磁場とよばれ、この磁場がプラズマの運動などで銀河の磁場程度まで増幅されたと言われている。種磁場の起源は初期宇宙、特にインフレーションにあると考えられ、2010 年の観測後、様々な磁場生成モデルが考えられてきた。ところが 2014 年にインフレーションのみで観測を満たす磁場は生成できないことが証明され、以降はインフレーションだけでなく、再加熱も利用した磁場生成が議論されるようになった。また、観測結果とシミュレーションとの比較から、宇宙磁場はヘリカルであることが示唆されている。そこで私は、初期宇宙磁場の生成機構としてインフレーション期から再加熱期にかけてヘリカルな磁場を生成するモデルに着目する。このモデルでは、宇宙磁場の観測下限 1Mpc あたりで $> 10^{-16}$ を上回る磁場の生成が可能であり、同時に作られた電場は再加熱時に十分弱められる。ここでは、宇宙初期に増幅された電磁場から作られる重力波のパワースペクトルを計算し、重力波干渉計による直接観測の可能性を検討する。

1 Introduction

2010 年のガンマ線望遠鏡による観測により、我々の宇宙には銀河や天体のない“空の”領域にも磁場 (10-16G) が大スケール (1Mpc) に存在することが示唆された。大スケールの揺らぎの生成はインフレーションによって生成できるが、電磁場はスケール対称性をもっており、一様等方的な時空膨張では揺らぎの増幅ができない。そのため、なんらかの方法で電磁場のスケール対称性を破ってやる必要がある。しかし、素粒子標準模型の枠組みではそのような結合は存在しない。そこで、インフレーション中において素粒子標準模型を超えた枠組み (BSM) で電磁場生成が行われたと考えられる。(ビッグバン以降は電磁場のラグランジアンとしては標準模型が正しいと考えられるので、新たに導入された BSM 結合はインフレーションが終わればなくならなければならない。) BSM 結合を導入し、磁場生成について言及したものとして電磁場の運動項とスカラー場を結合させたモデルがある。この結合は現象論的にスケールファクタのパワーローで表されるとすると電磁場のスケール対称性を破る。結果、大スケールかつ観測下限を超える磁場生成が可能だと考えられたが、以下の理由をもって棄却された。上記の観測下限を満たすような磁場をインフレーションで生成すると同時に、より強力な電場も生成されてしまい、電磁場のエネルギー密度が非常に大きくなってしまふ。このモデルにおいて電磁場は揺らぎとして扱われ、インフラトンのダイナミクスに影響を与えないという近似の下で生成している。従って、電磁場のエネルギー密度がインフラトンのエネルギー密度と比べて無視できなくなればそれは矛盾である。一方で電磁場が時空のダイナミクスに影響を与えないという条件を満たそうすると十分な磁場生成を行えない。観測下限を超えるという制限と、バックグラウンドへのバックリアクションがないという条件が相反しているというのはこのモデルに限らず様々なモデルで問題視

されてきた。そこでインフレーションだけでなく、インフレーション以降にも磁場生成を起こすというモデルが考案され始めた。また、近年では宇宙磁場がヘリシティをもっていることが示唆されるようになったため、磁場生成モデルはパリティ対称性を破り、生成される磁場がヘリカルになると考えられる。ヘリカルな磁場が作られれば、インフレーション後の再加熱時に逆カスケードを用いて小スケール磁場のエネルギーを大スケール磁場に受け渡すことができる。するとバックリアクションを無視できる近似を成立させつつ大スケールの強磁場を生成できることが示された。(2). このモデルでは電磁場運動項との BSM 結合がインフレーション終了と共に定数 (=1) になること、再加熱が瞬間的に行われるなどの仮定が置かれている。これらの仮定に対して、(3) ではインフレーション期だけでなくインフラトン振動期でも BSM 結合がスケールファクタのパワーローで表され、再加熱時の電磁場の振る舞いについても言及した。インフレーション後のインフラトン振動期において荷電粒子との相互作用をモデル化することで電場だけを拡散させることで電磁場の振動を止め、磁場生成を自然に停止させている。

この集録の構成としては、2 章で (3) のモデル、及び生成されるヘリカルな磁場、電場についての説明を与え、3 章で電場から生成される重力波について言及し、輻射優勢期におけるパワースペクトルを確認する。4 章では結論及び今後の展望について言及する。

2 helical magnetogenesis model

考える作用は以下で与えられる.

$$S = \int d\eta d^3x \sqrt{-g_\eta} \left[\frac{M_{pl}^2}{2} R - \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi) - \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - U(\chi) - \frac{1}{4} I^2(\chi) \left(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \gamma \frac{\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{2\sqrt{-g}} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \right) \right] \quad (2.1)$$

このうちバックグラウンドで効いてくるのは

$$S = \int d\eta d^3x \sqrt{-g_\eta} \left[\frac{M_{pl}^2}{2} R - \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi) \right] \quad (2.2)$$

のみである. このうち, 平坦なドジッター膨張を時空の解として, その周りでの摂動として spectator 場と電磁場を考えている. Spectator 場の運動は解かないが, 電磁場の運動項との結合は次のように与えられているものとする.

$$I(\eta) = \begin{cases} \left(\frac{a_i}{a_s} \right)^{-n} & (a < a_i) \\ \left(\frac{a(\eta)}{a_s} \right)^{-n} & (a_i < a < a_s) \\ 1 & (a_s < a) \end{cases} \quad (2.3)$$

ここで

$$\eta = \begin{cases} -\frac{1}{aH_{inf}} \propto a^{-1} & (a < a_e) \\ \frac{2}{aH} \propto a^{1/2} & (a_e < a < a_r) \end{cases} \quad (2.4)$$

である. この仮定の元で, 電磁場揺らぎの運動方程式を書き下すと

$$\begin{aligned} (\partial_\eta^2 + k^2)(I_i A_\pm^{BD}) &= 0 \quad (a < a_i) \\ \left(\partial_\eta^2 + k^2 \pm 2\xi \frac{k}{\eta} - \frac{n(n-1)}{\eta^2} \right) (IA_\pm^{inf}) &= 0 \quad (a_i < a < a_e) \\ \left(\partial_\eta^2 + k^2 \mp 4\xi \frac{k}{\eta} - \frac{2n(2n+1)}{\eta^2} \right) (IA_\pm^{osc}) &= 0 \quad (a_e < a < a_s) \\ (\partial_\eta^2 + k^2) A_\pm^{fin} &= 0 \quad (a_s < a) \end{aligned} \quad (2.5)$$

ここから各時刻における磁場のパワースペクトルを書くと,

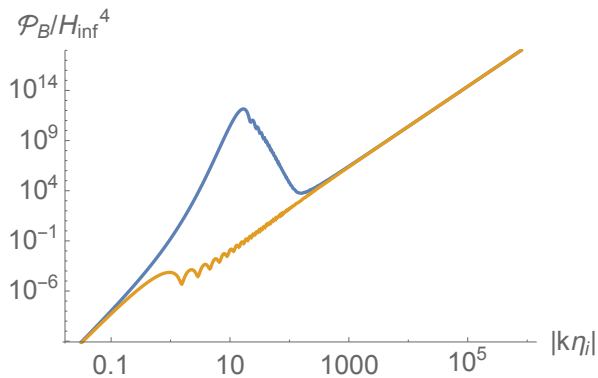


Fig 1: $a = 10a_i$ の時の磁場のパワースペクトル

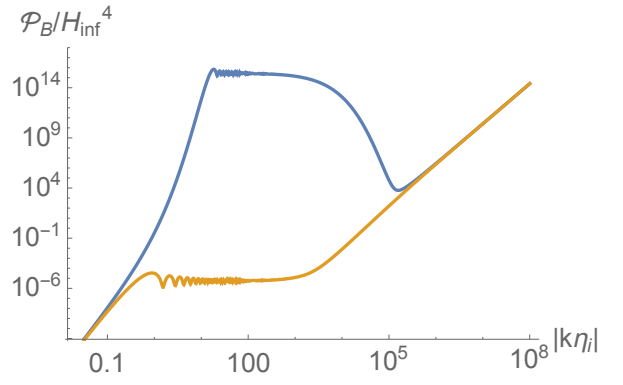


Fig 2: $a = 10^4 a_i$ の時の磁場のパワースペクトル

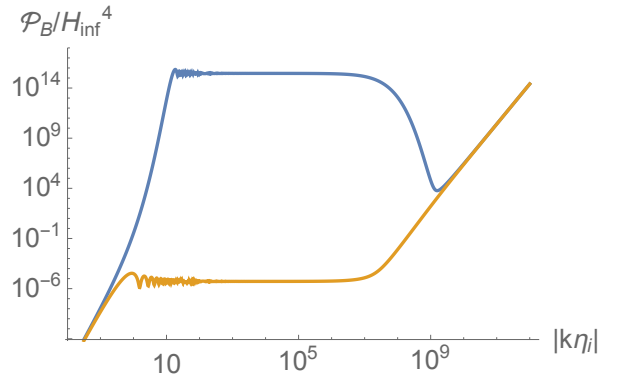


Fig 3: $a = 10^8 a_i$ の時の磁場のパワースペクトル

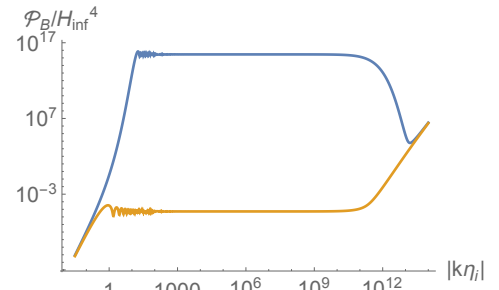


Fig 4: $a = a_e$ の時の磁場のパワースペクトル

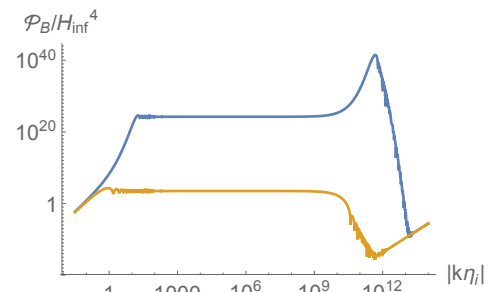


Fig 5: $a = 10^3 a_i$ の時の磁場のパワースペクトル

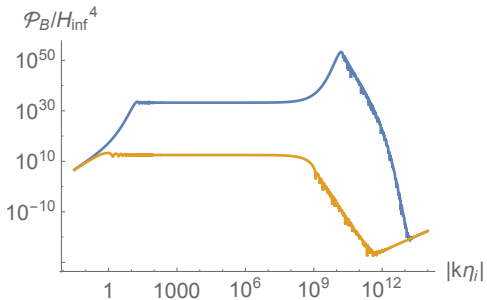


Fig 6: $a = 10^6 a_i$ の時の磁場のパワースペクトル

またこの時の電場のパワースペクトルはすべて磁場より大きくなり、

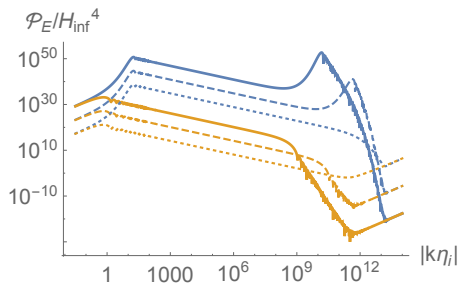


Fig 7: oscillation 中の電場のスペクトル

である。

3 電場からの重力波

図を見ると電場のパワースペクトルの方が大きいので、重力波が出るとしたら電場からである。そのうち、大スケールからの寄与と、小スケールからの寄与が考えられる。電場をソースとした重力波の運動方程式は

$$S = \int d\eta d^3x \sqrt{-g} \left[\frac{M_{pl}^2}{2} R - \frac{1}{4} I^2(\eta) \left(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \gamma F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \right) \right] \quad (3.1)$$

の 2 次摂動を考えると、

$$\begin{aligned} & \tilde{h}_{\mathbf{k}}''^{(\lambda)}(\eta) + 2\mathcal{H}\tilde{h}_{\mathbf{k}}'^{(\lambda)}(\eta) + k^2\tilde{h}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}(\eta) \\ &= \frac{2I^2(\eta)}{M_{pl}^2 a^2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} A'_i(\eta, \mathbf{q}) A'_j(\eta, \mathbf{k} - \mathbf{q}) e_{ij}^{(\lambda)}(-\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

のように与えられる。ここからスペクトルは

$$\begin{aligned} & \langle \tilde{h}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}(\eta) \tilde{h}_{\mathbf{k}'}^{(\lambda)}(\eta) \rangle \\ &= \frac{1}{2M_{pl}^4} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \\ & \times \sum_{\alpha, \beta} \int d^3p \left| \int d\eta' \frac{I^2(\eta')}{a^2(\eta')} G_k(\eta, \eta') A'_\alpha(\eta', -\mathbf{p}) A'_\beta(\eta', \mathbf{k} + \mathbf{p}) \right|^2 \\ & \quad \times \left(1 - \alpha \lambda \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \right)^2 \left(1 + \beta \lambda (\widehat{\mathbf{k} + \mathbf{p}}) \cdot \hat{\mathbf{k}} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

のようにして計算できる。ここから大スケールからの寄与を計算してパワースペクトルを求めると、

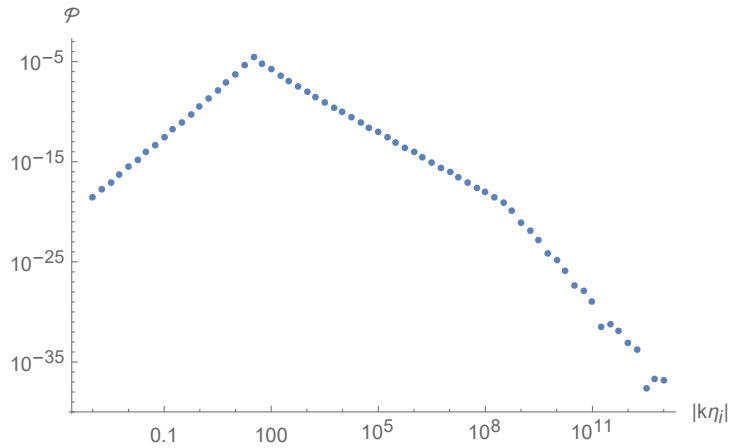


Fig 8: 正の偏光からの重力波パワースペクトル

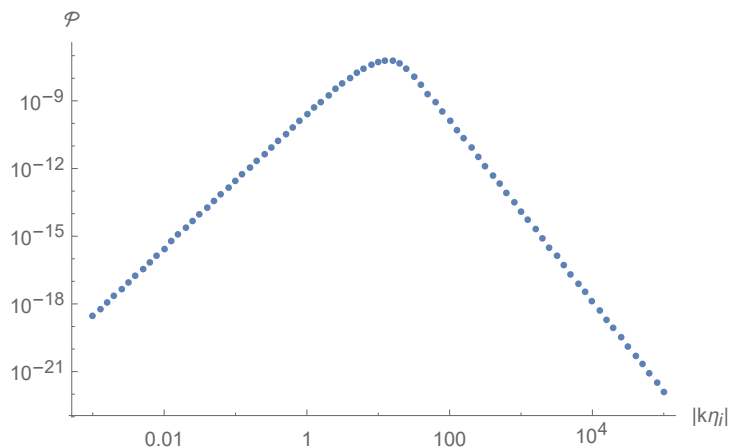


Fig 9: 負の偏光からの重力波パワースペクトル

これを見るとたしかに重力波はヘリカルになっている。小スケール側においては horizon 直下になっているので superhorizon 近似も subhorizon 近似も使えない。よってうまい fitting function を考える必要がある。

4 今後の発展

ヘリカルな電磁場生成モデルからは確かにヘリカルな重力波が得られた。現段階では小スケール側からの寄与を計算しきれていないので、良い fitting 関数を用意してスペクトルを計算する必要がある。また、それが重力波干渉計の観測に引っかけられるかを考察しなければならない。

Reference

Andrii Neronov, & Ievgen Vovk 2010, Science, 2010, 328, 73

Chiara Caprini,& Lorenzo Sorbo

Tomohiro Fujita, & Ruth Durrer 2019, arXiv:astro-ph.CO/1904.11428

Tomohiro Fujita, Ruth Durrer, "Scale-invariant Helical Magnetic Fields from Inflation"[arXiv:astro-ph.CO/1904.11428]

c2

Modeling scalar fields consistent with
positive mass

片桐 拓弥

立教大学大学院 理学研究科

Modeling scalar fields consistent with positive mass

片桐 拓弥 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

現在の宇宙の加速膨張を説明する試みのひとつとして、一般相対論を拡張した修正重力理論が多く提案されている。時空の全エネルギーの下限の存在を保証する正エネルギー定理の成立の可否は、修正重力理論の構築に向けて一定の指導原理となりうるだろう。また、それらの理論における重力場の方程式の解の唯一性(多様性)を調べることは、理論における宇宙モデルに強い制限を与える点で重要である。本講演では、修正重力理論のひとつであるスカラー・テンソル理論の特別なクラスにおいて正エネルギー定理が成立する条件を調べた(M. Nozawa and T. Shiromizu, 2014)をレビューしたのち、その結果を応用してスカラー場が定常な場合において至るところに時間的な Killing ベクトルが存在する時空は Minkowski 時空に限られることを示す。

1 Introduction

系の全エネルギーに対する下限の存在は、系の安定性を保証する最も基本的な要請である。下限が存在しない場合、エネルギーは際限なく負の値を取ることが可能となる。これは、系の不安定性を意味する。

一般相対論では等価原理により重力場のエネルギーを局所的に定義できない。しかし、時空が漸近的に平坦な場合については全エネルギーの定義が可能である。このときに定義されるエネルギーを Arnowitt-Deser-Misner(ADM) エネルギーと呼ぶ。正エネルギー定理(R. Schon et al, 1981)(E. Witten, 1981)によると、物質場の局所的なエネルギーが非負であるならば ADM エネルギーは非負であり、Minkowski 時空に限って 0 となる。したがって、正エネルギー定理は時空の全エネルギーの下限の存在を保証するものであり、一般相対論を含む重力理論の安定性を示すひとつの指針となる。

近年、宇宙の後期加速膨張を説明する試みのひとつとして、一般相対論を拡張した修正重力理論が盛んに議論されている。広く拡張された理論の制限は観測事実との整合性から行われる場合が多く、超重力理論を始めとした基礎理論との整合性については理解に乏しい。また、正エネルギー定理は、多くの超重力理論においてその成立が証明されている。以上の観点から、正エネルギー定理の成立の可否は修正重力理論の構築にあたって一定の指導原理となり

うるだろう。

正エネルギー定理は、「至るところで時間的な Killing ベクトルが存在する真空 Einstein 方程式の解は、Minkowski 時空に限られる」と主張する Lichnerowicz 定理の証明に適用できる。さらに、「真空 Einstein 方程式の静的ブラックホール解は、Schwarzschild 解に限られる」ことを示す静的ブラックホールの唯一性定理の証明も可能にする。これらの定理は、宇宙における解を強く制限する点で非常に重要である。

本講演では、はじめに正エネルギー定理が成立する修正重力理論が満たすべき条件を議論した(M. Nozawa and T. Shiromizu, 2014)をレビューする。ただし、ここでいう修正重力理論とはある種のスカラー・テンソル理論とする。次に、この結論を応用して、重力場の方程式の解のうち、至るところで時間的な Killing ベクトルが存在する時空は Minkowski 時空に限られることを示す。本講演で与える結論はスカラー場が存在する場合でも Lichnerowicz 定理が成立可能であることを示す。

2 正エネルギー定理

正エネルギー定理の証明には、多脚場形式に基づく Riemann-Cartan 時空を用いる(E. Witten, 1981)。すなわち、局所慣性系において Dirac spinor が存在

し、これによって捻率は 0 ではない値を取る。この形式で表される重力理論は一般座標変換と局所 Lorentz 変換に対して不変であり、超重力理論で用いられる幾何学である。

多脚場 $e_{\mu}^{\hat{\alpha}}$ を、次を満たすように定義する:

$$g_{\mu\nu} = e_{\mu}^{\hat{\alpha}} e_{\nu}^{\hat{\beta}} \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \quad (1)$$

ここで、 $\mu, \nu, \dots = 0, 1 \dots d$ は $(d+1)$ 次元時空の計量の添字を表し、ハットのついた添字は時空の接空間である Minkowski 時空の計量の添字を表す。次に、Dirac spinor ϵ に対する全共変微分

$$\mathcal{D}_{\mu}\epsilon = (\nabla_{\mu} + \mathcal{A}_{\mu})\epsilon \quad (2)$$

を定義する。ここで、 ∇_{μ} は Levi-Civita の共変微分を表し、 \mathcal{A}_{μ} はスピン接続を表す。また、ガンマ行列 γ^{μ} は次の Clifford 代数

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu} \quad (3)$$

に従う。

次に、Nester テンソル (J. A. Nester, 1982)

$$N^{\mu\nu} := -i(\bar{\epsilon}\gamma^{\mu\nu\rho}\mathcal{D}_{\rho}\epsilon - \overline{\mathcal{D}_{\rho}\epsilon}\gamma^{\mu\nu\rho}\epsilon) \quad (4)$$

を定義する。ここで、 $\gamma^{\mu\nu\rho} = \gamma^{[\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho]}$ である。また、 $\bar{\epsilon} = i\epsilon^{\dagger}\gamma^0$ は Dirac 共役であり、 ϵ^{\dagger} は ϵ の Hermitian 共役を表す。また、 $\overline{\mathcal{D}_{\rho}\epsilon} = i(\mathcal{D}_{\rho}\epsilon)^{\dagger}\gamma^0$ である。(4) 式を用いることで、ADM エネルギーと運動量の和 P は

$$P = \int_{S_{\infty}} N^{\mu\nu} dS_{\mu\nu} \quad (5)$$

と書ける。ここで、 S_{∞} は空間的無限遠における $(d-1)$ 次元超曲面を表す。次に、Gauss の定理を用いることで

$$\int_{S_{\infty}} N^{\mu\nu} dS_{\mu\nu} = 2 \int_{\Sigma} \nabla_{\mu} N^{\mu\nu} n_{\nu} d\Sigma \quad (6)$$

を得る。ここで、 Σ は任意の d 次元空間的超曲面を表し、 n^{μ} は Σ の未来向き単位法線ベクトルを表す。

(6) 式右辺の被積分関数を具体的に計算することで、

$$\begin{aligned} \nabla_{\nu} N^{\mu\nu} &= 2i\overline{\mathcal{D}_{\rho}\epsilon}\gamma^{\mu\nu\rho}\mathcal{D}_{\nu}\epsilon - G^{\mu}_{\nu}V^{\nu} \\ &\quad - \frac{i}{2}\bar{\epsilon}(\overline{\mathcal{F}_{\nu\rho}}\gamma^{\mu\nu\rho} + \gamma^{\mu\nu\rho}\mathcal{F}_{\nu\rho})\epsilon \\ &\quad - i\bar{\epsilon}(\overline{\mathcal{A}_{\nu}}\gamma^{\mu\nu\rho} - \gamma^{\mu\nu\rho}\mathcal{A}_{\nu})\mathcal{D}_{\rho}\epsilon \\ &\quad + i\overline{\mathcal{D}_{\rho}\epsilon}(\overline{\mathcal{A}_{\nu}}\gamma^{\mu\nu\rho} - \gamma^{\mu\nu\rho}\mathcal{A}_{\nu})\epsilon \end{aligned} \quad (7)$$

を得る。ここで、 $V^{\mu} = i\bar{\epsilon}\gamma^{\mu}\epsilon$ であり、場の強さ

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = 2(\nabla_{[\mu}\mathcal{A}_{\nu]} + \mathcal{A}_{[\mu}\mathcal{A}_{\nu]}) \quad (8)$$

と、 $\overline{\mathcal{A}_{\mu}} = \gamma^0\mathcal{A}_{\mu}^{\dagger}\gamma^0$ 、 $\overline{\mathcal{F}_{\mu\nu}} = \gamma^0\mathcal{F}_{\mu\nu}^{\dagger}\gamma^0$ である。

(7) 式右辺の 0 成分が非負であることを示すことで、ADM エネルギーが非負であることを証明できる。ここで、Dirac spinor ϵ に対して、次のゲージ条件 (Witten 方程式)

$$\gamma^{\hat{i}}\mathcal{D}_{\hat{i}}\epsilon = 0 \quad (9)$$

を課す。ここで、 $\hat{i}, \hat{j}, \dots = 1, 2 \dots d$ である。(9) 式を満たす ϵ の存在は、漸近的 Minkowski/Anti-de Sitter 時空において証明されている (T. Parker et al, 1982)。

(9) 式を用いると、(7) 式右辺の第一項の 0 成分は

$$2i\overline{\mathcal{D}_{\rho}\epsilon}\gamma^{0\nu\rho}\mathcal{D}_{\nu}\epsilon = 2g^{ij}(\mathcal{D}_i\epsilon)^{\dagger}(\mathcal{D}_j\epsilon) \geq 0 \quad (10)$$

となり、非負であることがわかる。次に、(7) 式右辺の第四項、第五項は符号を操作できない項であるため、これらが消えるように

$$\overline{\mathcal{A}_{\nu}}\gamma^{\mu\nu\rho} = \gamma^{\mu\nu\rho}\mathcal{A}_{\nu} \quad (11)$$

とする。このとき、(7) 式は

$$\nabla_{\nu} N^{\mu\nu} = 2i\overline{\mathcal{D}_{\rho}\epsilon}\gamma^{\mu\nu\rho}\mathcal{D}_{\nu}\epsilon - G^{\mu}_{\nu}V^{\nu} + S^{\mu} \quad (12)$$

と書ける。ここで、

$$S^{\mu} := -i\bar{\epsilon}\gamma^{\mu\nu\rho}\mathcal{F}_{\nu\rho}\epsilon \quad (13)$$

である。

$\mathcal{A}_{\mu} = 0$ とすることで、一般相対論の場合に帰着する。このとき、 $\mathcal{D}_{\mu} = \nabla_{\mu}$ 、 $S^{\mu} = 0$ となる。また、物質場が dominant energy condition を満たすとき、Einstein 方程式を通して (12) 式右辺の第二項は非負であることが示される。このように、一般相対論においては、正エネルギー定理が成立していることがわかる。

3 スカラー・テンソル理論における正エネルギー定理

次のスカラー・テンソル理論を考える:

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [R + 2K(\phi, X) + 2\mathcal{L}_{\text{matter}}] \quad (14)$$

ここで、 ϕ は実スカラー場であり、 $X := -\frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi$ である。さらに、 $\mathcal{L}_{\text{matter}}$ は物質場の Lagrangian を表す。(14) 式より、重力場の方程式

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(\phi)} + T_{\mu\nu}^{(\text{matter})} \quad (15)$$

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = K_X \nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi + Kg_{\mu\nu} \quad (16)$$

と、スカラー場の運動方程式

$$\nabla^\mu(K_X\nabla_\mu\phi) + K_\phi = 0 \quad (17)$$

を得る。ここで、 $K_X = \partial_X K$ 、 $K_\phi = \partial_\phi K$ である。

次に、スピン接続とスカラー場の関係を

$$A_\mu = W(\phi)\gamma_\mu \quad (18)$$

と仮定する。これにより、(12) 式は

$$\begin{aligned} \nabla_\nu N^{\mu\nu} = & 2i\overline{\mathcal{D}}_\rho\epsilon\gamma^{\mu\nu\rho}\mathcal{D}_\nu\epsilon - T_\nu^{\mu(\text{matter})}V^\nu \\ & + i\delta\bar{\lambda}\gamma^\mu\delta\lambda + \Delta V^\mu \end{aligned} \quad (19)$$

と書ける。ここで、

$$\delta\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{K_X}\gamma^\mu\nabla_\mu - \frac{4W_\phi}{K_X} \right] \epsilon \quad (20)$$

$$\Delta = XK_X - K - \frac{8W_\phi^2}{K_X} + 12W^2 \quad (21)$$

であり、 $\delta\bar{\lambda} = i(\delta\lambda)^\dagger\gamma^0$ 、 $W_\phi = \partial_\phi W$ である。ここで、 $K_X \geq 0$ としたが、スカラー場に null energy condition を課したことに対応する。

(19) 式右辺第一項の 0 成分は (10) 式より非負であり、第二項の 0 成分は物質場に dominant energy condition を課せば非負である。また、第三項の 0 成分は

$$\begin{aligned} i\delta\bar{\lambda}\gamma^0\delta\lambda = & (\delta\lambda)^\dagger\delta\lambda \\ \geq & 0 \end{aligned} \quad (22)$$

となり、非負である。第四項の 0 成分は符号を操作できない項であるため、0 とする。すなわち、

$$XK_X - K - \frac{8W_\phi^2}{K_X} + 12W^2 = 0 \quad (23)$$

は、正エネルギーが成立するための条件である。

(23) 式より、次のふたつの条件

$$K_{XX} = 0 \quad , \quad XK_X^2 + 8W_\phi^2 = 0 \quad (24)$$

を得る。 $K_{XX} = 0$ より、

$$K(\phi, X) = X - U(\phi) \quad , \quad U(\phi) = 8W_\phi^2 - 12W^2 \quad (25)$$

を得る。これはカノニカルなスカラー場に対応する。また、 $XK_X^2 + 8W_\phi^2 = 0$ より、 $X > 0$ のとき

$$K = \text{const.} \quad , \quad W = \text{const.} \quad (26)$$

を得る。この結果は、負の宇宙項を持つ場合に対応するので膨張宇宙解は存在しない。また、 $X < 0$ のとき、

$$K = 4\sqrt{2}W_\phi(-X)^{1/2} + 12W^2 \quad (27)$$

を得る。ここで、 $\phi = \phi(t)$ の場合は $X = \frac{1}{2}(\partial_t\phi)^2 > 0$ となるため、 ϕ が一様等方である解は除外される。

次に、Minkowski 時空のときに ADM エネルギーは 0 となることを示す。(19) 式より $\mathcal{D}_i\epsilon = 0$ 、 $\delta\lambda = 0$ 、 $T_\nu^{\mu(\text{matter})} = 0$ のとき、ADM エネルギーは 0 となる。このとき、

$$[\partial_i + \mathcal{A}_i, \partial_j + \mathcal{A}_j]\epsilon = \frac{1}{4}R_{ij\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\epsilon \quad (28)$$

より、 $R_{ij\mu\nu} = 0$ である。さらに、時間一定面の変形により

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = 0 \quad (29)$$

が成り立つ。したがって、ADM エネルギーを 0 にする時空は Minkowski 時空であることが示された。以上により、(11) 式と (18) 式を満足する (14) 式の重力理論において、正エネルギー定理が成立する条件として (23) 式が得られた。

4 一般化された Lichnerowicz 定理

至るところに時間的な Killing ベクトル ξ^μ が存在する漸近的に平坦な時空の場合、ADM エネルギー M は次のように書ける：

$$\begin{aligned} M = & - \int_{\partial\Sigma} \nabla^\mu\xi^\nu dS_{\mu\nu} \\ = & -2 \int_{\Sigma} R_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu d\Sigma \end{aligned} \quad (30)$$

ここで、右辺一行目から二行目の式変形には Gauss の定理を用いた。また、空間的超曲面 Σ は ξ^μ に直交するように選んだ。

(30) 式右辺の被積分関数は、(15) 式より

$$R_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu = K_X(\partial_t\phi)^2 + \frac{2}{1-d}(-XK_X + K)g_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu \quad (31)$$

となる。ここで、物質場は存在しないものとした。(31) 式右辺第二項は、スピン構造を持たない理論 ($W = 0$) に対する正エネルギー定理の成立条件 (23) 式より 0 となる。このとき、スカラー場が定常である場合には右辺第一項も 0 となるため、ADM エネルギーは 0 となる。さらに、正エネルギー定理より ADM エネルギーが 0 である時空は Minkowski 時空に限られる。したがって、(14) 式で表される理論のうちスピン構造を持たず、正エネルギー定理が成立するクラスについては次の定理が成立する。

一般化された Lichnerowicz 定理:

スカラー場が定常かつ物質場が存在しない場合、至るところに時間的な Killing ベクトルが存在する時空は Minkowski 時空に限る。

5 Conclusion

本講演では、正エネルギー定理が成立するために (14) 式で表されるスカラー・テンソル理論の満たす条件について調べた (M. Nozawa and T. Shiromizu, 2014) をレビューしたのち、至るところに時間的な Killing ベクトルが存在する時空は Minkowski 時空に限られる場合があることを示した。ただし、考えた理論は (11) 式と (18) 式を満足するクラスであり結論は限定的である。したがって、必ずしも (23) 式を満たさない理論が排除されるべきとは言えない。また、(14) 式の理論は Horndeski 理論の特別なクラスである。修正重力理論の精査という観点からすれば、Horndeski 理論への議論の拡張は重要な意味をもつ。

今回はブラックホールを含まない場合を考えたが、一般相対論においてはブラックホールを含む場合の正エネルギー定理の成立も証明されている。修正重力理論においてブラックホールを含む正エネルギー定理の成立の可否を調べることで、理論が満たすべき条件はより強くなると考える。なぜなら、ブラッ

クホールが存在する場合に (6) 式で現れるイベントホライズン上での表面積分は非負であることが条件として加わるからである。これらの議論を経て、修正重力理論における静的ブラックホール解の唯一性について調べることが可能となる。

Acknowledgement

第 49 回天文・天体物理若手夏の学校の運営にご賛同頂き、ご支援下さった機関及び個人の方々に感謝いたします。また、議論や研究指導、研究生活における様々な場面でお世話になっている方々に感謝申し上げます。

Reference

- M. Nozawa and T. Shiromizu, Phys. Rev. D **89**, no. 2, 023011 (2014)
- R. Schon and S. T. Yau, Commun. Math. Phys. **79**, 231 (1981).
- E. Witten, Commun. Math. Phys. **80**, 381 (1981).
- J. A. Nester, Phys. Lett. A **83**, 241 (1981).
- T. Parker and C. H. Taubes, Commun. Math. Phys. **84**, 223 (1982).

c3

軸対称時空における時間的閉曲線
京都大学 基礎物理学研究所
林 航大

軸対称時空における時間的閉曲線

林 航大 (京都大学 基礎物理学研究所)

Abstract

一般相対性理論は重力を時空連続体の歪みとして説明するものである。この一般相対性理論の興味深い示唆として、時間的閉曲線の存在がある [1-3]。時間的閉曲線とは時間的な曲線でありながら全く同一の時空点 (時間、空間ともに全く同一の点) に戻ってくるものである。この時間的閉曲線の存在は、一般相対性理論の枠組みにおいて、過去の世界への時間旅行が禁止されていないことを意味している。本発表ではまず、文献 [1] に従って、回転する無限に長い円柱形状のダストによって形成される円柱対称時空において時間的閉曲線が存在することを確認する。また文献 [2] に従って、有限の長さの質量を持たない回転する棒によって形成される軸対称時空においても同様に時間的閉曲線の存在を確認する。

1 Introduction

アインシュタイン方程式によって記述される時空のなかには時間的閉曲線を含むものが多数存在している。時間的閉曲線とは時間的な曲線でありながら全く同一の時空点 (時間、空間ともに全く同一の点) に戻ってくるものである。この時間的閉曲線の存在は、一般相対性理論の枠組みにおいて、過去の世界への時間旅行が禁止されていないことを意味している。しかしながら、時間的閉曲線の存在は、一般的には現実的でないと考えられている。これは、時間的閉曲線を含む時空の多くが非物理的な性質を持っていることや、現実の宇宙を記述するものでないと考えられていることによるものである。具体例としては、Gödel 解が挙げられる [4]。この解は、膨張していない回転している宇宙を表すものであり、負の宇宙項を含むアインシュタイン方程式の厳密解である。また、回転しているブラックホールを記述する Kerr 解やそれに電荷を加えた Kerr-Newmann 解にも時間的閉曲線が存在することが知られている。これらは現実的なブラックホールを表す解として知られている。しかしながら、これらの解において時間的閉曲線が存在するのは事象の地平の内側に限られており、我々が過去の世界へ時間旅行することは不可能であると考えられている。

果たして、時間的閉曲線を含む時空は現実的に存在し得ないのだろうか。この疑問に対する答えを得るための足がかりとして、今回は時間的閉曲線を

含む二つの時空の性質について調べた。

2 無限に長い回転する円柱形状のダスト

無限に長い回転する円柱形状のダストによって形成される円柱対称時空について、その性質を見ていく [1]。この解は van Stockum によって求められたものである [5]。

次のような計量を考える。

$$ds^2 = H(dz^2 + dr^2) + Ld\phi^2 + 2Md\phi dt - Fdt^2$$

$$(-\infty < z < \infty, 0 \leq \phi \leq 2\pi, -\infty < t < \infty)$$
(2.1)

ただし、 $\phi = 0$ と $\phi = 2\pi$ は同一視する。また、 H, L, M, F は r のみに依る関数であり、具体的な形を以下に述べる。

・内部解 ($0 \leq r \leq R$)

回転する円柱形状のダストによって形成される計量。ダストの密度と 4 元速度は次で与えられる。

$$8\pi\rho = 4a^2 e^{a^2 r^2}, \quad u^i = \delta_t^i \quad (2.2)$$

ただし、 a は任意の正の定数である。計量の具体的な形は

$$H = e^{-a^2 r^2}, \quad L = r^2(1 - a^2 r^2),$$

$$M = ar^2, \quad F = 1 \quad (2.3)$$

・外部解 ($R \geq r$)

円柱形状のダストの周りの真空領域に形成される計量。正の定数 a によって三通りの計量があり得る。

・ Case I ($aR < 1/2$)

$$\begin{aligned} H &= e^{-a^2 r^2} (R/r)^{2a^2 R^2}, \\ L &= \frac{1}{2} r R \sinh(3\epsilon + \theta) \operatorname{csch}(2\epsilon) \operatorname{sech}(\epsilon), \\ M &= r \sinh(\epsilon + \theta) \operatorname{csch}(2\epsilon), \\ F &= r R^{-1} \sinh(\epsilon - \theta) \operatorname{csch}(\epsilon) \\ &\left(\begin{array}{l} \theta = (1 - 4a^2 R^2)^{1/2} \log(r/R), \\ \tanh(\epsilon) = (1 - 4a^2 R^2)^{1/2} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

・ Case II ($aR = 1/2$)

$$\begin{aligned} H &= e^{-1/4} (R/r)^{1/2}, \\ L &= \frac{1}{4} r R [3 + \log(r/R)], \\ M &= \frac{1}{2} r [1 + \log(r/R)], \\ F &= r R^{-1} [1 - \log(r/R)] \end{aligned} \quad (2.5)$$

・ Case III ($aR > 1/2$)

$$\begin{aligned} H &= e^{-a^2 r^2} (R/r)^{2a^2 R^2}, \\ L &= \frac{1}{2} r R \sin(3\epsilon + \theta) \operatorname{csc}(2\epsilon) \operatorname{sec}(\epsilon), \\ M &= r \sin(\epsilon + \theta) \operatorname{csc}(2\epsilon), \\ F &= r R^{-1} \sin(\epsilon - \theta) \operatorname{csc}(\epsilon) \\ &\left(\begin{array}{l} \theta = (4a^2 R^2 - 1)^{1/2} \log(r/R), \\ \tan(\epsilon) = (4a^2 R^2 - 1)^{1/2} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

ここで示した計量は、ダストの共動座標系で表したものであるが、各点で局所平坦座標系に移ることでダストが角速度 a で回転していることが確認される。

時空における特異点の存在について確認する。各領域における Kretschmann scalar を計算すると次のような r 依存性が求められる。

$$\begin{aligned} k &= R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &\propto \begin{cases} e^{2a^2 r^2} (-2 + a^2 r^2) & (0 \leq r \leq R) \\ r^{n(a^2 R^2 - 1)} & (R \geq r) \quad (n = 4 \text{ or } 6) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.7)$$

これより、 $a^2 R^2 < 1$ のとき時空の全領域で特異点の存在は認められない。しかし、 $a^2 R^2 > 1$ のとき $r \rightarrow \infty$ で k は発散する。これは円柱形状のダスト以外の重力源が $r \rightarrow \infty$ に存在することを示唆している。

最後に時間的閉曲線の存在を確認する。時間的閉曲線が存在するのは外部解の Case III の L が負になる領域である。(内部解や外部解の Case I、Case II では L は常に正である。) なぜなら、

$$\begin{aligned} x^\phi &= \phi \\ x^i &= \text{constant} \quad (i \neq \phi) \end{aligned} \quad (2.8)$$

を満たす曲線を考えると、その曲線は閉曲線となっていて、かつ $ds^2 = Ld\phi^2 < 0$ なので時間的な曲線となっているからである。

この時空は条件を満たせば特異点を含まず、ダストによって形成されるという意味では比較的現実的である。しかしながら問題となるのは、無限の長さを持つという点である。明らかに無限の長さを持つ円柱形状のダストを用意することは不可能である。ただし、無限に長い物質は、長いが有限の長さを持つ物質とその性質を共有するとも期待される。有限の長さを持つ回転する円柱形状のダストが形成する重力場について、その性質を調べることは必要であるだろう。

3 有限の長さの質量を持たない回転する棒

有限の長さの質量を持たない回転する棒によって形成される軸対称時空について、その性質を見ていく [2]。次のような計量を考える。

$$\begin{aligned} ds^2 &= f^{-1} (e^\nu (dz^2 + dr^2) + r^2 d\phi^2) - f (dt - wd\phi)^2 \\ &= f^{-1} (e^\nu (dz^2 + dr^2) + r^2 (1 - r^{-2} f^2 w^2) d\phi^2) \\ &\quad + 2fwd\phi dt - f dt^2 \\ & \quad (-\infty < z < \infty, r \geq 0, 0 \leq \phi \leq 2\pi, -\infty < t < \infty) \end{aligned} \quad (3.1)$$

ただし、 $\phi = 0$ と $\phi = 2\pi$ は同一視する。また、 f, w, ν は r と z に依る関数である。ここで、Papapetrou に

よって得られた真空解を考える [6]。この真空解は次の関係式を満たすものである。

$$\begin{aligned} f^{-1} &= \alpha \cosh(\xi, z) + \beta \sinh(\xi, r) \\ w &= (\alpha^2 - \beta^2)^{1/2} r \xi, r \\ \nu, z &= r \xi, z z \xi, z r \\ \nu, r &= \frac{1}{2} r [(\xi, z r)^2 - (\xi, z z)^2] \\ \xi, z z + \xi, r r + r^{-1} \xi, r &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

ここで、 α と β は任意の定数で、 ξ は z と r の関数である α 、 β と ξ を具体的に、

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, \quad \beta = 0 \\ \xi &= 2a \log \frac{R_1 + z - b}{R_2 + z + b} \\ \left(\begin{array}{l} R_1 = [(z - b)^2 + r^2]^{1/2} \\ R_2 = [(z + b)^2 + r^2]^{1/2} \\ a, b : \text{constant} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

と与えると、計量に含まれる関数 f 、 w と ν は次のような形になる。

$$\begin{aligned} f^{-1} &= \cosh \left[2a \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right], \\ w &= -2a \left(\frac{z - b}{R_1} - \frac{z + b}{R_2} \right), \\ \nu &= -a^2 \left[r^2 \left(\frac{1}{R_1^4} + \frac{1}{R_2^4} \right) + \frac{R^2 - b^2}{b^2 R_1 R_2} \right] + C, \\ \left(\begin{array}{l} R = [z^2 + r^2]^{1/2} \\ C : \text{constant} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

定数 C を $C = a^2/b^2$ と選ぶとこの時空は $r = 0, -b < z < b$ に線状の円錐特異点が生じる。これは、 $r = 0, -b < z < b$ に線状の重力源があると捉えることができる。また、この重力源から十分に離れると時空は漸近平坦となり、特に $r \rightarrow \infty$ では時空は質量ゼロ、角運動量 $4ab$ で回転している粒子によって作られる時空に漸近する。以上を以てしてここで示した計量は、有限の長さを持つ回転する質量ゼロの棒によって作られる時空を表していると解釈できることがわかった。

最後に時間的閉曲線の存在を確認する。前のセクショ

ンと同様に、

$$\begin{aligned} x^\phi &= \phi \\ x^i &= \text{constant} \quad (i \neq \phi) \end{aligned} \quad (3.5)$$

を満たす曲線を考えて、これは閉曲線となっている。加えて、 $g_{\phi\phi} = r^2 f^{-1} (1 - r^{-2} f^2 w^2) < 0$ が満たされるとき、つまり $(1 - r^{-2} f^2 w^2) < 0$ が満たされるとき $ds^2 < 0$ となり、この曲線は時間的閉曲線となる。 $z = 0$ に注目すると、時間的閉曲線が存在する領域は、

$$r^2 < \frac{1}{2} b^2 \left[\left(1 + \frac{64a^2}{b^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \quad (3.6)$$

であることがわかる。

ここで注目した時空がもつ漸近平坦であるという性質は、現実的な時空が持つべき性質の一つと言える。しかし、重力源が質量を持たないという点と太さが無いという点是非物理的であると考えられる。重力源に有限の質量をもたせ、有限の太さをもたせた場合に時空の性質がどのような変更を受けるのか、具体的には時間的閉曲線が存在し続けるのか、調べことは有益だろう。

4 Conclusion

今回、無限に長い回転する円柱形状のダストによって形成される円柱対称時空と、有限の長さの質量を持たない回転する棒によって形成される軸対称時空に注目した。この二つの時空のいずれにも時間的閉曲線が存在しうることを確認した。しかしながら、二つの時空のいずれも非現実的な性質を持つことも確認された。

ここで疑問なのが、これらの時空においてその非現実的な性質を取り除いた際に、時間的閉曲線の存在は保たれるのかということである。これは即ち、現実世界において、過去の世界への時間旅行は可能なのかという問いにつながる。

今回注目した二つの時空を現実的なものに変更したモデルとして、有限の長さを持つ円柱形状の物質を回転させたものが考えられる。このモデルについて考察することが、過去の世界への時間旅行の可能性を明らかにする次の一歩となると期待される。

Reference

- [1] W.B. Bonnor, 1980, *J. Phys. A: Math. Gen.* 13, 2121
- [2] W.B. Bonnor, 2002, *Class. Quantum Grav.* 19, 5951
- [3] S.V. Bolokhov et al., 2019, *Gravit. Cosmol.* 25: 122
- [4] K. Gödel, 1949, *Rev. Mod. Phys.* 21 447
- [5] W.J. van Stockum, 1937, *Proc. R. Soc. Edin.* 57 135
- [6] A. Papapetrou, 1953, *Ann. Phys., Lpz* 12 309

c4

修正重力理論におけるスカラー波の
遮蔽機構とその破れ

平野 進一

立教大学大学院 理学研究科

修正重力理論におけるスカラー波の遮蔽機構とその破れ

平野 進一 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

1998 年の加速膨張の発見以来、その起源としての修正重力理論の研究が盛んに行われている。宇宙論的大スケールにおいて、重力理論の拡張から加速膨張の起源を説明し、太陽系のような小スケールではその拡張効果は遮蔽され、一般相対論の予言を再現する。近年、重力波の観測技術の進歩から、ブラックホールや中性子星のような強重力場での重力理論の検証が可能になりつつある。本ポスターでは、修正重力理論におけるパルサーバイナリーでの重力波生成を考える。特に、重力理論拡張の効果によって生じる新たな偏極モードとして生じるスカラー波が伝搬せずに遮蔽されるのか、また、遮蔽されずに破れを生じるのはどのような状況かを議論する。

1 Introduction

1998 年の加速膨張の発見以来、その起源としての「修正重力理論」の研究が盛んに行われている。宇宙論的大スケールにおいて、重力理論の拡張から加速膨張の起源を説明し、太陽系のような小スケールではその拡張効果は遮蔽され (遮蔽機構と呼ばれる)、一般相対論の予言を再現する。一般相対論からの拡張は、Lovelock theorem (1971) を破ることになる。典型的には、計量テンソルに新たな自由度を加えることによってそれが達成される。もっとも広く使われている例として、スカラー場を加える、スカラーテンソル理論がある。宇宙論的大スケールにおいて、スカラー場がゆっくり転がることで加速膨張を説明する。質点をソースとした重力場を考えると、その非線形相互作用によってスカラー場の伝搬が遮蔽され、ニュートン重力の逆二乗即が再現される。

一方で近年、重力波の観測技術の進歩から、ブラックホールや中性子星のような強重力天体の合体から生じる重力波を観測することで、重力理論の検証が可能になりつつある。スカラーテンソル理論のようにスカラー自由度を持つ理論では、重力波の伝搬に加えスカラー自由度の伝搬、スカラー波、が生じることが一般にあって良い。この問題に対し、de Rham+ [1, 2] は、遮蔽機構を持つようなモデルとして cubic Galileon を採用し、バイナリーから生じるスカラー波の生成を計算した。この解析の結果、スカラー波のパワーに対して抑制因子が余分に掛かり、重力波の四重極

放射に比べて十分に無視できることが確かめられた。

スカラーテンソル理論の最近の理論発展として、縮退高階微分理論がある [3,4]。このような理論は、背景時空としては遮蔽機構を備えているものの、cubic Galileon [5] の持つ物質との結合ではなく、スカラー場の微分を介した微分結合をもたらす。ゆえに、de Rham+[1, 2] とは異なる結果を与える可能性が考えられる。本ポスターでは、de Rham+[1, 2] をレビューしたのち、物質との微分結合によるスカラー波への影響を議論する。

2 Background

Cubic Galileon [5] を考える。静的球対称時空周りの弱重力場の従う作用は、 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}/M_{\text{pl}}$ のようにおき、与えられた作用展開することで求めることができる：

$$\mathcal{L}_{\text{cub}} = -\frac{1}{4}h^{\mu\nu}(\mathcal{E}h)_{\mu\nu} - \frac{3}{4}(\partial\pi)^2 \left(1 + \frac{\partial^2\pi}{3\Lambda^3}\right) + \frac{1}{2M_{\text{pl}}}h_{\mu\nu}T^{\mu\nu} + \frac{1}{2M_{\text{pl}}}\pi T. \quad (1)$$

π はスカラー場。ここで $h_{\mu\nu}$ に関する項は、Einstein-Hilbert 作用からきているもので、 Λ は現在の加速膨張に関連したスケール H_0 と、 $\Lambda = (M_{\text{pl}}H_0^2)^{1/3}$ のように関連づいたスケールである。この作用を変分することで、その変数における運動方程式を得ること

ができる。スカラー場の運動方程式は、

$$-\frac{3}{2}\partial^2\pi\left(1+\frac{\partial^2\pi}{3\Lambda^3}\right)=\frac{T}{2M_{\text{pl}}} \quad (2)$$

となる。質量 M のポイントソース $\bar{T}_\nu^\mu = -M\delta(\mathbf{x})\delta_0^\mu\delta_\nu^0$ 、 $\pi = \pi(r)$ を考えると、次の解を得ることができる:

$$\begin{aligned} \frac{\partial_r\pi}{M_{\text{pl}}} &= E(r), \\ E(r) &= \frac{3\Lambda^3}{4}r\left[\sqrt{1+\frac{32}{9}\left(\frac{r_\star}{r}\right)^3}-1\right], \\ r_\nu &= \frac{1}{\Lambda}\left(\frac{M}{16M_{\text{pl}}}\right)^{1/3}. \end{aligned} \quad (3)$$

この解は、 $r \ll r_\nu$ において、 $\partial_r\pi/M_{\text{pl}} \approx GM/r^2 (r/r_\nu)^{3/2}$ のように振る舞い、 r_ν よりも十分内側ではスカラー場の寄与が抑制されることを表している。結果、 $r \ll r_\nu$ の領域では、計量テンソルから来る寄与のみになるため、ニュートンの逆二乗則が実現する。

3 スカラー波の伝搬

Hulse-Taylor binary のような天体からのスカラー波の放射を考えたい。1章で考えた静的な background からの摂動を考え、binary が運動することでスカラー波が伝搬する様子を見ていく。ケプラー運動を仮定すると、ソース項として以下のエネルギー・運動量テンソルを考えられる:

$$T_\nu^\mu = \bar{T}_\nu^\mu + \delta T_\nu^\mu, \quad (4)$$

$$\bar{T}_\nu^\mu = -M\delta(\mathbf{x})\delta_0^\mu\delta_\nu^0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \delta T_\nu^\mu &\approx \sum_{i=1,2} M_i(r_i(t)w)^2\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i(t))\delta_0^\mu\delta_\nu^0 \\ &+ \text{invalid comp. to radiations} \end{aligned} \quad (6)$$

M_1, M_2 はそれぞれの星の質量であり、 M は系の全質量である。ケプラー運動の速度は、角度方向への速度が優勢である状況を想定した。この δT によってソースされるスカラー波の作用は、background か

らの摂動 ϕ として、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\phi^{(2)} &= \frac{1}{2}\left\{\left[1+\frac{2}{3\Lambda^3}\left(E'+\frac{2E}{r}\right)\right]\dot{\phi}^2\right. \\ &\quad -\left(1+\frac{4}{3\Lambda^3}\frac{E}{r}\right)(\partial_r\phi)^2 \\ &\quad \left.-\left[1+\frac{2}{3\Lambda^3}\left(E'+\frac{2E}{r}\right)\right](\nabla_\Omega\phi)^2\right\} \\ &\quad +\frac{1}{\sqrt{6}M_{\text{pl}}}\phi\delta T. \end{aligned} \quad (7)$$

となる。

スカラー波の power を計算し、重力波成分との大小関係を比較してみる。Landau-Lifshitz の教科書で有名な擬エネルギー・運動量テンソルを定義する手法で計算することも可能であるが、微分演算子に該当する項が通常の波動方程式の場合と異なるため、有効作用を使用した解析を行うと都合が良い [6]。レゾナンスとして生じる中間状態の粒子を解析する際と同様に、 δT によってソースされるスカラー波 ϕ の有効作用 S_{eff} を求め、スカラー波への崩壊率を導出する。この崩壊率に各スカラー波のエネルギーを掛け合わせることで power が計算できる。つまり、

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}} &= \frac{i}{12M_{\text{pl}}^2}\int d^4x d^4y \delta T(x)G_{\text{F}}(x,y)\delta T(y) \\ \frac{2\text{Im}S_{\text{eff}}}{T_{\text{P}}} &= \text{decay rate} =: \int_0^\infty dw f(w), \\ P &= \int_0^\infty dw w f(w). \end{aligned}$$

ここで、 T_{P} は binary の周期、 $G_{\text{F}}(x,y)$ はスカラー波の運動方程式のグリーン関数である。グリーン関数を求め $f(w)$ の具体形が求まれば、power を計算することができる。次のモーメントを定義する:

$$M_{lmn} = \frac{1}{T_{\text{P}}}\int_0^{T_{\text{P}}} dt d^3x u_l(r)Y_{lm}(\Omega)e^{-im\Omega_{\text{P}}t}\delta T. \quad (8)$$

ここで、 Ω_{P} は binary の振動数、 $u_l Y_{lm} e^{-i\omega t}$ はソースなしのスカラー波の運動方程式の完全系である。これを用いると、 $f(w)$ は

$$f(w) = \frac{\pi}{3M_{\text{pl}}^2}\sum_{n=0}^\infty\sum_{l,m}|M_{lmn}|^2\delta(w-n\Omega_{\text{P}})$$

となる。これから、power は

$$P = \frac{\pi}{3M_{\text{pl}}^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l,m} n \Omega_{\text{P}} |M_{lmn}|^2$$

と計算される。モーメント M_{lmn} は、 u_l によって書かれる。 $r \ll r_v$ における u_l を適切に求め代入することで、power が計算される。このモード関数の計算には、background の解である $E(r)$ を用いるので、遮蔽機構の影響がスカラー波の power にも反映される。 $r = 0$ において正則条件を課した $r \ll r_v$ におけるモード関数は、

$$u_l(r) \approx \bar{u} \left(\frac{r}{r_v} \right)^{1/4} J_\nu \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \omega r \right), \quad (9)$$

$$\nu = \begin{cases} (2l+1)/4 & (l > 0) \\ -1/4 & (l = 0) \end{cases}$$

となる。 \bar{u} は、グリーン関数の規格化条件から決定される。

4 Radiation power

Monopole ($l = 0$) からみていく。これは、重力波の質量保存、運動量保存とは別に、スカラー波と物質との結合があるために、等価原理が破れて生じる。 $u_0(r)$ を式 (9) から求めておけば、

$$M_{00n} = \frac{5\beta}{4(\omega r_v^3)^{1/4}} \frac{(w\bar{r})^2}{T_{\text{P}}} \mu(1-e^2)^2 \times \int_0^{T_{\text{P}}} dt \frac{e^{-in\Omega_{\text{P}}t}}{(1+e\cos\Omega_{\text{P}}t)^2} \quad (10)$$

となる。 β は $\mathcal{O}(1)$ の定数、 \bar{r} は軌道長半径、 e は離心率、 μ は換算質量である。このとき power は、Hulse-Taylor binary の離心率を代入すれば、

$$P_{\text{mono}} \approx \frac{4(\Omega_{\text{P}}\bar{r})^4}{(\Omega_{\text{P}}r_v)^{3/2}} \frac{\mu^2}{M_{\text{pl}}} \Omega_{\text{P}}^2 \quad (11)$$

となる。一方で、重力波の四重極公式 (Peter-Matheu formula) は、

$$P_{\text{PM}} \approx (\Omega_{\text{P}}\bar{r})^4 \frac{\mu^2}{M_{\text{pl}}} \Omega_{\text{P}}^2 \quad (12)$$

である。差をとると、

$$P_{\text{mono}}/P_{\text{PM}} \approx (\Omega_{\text{P}}r_v)^{-3/2} \approx v^{-3/2} \left(\frac{\bar{r}}{r_v} \right)^{3/2} \quad (13)$$

v は系の平均回転速度である。つまり、有限の v に対して、重力波の四重極に比べて、 $\left(\frac{r}{r_v} \right)^{3/2}$ でスカラー波の放射は抑制される。同様に、四重極放射も求めてみると、重力波の四重極放射との比として、

$$P_{\text{quad}}/P_{\text{PM}} \approx (\Omega_{\text{P}}\bar{r})^{-1} (\Omega_{\text{P}}r_v)^{-3/2} \approx v^{-2} \left(\frac{\bar{r}}{r_v} \right)^{3/2} \quad (14)$$

を得る。この抑制因子はおおよそ、 10^{-8} ほどのオーダーのズレをもたらし、スカラー波放射の power が重力波に比べ、十分に抑制されていることが伺える。このようにスカラー波が抑制されるモデルのうち、重力波の伝搬速度や重力定数が一般相対論のものとは異なるものが、修正重力理論ではありえる [7, 8]。そのような理論では、重力波の四重極放射により、binary の回転周期のズレが一般相対論のものとは異なる。そこから、いわゆる DHOST 理論において、DHOST 理論固有のパラメータに関して強い制限が得られている。

5 Disformal coupling case

Preliminary の結果であるため、web 上に公開はしません。ポスター講演にお越しくください。

Acknowledgement

夏の学校開催に向けて、出資してくださった方々・機関に、この場を持って感謝の意を示たい所存です。本当にありがとうございます。来年度もどうかよろしくお願いいたします。著者は、JSPS 科研費 17J04865 の助成を受けています。

Reference

- [1] C. de Rham, A. J. Tolley and D. H. Wesley, "Vainshtein Mechanism in Binary Pulsars," Phys. Rev. D **87** (2013) no.4, 044025 [arXiv:1208.0580 [gr-qc]].

- [2]C. de Rham, A. Matas and A. J. Tolley, “Galileon Radiation from Binary Systems,” *Phys. Rev. D* **87** (2013) no.6, 064024 [arXiv:1212.5212 [hep-th]].
- [3]D. Langlois and K. Noui, “Degenerate higher derivative theories beyond Horndeski: evading the Ostrogradski instability,” *JCAP* **1602** (2016) no.02, 034 [arXiv:1510.06930 [gr-qc]].
- [4]M. Crisostomi, K. Koyama and G. Tasinato, “Extended Scalar-Tensor Theories of Gravity,” *JCAP* **1604** (2016) no.04, 044 [arXiv:1602.03119 [hep-th]].
- [5]N. Chow and J. Khoury, “Galileon Cosmology,” *Phys. Rev. D* **80** (2009) 024037 [arXiv:0905.1325 [hep-th]].
- [6]W. D. Goldberger and I. Z. Rothstein, “An Effective field theory of gravity for extended objects,” *Phys. Rev. D* **73** (2006) 104029 [hep-th/0409156].
- [7]J. Beltran Jimenez, F. Piazza and H. Velten, “Evading the Vainshtein Mechanism with Anomalous Gravitational Wave Speed: Constraints on Modified Gravity from Binary Pulsars,” *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016) no.6, 061101 [arXiv:1507.05047 [gr-qc]].
- [8]A. Dima and F. Vernizzi, “Vainshtein Screening in Scalar-Tensor Theories before and after GW170817: Constraints on Theories beyond Horndeski,” *Phys. Rev. D* **97** (2018) no.10, 101302 [arXiv:1712.04731 [gr-qc]].

c5

逆散乱法を用いた Einstein 方程式の厳
密解の構成

大阪市立大学大学院 理学研究科

大倉 靖央

逆散乱法を用いた Einstein 方程式の厳密解の構成

大倉 靖央 (大阪市立大学大学院 理学研究科)

Abstract

次のような計量

$$-ds^2 = f(-dt^2 + dz^2) + g_{ab}dx^a dx^b$$

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z), (a, b = 1, 2)$$

を考える (ここで f, g_{ab} は t, z のみに依存する)。この計量は比較的シンプルであるにもかかわらず重力理論において広く適用されており、今までに非自明な解が数多く得られている。したがってこの計量に対する Einstein 方程式を積分する手法があれば厳密解がシステムティックに求まり、われわれの重力理論のさまざまな側面の理解を大きく進めることができる。そこで Belinskii と Zakharov は文献 [1] において逆散乱法を用いた、このメトリックに対する Einstein 方程式の新たな解を構成する手法を示した。この手法は Einstein 方程式の既知の特解が少なくとも 1 つあったとき、その特解から新しい非自明な解を得るというものである。これにより未だに知られていない Einstein 方程式の厳密解の発見が期待され、もしそれが実現すれば物理的に非常に大きな意味をもつ。本講演はこの文献 [1] のレビュー講演でありこの手法を導出から説明する。さらにそれを用いて最もシンプルな場合のソリトン解と 2-ソリトン解の構成を行う。

1 Introduction

以下のようなタイプのメトリック

$$-ds^2 = f(-dt^2 + dz^2) + g_{ab}dx^a dx^b$$

(f, g_{ab} は t, z のみに依存) にはシュバルツシルト解やカー解などが含まれる。これに対するアインシュタイン方程式の新たな厳密解をシステムティックに構成する方法を得ることができれば我々の重力理論に対する理解を深めることができる。そこで文献 [1] の著者 Belinskii と Zakharov は逆散乱法を用いてそれを実現させた。逆散乱法とは非線形方程式の解を散乱の線形方程式を用いて得る方法である。その手法は次のとおりである。まず Einstein 方程式を、ある複素スペクトルパラメータ λ の線形微分演算子の過剰決定系の両立条件という形で表す。そしてその方程式系を解くことで元の Einstein 方程式の解を得る。本論文では厳密解としてソリトン解を構成した。ソリトンとは以下の 2 つを満たすものとして定義する。

- 空間的に孤立した波 (孤立波) で、形を変えずに伝播する。
- 互いの衝突にたいして安定である。

また特解として Kasner 解を選び 1-ソリトン解と 2-ソリトン解の場合について具体的な解の構成を行った。

2 問題設定

光円錐座標 $(\zeta, \eta) = (z + t/2, z - t/2)$ を用いると解くべき方程式は

$$\begin{cases} \partial_\eta \tilde{\mathbf{A}} - \partial_\zeta \tilde{\mathbf{B}} = 0 \\ \partial_\zeta(\ln f) = \frac{\partial_\zeta^2(\ln \tilde{\alpha})}{\partial_\zeta(\ln \tilde{\alpha})} + \frac{1}{4\tilde{\alpha}(\partial_\zeta \tilde{\alpha})} \text{Tr} \tilde{\mathbf{A}}^2 \\ \partial_\eta(\ln f) = \frac{\partial_\eta^2(\ln \tilde{\alpha})}{\partial_\eta(\ln \tilde{\alpha})} + \frac{1}{4\tilde{\alpha}(\partial_\eta \tilde{\alpha})} \text{Tr} \tilde{\mathbf{B}} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \text{def } \mathbf{g} = \tilde{\alpha}^2 \\ \tilde{\mathbf{A}} = -\tilde{\alpha}(\partial_\zeta \mathbf{g}) \mathbf{g}^{-1} \\ \tilde{\mathbf{B}} = +\tilde{\alpha}(\partial_\eta \mathbf{g}) \mathbf{g}^{-1} \end{pmatrix}$$

となる。また $[\partial_\zeta, \partial_\eta] \mathbf{g} = 0$ より

$$\partial_\eta \tilde{\mathbf{A}} + \partial_\zeta \tilde{\mathbf{B}} + \tilde{\alpha}^{-1} [\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}] - (\partial_\eta \tilde{\alpha}) \tilde{\alpha}^{-1} \tilde{\mathbf{A}} - (\partial_\zeta \tilde{\alpha}) \tilde{\alpha}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} = 0$$

が得られる。今、Einstein 方程式を解くという問題は $\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}$ についての式を解くという問題に置き換わった。

3 逆散乱法

$\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}$ を解くために逆散乱法を用いる。まず以下のような 2 本の線形方程式を考える。

$$\begin{cases} D_1 \psi(\lambda, \zeta, \eta) = \frac{\mathbf{A}}{\lambda - \alpha} \psi(\lambda, \zeta, \eta) \\ D_2 \psi(\lambda, \zeta, \eta) = \frac{\mathbf{B}}{\lambda + \alpha} \psi(\lambda, \zeta, \eta) \end{cases}$$

ここで $\mathbf{A}(\zeta, \eta), \mathbf{B}(\zeta, \eta)$ は任意の 2×2 実行列、 $\psi(\lambda, \zeta, \eta)$ は任意の 2×2 行列である。また λ 複素パラメータである。また D_1, D_2, α は以下のように定義される。

$$\begin{cases} D_1 = \partial_\zeta - \frac{2(\partial_\zeta \alpha) \lambda}{\lambda - \alpha} \partial_\lambda \\ D_2 = \partial_\eta + \frac{2(\partial_\eta \alpha) \lambda}{\lambda + \alpha} \partial_\lambda \\ \partial_\zeta \partial_\eta \alpha = 0 \end{cases}$$

定義より $[D_1, D_2] = 0$ であるので $D_1 \textcircled{2} - D_2 \textcircled{1}$ を計算すると

$$\begin{cases} \partial_\zeta \mathbf{A} - \partial_\eta \mathbf{B} = 0 \\ \partial_\eta \mathbf{A} + \partial_\zeta \mathbf{B} + \alpha^{-1} [\mathbf{A}, \mathbf{B}] \\ -(\partial_\eta \alpha) \alpha^{-1} \mathbf{A} - (\partial_\zeta \alpha) \alpha^{-1} \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

という条件が得られる。問題設定を見ると $\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}$ はこの条件を満たしている。したがって以降は $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}, \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B}$ とする。 $\lambda = 0$ のとき線形方程式から

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= -\alpha (\partial_\zeta \psi(0, \zeta, \eta)) \psi^{-1}(0, \zeta, \eta) \\ \mathbf{B} &= +\alpha (\partial_\eta \psi(0, \zeta, \eta)) \psi^{-1}(0, \zeta, \eta) \end{aligned}$$

という関係が得られる。よって問題設定と比較すると

$$\mathbf{g}(\zeta, \eta) = \psi(0, \zeta, \eta)$$

となる。したがってこの方程式を満たす ψ から \mathbf{g} が求められる。ここでこの方程式の特解 ψ_{ps} が存在するとする。この特解に関連する量を下付き添字 ps で表す。特解 ψ に 2×2 行列関数 $\sigma(\lambda, \zeta, \eta)$ を掛けてそれを線型方程式に代入すると以下の σ についての方程式が得られる。

$$\begin{cases} D_1 \sigma = \frac{1}{\lambda - \alpha} (\mathbf{A} \sigma - \sigma \mathbf{A}_{\text{ps}}) \\ D_2 \sigma = \frac{1}{\lambda + \alpha} (\mathbf{B} \sigma - \sigma \mathbf{B}_{\text{ps}}) \end{cases}$$

ここで σ に適切な条件を設定する。それは \mathbf{g} が実対称行列になるような条件である。また境界条件とし

て $\sigma(\lambda \rightarrow \infty) = \mathbf{I}$ を導入する。このような条件のもとで σ がソリトン解となるのは以下のように λ 平面において有限個の極を持っている場合であることが知られている。

$$\sigma(\lambda) = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\mathbf{R}_k}{\lambda - \mu_k} + \frac{\bar{\mathbf{R}}_k}{\lambda - \bar{\mu}_k} \right)$$

ここで条件から

$$\mathbf{g} = \sigma(\lambda \rightarrow 0) \mathbf{g}_{\text{ps}}$$

であることがわかる。したがって σ を具体的に決定することで \mathbf{g} の知られている特解から新たな \mathbf{g} を決定できることがわかる。

4 Kasner 解

今回は \mathbf{g} の特解として Kasner 解を選ぶ。Kasner 解は以下のように定義される。

$$ds^2 = -dt^2 + \sum_{j=1}^3 t^{2p_j} [dx^j]^2$$

$$\left(\sum_{j=1}^3 p_j = 1, \sum_{j=1}^3 p_j^2 = 1 \right)$$

ここでは $((p_1, p_2, p_3) = (0, 1, 0))$ を選ぶとすると Kasner 解は

$$\mathbf{g}_{\text{ps}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}, f_{\text{ps}} = 1$$

ここで $\alpha = t = \zeta - \eta$ とする。これは $\partial_\zeta \partial_\eta \alpha = 0$ を満たしている。これを用いて解を構成する。

5 1-ソリトン解

1-ソリトン解は σ の極が λ 平面の実軸上に 1 つのみ存在する場合である。したがって σ は次のような形になる。

$$\sigma = \mathbf{I} + \frac{2\mathbf{R}}{\lambda - \mu}$$

ここで μ, \mathbf{R} は実である。この σ から得られる新たな解は以下ようになる。

$$\begin{aligned}
 -ds^2 &= \frac{C_1 t^{1/2} \cosh(-r/2 + C_2)}{[z^2 - t^2]^{1/2}} (-dt^2 + dz^2) \\
 &\quad + \frac{1}{\cosh(-r/2 + C_2)} dx^2 \\
 &\quad + \frac{\cosh(r - C_2)}{\cosh(-r/2 + C_2)} t^2 dy^2 \\
 &\quad - \frac{2 \sinh(r/2)}{\cosh(-r/2 + C_2)} t dx dy \\
 e^r &= 2 \frac{z^2}{t^2} - 1 - 2 \left[\frac{z^2}{t^2} \left(\frac{z^2}{t^2} - 1 \right) \right]^{1/2}
 \end{aligned}$$

しかしこの解は $z > t$ という条件を満たさなければならぬのであまり物理的ではない。

6 2-ソリトン解

2-ソリトン解は σ の極が λ 平面上に 2 つあり、互いに複素共役がある場合である。したがって σ は次のような形になる。

$$\sigma = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{R}}{\lambda - \mu} + \frac{\bar{\mathbf{R}}}{\lambda - \bar{\mu}}$$

ここで μ, \mathbf{R} は複素である。この σ から得られる新たな解は任意定数を適当に選び座標変換を行うと次のようになる。

$$\begin{aligned}
 -ds^2 &= \left(1 - \frac{2m_1 r}{\Sigma} \right) d\tau^2 + \frac{4a_1 m_1 r \sin^2 \theta}{\Sigma} d\tau d\phi \\
 &\quad - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 \\
 &\quad - \left(r^2 + a_1^2 + \frac{2a_1^2 m_1 r \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 \\
 (\Sigma &= r^2 + a_1^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2m_1 r + a_1^2)
 \end{aligned}$$

これは Kerr 解である。

7 まとめ

逆散乱法を用いることで Einstein 方程式の既知の特解から新たな厳密解が得られることを確かめられた。

8 今後の課題

この解が本当にソリトンの条件を満たしているかはまだ確かめていないのでその確認を今後行わなければならない。また今回は 2-ソリトン解の場合までを考えたが、それ以上の解 (n-ソリトン解) については考察していない。これについては今回レビューした論文の著者の次の論文に詳しく述べられているので確認をしなければならない。そして今回は特解として Kasner 解のみを考えたが、他の特解を選ぶとどのような解が得られるか考察したい。

9 参考文献

[1] V. A. Belinski and V. E. Zakharov, Sov. Phys. JETP 48 (1978) 985

c6

Spacetime Thermodynamics: to the
Entropic Gravity

東京大学大学院 理学系研究科

渡慶次 孝気

Spacetime Thermodynamics: to the Entropic Gravity

渡慶次 孝気 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

時空は熱力学的な側面を持つ。すなわち、event horizon 上で評価された Einstein 方程式は熱力学第一法則を生み出し、逆に熱力学的な考察から Einstein 方程式を導出することもできる。作用汎関数を計量に関して変分する伝統とは異なったこの導出法に加えて、時空のエントロピーが停留値を取ることを要請してもやはり Einstein 方程式が生まれる。変分変数に計量を用いないこの第三の導出法の存在は、計量もはや基本的な力学変数でないことを示唆している。この示唆に基づいた重力理論をエントロピック重力理論と呼ぶ。関連して、ホログラフィック原理すなわち、時空の情報 = エントロピーが面積に比例する事実にも触れる。

1 Introduction

本発表は、時空の熱力学的な扱いに関する review であり、所謂ブラックホール熱力学と呼ばれるトピックスを扱う。

近年、時空を熱力学的な考察から扱う試みが注目を浴びている。Friedmann 方程式から出る連続の式と同様に、ブラックホールの地平線上で評価された Einstein 方程式も熱力学第一法則を生み出す。対応するエントロピーは地平線の表面積に比例しており、これは超弦理論において着想が生まれた「**ホログラフィック原理**」のひとつの例となっている。そもそも、重力場を記述する通常の作用汎関数 (Einstein-Hilbert 作用)

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi G} \int dx^4 \mathcal{L}_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi G} \int dx^4 \sqrt{-g} R \quad (1)$$

自体にホログラフィック的な構造が内在している。

作用 (1) から Einstein 方程式が出ることはよく知られているが、熱力学的な考察は二種類の新たな導出法を与える。一つは直上で述べたことの逆であり、地平線を横切る熱流が準静的であることと、エントロピーがホログラフィック原理で与えられることを仮定して Einstein 方程式が導出される。もう一つの方法では、エントロピーを時空の「歪み」について停留することを要請すると、Einstein 方程式が導出される。この事実は、計量の力学変数としての資格が剥奪される可能性を示唆している。このような視点に基づいて重力を扱う理論が「**エントロピック重**

力理論」であり、もはや重力場 $g_{\mu\nu}$ の量子化を必要としないことは注目に値する。

以上、(1) 熱力学的な視点から一般相対論にアプローチすること、(2) そこから示唆される重力のエントロピックな性質と、(3) 関連して、一般相対論が内在するホログラフィックな構造を、主に T.Padmanabhan (2010), T.Jacobson (1995), D.Moustos (2017), E.Verlinde (2011) に基づいて review していく。

2 時空の持つ熱力学側面

本節では、まずブラックホールの event horizon 上で評価された Einstein 方程式が熱力学第一法則の様相を呈していることを見る。この議論から、エントロピーについて有名な面積則が出る。次に逆のアプローチを行なう。すなわち、熱力学的な考察から Einstein 方程式を導出する。

2.1 Einstein 方程式 → 熱力学第一法則

次の計量で記述される時空を考える：

$$ds^2 = -f(r)(c dt)^2 + \frac{dr^2}{g(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2)$$

この時空が event horizon を $r = a$ に持つとすると $g(a) = 0$ であるが、これが座標の取り方に依存した

見せかけの特異性に過ぎないことから

$$f'(a) = g'(a) \quad (3)$$

が要求される。Event horizon 上で定義される温度は、(3) 式の関係があるので

$$k_B T = \frac{\hbar c \sqrt{f'(a)g'(a)}}{4\pi} = \frac{\hbar c g'(a)}{4\pi} \quad (4)$$

で与えられる。これは、線素 (2) 式を $r = a$ 近傍で展開したとき、時間方向に conical な特異性が生じない要請より得られる。

さて、以上のセットアップだけを用いて Einstein 方程式を event horizon 近傍 $r \in [a, a + da]$ で評価すると、恒等式

$$T d\left(k_B \frac{4\pi a^2}{4G\hbar/c^3}\right) - \frac{c^4}{2G} da = P d\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) \quad (5)$$

を得る。これは熱力学第一法則： $T dS - dE = P dV$ に他ならない。対応するエントロピーは

$$S = \frac{A}{4} = k_B \frac{A}{4G\hbar/c^3}; \quad A = 4\pi a^2 \quad (6)$$

と読み取られる。Boltzmann の原理： $S = k_B \log W$ を思い出せば、系のミクロな自由度がすべて表面に分布していることが推察される (面積則)。

2.2 熱力学第一法則 → Einstein 方程式

この導出法では、horizon のエントロピーが表面積に比例するという、いわゆる**ホログラフィック原理**を仮定する：

$$S = \alpha A. \quad (7)$$

定数 α は最後に、Bekenstein–Hawking エントロピーとの一貫性を損なわないように決定する。さらに、すべての局所 Rindler horizon において熱平衡が実現されていることを想定し、horizon を横切る熱流は温度及びエントロピーと次の Clausius 関係式で結ばれているとする：

$$\delta Q = T dS. \quad (8)$$

今、horizon を通過する熱流はすべて物質場 $T_{\mu\nu}$ が担うとすると、その Killing ベクトルへの射影 $J_\mu =$

$T_{\mu\nu}\xi^\nu$ を horizon と affine パラメータ λ について積分することによって

$$\delta Q = \int_{\mathcal{H}} dS^\mu J_\mu = -\kappa \int_{\mathcal{H}} dA d\lambda \lambda T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \quad (9)$$

と書ける。ここで dA は horizon の面積素、 k^μ は $\xi^\mu = -\kappa \lambda k^\mu$ で定義されるベクトルである。以上が Clausius 関係式の左辺である (図 1)。

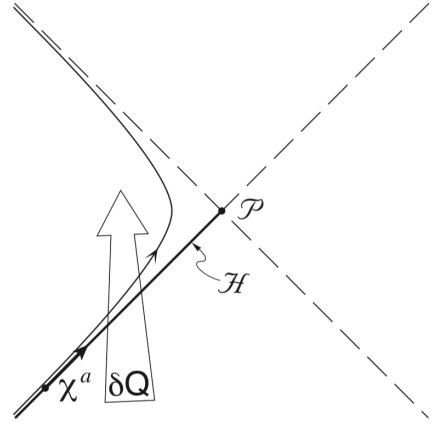


図 1: Clausius 関係式の左辺を与える際のセットアップ。図で χ^a と記されているベクトルは本文での ξ^μ に対応する。T.Jacobson (1995) より引用。

一方、Clausius 関係式の右辺は次のように与えられる。測地線束の膨張率 θ は

$$\theta \equiv \frac{1}{dA} \frac{d}{d\lambda}(dA)$$

で定義されるが、これを積分することによって

$$dA = \int_{\mathcal{H}} dA d\lambda \theta \quad (10)$$

を得る。さらに、 θ の affine parameter に関する発展は、Raychaudhuri 方程式

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -R_{\mu\nu} k^\mu k^\nu$$

で規定される。これを積分することで $\theta = -\lambda R_{\mu\nu} k^\mu k^\nu$ を得る。これと (10) 式を (7) 式に代入すれば

$$dS = \alpha \int_{\mathcal{H}} dA d\lambda \theta = -\alpha \int_{\mathcal{H}} dA d\lambda \lambda R_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \quad (11)$$

を得る. (7), (10), (11) 式より

$$\kappa \int_{\mathcal{H}} d\text{Ad}\lambda \lambda \left(T_{\mu\nu} - \frac{\hbar\alpha}{2\pi k_B} R_{\mu\nu} \right) k^\mu k^\nu = 0$$

を得るので, f を適当な関数として

$$T_{\mu\nu} - \frac{\hbar\alpha}{2\pi k_B} R_{\mu\nu} = f g_{\mu\nu}$$

が要求される. 両辺に ∇^μ を作用させて縮約 Bianchi 恒等式 $\nabla^\mu R_{\mu\nu} = (1/2)\nabla_\nu R$ を用いれば f が決まり, その際の積分定数 Λ を導入すると, 結果

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{2\pi k_B}{\hbar\alpha} T_{\mu\nu} \quad (12)$$

が出る. Einstein 方程式との一致を得るには $\alpha = k_B/4G\hbar$ と取ればよいが, これは Bekenstein-Hawking エントロピーの比例定数と consistent である.

3 \mathcal{L}_{EH} が持つホログラフィック構造

前節では Einstein 方程式と時空に内在する熱力学的な性質の関係を議論したが, その際に出てきたホログラフィック構造と同様の構造が, 重力場を記述する Einstein-Hilbert 作用に含まれていることを見る. (1) 式を再掲すると

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi G} \int dx^4 \mathcal{L}_{\text{EH}}, \quad \mathcal{L}_{\text{EH}} = \sqrt{-g} R. \quad (13)$$

この Lagrangian 密度 \mathcal{L}_{EH} は, **バルク項 \mathcal{L}_B と表面項 \mathcal{L}_S** に分解できる:

$$\mathcal{L}_{\text{EH}} = \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_S. \quad (14)$$

ここに

$$\mathcal{L}_B = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\Gamma^\lambda_{\mu\rho} \Gamma^\rho_{\nu\lambda} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\rho\lambda}), \quad (15)$$

$$\mathcal{L}_S = \partial_\lambda [\sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda} \Gamma^\nu_{\mu\nu})] \quad (16)$$

である. そして, これらは**ホログラフィック関係式**と呼ばれる以下の関係式によって結びついている:

$$\sqrt{-g} \mathcal{L}_S = -\partial_\lambda \left[g_{\mu\nu} \frac{\delta \mathcal{L}_B}{\delta (\partial_\lambda g_{\mu\nu})} \right]. \quad (17)$$

すなわち, 表面の Lagrangian のみからバルクの Lagrangian, ひいては系全体の作用汎関数を知ることができるのである.

4 エントロピック重力理論

引き続き, エントロピーに着目した重力理論を考える. 統計力学では, 系のエントロピーを最大化するようにミクロな自由度が動き, その結果として力が創発される現象がよく見られる. これを手掛かりにして, 今, 時空のエントロピーが最大化するように歪みが規定されることを仮定する:

$$S = - \int d^4x \sqrt{-g} (4P_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} \nabla_\rho \xi^\mu \nabla_\sigma \xi^\nu - T_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu). \quad (18)$$

ここで ξ^μ は時空の歪み (displacement) を表すベクトルである. エントロピー S をこの歪み ξ^μ について変分すると, Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (19)$$

が得られる. ここでも, 宇宙項が積分定数として自然に現れる. 変分変数が $g_{\mu\nu}$ でなく ξ^μ であった以上の結果から, 次のことが示唆される. すなわち, **計量 $g_{\mu\nu}$ はもはや基本的な力学変数ではなく, 重力は時空のエントロピーが最大化した結果として現れた創発的な (emergent) 力である.**

簡単な例として, Newton 重力をこの観点から導出する. 今, 図 2 の状況を考える. 質点 m は重力源 M から力を受けるが, 落下しないように外力が加えられているとする. このとき, 質点 m は温度

$$k_B T = \frac{\hbar|a|}{2\pi c} \quad (20)$$

の熱浴に浸かっていることを認識する. 他方, 重力源 M の相対論的なエネルギーは, ホログラフィック原理と合わせて

$$E = M c^2 = \frac{N}{2} k_B T \quad (21)$$

で与えられるとする. 二番目の等号で, 重力源 M のミクロな自由度がすべて表面に分布していることを仮定した. この自由度 N は, ホログラフィック原理を採用すると

$$N = \frac{c^3}{G\hbar} \mathcal{A} \quad (22)$$

と与えるのが妥当である. 以上 (20)–(22) 式を組み合わせれば, 質点 m が受ける力として

$$F \equiv ma = -G \frac{Mm}{r^2} \quad (23)$$

の関係を得る。以上の考察は、我々に次の示唆を与えてくれる。すなわち、**熱浴 T によってエントロピックな力が生じ、我々はこの力を重力と認識している。**

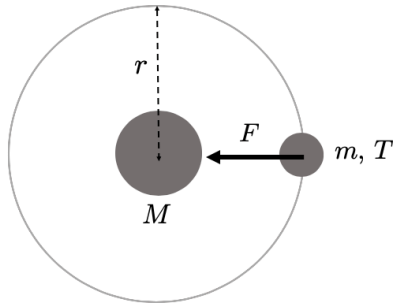


図 2: Entropic 力としての Newton 重力。

5 Conclusion

まず第 2 節の前半では時空の熱力学的な側面を見るとともに、その過程でエントロピーが horizon の表面積に比例する事実を見た。これはホログラフィック原理の一例である。後半では逆に、熱力学的な考察から Einstein 方程式を導出した。続く第 3 節では、ホログラフィック原理に関連して、重力場を記述する Einstein-Hilbert 作用にホログラフィック的な構造が内在していることを見た。

第 4 節ではエントロピーに注目しつつも視点を変えて、時空の振る舞いとそのエントロピー最大化の要請から決まる立場を採った。これは熱力学・統計力学的視点から Einstein 方程式を導出する第二の方法を与えた。ここではもはや、 $g_{\mu\nu}$ は基本的な力学変数の資格を剥奪されることが示唆された。簡単な計算で可能な例として、Newton 重力をホログラフィック原理の下で再現した。

6 所感

以下に述べるのは個人的な所感であり、review の内容ではないことに注意いただきたい。エントロピーに関する面積則を示す (6) 式を見ると、そこには k_B, \hbar, c という基礎物理定数がすべて含まれている。 G はど

うであろうか？ 重力を基本的な力とみなすのであれば、これも基礎物理定数の枠組みに入れるのが妥当である。しかし、重力を創発的な力とみなすエントロピック重力の立場では、 G にはもはや基礎物理定数の資格がなく、むしろ e と同様に結合定数の枠組みに入れるべきであろう。実際、 G を結合定数と見た 1-loop 近似から Newton 理論が再現される事実はこの洞察を裏付ける。

重力がどのような力であるかは、遠い将来に観測によって明らかにされるであろう。しかし量子化された重力を扱う理論が完成していない現段階では、量子化を必要としないエントロピック的な立場からも重力の性質を浮き彫りにしていくことは重要であると思われる。本 review 発表が、時空に関する新たな知見の誕生に少しでも貢献することができれば幸いである。

Acknowledgement

度重なる議論に忍耐強く付き合ってくださいのみならず、ポスター作成の段階でいくつもの有益な助言をくださった横山教授、鎌田助教、同期のみなさんに感謝します。また、このような発表の場を設けてくださった夏の学校スタッフのみなさん、及び各種支援をいただいたみなさまに感謝します。本発表に興味を持っていただき、議論を深めてくださる方々が現れることを予想しますが、そのような方々についても合わせて感謝します。

Reference

- T.Padmanabhan 2010 *Thermodynamical aspects of gravity: new insights*, Rep. Prog. Phys. 73, 046901
- T.Jacobson 1995 *Thermodynamics of Spacetime: The Einstein Equation of State*, arXiv:gr-qc/9504004
- D.Moustos 2017 *Gravity as a thermodynamic phenomenon*, arXiv:gr-qc/1701.08967
- E.Verlinde 2011 *On the origin of gravity and the laws of Newton*, JHEP, 04, 029

c7

ブラックホール内部の質量パラメータ・
インフレーションと宇宙検閲官仮説
近畿大学大学院 総合理工学研究科
竹林 蒼真

ブラックホール内部の質量パラメータ・インフレーション と宇宙検閲官仮説

竹林 蒼真 (近畿大学大学院 総合理工学研究科)

Abstract

古典的な一般相対論における最も根本的な未解決問題の一つは、ブラックホール (BH) と密接な関係がある「宇宙検閲官仮説」である。これについて最初の重要な考察は、Poisson と Israel(1989 年) によるもので、BH 内部のが、「質量パラメータのインフレーション」と呼ばれる現象により不安定になることが示された (Pisson & Israel (1989))。BH 時空で光の放射を考えると、無限遠に飛んでいく光と BH に落ち込んでいく光がある。BH に落ちていく方の光は、コーシー・ホライズンでそのエネルギー密度が無限大に青方偏移する。しかし、この効果は BH の外部にいる観測者からは外部ホライズンにより因果的に切り離されているので、BH 外部のエネルギー密度は有限なままになる。今発表では、Kerr-Newman 解と似た構造をもつ Reissner-Nordstrom 解の質量パラメータ・インフレーションについて、Poisson-Israel (1990 年) の研究を紹介し、宇宙検閲官仮説についての最新の研究 (Luna (2014)) も紹介する。

ホライズン

1 Introduction

アインシュタインの一般相対性理論の未解決問題の 1 つ、強い宇宙検閲官仮説 (Strong Cosmic Censorship) を Kerr-Newman 時空で保つ為にはいくつかの摂動を考える必要がある。その一つに質量パラメータのインフレーション (Mass Inflation) と呼ばれる現象がある。

2 Weak Cosmic Censorship

一般相対性理論によると、重力崩壊の終点は BH であると言われていて、時空特異点は BH の外部のホライズン (Event Horizon) に隠されているという主張を弱い宇宙検閲官仮説 (Weak Cosmic Censorship) という。つまり、遠方の観測者から見えるような裸の特異点は存在しないという主張である。

3 Strong Cosmic Censorship

一方、無毛定理によると、重力崩壊でできる BH は質量、角運動量、電荷の 3 つのパラメータで記述できる Kerr-Newman BH に限られる。Kerr-Newman BH は一般に Event Horizon(以下 EH) の他に内部のホライズン (Cauchy Horizon) を持つと言われている。しかし、Cauchy Horizon(以下 CH) は、そこを越えると物理学の初期値問題が解けなくなる境界なので、現実の宇宙に存在しないという主張が強い宇宙検閲官仮説 (Strong Cosmic Censorship) である。

4 Reissner-Nordstrom solution

一般相対性理論の無毛定理によると、重力崩壊でできるブラックホールは Kerr-NewmanBH に限られるが、Kerr-Newman 解は解析が難しいので構造が似ている Reissner-Nordstrom 解を考える。

$$ds^2 = -f_0 dt^2 + f^{-1} dr^2 + d\Omega^2$$
$$f_0 = 1 - \frac{2m_0}{r} + \frac{e^2}{r^2} \quad (1)$$

ここで、は質量パラメータ m を $m = m_0$ (定数) としているが、BH 時空での光的粒子の放射を考える

と、質量パラメータは時間や距離の関数になる。そこで新しく Eddington-Finkelstein 座標というものを以下のように定義すると、

$$\begin{aligned} u &= -t + r^* \quad , \quad v = t + r^* \\ r^* &= \int \frac{dr}{f} \end{aligned} \quad (2)$$

BH に落ち込んでいく光的粒子の質量パラメータ m_{in} は v の関数で書け、計量も以下のように書き直せる。

$$\begin{aligned} ds^2 &= dv(2dr - f_{\text{in}}dv) + r^2 d\Omega^2 \\ f_{\text{in}} &= 1 - \frac{2m_{\text{in}}(v)}{r} + \frac{e^2}{r^2} \end{aligned} \quad (3)$$

これを (ingoing の) Vaidya solution という。同様に、 r と u を用いた (outgoing の) Vaidya solution は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} ds^2 &= du(2dr - f_{\text{out}}du) + r^2 d\Omega^2 \\ f_{\text{out}} &= 1 - \frac{2m_{\text{out}}(u)}{r} + \frac{e^2}{r^2} \end{aligned} \quad (4)$$

5 Cauchy Horizon

(3) 式より $f_{\text{in}} = 0$ となる時、 r はホライズンと呼ばれる。

$$r_{\pm} = m_{\text{in}}(v) \pm \sqrt{m_{\text{in}}(v)^2 - e^2} \quad (5)$$

このとき、符号が正の r_+ は Event Horizon(EH)、符号が負の r_- は Cauchy Horizon(CH) と呼ばれる。(5) 式を見れば、 $m_{\text{in}}(v) \rightarrow \infty$ で $r_- \rightarrow 0$ となることがわかる。つまり、Mass Inflation が起きると CH は特異点 ($r = 0$) に落ち込むということがわかった。

6 Mass Inflation

エネルギー・運動量テンソル T_{ab} を以下のように決め、(ρ_{in} はエネルギー密度)

$$T_{ab} = \rho_{\text{in}} l_a l_b, \quad l_a = -\partial_a v \quad (6)$$

The charged Vaidya solution((3) 式) を用いると、 $m_{\text{in}}(v)$ の変化量 $\frac{dm_{\text{in}}}{dv}$ は以下のように書ける。

$$\frac{dm_{\text{in}}(v)}{dv} = 4\pi r^2 \rho_{\text{in}} \equiv L_{\text{in}}(v) \quad (7)$$

次にアインシュタイン方程式から導ける場の方程式

$$\square m = -(4\pi)^2 r^3 T^{ab} T_{ab} \quad (8)$$

と、クルスカール座標 (U, V) を用いると、質量パラメータ $m(U, V)$ は

$$\begin{aligned} m(U, V) &= \int \int \frac{L_{\text{in}}(V') L_{\text{out}}(U')}{r e^{2\sigma'}} dU' dV' \\ &+ m_{\text{in}}(V) + m_{\text{out}}(U) - m_0 \end{aligned} \quad (9)$$

と書ける。ここで、CH の近傍で $L_{\text{in}}(V)$ を積分すると

$$\int L_{\text{in}}(V) dV \sim v^{-p} e^{\kappa_0 v} \quad (10)$$

となる。($p \geq 12$, κ_0 は定数)

よって、 $L_{\text{out}} \neq 0$ の条件の下で質量パラメータは CH の近傍で Mass Inflation を起こすことが分かった。

7 R. Luna 達の数値解析 (2019)

R.Luna 達は正の宇宙項を導入したアインシュタイン方程式より、CH 付近での Mass Inflation の数値解析を行った。(Luna (2014))
作用は以下で書ける。

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda - F^2 - 2\phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} - 2\mu^2 \phi^2)$$

初期データとして $M_0 = 1$, $\Lambda = 0.06$ を与えて数

LUNA, ZILHAO, CARDOSO, COSTA, and NATARIO PHYS. REV. D **99**, 064014 (2019)

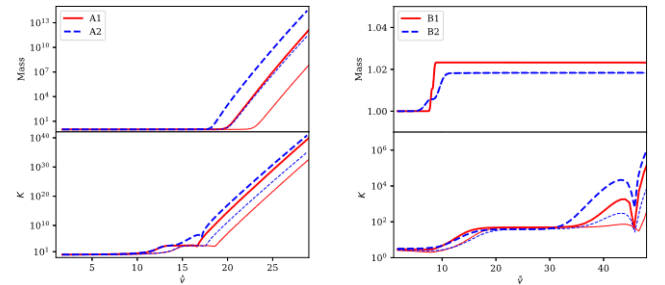


FIG. 2. Mass function (10) and Kretschmann scalar as functions of \bar{v} for configurations A1 (red solid line) and A2 (blue dashed line). Thin lines are evaluated at $u = u_{\text{BH}} + 1$ and thick lines are evaluated at $u = u_{\text{BH}} + 2$. These results are consistent with the existence of mass inflation leading to a weak singularity.

FIG. 3. Mass function (10) and Kretschmann scalar as functions of \bar{v} for configurations B1 (red solid line) and B2 (blue dashed line). Thin lines are evaluated at $u = u_{\text{BH}} + 1$ and thick lines are evaluated at $u = u_{\text{BH}} + 2$.

図 1: R. Luna et al, Phys. Rev. D 99, 064014 (2019) から引用

値計算を行ったのが図 1 である。図 1 の左は $Q =$

0.9000(= 0.890 Q_{\max})、 $\mu = 0$ 、右は $Q = 1.0068(= 0.966Q_{\max})$ 、 $\mu = 0$ のもとで計算を行っている。縦軸の質量パラメータ M と、横軸の左 Eddington-Finkelstein 型の null coordinates v は以下で定義される。

$$M = \frac{r}{2} \left(1 + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 + 2e^{-2\sigma} r_{,u} r_{,v} \right) \quad (11)$$

$$\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right) dv = r_{,v} dv \quad (12)$$

左図では Mass Inflation が起きているが、右図では Mass Inflation は起きていない。右図は BH が持つことのできる電荷 (Q_{\max}) に近い大きさの電荷を持った BH(Near extremal BH) である。つまり、Near extremal BH は S.C.C の反例となっている。

8 今後の展望

今回紹介した研究は極端に理想化された Reissner Nordstrom 時空に、宇宙項や光的粒子の流入という摂動を加えたものであった。現在までに様々な条件での数値解析が研究されてきたがどれも Strong Cosmic Censorship を示すようなものにはなっていない。一般相対論を信じるものとして、さらなる摂動を考えた研究に挑戦してみたい。

Reference

R. Luna et al, Phys. Rev. D 99, 064014 (2019)

E.Poisson &W.Israel, Phys. Rev. D5,1990 (1989)

c8

球形ブラックホールが及ぼす質量イン
フレーション

近畿大学大学院 総合理工学研究科

村島 崇矩

球形ブラックホールが及ぼす質量インフレーション

村島 崇矩 (近畿大学大学院 総合理工学研究科)

Abstract

一般相対論では、定常ブラックホールは一般に質量、電荷、角運動量という3つの特徴しか持たないことが理論的に証明されている。質量のみをもつシュヴァルツシルト・ブラックホールは単純であるが、電荷や角運動量をもつカー・ニューマン・ブラックホールは一般にイベント・ホライズン内部にコーシー・ホライズンと呼ばれる2つ目のホライズンを持つことが分かっている。「強い宇宙検閲仮説」はこのコーシーホライズンを否定するものである。コーシーホライズンの不安定性は「強い宇宙検閲仮説」の支持となる。本編では、コーシーホライズンの不安定性を引き起こす質量インフレーション現象を指摘した Poisson と Israel(1989) の先駆的研究を紹介する。

1 Introduction

本編では荷電球対称ブラックホールを表す Rissner-Nordstrom 解を考える。Rissner-Nordstrom ブラックホールは一般に2つのホライズンをもつ。1つは外部のイベントホライズンでもう1つは内部にあるコーシーホライズンである。コーシーホライズン近傍での質量インフレーション現象をみるためにエネルギー運動量テンソルを動径方向に対して内向き働くベクトルと外向きに働くベクトルにわけて解析を行っていく。Rissner-Nordstrom 計量にブラックホール外部から入射する光的流体を考えることで質量インフレーションを表す式を導出する。最後に回転を伴う Kerr ブラックホールのコーシーホライズン近傍で質量インフレーションが起こるのかを考察する。

2 質量インフレーションを表す式の導出

Rissner-Nordstrom 計量は以下のように与えられる。

$$ds^2 = -f_0 dt^2 + f_0^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1)$$

$$f_0 = 1 - \frac{2m_0}{r} + \frac{e^2}{r^2}, \quad (2)$$

$$d\Omega^2 = (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3)$$

(1) に次のような光的座標系を導入する。

$$u = -t + \int \frac{1}{f_0} dr, \quad v = t + \int \frac{1}{f_0} dr, \quad (4)$$

$$U = -e^{\kappa_0 u}, \quad V = -e^{\kappa_0 v}, \quad (5)$$

$$\left(\kappa_0 = -\frac{\dot{f}_0}{2} \right)$$

とおくと (1) の計量は以下のように書き換えることができ、Rissner-Nordstrom 時空の大域的な構造を見ることが出来る。

$$ds^2 = \frac{f_0}{2\kappa_0^2} UV dU dV. \quad (6)$$

質量インフレーションを確認するには、エネルギー運動量テンソルを動径方向に内向きの光的ベクトル n_a と外向きの光的ベクトル l_a を用いて

$$T_{ab} = \rho_{in} l_a l_b + \rho_{out} n_a n_b. \quad (7)$$

(ρ = エネルギー密度) と分けて考える必要がある。計量を以下のように書き換えよう。

$$ds^2 = \frac{f_0}{2\kappa_0^2} UV dU dV = -2e^{2\sigma} dU dV. \quad (8)$$

質量パラメーターは $m(U, V)$ 、(7)(8) 式を使って計算すると次式で与えられる。

$$m(U, V) = \int_{U_1}^U \int_{V_1}^V (re^{2\sigma})^{-1} L_{in} L_{out} dU dV, (9)$$

$$L_{in}(V) = \left[\frac{dv}{dV} \right]^2 \frac{dm_{in}(v)}{dv},$$

$$L_{out}(U) = \left[\frac{du}{dU} \right]^2 \frac{dm_{out}(u)}{du}.$$

となる。特に $L_{in}(V)$ の積分は先行研究 [1] により、次のように振る舞うことがわかる。

$$\int_{V_1}^V L_{in}(V) dV \sim v^{-p} e^{\kappa_0 v}. (10)$$

p は重力波の場合は $p = 12$ となる。コーシーホライズン $V = 0 (v \rightarrow \infty)$ の近傍で (9) の被積分関数に含まれる $re^{2\sigma}$ が有解 ($v \rightarrow \infty$ で $re^{2\sigma} \neq \infty$) であれば、質量パラメーター $m(U, V)$ は (10) に従って発散する。つまり質量インフレーションを起こすことが分かる。

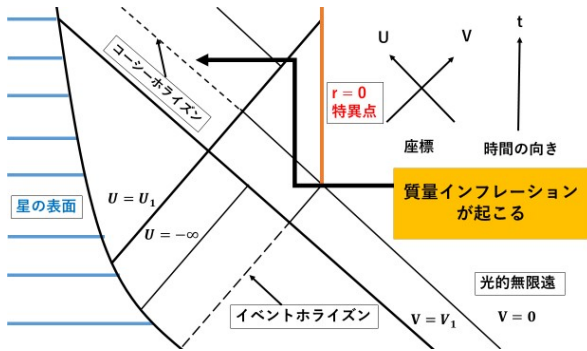


図 1: 質量インフレーションを起こす時空の共形図

実際 (9) はコーシーホライズン近傍で

$$\int_{V_1}^V L_{in}(V) dV \sim (\kappa_0 v)^{-p} e^{\kappa_0 v}, (11)$$

$$re^{2\sigma} \approx \frac{r_0^2}{\kappa_0^2}. (12)$$

と近似できるので、積分すると

$$m(U, V) = m_0 \epsilon^2 \Gamma(U) (\kappa_0 v)^{-12} e^{\kappa_0 v}, (13)$$

$$\Gamma(U) = \kappa_0 m_0^{-1} \int_{U_1}^U L_{out}(U') dU'.$$

となる。 ϵ は任意の無次元定数である。質量インフレーションは (13) より指数関数的な膨張をすることがわかる。この結果は Kerr ブラックホールのコーシーホライズンにも適用することができる。Kerr ブラックホールは質量と角運動量 J の物理量によって記述されている。 J はカーパラメータ $a = \frac{J}{m}$ に従うため、質量インフレーションが起こるとコーシーホライズン近傍での時空構造は質量インフレーションが起こる場合の Rissner-Nordstrom ブラックホールのコーシーホライズン近傍の時空構造とほぼ同等の振る舞いを示す。

3 結論

コーシーホライズン近傍で質量インフレーションが起こることにより、コーシーホライズンの不安定性を示すことができた。また Rissner-Nordstrom ブラックホールから導いたこの結果は、同じコーシーホライズンを持つとされている Kerr ブラックホールにおけるコーシーホライズンの不安定性を示すこともできる。したがって、質量インフレーションという結果はコーシーホライズンの不安定性から強い宇宙検閲官仮説を支持していると言える。

Reference

[1] E. Poisson, & W. Israel, Phys. Rev. D41, (1989) 1990

c9

A new derivation of string-string
interactions

東京工業大学理学院物理学系物理学

コース

藤倉 浩平

A new derivation of string-string interactions

藤倉 浩平 (東京工業大学理学院物理学系物理学コース)

Abstract

初期宇宙で、対称性が自発的に破れると位相欠陥が生成される。特に、高エネルギー領域がひも状のときは宇宙ひもと呼ばれている。宇宙ひもは巨大なエネルギーを持つので、そのエネルギー密度 (数密度) の時間発展を説明することは素粒子論的な観点からも非常に興味深い。宇宙ひもの数密度の時間発展は宇宙ひも同士の間相互作用に強く依存している。この研究では、宇宙ひもの相互作用を説明する新たな手法について触れる。

1 Introduction

素粒子理論・物性理論において自発的対称性の破れは非常に大きな貢献をしてきた。興味深いことに初期宇宙で自発的対称性の破れが起きると、その破れの群のパターンによって、位相欠陥を生成することが知られている。[1] ここでは、数ある位相欠陥のうち宇宙ひもに着目する。宇宙ひものテンション (単位長さあたりのエネルギー) は対称性の破れのスケールと同じ order であると見積もられている。この宇宙ひものテンションは Cosmic Microwave Background (CMB) の観測や、宇宙ひものループから放出される重力波の検出により、強い制限がかかっている。つまり、素粒子論由来の具体的な模型が宇宙論的な観測により検証できることを示している。

相転移後に宇宙ひもが生成されると、宇宙ひもは蜘蛛の巣状のネットワーク (ストリングネットワーク) を形成する。ストリングネットワークのダイナミクスは、宇宙ひもの間の相互作用に強く依存することが知られている。具体的に、二つの宇宙ひもが衝突する状況を考えよう。二つの宇宙ひもが存在する平面内で topological charge conservation を考えると、二つの宇宙ひもは互いのペアを交換する”組み換え”が起きる。(同様に、自分自身と交差し、ループを供給する現象も起きる。) 二つの宇宙ひもの間に斥力が働く場合は、組み換えが起こった後、二つの宇宙ひもは離れ、また衝突するという過程を繰り返す。このとき、宇宙ひものエネルギー密度の時間発展は scaling 則に従うことが示され、ある程度ストリングネットワークのダイナミクスが判明している。

一方で、二つの宇宙ひもの間に引力が働く場合は

どうなるであろうか。Ref. [2] では、local string でゲージ結合定数がスカラー 4 点結合に比べて大きい時、二つの宇宙ひもの間には引力が働くことが示され、引力が働くような状況が存在することが分かった。その上、二つの宇宙ひもが衝突する際、(宇宙ひもの衝突角度や、衝突速度などの種々のパラメータに依存するが、) 二つの宇宙ひもは離れず、束縛状態を生成されることが数値的に検証された。このとき、宇宙ひものエネルギー密度の時間発展は scaling 則に従うかどうかは非自明であり、ストリングネットワークのダイナミクスは斥力の場合と異なる結果になると予測される。その場合、新しい制限を素粒子論の模型に課することができるかと期待される。

これまで述べてきたように、ストリングネットワークのダイナミクスを知る第一ステップは二つの宇宙ひも間の相互作用の形を正しく解析することである。本研究では、宇宙ひもの間に働く相互作用の導出方法を説明し、その後、新しい導出方法について簡単に触れた上で、それらの応用を考える。

2 string solution

具体例として、以下の Abelian-Higgs 模型の Lagrangian:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - |D_{\mu}\phi|^2 - V(\phi),$$
$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - \eta^2)^2. \quad (1)$$

で記述される宇宙ひも (local string) について着目する。[3] この Lagrangian の運動方程式は

$$\left(\square - \frac{\lambda}{2} (|\phi|^2 - \eta^2) \right) \phi = 0, \quad (2)$$

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} + e j^\mu + 2e^2 |\phi|^2 A^\mu = 0, \quad (3)$$

となる。この微分方程式の境界条件は

$$\phi = \eta, \quad D_\mu \phi = 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad (4)$$

である。宇宙ひもを記述する解に興味があるため、winding number が n (自然数) の軸対象性を課した ansatz

$$\phi = (\eta - f(r)) e^{in\theta}, \quad A_\theta(r) = \left(Q(r) + \frac{n}{er} \right). \quad (5)$$

を仮定する。 $f(r)$ 及び $Q(r)$ に対する運動方程式は、十分遠方で $Q(r)$ 及び $f(r)$ の非線形項が無視できるという近似の下で

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \left(\frac{n^2}{r^2} + m_e^2 \right) \right) Q(r) = 0, \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - m_\eta^2 \right) f(r) = 0, \quad (7)$$

となる。ここで、 m_e と m_η はそれぞれ、真空周りのゲージ場、スカラー場の質量である。これらを満たす解は以下で与えられる。

$$Q(r) = k_e K_1(m_e r), \quad f(r) = k_s K_0(m_\eta r) \quad (8)$$

ここで $K_0(x)$, $K_1(x)$ はそれぞれ 0, 1th order の変形ベッセル関数を表し、 x が十分大きいところでは以下の漸近形

$$K_{0,1}(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) \right], \quad x \gg 1. \quad (9)$$

で近似的に表すことができる。物理的に Eq. (8) はゲージ場、スカラー場の配位の典型的な長さはそれぞれのド・ブロイ波長程度であることを示している。

3 string-string interaction

二本の (距離 d で離れた静止している) 宇宙ひもが与えられた (図 1 参照) とき、両者の間に働く力は斥力なのか、引力なのかを決定する手法を具体的に

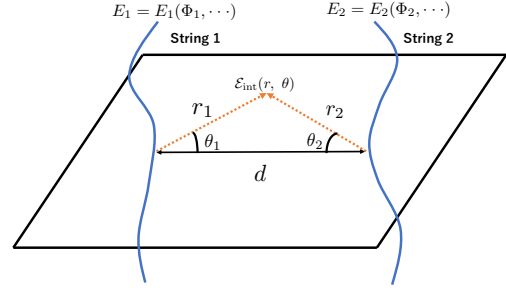


図 1: セットアップの説明

説明しよう。簡単のため、以下では二つの宇宙ひもが平行であると近似し、winding number が 1 で同じ向きを向いている状況を考え、単位長さあたりのエネルギーを評価する。Ref. [2] では、全系の field configuration (Φ, A) が各々の宇宙ひもの configuration の重ね合わせで記述されるという superposition ansatz:

$$\Phi = \phi_1 \phi_2 / \eta, \quad A^\mu = A_1^\mu + A_2^\mu, \quad (10)$$

の下で、単位長さのエネルギー E_{int} は以下のように評価されることを示した。

$$E_{\text{int}} \simeq 2\pi\eta^2 (K_0(m_e d) - K_0(m_\eta d)). \quad (11)$$

ゲージ場と Higgs 場の質量は Higgs mechanism によって獲得しているので、ゲージ結合定数がスカラー self-coupling よりも大きい時は、ゲージ場の質量がスカラー場の質量よりも重くなる。したがって、このとき、Eq. (11) から距離 d で微分すると、負の値となり、引力となることが理解できる。

4 新しい手法による結果とその応用について

前節で紹介した二本の宇宙ひもの間の力を求める手法では、superposition ansatz を仮定して導出した。本研究では、superposition ansatz を仮定せずに、場の理論の手法を用いて相互作用を導出する手法を考察する。主な idea は次のとおりである。宇宙ひもを太さのない完全な線に近似し、スカラー場とゲージ粒子の塊として扱い、場の理論の手法を用いて、2

本の宇宙ひもの間のポテンシャルを非相対論的極限を取ることで導出する。この idea のもとで計算を進めると、tree level では、前節の結果をきちんと導くことができることを確かめた。

この手法を用いると、superposition ansatz の正当性を確認する必要がなく、local string 以外への拡張は自明になるため、非常に幅広い範囲に適用できる。多くの粒子論的なモデルでは $U(1)$ 対称性が自発的に破れるため、様々な応用が期待される。

Reference

- T. W. B Kibble 1976, J. Phys. A9 (1976) 1387.
- L. M. A. Bettencourt and R. J. Rivers (1995), Phys. Rev. D51 (1995) 1842 [hep-ph/9405222.]
- H. B. Nielsen and P. Olesen, Vortex Line Models for Dual Strings, Nucl. Phys. B61 (1973) 45.

c10

スカラー型ゆらぎから誘起される重力
波のゲージ依存性

立教大学大学院 理学研究科

富川 慶太郎

スカラー型ゆらぎから誘起される重力波のゲージ依存性

富川 慶太郎 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙論的摂動論を 2 次まで考慮するとスカラー型ゆらぎから 2 次の重力波が誘起される。2 次重力波は 1 次とは異なりゲージ依存性がある。しかし、2 次重力波は主に Newtonian gauge でのみ計算されており他の gauge ではあまり計算されていなかった。本発表では状態方程式 $p = w\rho$ の完全流体で占められている宇宙において、スカラー型ゆらぎから誘起される重力波を comoving gauge と Uniform curvature gauge で計算し、2 次重力波のゲージ依存性を定量的に評価する。

1 はじめに

初期宇宙を記述するモデルとして、宇宙が初期に加速膨張するというインフレーションモデルが有力である。インフレーションモデルでは現在の宇宙の構造は量子ゆらぎによって与えられる。この時のゆらぎのテンソル型成分が原始背景重力波となり、現在の宇宙にも満ち溢れていると考えられている。原始背景重力波を観測できれば、初期のテンソル型ゆらぎに関する情報が得られ、インフレーションモデルに制限を加えることができる。また、原始背景重力波とは別にゆらぎのスカラー型成分から摂動の 2 次のオーダーで誘起される 2 次重力波がある (1)(2)。2 時重力波はスカラー型ゆらぎの情報を含むので、観測することでスカラー型ゆらぎのスペクトルに制限を加えることができる。特に、2 次重力波はこれまで制限が緩かった小スケール領域に新たな制限を加えることができる (5)。しかしながら、2 時重力波は 1 次とは異なりゲージ依存性を持っている。にも関わらずこれまでの 2 次重力波に関する研究はほぼ全て単一のゲージ (Newtonian gauge) でのみ議論されてきた。(4) で初めてゲージ依存性が議論され、2 次重力波のエネルギー密度スペクトルのゲージ依存性は顕著であるという結果が得られているが、数値的に解いているので根本的な原因は判明していない。そこで、我々は 2 次重力波のエネルギー密度スペクトルを解析的に求め、ゲージ依存性の原因を明らかにする目的で研究を進めた。

2 方法

2 次重力波の運動方程式を求め、以下の作用と計量

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} R + P(X) \right] \quad (1)$$

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + g_{ij} (dx^i + N^i dt) (dx^j + N^j dt) \quad (2)$$

を考える。ここで $X := -(1/2)(\partial\phi)^2$ である。後に様々なゲージにおける運動方程式を導きたいのでゲージは空間的には固定するが時間的には固定しない。そのため

$$N = 1 + \delta N, \quad N_i = \partial_i \chi, \quad g_{ij} = a^2 e^{2\zeta} (e^h)_{ij}, \\ \phi = \bar{\phi}(t) + \delta\phi \quad (3)$$

とする。ここでスカラー場の運動項の関数を

$$P = cX^{(1+w)/2w} \quad (4)$$

と選ぶ。(4) のように選ぶと状態方程式 $p = w\rho$ を満たす完全流体と等価になることが知られている (3)。このもとで摂動の 3 次のオーダーまで展開して h^{ij} で変分することにより 2 次重力波の運動方程式

$$\ddot{h}_{ij} + 3H\dot{h}_{ij} - \frac{1}{a^2}\partial^2 h_{ij} = \frac{1}{a^2}\Lambda_{ij}{}^{kl} S_{kl} \quad (5)$$

を得る。 $\Lambda_{ij}{}^{kl}$ はトランスバース-トレースレス射影テンソルであり、 S_{kl} にはスカラー型ゆらぎの 2 次の項が含まれている。同様にしてスカラー型摂動で変

分することによりスカラー型ゆらぎの拘束条件と運動方程式を導くことができる。このスカラー型ゆらぎの運動方程式を解くことによって各スカラー型ゆらぎの時間発展を得ることができる。運動方程式 (5) はグリーン関数を用いて解くことができ 2 次重力波の時間発展が得られる。2 次重力波の時間発展が得られれば、2 乗して平均をとることにより 2 次重力波のエネルギー密度スペクトルを求めることができ、

$$\frac{1}{3\mathcal{H}^2} \int_0^\infty dv \int_{|1-v|}^{1+v} du \frac{k^4 v^2}{4 u^2} \left[1 - \left(\frac{1+v^2-u^2}{2v} \right)^2 \right]^2 \mathcal{P}(ku) \mathcal{P}(kv) I^2(u, v, \eta) \quad (6)$$

$$I(u, v, \eta) = \frac{1}{a(\eta)} \int_0^\eta d\eta' a(\eta') \mathcal{G}_k(\eta, \eta') F(u, v, \eta') \quad (7)$$

$$\mathcal{G}_k(\eta, \bar{\eta}) := \frac{\pi}{2} (k\eta)^{1/2} (k\bar{\eta})^{1/2} [Y_{\nu-1}(k\eta) J_\nu(k\bar{\eta}) - J_{\nu-1}(k\eta) Y_\nu(k\bar{\eta})] \quad (8)$$

$$\nu := \frac{3(1-w)}{2(1+3w)} \quad (9)$$

と表される。ここで $\mathcal{P}(k)$ はスカラー型ゆらぎのパワースペクトル、 $F(u, v, \eta)$ はソース項 S_{kl} をスカラー型ゆらぎの遷移関数で表したものである。ゲージによる違いはスカラー型ゆらぎの時間発展とソース項 $F(u, v, \eta)$ の関数系に現れる。以上の作業を時間座標まで固定した Newtonian gauge, Comoving gauge, Uniform curvature gauge の三つのゲージについて解析的に行いゲージ依存性の大きさと評価と原因の解明を試みた。

3 結果

まず、物質優勢期の場合は時間発展の振る舞いが Newtonian gauge の場合と Comoving/Uniform Curvature gauge の場合で大きく異なることが判明した。Newtonian gauge の場合は時間的に一定となるが、Comoving/Uniform Curvature gauge の場合は時間の 4 乗で増幅する項が存在する。この原因は計量の

(時間)×(空間)成分のスカラー型ゆらぎ χ の存在にあるとわかった。

放射優勢期の場合は Comoving gauge の場合と Newtonian/Uniform Curvature gauge の場合で違いが大きくなることが判明した。Newtonian/Uniform Curvature gauge では時間的に一定となるが、Comoving gauge では時間の 2 乗で増幅する項が存在する。放射優勢期の場合に Newtonian/Uniform Curvature gauge の時間発展が一致する理由については考察を進めている最中である。

謝辞

夏の学校を運営して下さった事務局の皆様、支援いただいた皆様に感謝いたします。

Reference

- [1] Kishore N. Ananda, Chris Clarkson, and David Wands, *Cosmological gravitational wave background from primordial density perturbations*, Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology **75** (2007), no. 12, 1–9.
- [2] Daniel Baumann, Paul Steinhardt, Keitaro Takahashi, and Kiyotomo Ichiki, *Gravitational wave spectrum induced by primordial scalar perturbations*, Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology **76** (2007), no. 8, 1–13.
- [3] Lotfi Boubekeur, Paolo Creminelli, Jorge Nori, and Filippo Vernizzi, *Action approach to cosmological perturbations: The second-order metric in matter dominance*, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics **2008** (2008), no. 8.
- [4] Jai-chan Hwang, Donghui Jeong, and Hyerim Noh, *Gauge Dependence of Gravitational Waves Generated from Scalar Perturbations*, The Astrophysical Journal **842** (2017), no. 1, 46.
- [5] Keisuke Inomata and Tomohiro Nakama, *Gravitational waves induced by scalar perturbations as probes of the small-scale primordial spectrum*, Phys. Rev. **D99** (2019), no. 4, 043511.

c11

宇宙論における相転移由来の重力波
東京工業大学理学院 宇宙論グループ
石川 純也

宇宙論における相転移由来の重力波

石川 純也 (東京工業大学理学院 宇宙論グループ)

Abstract

ビッグバン理論では、宇宙は高温で熱平衡にあったとされる。そのような環境では粒子が高いエネルギーをもつために、ゼロ温度で自発的に破れる対称性が、高温で回復することが知られている。宇宙が膨張するにつれて温度が下がり、高温では対称性が成立していたものの、低温になり対称性が破れる。このような対称性の相転移のダイナミクス次第では重力波が生成され得ることを説明する。

1 導入

ビッグバン理論では、高温で熱平衡にあった宇宙が膨張した結果、現在の宇宙が実現したと考えられている。特に、標準模型のエネルギースケールよりも高温であった場合を考えると、標準模型を超えた物理の寄与があったことになる。

現在までの観測から直接的に確かめられているのは、宇宙背景放射が関わるスケールまでで、標準模型を超えた理論は存在を示唆する観測証拠はあるものの、その具体的な指針は定まっていない。

そのため、初期宇宙において標準模型を超えた物理が寄与した観測量があれば、新しい理論を探索する指針になる。このことから、初期宇宙での素粒子論を考えることは素粒子論と宇宙論、双方の発展に不可欠であるといえる。

2 有限温度の場の理論

場の理論で計算される諸量に温度依存性を含ませるには、ゼロ温度での真空期待値をカノニカルアンサンブルを用いた熱平均に置き換えればよい。

ハミルトニアン H を持ち、逆温度 β で熱平衡にある系は、密度演算子 ρ で記述される。

$$\rho = \exp\{-\Phi\} \exp\{-\beta H\} \quad (1)$$

$$\Phi = \log \text{Tr} \exp\{-\beta H\} \quad (2)$$

任意の演算子 O の熱平均 $\langle O \rangle$ は、次のように書かれる。

$$\langle O \rangle = \text{Tr}(O\rho) \quad (3)$$

次に、有限温度での Feynman rules を見る。

グリーン関数を熱平均で定義する。

$$\begin{aligned} G(x', x) &= \langle \phi(x')\phi(x) \rangle \theta(t' - t) + \langle \phi(x)\phi(x') \rangle \theta(t - t') \\ &= G^+\theta(t' - t) + G^-\theta(t - t') \end{aligned} \quad (4)$$

時間の複素並進に対して、熱平均で定義したグリーン関数が周期性を持っていることが示される。

$$G^+(t - i\beta, \vec{x}) = G^-(t, \vec{x}) \quad (5)$$

フェルミオンに対しては、反周期条件が成立している。これらより、熱場のフーリエモードはエネルギー成分が離散化されていることがわかる。

以上より、熱場の Feynman rules は、ゼロ温度の Feynman rules において、運動量積分をフーリエ級数に置き換えたものが対応していることわかる。

具体例として、単一スカラー場の質量補正を見る。ラグランジアンは次の通り。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (6)$$

対応するダイアグラムは図 1 に示したとおりである。

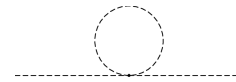


図 1: 単一スカラーでの質量補正のダイアグラム

熱場の Feynman rules でこのダイアグラムを評価すると、温度依存するパートの結果が得られる。

$$\delta m_T \sim \lambda T^2 \quad (7)$$

したがって、高温では T^2 が μ^2 に打ち勝って対称性が回復する。

3 宇宙論における相転移

ゼロ温度では自発的対称性の破れを引き起こすポテンシャルにおいては、高温で対称性の回復を起こす。

初期宇宙では、はじめは高温で対称性が回復しているものの、宇宙膨張で温度が下がり対称性の破れが引き起こされる。つまり、ある臨界温度で対称性が保たれている相から対称性が破れている相への相転移が起きる。

相転移の臨界温度付近での振る舞いは、考えているモデルに強く依存する。ポテンシャルの概形が、モデルに含まれる粒子構成や結合定数の大きさによって決められるからである。

ポテンシャルに極小値が二つ存在する場合には、1次相転移が起きることが知られている。このとき、原点からポテンシャルの安定点への遷移はトンネル効果によって実現される。宇宙空間のある1点で安定点への遷移が起きたとき、2つの相を区切る泡が形成される。相転移の進行は泡が膨張することで実現され、膨張した泡同士が衝突して相転移が終わる。

4 重力波の生成

重力波の自由度は、膨張宇宙を記述する FRW 計量 (Friedmann-Robertson-Walker metric) の摂動に含まれる。

エネルギー運動量テンソルの等方成分は宇宙膨張に寄与し、非等方成分は重力波のソースとなる。

1次相転移は泡の膨張で進行する。非等方的な物質の分布は、泡の衝突、もしくは膨張過程の粗密によって実現され、これらが重力波のソースとなる。

5 今後の展望

加速器実験で確かめられている標準モデルのエネルギースケールは 1TeV である。これを超えるエネルギー領域では、超対称性理論をはじめとした様々

な理論モデルが存在する。今後の展望としては、標準モデルを超えた理論について相転移や重力波を見ていこうと考えている。

Reference

M.Quiros [hep-ph/9901312]

C.Grojean and G.Servant

Phys.Rev.D75:043507(2007) [hep-ph/0607107]

c12

Reheating after the hybrid Higgs inflation

早稲田大学大学院 先進理工学研究科

佐藤 星雅

Reheating after the hybrid Higgs inflation

佐藤 星雅 (早稲田大学大学院 先進理工学研究科)

Abstract

素粒子標準模型内の粒子のみで記述される Inflation モデルは Higgs inflation のみである。このモデルは宇宙背景放射の観測結果から重力との非最小結合が必要である。非最小結合には質量項タイプと運動項タイプの結合があり、これら 2 つが同時に存在するモデルが Hybrid Higgs inflation である。一般に運動項タイプの結合は inflation 後の加熱期に Higgs 場の音速の 2 乗が負になる問題がある。しかし、運動項タイプのみが量子重力の効果として現れないのは不自然である。本研究ではこのモデルの再加熱期を解析する。まず初めに、質量項タイプによってこの不安定性が回避可能か議論しその条件を求める。次に、粒子生成の解析も行い、Higgs 場から W boson を経て放射優勢となるときの宇宙の温度を評価した。

1 Introduction

Inflation 理論は宇宙背景放射 (CMB) の観測結果を説明しうる点から広く受け入れられ、盛んに研究が行われている。CMB の一様性から inflation は scalar 場によって引き起こされたと考えられる。現在、存在が確認された素粒子は素粒子標準模型のみであり、scalar 場は Higgs 場のみである。しかし単純に Higgs 場をインフラトンと仮定すると CMB の観測結果と矛盾する点がある。そこで考えられたのが重力との非最小結合である。曲がった時空上で scalar 場を量子化すると非最小結合が自然に導入されることから、量子重力の寄与として高エネルギーでの存在が期待されている。これまで様々な形の結合が提唱されてきたが、scalar 場の微分を含む運動項タイプと含まない質量項タイプに大別できる。これまでの研究ではこれらのタイプのどちらから優勢な場合のみ解析がほとんどであった。一方で Hybrid Higgs inflation は 2 つのタイプが同程度の割合で寄与する場合も解析され、CMB との一致も確認されている (S.Sato, & K.Maeda (2018))。そこで本研究ではこのモデルの再加熱期での振る舞いを解析する。運動項タイプの結合によって引き起こされる不安定性が質量項タイプによって回避可能か議論し、再加熱期の粒子生成の解析、放射優勢になる際の宇宙の温度を求める。

2 Hybrid Higgs inflation

Hybrid Higgs inflation (S.Sato, & K.Maeda (2018)) の作用は以下のように与えられる。

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_P^2 - \xi h^2}{2} R - \left(g^{\mu\nu} - \frac{G^{\mu\nu}}{M^2} \right) \frac{\partial_\mu h \partial_\nu h}{2} - V(h) \right], \quad (1)$$

ここで h は Higgs field を、 V はそのポテンシャルをそれぞれ表す。

$$V(h) = \frac{\lambda}{4} h^4. \quad (2)$$

宇宙のを記述する計量として平坦な Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker 計量

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 dx^i dx_i, \quad (3)$$

を採用する。 a は scale factor である。これを作用 (1) に代入すると、

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-3H^2 (M_P^2 - \xi h^2) + \left(1 + \frac{3H^2}{M^2} \right) \frac{\dot{h}^2}{2} + 6\xi H h \dot{h} - V(h) \right], \quad (4)$$

となる。 $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ は Hubble parameter である。ここで dot は t 微分を表す。これを変分することで基礎

方程式が以下のように得られる。

$$\left(1 + \frac{3H^2}{M^2}\right) \ddot{h} + 3H \left(1 + \frac{3H^2 + 2\dot{H}}{M^2}\right) \dot{h} + 6\xi (\dot{H} + 2H^2) h + \frac{dV}{dh} = 0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & (3H^2 + 2\dot{H}) (M_P^2 - \xi h^2) + \left(1 - \frac{3H^2}{M^2} - 4\xi\right) \frac{\dot{h}^2}{2} \\ & - V(h) - \frac{1}{M^2} \frac{d}{dt} (H\dot{h}^2) - 2\xi h \ddot{h} - 4\xi h \dot{h} H = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

$$H^2 = \frac{1}{3(M_P^2 - \xi h^2)} \left[\left(1 + \frac{9H^2}{M^2}\right) \frac{\dot{h}^2}{2} + 6\xi h \dot{h} H + V(h) \right]. \quad (7)$$

基礎方程式を解くことで観測量が得られる (図 1)。

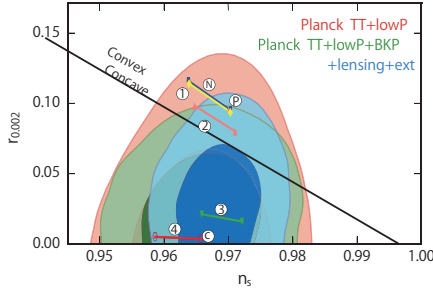


図 1: CMB のスペクトラム指数観測の制限は Planck2018(Planck Collaboration (2018)) を用いた。

3 Gradient instability

Hybrid Higgs inflation の再加熱期の解析は困難である。その原因は gradient instability と呼ばれる音速の 2 乗が負になることで生じる不安定性である。一時的にでも音速の 2 乗が負になると、その時間スケールに応じた波数の摂動が指数関数的に膨張し、摂動論が破綻してしまい、解析不可能となる。

Hybrid Higgs inflation の摂動を解析する。ADM formalism より、

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \gamma_{ij} (dx^i + N^i dt) (dx^j + N^j dt), \quad (8)$$

ここで摂動を

$$N = 1 + \alpha, \quad N_i = \partial_i \beta \quad (9)$$

$$\gamma_{ij} = a^2(t) e^{2\zeta} \left(\delta_{ij} + h_{ij} + \frac{1}{2} h_{ik} h_{kj} \right). \quad (10)$$

とする。 α, β, ζ は scalar 型摂動であり、 h_{ij} は tensor 型摂動である。 h_{ij} は $h_{ii} = h_{ij,j} = 0$ を満たす。また h_{ij} を上記のように展開することで $\sqrt{-g}$ から摂動は得られない。解析は comoving gauge を用いるので、Higgs 場の摂動は考慮する必要がない。これらから作用 (1) の摂動の 2 次を取り出した作用は

$$S_S^{(2)} = \int dt dx^3 M_P^3 \frac{a^3}{2} \left[G_S \zeta^2 - \frac{F_S}{a^2} (\zeta_{,i})^2 \right] \quad (11)$$

となる。ここで G_S と F_S は

$$\begin{aligned} G_S = & 3 \left(1 - \xi \frac{h^2}{M_P^2} - \frac{\dot{h}^2}{2M^2 M_P^2} \right) \\ & + \left(-3H^2 \left(1 - \xi \frac{h^2}{M_P^2} \right) + \frac{9H^2 \dot{h}^2}{M^2 M_P^2} + \frac{\dot{h}^2}{2M_P^2} \right. \\ & \left. + \frac{6H\xi h \dot{h}}{M_P^2} \right) \frac{\left(1 - \xi \frac{h^2}{M_P^2} - \frac{\dot{h}^2}{2M^2 M_P^2} \right)^2}{\left(H - \xi \frac{h^2}{M_P^2} H - \frac{3\dot{h}^2}{2M^2 M_P^2} H - \xi \frac{h\dot{h}}{M_P^2} \right)^2} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} F_S = & \frac{1}{a} \frac{d}{dt} \left(\frac{a \left(1 - \xi \frac{h^2}{M_P^2} - \frac{\dot{h}^2}{2M^2 M_P^2} \right)^2}{\left(H - \xi \frac{h^2}{M_P^2} H - \frac{3\dot{h}^2}{2M^2 M_P^2} H - \xi \frac{h\dot{h}}{M_P^2} \right)} \right) \\ & - \left(1 - \xi \frac{h^2}{M_P^2} + \frac{\dot{h}^2}{2M^2 M_P^2} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

である。音速の 2 乗は

$$c_s^2 = \frac{F_S}{G_S} \quad (14)$$

で与えられる。再加熱期に G_S が負になることで不安定性が引き起こされる。しかしこの解析は数値的に行うのは困難であるため、 $\dot{h} = 0$ と $h = 0$ の 2 点で $G_S \leq 0$ となる条件を求める。 $\dot{h} = 0$ の時 $G_S = F_S = 0$ となるのが容易に得られるので $h = 0$ の F_S のみに着目する。

$$\pi_M = \frac{\dot{h}}{MM_P} \quad (15)$$

として $F_S|_{h=0}$ を書き下すと

$$F_S = \frac{12 \left(1 - \frac{3}{2}\pi_M^2\right)^2 - 8\pi_M^4 \left(1 - \frac{3}{2}\pi_M^2\right) - 3\pi_M^8}{4 \left(1 - \frac{3}{2}\pi_M^2\right) \left(1 - \frac{3}{2}\pi_M^2 + \frac{3}{2}\pi_M^4\right)} + \frac{6\xi\pi_M^2 \left(1 - \frac{1}{2}\pi_M^2\right) \left(1 - \frac{3}{2}\pi_M^2 - \frac{3}{2}\pi_M^4\right)}{\left(1 - \frac{3}{2}\pi_M^2\right) \left(1 - \frac{3}{2}\pi_M^2 + \frac{3}{2}\pi_M^4\right)} \quad (16)$$

となる。ここで H の 2 乗は必ず正なので式 (7) で $h = 0$ の場合から

$$|\pi_M| \leq \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (17)$$

が得られる。これにより (16) の分母は正なので、分子にのみ着目する。 F_S が正となる条件は図 2 となる。運動項タイプのみがある場合は図の左上の領域で不安定となる。運動項タイプが支配的な場合でも質量項タイプがあれば $h = 0$ で安定化できることがわかる。具体的には $-1.1 \lesssim \xi \lesssim -0.13$ という制限が得られた。一方で、質量項タイプが支配的な場合では数値的に最初に $h = 0$ で $\dot{h} \sim \mathcal{O}(10^{-7})$ となる。このことから運動項タイプの大きさは $M > 10^{-4}M_P$ という制限が得られる。

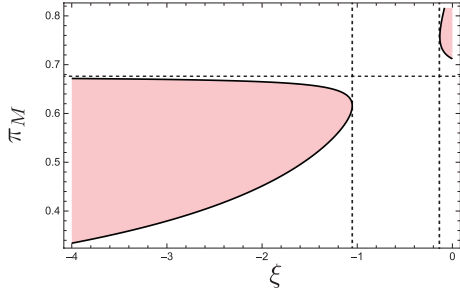


図 2: F_S の符号と π_M, ξ の関係。赤い部分が $F_S < 0$ の不安定な部分。横の点線は $\pi_M = \sqrt{\frac{\sqrt{33}-3}{6}}$ を、縦の点線は $\xi \simeq -0.13, -1.1$ をそれぞれ表す。

4 Reheating

再加熱期の解析を行う。まず、運動方程式 (5) を $\tilde{h} = a \frac{h}{h_e}$ として変数変換をする。ここで h_e は Inflation 終了時の Higgs 場の大きさである。これより

$$\frac{d^2 \tilde{h}}{dy^2} + (1 - 2k_e^2) \tilde{h} + 2k_e^2 \tilde{h}^3 \simeq 0, \quad (18)$$

と得られる。ここで k_e, y は以下のように定義した。

$$k_e^2 \equiv \frac{\lambda h_e^2}{2} \left(\left(6\xi - 1 + \frac{3H^2}{M^2} \right) a^2 (2H^2 + \dot{H}) - \frac{12H^2}{M^2} H^2 + \lambda h_e^2 \right)^{-1} \quad (19)$$

$$y \simeq m\eta \quad (20)$$

$$m^2 \equiv \left(1 + \frac{3H^2}{M^2} \right)^{-1} \left(\left(6\xi - 1 + \frac{3H^2}{M^2} \right) a^2 \times \left(2H^2 + \dot{H} \right) - \frac{12H^2}{M^2} H^2 + \lambda h_e^2 \right) \quad (21)$$

η は conformal time である。式 (18) の解は楕円関数で記述され

$$\tilde{h} = \text{Cn}(m\eta, k_e) \quad (22)$$

となる。 k_e は楕円関数のパラメータで、 $k_e = 0$ で \cos に $k_e = 1$ で \cosh^{-1} となる。Hybrid Higgs inflation では $0 \leq k_e \leq 1/\sqrt{2}$ の値をとる。 $k_e = 0$ は質量項結合が支配的な場合、 $k_e = 1/\sqrt{2}$ は運動項結合が支配的な場合に実現される。

次に W boson の粒子生成を考える。W boson の質量は $m_W^2 = g_W^2/4h^2$ で与えられる。Fourier 変換した W boson, W_k , の運動方程式は

$$\frac{d^2 \tilde{W}_k}{d\eta^2} + \left[\frac{k^2}{a^2} + \frac{g_W^2}{4} \text{Cn}^2(m\eta, k_e) \right] \tilde{W}_k = 0 \quad (23)$$

$$\tilde{W}_k = aW_k \quad (24)$$

となる。ここで式 (22) を用いた。この式を $h = 0$ の周りで近似していく。 i 回目に $h = 0$ となる時刻を η_i とし、 $\Delta\eta_i \equiv \eta - \eta_i$ とする。 $\Delta\eta_i$ で $\text{Cn}(m\eta, k_e)$ を展開すると、 $\dot{h} = 0$ となり再び $\dot{h} = 0$ となる間では $\Delta\eta_i$ の 1 次で十分であることが計算から求まる。従って W boson の運動方程式は

$$\frac{d^2 \tilde{W}_k}{d\tau^2} + \left[\kappa^2 + \frac{\tau^2}{4} \right] W_k = 0 \quad (25)$$

$$a^2 \frac{k^2}{K^2} =: \kappa^2 \quad (26)$$

$$g_W^2 (1 + k_e^2)^2 m^2 =: K^4 \quad (27)$$

$$K \Delta\eta_j =: \tau_j \quad (28)$$

となる。この方程式の解は放物柱関数で与えられて

いる。従って量子化された W_k は

$$\tilde{W}_k^j(\tau_j) = \hat{a}_k^j u_k^j(\tau_j) + \hat{a}_k^{j\dagger} u_k^{j*}(\tau_j) \quad (29)$$

$$u_k^j(\tau_j) = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}\kappa^2}}{\sqrt{K}} D_{-i\kappa^2 - \frac{1}{2}}(e^{i\frac{\pi}{4}}\tau_j) \quad (30)$$

と表される (H.Aoki & S.Iso (2015))。 \hat{a} は W boson の消滅演算子である。この背景時空のときの u_k は単位波動関数を表す。 $\dot{h} = 0$ のとき ($\tau_j = K\frac{T}{4}$ のとき, T は coformal time での周期) に真空を再定義していく。お互いの真空の関係は Bogoliubov 変換から得られる。

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_k^{j+1} \\ \hat{a}_k^{j+1\dagger} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^* & -\beta^* \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_k^j \\ \hat{a}_k^{j\dagger} \end{pmatrix} \quad (31)$$

$$\alpha = -C_{11}^* + 2iu_k^* \left(K\frac{T}{4} \right) u_k' \left(-K\frac{T}{4} \right) \quad (32)$$

$$\beta = C_{12} - 2iu_k \left(K\frac{T}{4} \right) u_k' \left(-K\frac{T}{4} \right) \quad (33)$$

$$C_{11} = 1 - \frac{2\Gamma\left[\frac{1}{4} - i\frac{\kappa^2}{2}\right]\Gamma\left[\frac{3}{4} + i\frac{\kappa^2}{2}\right]}{A[\kappa^2]} \quad (34)$$

$$C_{12} = 2^{1-i\kappa^2} \frac{2\Gamma\left[\frac{1}{4} - i\frac{\kappa^2}{2}\right]\Gamma\left[\frac{3}{4} - i\frac{\kappa^2}{2}\right]}{A[\kappa^2]} \quad (35)$$

$$A[\kappa^2] = i\Gamma\left[\frac{1}{4} + i\frac{\kappa^2}{2}\right]\Gamma\left[\frac{3}{4} - i\frac{\kappa^2}{2}\right] + \Gamma\left[\frac{1}{4} - i\frac{\kappa^2}{2}\right]\Gamma\left[\frac{3}{4} + i\frac{\kappa^2}{2}\right] \quad (36)$$

ここで Γ はガンマ関数を表す。 $|\beta|$ が 1/2 振動の運動量空間での粒子生成数となる。 W boson は非相対論的な場として生成されるのでこの段階では再加熱が達成されない。そこで W boson から相対論的粒子となる軽いフェルミオンへのエネルギー伝達を考える。伝達としては崩壊と対消滅を考える。この現象を記述するのは近似された Boltzmann 方程式であり、以下のように得られる。

$$\frac{d(a^3 n)}{dt} = a^3 \left(\frac{A}{aT\pi^2} K^3 + \left(\frac{K^2 T}{2a} B - \Gamma \right) n - \sigma n^2 \right) \quad (37)$$

である。ここで A, B は数値的に求まり $A = 0.0283$, $B = 0.110$ となる。 Γ は崩壊率を、 σ は散乱断面積

を表す。この方程式を解くと、相対論粒子は速やかに行われ 1 回の振動で放射優位になることが分かる。この時の温度は、inflation 終了期のインフラトンのエネルギーから $\mathcal{O}(10^{15})$ GeV となる。

5 Conclusion and Discussion

本研究では Hybrid Higgs inflation の再加熱機構の解析を行った。 $G^{\mu\nu}\partial_\mu h\partial_\nu h/M^2$ のような運動項タイプの結合は再加熱期に音速の 2 乗が負になることで生じる不安定性のため解析が不可能になる。そこで最初に $\xi R h^2$ によってこの不安定性が回避できるか議論し、回避可能な条件を図 2 にまとめた。次に W boson の粒子生成を解析した。まず初めに再加熱期の Higgs 場の運動を楕円関数で記述した。これを用いて W boson の運動方程式をポテンシャルの底周りで展開した。振動の端になるたびに時間を取り直すことで 1/2 振動ごとに W boson の真空を定義し、その間の関係を Bogoliubov 変換で表した。また、真空の再定義によって粒子が生成されるので、その生成量を評価した。その後 W boson から軽いフェルミオンへの崩壊や対消滅を考え、放射優勢期となるとき宇宙の温度を求めた。この結果は ξ の結合のみしかない先行研究で得られている結果と異なる。先行研究では比較的緩やかに再加熱が主張されており本研究とは違う (F.Bezrukov et al. (2009))。この点に関しては解析手法の相違についてなど今後更なる議論が必要である。

Acknowledgement

共同研究者として議論をして下さった早稲田大学の前田恵一教授に感謝申し上げます。また、天文天体物理若手夏の学校にご賛同頂き、ご支援下さった方々に深く感謝致します。

Reference

- S.Sato, & K.Maeda, 2018, Phys.Rev.D 97(2018)083512
- N.Aghanim et al, 2018, arXiv:1807.06209 [astro-ph.CO]
- H.Aoki & S.Iso, 2015, PTEP 2015.11 (2015): 113E02.
- F.Bezrukov, D.Gorbunov & M.Shaposhnikov, JCAP 2009 06 (2009) 029.

c13

Time crystal とその初期宇宙への影響の
可能性

東京学芸大学大学院

佐野 有里紗

Time crystal とその初期宇宙への影響の可能性

佐野 有里紗 (東京学芸大学大学院)

Abstract

我々の住んでいる宇宙観測から膨張していることがわかっている。このことから、過去にさかのぼると宇宙初期は非常に小さかったといえる。つまり、その時代の宇宙を考えるためには、量子重力理論を用いる必要があると考えられる。近年の研究では、この量子重力理論から初期宇宙の有効次元は現在より低かったと示唆されている。さらに、先行研究から宇宙初期は時空が離散的だったと考えられた (Calcagni 2017)。また、Time crystal とは、時間並進対称性を自発に破った物質 (Sacha & Jakub 2018)、つまり時間が離散的になっている物質である。これはすでに実験的に実現されていて、与えられた外力に対して 2 倍などの周期で振動することがわかっている。本発表では、量子重力理論から示唆される時間の離散性と time crystal との関連に着目し、その宇宙論的応用を紹介していく。

1 Introduction

宇宙初期は非常に小さく、かつ重力が非常に強い
ため、量子論と重力理論の両方を取り入れなければ
ならない。その理論を量子重力理論と呼ぶ。その理
論において、次元は動的かつスケール依存性がある
ことが示唆されている。それにより、小スケールや
高エネルギー状態での実質的な次元が落ちると考え
られている (Carlip 2017)。これは、不確定性関係を
実空間に適用させたような空間座標それぞれに従属
関係があることから自由度が落ちることに起因して
いると考えられる。このことから、初期宇宙では有
効次元が低かったと考えられる。

その次元変化については、いくつかのモデルがあ
る。例えば、スケール変化に伴って次元変化をする
multifractional 時空を記述する multifractional the
ory というものである (Calcagni 2017)。この理論で
は、時空が離散的であったと仮定し、これによって時
空の次元変化について説明している。これより、宇
宙初期は時空が離散的であったということもできる。
空間の離散性についてはいくつかのモデルが考えら
れているが、時間の離散性については、あまり多く
は議論されていない。

また、時間並進対称性を自発に破った物質が考え
られ、それを time crystal と呼ぶ (Sacha & Jakub
2018)。これは、時間が離散的になっている物質であ

ると考えることもできる。したがって、今回はこの
time crystal に着目し、その宇宙論的応用 (Feng *et*
al. 2018) について紹介していく。

2 Time crystal

Time crystal とは、2012 年に Wilczek らが提
唱した時間周期的な自己組織化構造のことである
(Shapere & Wilczek 2012)。そもそも、crystal
(space crystal) とは、塩や carbon nanotube (図 1)
のような、空間内に規則的な構造を構築しているも
のである。つまり、空間のある方向において周期的
な構造パターンを繰り返す物質のことである。

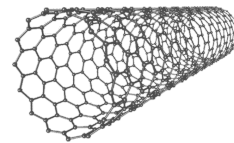


図 1: carbon nanotube の結晶構造

また、この物質は空間並進対称性を自発的に破っ
ているといえる。

これを時間に応用したもの、つまり時間並進対称性
を自発的に破る物質が time crystal である。Wilczek
が構想した time crystal は、平衡状態かつ最低エネル
ギー状態にある物質が、時間的周期性を表すことがで

きる物質であるというものであった。しかしこれは、系へのエネルギー入力なしに周期的な振動を繰り返していることを表しており、エネルギー保存則に反している。実際にこの平衡状態にある time crystal は実現不可能だと発表された (Watanabe & Oshikawa 2015)。

その後、Yao により非平衡状態における time crystal の生成が提案された (Yao 2017)。Wilczek の time crystal は連続的な時間並進対称性を自発的に破るとしていたが、Yao は離散的な時間並進対称性を自発的に破ることに着目した。時間依存性のない系においては、連続的な時間並進対称性があるのに対し、時間依存性のある系においては、その対称性は破られる。さらに、Hamiltonian が時間周期性

$$H(t+T) = H(t) \quad (1)$$

を持つなら、Floquet 状態と呼ばれる固有状態が存在する。これは、Floquet の定理と呼ばれ、Bloch の定理を時間に応用したものである。これについてもう少し詳しく説明していく。固有値方程式

$$\left(H(t) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) |n(t)\rangle = \epsilon_n |n(t)\rangle \quad (2)$$

より、Schrödinger 方程式の解を

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n C_n(t) |n(t)\rangle \quad (3)$$

とすると、

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n C_n(0) e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon_n t} |n(t)\rangle \quad (4)$$

を得る。ここで、 ϵ_n は固有値である。時間依存性を課し、固有値に縮退がないとすると、

$$|n(t+T)\rangle = e^{i\alpha_n T} |n(t)\rangle \quad (5)$$

である (α_n : 定数) ので、時間周期性をもつ Hamiltonian に対する Schrödinger 方程式の解は、

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n C_n(0) e^{-i\left(\frac{\epsilon_n}{\hbar} - \alpha_n\right)t} |\tilde{n}(t)\rangle \quad (6)$$

となる。ただし、 $|n(t)\rangle = e^{i\alpha_n t} |\tilde{n}(t)\rangle$ とすると、 $|\tilde{n}(t)\rangle$ は時間周期性をもつので、この解は Floquet 状態の解となっている。

この Floquet 状態の多体周期駆動系は時間において自発的に自己組織化し、周期 T よりも長い周期で変化する。つまり、駆動力の周期に対し、物質の固有振動の周期がそれより長くなるのだ。これは discrete time crystal (DTC) と呼ばれ、実際に実験室で生成に成功している。さらにその実験では、駆動力の周期を変えても、物質の周期は変わらないこともわかった。

2.1 Observation of DTC

初めて DTC の生成に成功したのは、2016 年である (Zhang 2017)。実験概要は、トラップされた $^{171}\text{Yb}^+$ イオン 10 個をリング状に並べ、これらの平衡状態を崩すために 1 つ目のレーザーで磁場を形成させる。次に、1 つのイオンのスピンを 2 つ目のレーザーパルスで反転させる。すると、粒子の相互作用によりスピン連鎖を起こすことで、与えた周期の 2 倍でスピン反転を繰り返す系を観測できたというものである。実際に、それぞれのスピンにおける磁化の時間発展の Fourier spectra は Floquet 振動数 ($\frac{1}{T}$) の半分の所で 1 つのピークを表す (図 2)。このことは、最初の生成状態 $|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle_x$ が、2 つの Floquet 状態の重ね合わせ $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle_x \pm |\uparrow\uparrow\cdots\uparrow\rangle_x)$ とみなすことができることで、周期 $2T$ で時間発展していくこと、つまり元の離散時間並進対称性の自発的破れを示している。

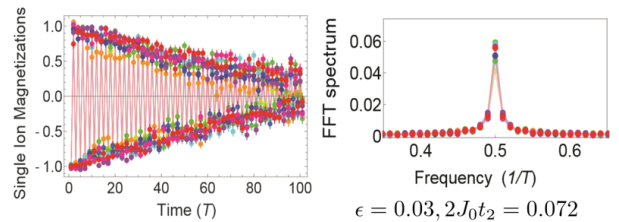


図 2: discrete time crystal (Zhang 2017)

3 Cosmological time crystal

Time crystal を宇宙論に応用したものはいくつか考えられている。例えば、宇宙そのものを time crystal として扱うことで、cyclic universe を再現するモデル

である。その中でも、string theory が基となっている ekpyrotic universe は特に考えられているモデルである。これは、Planck2015 の結果から一番単純なモデルとしても考えられている (Ijjas *et al.* 2016)。ただし、このモデルは null-energy condition (NEC) に反している。そこで、今回は Riemann cubic invariant を用いて Einstein 重力を拡張し、time crystal を取り入れていくモデルを紹介する (Feng *et al.* 2018)。

3.1 Riemann cubic invariant

Riemann cubic invariant は、一般的に以下の 8 項をもつ形で表す。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(3)} = \sqrt{-g} & \left(e_1 R^3 + e_2 R R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + e_3 R_{\nu}^{\mu} R_{\rho}^{\nu} R_{\mu}^{\rho} \right. \\ & + e_4 R^{\mu\nu} R^{\rho\sigma} R_{\mu\rho\nu\sigma} + e_5 R R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} \\ & \left. + e_6 R^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\beta\gamma} R_{\nu}^{\alpha\beta\gamma} + e_7 R_{\rho\sigma}^{\mu\nu} R_{\alpha\beta}^{\rho\sigma} R_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

de Sitter または anti-de Sitter 時空において、これらは線形 massive scalar と spin-2 mode を生成する。ここで、ghost-like spin-2 mode を分離することで、

$$12e_2 + 9e_3 + 5e_4 + 48e_5 + 16e_6 + 24e_7 - 3e_8 = 0 \quad (8)$$

を得られる。今回は、FLRW metric

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \quad (9)$$

を用いる。effective Lagrangian において、 \ddot{a}^2 と \ddot{a}^3 を無視することで、

$$\begin{aligned} 216e_1 + 60e_2 + 18e_3 + 16e_4 + 48e_5 + 14e_6 \\ + 12e_7 + 3e_8 = 0 \\ 36e_1 + 12e_2 + 5e_3 + 3e_4 + 12e_5 \\ + 4e_6 + 4e_7 = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

が得られる。これらの条件より、effective Lagrangian は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(3)} = \frac{2}{5}\lambda \frac{\dot{a}^6}{a^3} \\ \lambda = 2(36e_1 + 6e_2 + e_4 + 4e_5) \end{aligned} \quad (11)$$

となる。

今回は、エネルギー運動量テンソル $T_m^{ab} = \text{diag}(\rho_m, p_m, p_m, p_m)$ の完全流体と結合した Einstein 重力と Riemann cubic を考えていく。effective Lagrangian は

$$L = -6a\dot{a}^2 + \frac{2}{5}\lambda \frac{\dot{a}^6}{a^3} - V \quad (12)$$

であるので、Einstein 方程式は

$$\begin{aligned} \frac{3\dot{a}^2}{a^2} - \lambda \frac{\dot{a}^6}{a^6} = \rho_m \\ \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \lambda \left(\frac{\dot{a}^6}{a^6} - \frac{2\dot{a}^4\ddot{a}}{a^5} \right) = -p_m \end{aligned} \quad (13)$$

を得る。ここで、簡単のために、エネルギー密度 ρ_m は scale factor $a(t)$ の関数とする。今回は $\rho_m = \frac{V(a)}{2a^3}$ と仮定し、状態方程式 $p = w\rho (w = -\frac{aV'}{3V})$ から、 $p_m = -\frac{V'}{6a^2}$ となることを用いた。また、負の運動エネルギー項を評価するために、Hamiltonian constraint

$$H = -6a\dot{a}^2 + 2\lambda \frac{\dot{a}^6}{a^3} + V = 0 \quad (14)$$

を課す。

$\lambda > 0$ のとき、Hamiltonian の重力パート

$$H_0 = -6a\dot{a}^2 + 2\lambda \frac{\dot{a}^6}{a^3} \quad (15)$$

は最低値を決められる。 $\frac{\partial H_0}{\partial \dot{a}}$ より (15) の最小値は

$$\dot{a} = \pm \lambda^{-\frac{1}{4}} a \quad \text{のとき} \quad H_0^{\min} = -\frac{4a^3}{\sqrt{\lambda}} \quad (16)$$

となる。この最小値 H_0^{\min} での Hamiltonian constraint から

$$\tilde{V}(a) \equiv V(a) - \frac{4a^3}{\sqrt{\lambda}} = 0 \quad (17)$$

を課す。ここで、解がない場合 (e.g. $V = -3a^3$, 負の宇宙定数) は、 H_0^{\min} にはならない。また、 $a = a_0$ で解をもつ場合は、 a_0 に達するが $\dot{a} \neq 0$ であるのでそこに止まることはできない。

$z = \dot{a}^2$ とすると、(14) の解は正であり、それは $\tilde{V} \leq 0$ のときのみである。まず、ビエタの解を用いて

$$\begin{aligned} \dot{a}^2 = \frac{2a^2}{\sqrt{\lambda}} \cos \frac{1}{3} \left(\arccos \left[\frac{a_0^3 V(a)}{a^3 V(a_0)} \right] - k\pi \right) \\ k = \pm 1 \end{aligned} \quad (18)$$

という 2 つの正の解を得る (3 つ目は負の解なので、無視する)。これは $a = a_0$ 近傍で、

$$\dot{a}^2 = \frac{a_0^2}{\sqrt{\lambda}} \left(1 + k \sqrt{\frac{2}{a_0} (1 + w(a_0))(a - a_0) + \dots} \right) \quad (19)$$

となる。NEC ($w \geq -1$) を満たす物質は、 $a \geq a_0$ であり、 $a = a_0$ で最小となる。それに加え、 $a = a_0$ で $\dot{a}^2 = \pm \lambda^{-\frac{1}{4}} a_0$ の 2 つの真空を同時に持っている。そして、それらはエネルギー縮退された状態であり、どちらかを選ぶと自動的に方向が定まるので、時間反転対称を破っているといえる。言い換えると、1 つの真空からもう 1 つの真空への tunneling において、 \dot{a}^2 は連続値のままだが、 \dot{a} は速度のようなものなので、負から正へ瞬間的に変わる。このことから、曲率 \ddot{a} は δ 関数特異点をもつ。

$a = a_0$ が $t = 0$ で起こるとすると、小さい t で $a(t)$ を解くことができる。bouncing するためには、

$$\begin{aligned} \rho_{ext} &= 0 \\ p_{ext} &= 4k\lambda^{-\frac{1}{4}} \sqrt{2\lambda^{-\frac{1}{4}} (1 + w(a_0))} \sqrt{|t|} \delta(t) \quad (20) \end{aligned}$$

となる。

$a = A > a_0$ のとき、 $V = 0$ ならば、 $a(t)$ は $a = A$ からなめらかに縮んでいき、 $a = a_0$ で bounce する。これが、cyclic universe を表している。例えば、 $V = 2\Lambda_0 a^3 + 6a^2 a$ とする。ここで、 $\Lambda_0 = -\frac{3}{\ell}$ は負の宇宙定数であり、 $a = A = a\ell$ で $V = 0$ となる。 $\lambda = 0$ において、exact solution $a = A \sin(\frac{t}{\ell})$ が存在する (図 3 点線)。また、 $\lambda \neq 0$ においては、図 3 実線のような振る舞いをし、

$$0 < a_0 = \frac{\sqrt{3\alpha\lambda\lambda^{\frac{1}{4}}}}{\sqrt{2\ell^2 + 3\sqrt{\lambda}}} < A \quad (21)$$

で bounce する cyclic universe を再現している。

4 Conclusion

今回は、量子重力理論から示唆されている時空の離散性から、時間並進対称性を自発的に破る time crystal に着目して、宇宙論との関連性を紹介した。Riemann cubic を考えると、エネルギー縮退された

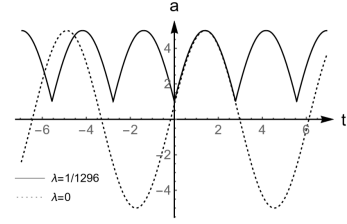


図 3: A cyclic universe due to the time-crystal mechanism (Feng *et al.* 2018)

真空が 2 つ同時に存在する。そして、片方が自発的に選ばれ、その点で bounce する。さらに、ある特別な potential を仮定すると、古典的には周期的に bounce する cyclic universe を再現する。あくまでも、time crystal は時間並進対称性を破る物質であるので、このモデルはそのような物質があったときの宇宙の振る舞いを表しているにすぎない。したがって、今後は時空自体が離散的な時に宇宙にどのような影響を与えるのか考えていく。

Reference

- K. Sacha & J. Zakrzewski, Rept. Prog. Phys.81 (2018) no.1, 016401.
- A. Shapere & F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 109 (2012) 160402.
- S. Carlip, Quantum Grav. 34 (2017) 193001.
- G. Calcagni, JHEP 1703 (2017) 138.
- H. Watanabe & M. Oshikawa Phys. Rev. Lett. 114 (2015) 251603.
- N.Y. Yao *et al.* Phys. Rev. Lett. 118 (2017) 030401.
- J. Zhang *et al.* Nature 543 (2017) 217-220.
- A. Ijjas *et al.* Class.Quant.Grav. 33 (2016) no.4, 044001.
- X.-H. Feng *et al.* arXiv:1807.01720 [hep-th]

c14

ダークマターの性質の制限:LSBG を用
いたダークマター対消滅の探査
名古屋大学大学院 理学研究科
橋本大輝

ダークマターの性質の制限：LSBG を用いたダークマター対消滅の探査

橋本 大輝 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙のごく初期に熱的に生成されたダークマター (代表例は Weakly Interacting Massive Particle) は、その当時標準モデルの粒子と熱平衡状態にあったと考えられる。この時、ダークマターが対消滅して標準モデルの粒子が生成されるような反応過程が存在することが期待される。それに伴い、ガンマ線が生成されることが予測されており、このガンマ線放射を探査することがダークマターの性質の解明に繋がる。これまでの研究では、銀河系中心方向や銀河系近傍の矮小銀河をターゲットにして対消滅ガンマ線シグナルの研究が行われており、ダークマター対消滅に関連する性質 (とりわけ対消滅断面積) が制限されてきた。本研究では、Low Surface Brightness Galaxy (LSBG) に着目し、同様の研究を行う。LSBG を扱う利点は、通常の銀河 (銀河系規模) に比べダークマターにより支配された系であること、天体由来のガンマ線が比較的少ないと期待されることが挙げられる。本研究では、Subaru Hyper Suprime-Cam の観測データから構築された LSBG カタログに収録されている 8 個の LSBG を用いている。この 8 個の LSBG について、ダークマター対消滅ガンマ線のフラックスをモデリングし、ガンマ線観測と比較することで、10 GeV の質量のダークマターについて対消滅断面積に $\sim 10^{-23}$ [cm³/s] の制限を与えた。この制限は現在銀河系近傍の矮小銀河によって与えられている制限よりも 10^3 倍程度弱い制限となるが、将来観測では LSBG の観測数が爆発的に大きくなることが期待され、矮小銀河などの他の天体を用いた制限よりも強い制限を与えることができる。

1 導入

近年の天文学の発達により、宇宙のエネルギー密度の $\sim 25\%$ 程度をダークマター (DM) が担っていることが判明してきた [1]。同時にその正体の解明に向けた研究が宇宙物理学、素粒子物理学の両面で盛んに行われてきたが、未だにその正体は不明である。これまでの研究により、ダークマターの候補として、Weakly Interacting Massive Particle (WIMP) が理論的に最もモチベートされた有力な候補として探査されている [2]。WIMP は初期宇宙において熱的に生成されたと考えられている。このとき、WIMP は標準モデルの粒子と熱平衡状態にあり、従って WIMP が対消滅し標準モデルの粒子が生成されるような反応過程が存在する [3]。それらの対消滅過程に対する反応断面積 $\langle\sigma v\rangle$ は WIMP の存在量に直

接影響を及ぼすため、DM を WIMP と仮定することで $\langle\sigma v\rangle$ を見積もることができ、 $\langle\sigma v\rangle \sim 3 \times 10^{-26}$ [cm³/s] となっている [4]。

WIMP の対消滅過程において、最終的にガンマ線が放出されることが期待でき、観測される宇宙ガンマ線を解析することで対消滅由来のガンマ線シグナルを探査することができる。DM 由来のガンマ線放射源として、宇宙の高密度領域である銀河や銀河団等がこのようなシグナルを探査するターゲットとなる。近年の研究では、ターゲットとして銀河系中心や近傍矮小銀河のほか、近傍銀河団あるいは銀河群を用いた研究が行われてきた [5, 6, 7]。

本研究では、DM 対消滅シグナルを探査する上で将来有望なターゲットとして、Low Surface Brightness Galaxy (LSBG) を提案し、その将来

性を探索する。LSBG は近年の観測技術の向上により、銀河系近傍において爆発的に見つかるようになってきた天体である。銀河系等の通常の銀河よりも超新星残骸やパルサー等の天体由来するガンマ線放射が少なく、矮小銀河よりも 1 桁程度質量が大きいこと、DM の対消滅シグナルを探索する上で好条件を満たしている天体と言える。本研究では、Subaru Hyper Suprime-Cam (HSC) の観測データを下に [8] により作成された LSBG カタログ (HSC LSBG カタログ) を用いる。また、ガンマ線データは Fermi Large Area Telescope (LAT)

本稿は以下で構成される。まず第 2 章で HSC LSBG カタログと Fermi LAT のデータを説明する。第 3 章で DM 対消滅由来のガンマ線放射モデルを導出し、第 4 章で解析方法の具体とその結果を述べる。最後に第 5 章で結論をまとめる。なお、本研究の詳細は [9] を参照のこと。

2 データ

本章では、HSC LSBG カタログと Fermi LAT の観測データについて簡単にまとめる。

まず HSC LSBG カタログについて述べる。このカタログは、HSC の初回データ更新 (S16A、 ~ 200 [deg²]) を元に [8] により作成された。収録天体は約 800 天体で平均表面輝度 μ_{mean} は $\mu_{\text{mean}} > 24.3$ [mag/arcsec²] である。これらの天体中で分光同定や Ia 型超新星の観測等によって赤方偏移が測定されている天体は 8 天体のみである。本研究における解析では、天体の赤方偏移が不可欠であるため、本研究ではこれら 8 天体のみを用いる。

宇宙ガンマ線の観測データは、Fermi LAT による 500 [MeV] $< E < 500$ [GeV] の約 8 年間の観測データを使用する。本研究では、それぞれの LSBG を中心とする $10^\circ \times 10^\circ$ の領域を扱う。本研究の解析では背景ガンマ線マップを用いる。このマップは以下の手順によって観測データから作成される。まず、銀河系前景放射モデルと

点源放射モデル及び等方放射モデルを観測されたガンマ線フラックスに最適化する。それぞれの放射モデルについては Fermi LAT の公式ホームページで公開されているテンプレートを基にしている。その後観測データからこれらモデルフラックスを差し引き、背景ガンマ線マップを得る。

3 ダークマター対消滅によるガンマ線放射モデル

ここでは DM 対消滅によって生じるガンマ線フラックスの理論モデルを扱う。LSBG 中の DM 対消滅によるガンマ線フラックス Φ_γ は

$$\frac{d\Phi_\gamma}{dE_\gamma} = J \times \frac{\langle\sigma v\rangle}{8\pi m_\chi^2} \sum_i Br_i \frac{dN_i}{dE'_\gamma} \Big|_{E'_\gamma=(1+z)E_\gamma} \quad (1)$$

と表される (単位は [photon count/cm²/s/MeV])。ここで $\langle\sigma v\rangle$ は DM の対消滅断面積と相対速度の統計平均、 E_γ, E'_γ はそれぞれ観測される、あるいは放出されるガンマ線のエネルギー、 m_χ はダークマターの質量、 Br_i は全対消滅過程における i 番目の対消滅過程の割合、 z は LSBG の赤方偏移を表す。また、 dN/dE_γ は対消滅によって生じるガンマ線のエネルギースペクトル、 J は J ファクターと呼ばれるハローの質量や物質分布により決定される量である。以下で述べるように、この J ファクターにはターゲット天体の天文学的な性質が全て含まれている。一方で式 (1) 中の dN/dE_γ 等の J 以外の因子は素粒子物理学的なパラメータである。

まず J ファクターについて扱う。J ファクターはハロー中の DM の密度分布の 2 乗を天球上に射影した量であり、

$$J = [1 + b_{\text{sh}}(M_{\text{halo}})] \int_s ds' \int_\Omega d\Omega' \rho_{\text{DM}}^2(s', \Omega') \quad (2)$$

と表される量である。 s は視線方向ベクトル、 Ω は天球上でのハローの広がりを表す立体角、 ρ_{DM}

はハローのダークマターの密度分布、 M_{halo} はハロー質量である。また、 b_{sh} はブーストファクターと呼ばれるハロー内部における質量分布の内部構造による影響を表した量である。 b_{sh} に関する研究は数多く行われているが、近年の研究 [10] より本研究では $b_{\text{sh}} = 1$ とした。本研究ではダークマターの密度場 ρ_{DM} として標準的な NFW 分布 $\rho_{\text{DM}} = \frac{\rho_s}{rc/r_{\text{vir}}((rc/r_{\text{vir}})+1)^2}$ を仮定する。 ρ_{vir} はビリアル半径、 c は中心集中度である。また、ハロー中心から r_{vir} までの距離にある物質の質量が M_{halo} に等しいとすると、 $\rho_s = \frac{M_{\text{halo}}}{4\pi r_s^3} \left[\log(1+c) - \frac{c}{1+c} \right]^{-1}$ であり、これは球対称崩壊モデルの下で、球対称密度揺らぎパラメータ Δ を用いて $r_{\text{vir}}^3 = \frac{M_{\text{halo}}}{\frac{4}{3}\pi\Delta\rho_{c,z}}$ と表せる。ここで $\rho_{c,z}$ は赤方偏移 z での宇宙の臨界密度で、 $\rho_{c,z} \sim 1.9 \times 10^{-29} \times (1+z)h^2 [\text{g}/\text{cm}^3]$ である。本研究では、 $\Delta = 200$ として計算する。これらを用いることで、

$$\int_V dV \rho_{\text{DM}}^2 = \frac{M_{\text{halo}}}{9} \Delta \rho_{c,z} c^3 \times \left(\log(1+c) - \frac{c}{1+c} \right)^{-2} \left(1 - \frac{1}{(1+c)^3} \right) \quad (3)$$

を得る。ここで Fermi-LAT の PSF (分解能) は全エネルギー領域で $\text{PSF} \gtrsim 0.1^\circ$ である。一方で LSBG の視直径 θ_s は、 $\theta_s \sim r_s/d$ から $\theta_s \lesssim 0.01^\circ$ 程度と見積もられる。したがって、LSBG は Fermi-LAT に点源として観測される。これを Jファクターの計算に反映すると、式(2)は式(3)を用いて、

$$J \approx [1 + b_{\text{sh}}(M_{\text{halo}})] \int_V dV \rho_{\text{DM}}^2(\mathbf{x})/d_A^2 \quad (4)$$

を表される。ここで d_A は角度距離である。本研究で用いる LSBG の Jファクターを星質量、ハロー質量と共に表3に示す。中心集中度の誤差は 1σ で $\Delta \log_{10} c = 0.1$ のガウス分布のガウス分布を仮定する。 M_{halo} の誤差を考慮すると、Jファクターの 1σ の統計誤差は 70% である。ただし、赤方偏移の誤差は他のパラメータの誤差に対して十分に小さいので、本解析では考慮し

ID	$\log_{10}(M_*)$	$\log_{10}(M_{\text{halo}})$	$\log_{10}(J)$
171	9.3	11.1	14.4
285	7.6	10.4	15.7
456	9.1	11.1	14.8
464	9.1	11.0	14.8
575	7.4	10.3	15.5
613	9.3	10.7	14.6
729	9.3	10.7	14.8
750	7.6	10.4	15.4

表 1: LSBG の質量 (単位は $[M_\odot]$) と Jファクター (単位は $[\text{GeV}^2/\text{cm}^3]$)。左から順に LSBG の ID、星質量、ハロー質量、Jファクターである。それぞれのパラメータは統計誤差を評価した上でその中央値を表示している。

ない。また、ガンマ線のエネルギースペクトル dN_γ/dE_γ については、DarkSUSY[11] を用いて計算されたパラメータを用いている。本研究では、 $b\bar{b}$ チャンネルのみを考慮する。

4 結果

図1に8個のLSBGを用いたDM対消滅断面積の上限値を示す。この制限は従来近傍矮小銀河等から得られている制限よりも 10^3 程度弱い制限であるが、図2に示したように、将来観測によって少なくとも 10^3 程度強くなるのが期待される。この将来予測では、本研究で用いた LSBG の Jファクターが LSBG の典型的な Jファクターであると仮定したが、今後 LSST 等でより深い等級まで探査できるようになった場合、より近傍の LSBG が見つかる可能性が大きいと期待され、それによって図2に示した制限よりも厳しい制限が与えられると期待される。

Reference

- [1] Planck Collaboration *et al.* *arXiv e-prints*, art. arXiv:1807.06209, Jul 2018.

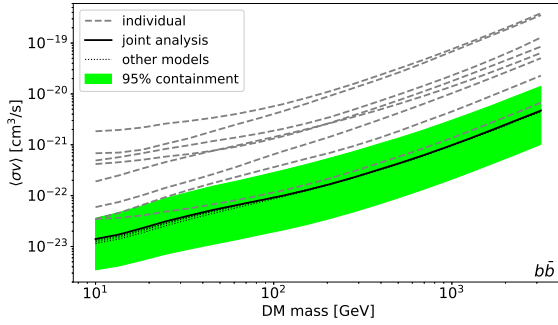


図 1: 8 個の LSBG を用いた $b\bar{b}$ 過程における対消滅断面積の 95%信頼度による上限値。実線は 8 個の LSBG を組み合わせた解析による上限値であり、灰色の点線は個々の LSBG における上限値である。緑色の帯は各天体の J ファクターの統計誤差を 95% でカバーする範囲である。また、“other models” とラベルされた点線は異なった銀河系前景放射モデルを用いた場合の実線に対応し、前景放射モデルの系統誤差を表す。

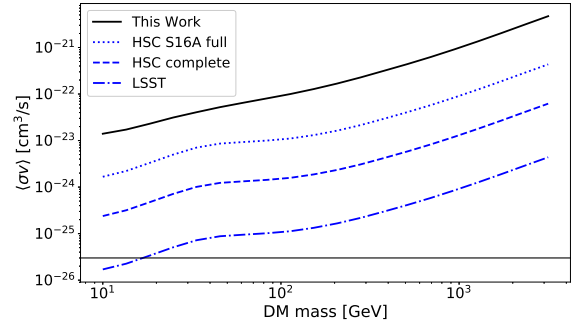


図 2: 将来観測による対消滅断面積の 95%信頼度における上限値の予測。実線は本研究による上限値で、“HSC S16A full” は現在 HSC の S16A データを元に作成された LSBG カタログを完全に解析に導入できた場合の予測上限値である。また、“HSC complete”、“LSST” はそれぞれ HSC、LSST の観測範囲における LSBG の密度を現在の LSBG カタログが持つ天体密度と同程度であると仮定した際の予測上限値である。これらはそれぞれ、独立な LSBG が約 600 個、約 9000 個であるとした場合に対応する。また、黒垂線は現在の DM 存在量を説明するために WIMP に要求される対消滅断面積 ($\langle\sigma v\rangle = 3 \times 10^{-26}$ [cm³/s]) である。

[2] L. Roszkowski, E. M. Sessolo, S. Trojanowski. *Reports on Progress in Physics*, 81(6):066201, Jun 2018. doi: 10.1088/1361-6633/aab913.

[3] G. Jungman, M. Kamionkowski, K. Griest. *Phys. Rep.*, 267:195–373, Mar 1996. doi: 10.1016/0370-1573(95)00058-5.

[4] G. Steigman, B. Dasgupta, J. F. Beacom. *Phys. Rev. D*, 86(2):023506, Jul 2012. doi: 10.1103/PhysRevD.86.023506.

[5] M. Ackermann *et al.* *ApJ*, 840(1):43, May 2017. doi: 10.3847/1538-4357/aa6cab.

[6] K. K. Boddy *et al.* *Phys. Rev. D*, 97(9):095031, May 2018. doi: 10.1103/PhysRevD.97.095031.

[7] M. Lisanti *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 120:101101, Mar 2018. doi: 10.1103/PhysRevLett.120.101101.

[8] J. P. Greco *et al.* *ApJ*, 857:104, April 2018. doi: 10.3847/1538-4357/aab842.

[9] D. Hashimoto *et al.* *arXiv e-prints*, art. arXiv:1906.06701, Jun 2019.

[10] N. Hiroshima, S. Ando, T. Ishiyama. *Phys. Rev. D*, 97(12):123002, June 2018. doi: 10.1103/PhysRevD.97.123002.

[11] T. Bringmann *et al.* *Journal of Cosmology and Astro-Particle Physics*, 2018(7):033, Jul 2018. doi: 10.1088/1475-7516/2018/07/033.

c15

右巻きニュートリノの重力的生成による
バリオン数と暗黒物質の生成

東京大学大学院 理学系研究科

羽柴 聡一郎

右巻きニュートリノの重力的生成によるバリオン数と暗黒物質の生成

羽柴 聡一郎 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

バリオン数と暗黒物質の生成は現代の宇宙論に残された大きな課題の一つである。いずれも素粒子理論の標準模型の範疇では説明することができず、標準模型を超えた模型の存在を示唆している。可能性の一つとして、右巻きニュートリノを導入することでこれらの問題を解決し得ることが知られている。しかし、現実の宇宙に於いてバリオン数と暗黒物質の生成を説明するには、素粒子理論の模型という「中身」についての議論だけではなく、宇宙の時空構造という「入れ物」についても目を向けねばならない。そこで我々は、3世代の右巻きニュートリノをクインテッセンシャル・インフレーション模型と組み合わせることで、バリオン数と暗黒物質の生成のみならず、暗黒エネルギーをも包括する模型を構築した。この発表では、クインテッセンシャル・インフレーションがどう暗黒エネルギーを実現するか、右巻きニュートリノがどのように生成するか、生成した右巻きニュートリノがどのようにバリオン数と暗黒物質を生成するか、既存の観測結果によって理論のパラメータにどのような制限が掛かるかについて触れる。

1 Introduction

地平線問題、平坦性問題といった宇宙の時空構造についての根本的な問題は、インフレーション理論によって簡潔に説明されている。その一方、バリオン非対称、暗黒物質、暗黒エネルギーといった宇宙の構成物についての問題は未だに未解決のままである。どれか一つを個別に説明する理論は幾つか知られているが、現実の宇宙では当然のことながらこれら全てが包括的に解決されていなければならない。そこで我々はクインテッセンシャル・インフレーション (Quintessential Inflation、以下 QI)¹ に 3 世代の右巻きニュートリノを導入することで、これらの問題を包括的に解決する模型を構築した。

この集録では、第 2 章で QI の仕組みについて、第 3 章で QI 後に於ける粒子生成について、第 4 章で各世代の右巻きニュートリノの働き、及び各種パラメータへの制限について触れる。より詳細な内容については Hashiba & Yokoyama (2019b) を参照されたい。

2 Quintessential Inflation

QI は、初期宇宙のインフレーションと、現在の宇宙の加速膨張を同じスカラー場 (インフラトン場) によって説明しようという理論である (Peebles & Vilenkin 1999)。ポテンシャルエネルギー $V(\varphi)$ を有した一様等方なインフラトン場 φ が宇宙全体に満ちている状態を考えてみる。この時、 φ のエネルギー密度 ρ と圧力 p はそれぞれ

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi), \quad p = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \quad (1)$$

となるので、 $\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi)$ という条件 (スローロール条件)² が満たされれば $p \approx -\rho$ となって加速膨張が実現することが分かる。ここで、図 1 のように台地 → 急坂 → 平地というような形のポテンシャルを考えてみよう。(台地と平地も僅かに傾いている。) φ が台地上に居る時はスローロール・インフレーションが実現し、急坂に差し掛かるとスローロール条件が破れて φ の運動エネルギーが優勢となってインフレーションが終了する。このような運動エネルギー優勢の状態をカイネーション (kination) と呼ぶ。 φ は平地に達した後も転がり続けるが、ハッブルパラメータ H による摩擦力 $3H\dot{\varphi}$ で減速していくため、

¹”quintessence”とは「第五の元素」という意味であり、暗黒エネルギーを説明するスカラー場を指す。この単語はアリストテレスの四元素論に由来しており、「世界に満ちる、人智を超えた天界の物質」という意味合いがある。

²正確にはスローロール変数によって書かれるが、ここでは細かいことは気にしない。

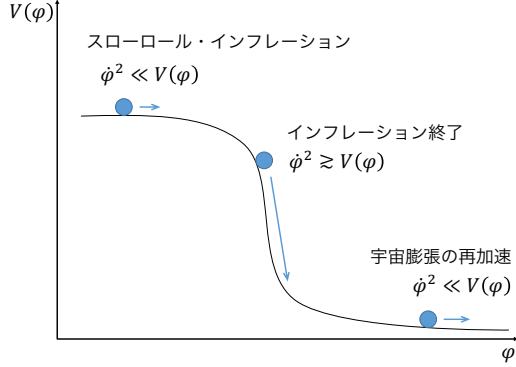


図 1: QI に於けるポテンシャルのイメージ。

スケール因子 a に対して $\dot{\varphi}^2$ は a^{-6} で、輻射と物質のエネルギーはそれぞれ a^{-4} と a^{-3} で減少するのに対し、 $V(\varphi)$ はそれより遥かに遅い $(\ln a)^{-\beta}$ ($\beta > 0$) でしか減らない。長い時を経て輻射と物質が十分に薄まると $V(\varphi)$ が再び宇宙を支配し、宇宙膨張の再加速が始まるのである。

3 Gravitational Particle Production

第 2 章で触れた通り、QI では一般的にインフラトン場のポテンシャルに極小点が存在しないため、インフラトン場がインフレーション後にコヒーレントな振動をして崩壊していくという再加熱過程のモデル (Dolgov & Linde 1982) は用いることができない。その為、ここでは重力的粒子生成 (Gravitational Particle Production) と呼ばれる機構を用いることにする。これは、宇宙の膨張則が変化するのに伴って真空状態 (基底状態) の定義が変わることによって粒子が生成するという機構である (Parker 1969)。但し、この機構は粒子が共形対称性を破っている必要があり、質量項か、スカラー曲率 R との非共形結合を有していなければならない。

FLRW 計量の下で、質量 m を有するディラック場 ψ のラグランジアンは

$$\mathcal{L}_\psi = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - am\bar{\Psi}\Psi \quad (2)$$

と書かれる。ここで、 γ^μ はガンマ行列、 $\Psi \equiv \Psi^\dagger\gamma^0$

は Ψ のディラック随伴、 $\bar{\Psi} \equiv a^{3/2}\psi$ である。式 (2) の $\bar{\Psi}$ についての変分を取ると、FLRW 計量でのディラック方程式

$$(-i\gamma^\mu\partial_\mu + am)\Psi = 0 \quad (3)$$

を得る。式 (3) はスピノルモード関数 $u_{A,B}(\mathbf{k}, \eta)$ を用いてモード展開すると

$$i\partial_\eta \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} am & k \\ k & -am \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \quad (4)$$

となり、ここから更にユニタリー変換によって混合項を分離すると

$$i\partial_\eta \begin{pmatrix} \tilde{u}_A \\ \tilde{u}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{\text{eff}} & 0 \\ 0 & -\omega_{\text{eff}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_A \\ \tilde{u}_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{amHk}{2\omega_{\text{eff}}^2} \\ -\frac{amHk}{2\omega_{\text{eff}}^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_A \\ \tilde{u}_B \end{pmatrix} \quad (5)$$

ここで、 $\omega_{\text{eff}} \equiv \sqrt{k^2 + a^2m^2}$ である。膨張則の変化 (右辺第 2 項) によって \tilde{u}_A と \tilde{u}_B が混合し、元々 \tilde{u}_A 成分しか無かった真空状態から次第にずれてくるのが分かる。我々は断熱真空

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_A \\ \tilde{u}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\int\omega_{\text{eff}}dt} \quad (6)$$

を初期状態として、QI の導くスケール因子の下で運動方程式 (5) を数値的に解くことで、重力的に生成するフェルミオンの量を計算した。QI 後の重力的粒子生成の効率を決めるのは、粒子の質量 m 、インフレーション時のハッブルパラメータ H_{inf} 、それにインフレーションからカイネーションへと遷移するのに要する時間 Δt の 3 つであることが Hashiba & Yokoyama (2019a) に於いて分かっていた為、この 3 つに焦点を当てて計算した。その結果、重力的に生成したフェルミオンは $k \sim m$ なる運動量にピークを持ち、そのエネルギー密度を与える近似式として

$$\rho \simeq 2 \times 10^{-3} e^{-4m\Delta t} m^2 H_{\text{inf}}^2 \quad (7)$$

を得た (図 2)。殆どのモデルに於いて $\Delta t \approx H_{\text{inf}}^{-1}$ である為、これ以降は $\Delta t = H_{\text{inf}}^{-1}$ とする。

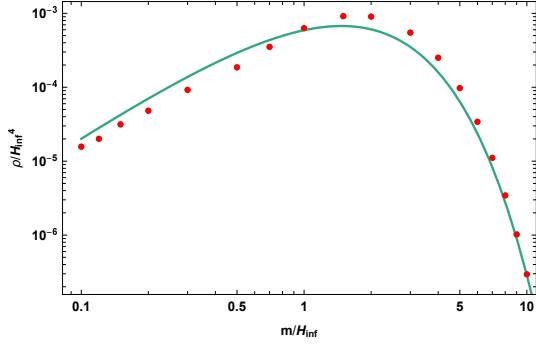


図 2: 重力的に生成するフェルミオンのエネルギー密度。赤点は数値計算の結果、緑線はその近似曲線を表す。このグラフに於いては $\Delta t = 0.3H_{\text{inf}}^{-1}$ である。

4 Right-handed Neutrinos

質量 M_i を持った 3 世代の右巻きニュートリノ N_i ($i = 1, 2, 3$) のラグランジアンとして、次のようなものを考える。

$$\mathcal{L}_N = M_i \bar{N}_i^c N_i + h_{i\alpha} N_i L_\alpha \phi^\dagger \quad (8)$$

ここで、 $L_\alpha, \phi, h_{i\alpha}$ はそれぞれ左巻きレプトンの二重項、ヒッグス二重項、湯川結合を表す。この時、 N_i は

$$\Gamma_i = \frac{1}{4\pi} \sum_\alpha |\tilde{h}_{i\alpha}|^2 M_i \quad (9)$$

なる崩壊率で標準模型の素粒子へと崩壊していき、シーソー機構によって

$$\sum_i (\tilde{h}_{i\alpha})^2 \frac{v^2}{2M_i} = m_{\nu_\alpha} \sim \begin{cases} 0.05 \text{ eV} & (\alpha = 3) \\ 0.01 \text{ eV} & (\alpha = 2) \end{cases} \quad (10)$$

なる形で左巻きニュートリノの質量 m_{ν_α} を与える。ここで、 $\tilde{h}_{i\alpha}$ はニュートリノの質量行列を対角化する MNS 行列 $U_{i\alpha}$ によってユニタリー変換された湯川結合 $\tilde{h} \equiv hU^*$ であり、 $v \approx 246 \text{ GeV}$ はヒッグス場の現在の真空期待値である。なお、これ以降は $M_1 \ll M_2 \ll M_3$ なる階層性を持った質量を考える。

4.1 N_3 for Reheating

まず、最も重い N_3 の働きについてである。式 (7) から分かる通り、 $m \simeq H_{\text{inf}} (= \Delta t^{-1})$ なる粒子が最

も効率的に生成する為、 $M_3 \sim H_{\text{inf}}$ なる N_3 が最も大量に生成し、それ故に再加熱過程で生じるエネルギーの大半を担うことになる。式 (7), (9) より、再加熱温度 T_{RH} は以下のようになる。

$$T_{\text{RH}} \simeq 6 \times 10^7 \left(\frac{\sum_\alpha |\tilde{h}_{3\alpha}|^2}{10^{-12}} \right)^{-1/4} e^{-3M_3 \Delta t} \\ \times \left(\frac{M_3}{10^{13} \text{ GeV}} \right)^{5/4} \left(\frac{H_{\text{inf}}}{10^{13} \text{ GeV}} \right)^{3/4} \text{ GeV} \quad (11)$$

ここで、 $H_{\text{inf}} \simeq 10^{13} \text{ GeV}$ とした。

N_3 に対する制限としては、原始重力波の抑制がある。重力子もまた共形対称性を破っている粒子である為重力的に生成するが、これは CMB スペクトルやビッグバン原子核合成に影響を及ぼす。これを防ぐには重力子のエネルギー密度が十分薄まるまで待つてから N_3 が輻射へと崩壊する必要があり、

$$\sum_\alpha |\tilde{h}_{3\alpha}|^2 < 8.5 \times 10^{-11} \quad (12)$$

なる制限を N_3 の湯川結合に課すことになる。

4.2 N_2 for Baryogenesis

次に、中間の質量を持つ N_2 についてである。 N_i 間に干渉が存在すると 1 ループ補正から正味のレプトン数が生じ、そこからスファレロンの効果によってバリオン数が生成されることが知られている (Fukugita & Yanagida 1986)。計算の詳細は紙面の都合上省くが、現在観測されているバリオン数 $n_B/s = (8.65 \pm 0.06) \times 10^{-11}$ を実現するには、 $\tilde{h}_{i\alpha}, M_i$ の間に

$$\text{Im} \left[\left(\sum_\alpha \tilde{h}_{3\alpha} \tilde{h}_{2\alpha}^* \right)^2 \right] \sim 10^{-16} \frac{M_3}{M_2} \quad (13)$$

なる関係が成り立っていなければならないことが分かった。 $\tilde{h}_{3\alpha}$ には式 (12) なる上限が課されている為、

$$\tilde{h}_{22} \text{ or } \tilde{h}_{23} \gtrsim 10^{-3} \sqrt{M_3/M_2} \quad (14)$$

という条件が式 (13) から得られた。これを式 (10) と合わせると $M_2 \gtrsim 10^{11} \text{ GeV}$ なる制限が得られる。

4.3 N_1 for Dark Matter

最後に、最も軽い N_1 についてである。式 (9) より、 N_1 が安定した暗黒物質となるには M_1 が非常に小さい値を取っている必要がある。Perez et al. (2017) よると $M_1 \simeq 10 \text{ keV}$ なる質量に対する制限が最も緩く、

$$\sum_{\alpha} |\tilde{h}_{1\alpha}|^2 < 10^{-26} \quad (15)$$

となる。これは式 (10) による制限よりも遥かに強い。

しかし、式 (7) から分かる通り、質量の小さい N_1 はそのままでは殆ど生成せず、現在の暗黒物質の存在量を説明できない。そこで、我々は N_1 に対して「非共形結合」 $\frac{R}{\mu}\bar{\psi}\psi$ を導入した。ここで、 μ は質量次元 1 を持つ定数である。この項はインフレーション中 $12H_{\text{inf}}^2/\mu$ なる有効質量として働き、重力的に生成する N_1 の数密度が $n \simeq 1.1 \times 10^{-1} H_{\text{inf}}^5/\mu^2$ にまで増幅されることが数値計算によって確かめられた。これより、現在観測されている暗黒物質の存在量を実現するには $\mu \sim 10^{15} \text{ GeV}$ であれば良いことが分かった。 μ は何らかのカットオフスケールと考えられる為、 H_{inf} 以上プランクスケール以下であることは非常に自然である。

5 Discussion

以上より、 $M_1 \sim 10 \text{ keV}$, $M_2 \sim 10^{11} \text{ GeV}$, $M_3 \sim 10^{13} \text{ GeV}$ なる質量と、式 (12), (14), (15) で表される制限を満たすような湯川結合を有する 3 世代の右巻きニュートリノ N_i を QI に導入すれば、バリオン非対称、暗黒物質、暗黒エネルギーを包括的に説明できることが示された。

しかし、 M_1 と M_3 の間に存在する 18 桁もの質量格差や、 $\tilde{h}_{1\alpha}$ に対する制限 (15) など是不自然なファインチューニングのように見える。このような質量や湯川結合に対する階層性を自然に実現する機構としては、RS ブレーンワールド (Randall & Sundrum 1999) が知られている。これは、我々の宇宙が 5 次元のバルク (bulk) に浮かぶ 4 次元のブレーン (brane) であると考えられる理論である。重力子を除く標準模型の粒子は我々の住むブレーンに固定されているが、 N_i は我々とは違うブレーンから染み出してきた 5 次元

フェルミオンの波動関数のゼロモードだと考えると、バルクを通過している間に質量や湯川結合といったパラメータが指数的に薄まることになる。その為、5 次元時空に於ける種々のパラメータの差が、我々の 4 次元ブレーン上では指数的に増幅されて見えるのである。具体的には、Kusenko et al. (2010) で採用されている設定を用いると、表 1 のようにファインチューニングを緩和できる。 l は 2 枚のブレーン間の距離を表す。) より根源的な 5 次元の理論としては、標準模型と同等かそれ以下のチューニングに取められるのである。

表 1: ブレーンワールドによるチューニングの緩和

4D ブレーンでの値	5D バルクでの値
$M_3 \sim 10^{13} \text{ GeV}$	$m_3 \sim 2.3l^{-1}$
$M_1 \sim 10 \text{ keV}$	$m_1 \sim 24l^{-1}$
$\tilde{h}_{3\alpha} < 3 \times 10^{-6}$	$\lambda_{3\alpha} < 3 \times 10^{-4}$
$\tilde{h}_{1\alpha} < 10^{-13}$	$\lambda_{1\alpha} < 10^{-2}$

Acknowledgement

指導して下さった横山順一教授、ご意見ご指摘をくださった研究室の方々に深く感謝いたします。また、発表者はフォトンサイエンス・リーディング大学院 (ALPS) からの支援を受けています。

Reference

- Dolgov, A. D. & Linde, A. D. 1982, Phys. Lett. **116B**, 329.
- Fukugita, M. & Yanagida, T. 1986, Phys. Lett. B **174**, 45.
- Hashiba, S. & Yokoyama, J. 2019, JCAP **1901**, 028.
- Hashiba, S. & Yokoyama, J. 2019, arXiv:1905.12423 [hep-ph].
- Kusenko, A., Takahashi, F & Yanagida, T. 2010, Phys. Lett. B **693**, 144.
- Parker, L. 1969, Phys. Rev. **183**, 1057.
- Peebles, P. J. E. & Vilenkin, A. 1999, Phys. Rev. D **59**, 063505.
- Perez, K. et al. 2017, Phys. Rev. D **95** no.12, 123002.
- Randall, L. & Sundrum, R. 1999, Phys. Rev. Lett. **83**, 3370.

c16

Constraints on asteroid-mass primordial
black holes (PBHs) as dark matter
candidates

東京大学大学院 理学系研究科

Qiu Tian

Constraints on asteroid-mass primordial black holes (PBHs) as dark matter candidates

Qiu Tian (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

Primordial Black Holes (PBHs) have received increasing attention recently, including claims that black hole binaries for LIGO gravitational wave might be originated from PBHs. PBHs are a viable candidate of cold dark matter that does not require to introduce any new elementary particles beyond the Standard Model (SM). So far, various observations have been used to put constraints on the abundance of PBHs over a wide range of the mass scales. Here I would like to review constraints on PBHs of asteroid-mass scales in the range $3.5 \times 10^{-17} < M_{\text{PBH}}/M_{\odot} < 4 \times 10^{-12}$ following the recent paper by Montero-Camacho et al. We focused on three phenomena: (1) optical microlensing, considering the finite source size and diffractive effects, they discuss the scaling relations between the event rate, m_{PBH} and the event duration. (2) Dynamical capture of PBHs in stars, a capture rate based on the phase space arguments has been derived. The disruption of stars by captured PBHs is supposed to be happened, in which process we can constrain the asteroid-mass PBHs. (3) Destruction of white dwarfs by PBHs. When the PBHs pass through the white dwarfs but do not get captured, they can ignites carbon fusion on the WDs. In summary, the window is still open in the sense that all dark matter is made up by such tiny PBHs.

1 Introduction

In current Λ CDM model, almost 26% of the total energy density is made of dark matter (DM) in the Universe. The evidence of DM existence has been observed directly via the gravitational lensing: the strong lensing by massive galaxy clusters, the weak lensing of galaxies by galaxies and large-scale structure and the CMB lensing. There are several advantages regarding PBHs as a candidate of DM. First, PBHs do not invoke any new elementary particles. Second is that PBHs' properties can be simply determined by their mass m_{PBH} and spin $a_{\star, \text{PBH}}$. There is no need to add any other parameters to interact with the visible matter. Third is that the PBHs can be bounded at both high-mass and low-mass ends.

There are several constraints of PBHs on various mass range from stellar-mass PBHs to $0.01M_{\odot}$.

Generally those constraints are plotted in the $(m_{\text{PBH}}, f_{\text{PBH}})$ plane, where $f_{\text{PBH}} = \Omega_{\text{PBH}}/\Omega_{\text{DM}}$ is the fraction of the dark matter in PBHs.

Besides, there is also an asteroid-mass window for PBH as dark matter, where the mass is too small for current optical microlensing surveys ($\leq 4 \times 10^{-12}M_{\odot}$) but too large for constraints from Hawking radiation ($\geq 5 \times 10^{-17}M_{\odot}$). Here they will revisit the constraints in PBHs mass and correct or strengthen them such as femtolensing and picolensing of GRBs; microlensing of stars in M31; the dynamical capture of PBHs by stars including neutron stars and white dwarfs; and WD survival from the passing PBHs' ignition of carbon fusion.

Gamma ray bursts (GRBs) donate a great to asteroid-mass constraints since of their cosmological distance (hence large lensing probability) and short wavelength of electromagnetic radiation (hence the Einstein radius can exceed the Fresnel radius even

for low-mass lenses). However, it is not clear whether $f_{\text{PBH}} = 1$ would be excluded for any value of m_{PBH} . So there is no range excluded of m_{PBH} from GRBs.

Here we concentrate on the non-GRB constraints on the asteroid-mass PBH window.

2 Optical microlensing

Optical microlensing is the principal tool to constrain dark compact objects in the planetary to stellar mass range. The early searches such as EROS observations has ruled out the possibility that PBHs make up all of the dark matter for those mass range from 7×10^{-8} to $15 M_{\odot}$ and MACHO observations has ruled out the $0.3\text{-}30 M_{\odot}$ window.

There are challenges constraining the lower masses since the finite sizes of the source stars become important and the event durations become very short even if the source is pointlike. There are two approaches, one is to accept the finite source size effects and try to get a high precision photometry, which has been done by *Kepler* ruling out the mass range from 2×10^{-9} to $10^{-7} M_{\odot}$. The other is to use high-cadence observations of sources that are much farther away such as those in M31.

The HSC observations of M31 has constrained the PBHs mass upper bounds down to $4 \times 10^{-12} M_{\odot}$, with the reach of the search at low m_{PBH} set by the finite source size effects and diffraction effects.

The microlensing event rate per star assuming all dark matter is in black holes of mass m_{PBH} is

$$d\Gamma = \frac{2\rho_{DM}(D_{OL})}{m_{\text{PBH}}} v_{\perp} P(v_{\perp}|D_{OL}) dD_{OL} db dv_{\perp} \quad (1)$$

where v_{\perp} is the transverse velocity of the lens relative to the observer-source line, D_{OL} is the observer-lens distance and $P(v_{\perp}|D_{OL})$ is the conditional probability distribution for the transverse velocity. b is the impact parameter and they consider the maximum of b is zero if an event would not be detected. I cut out the details of the calculation

here, and show some computed event rate in Figure 1. $R_S = 0$ for point sources in the left column.

They also consider the diffractive effects towards M31 (right column in Figure 1). The diffraction limits severely limits the ability for the M31 to probe the low masses.

And neglecting the details here, we get last approximation rate from Eq.1.

$$\Gamma \approx \frac{8\rho_{DM}(D_{OL,max})m_{\text{PBH}}^4 R_S^4 D_{OS}}{15m_{\text{PBH,crit}}^5 \sigma^2 t_{min}^3} \quad (2)$$

Then (1) the rate is steeply falling with more stringent duration cuts, $\Gamma \propto t_{min}^{-3}$. (2)The rate is steeply rising with PBH mass, $\Gamma \propto P_{\text{PBH}}^4$. (3) the rate is steeply falling with source radius, $\Gamma \propto R_S^{-6}$. And (4) the rate scales with $(A_{min} - 1)^{-5}$ for small A_{min} (due to $m_{\text{PBH,crit}}$ scaling, which is not shown here). The curves in Figure 1 are consistent with the expectation.

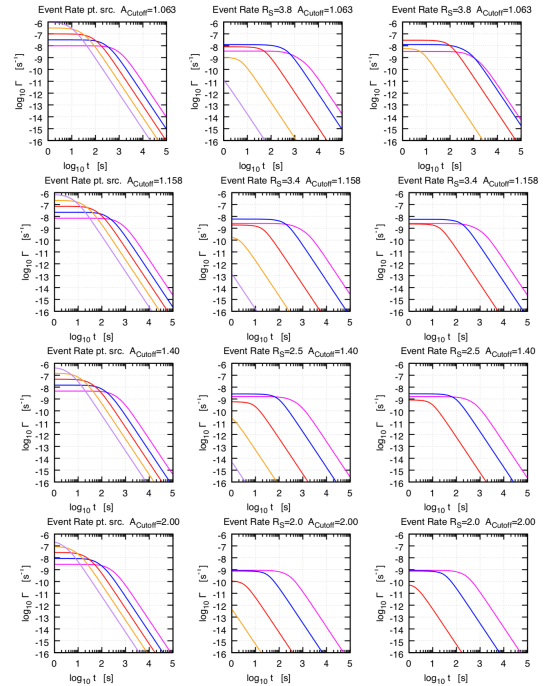


Figure 1: (Montero et al. 2019) Comparisons of different microlensing event rates. The color: magenta for $10^{-9} M_{\odot}$, blue for 10^{-10} , red for 10^{-11} , orange for 10^{-12} , purple for 10^{-13} .

According to the rates in Figure 1, a search for 7 hours will not be sensitive to such low masses. They conclude that M31 microlensing technique is unlikely to probe to $\ll 10^{-12}M_{\odot}$.

3 Dynamical capture of PBHs in stars

Another potential constraints comes from stars capturing a PBH by dynamical friction which may destroy the star. The star may be eaten by accretion onto the black hole, or possibly feedback from such accretion might disrupt it. Though they argue that survival of stars does not constrain PBHs, some stellar destruction events should occur. They estimate their rate and argue that modeling them is a promising method to constrain asteroid-mass PBHs.

The problem of PBH capture is a multi-step process. First the PBH passes through the star, loses energy by dynamical friction, and then is captured onto a long elliptical orbit. The PBH continues losing energy and lowering its apoastron. Finally the PBH settles to the star's center. I skip the mathematical detail of such a process and also the post-capture dynamics here.

There are two constraints on PBHs arising from capture in stars: (1) constraint arising from stellar survival which means that observation of a star implies that it has not captured a PBH or the captured PBH has not eat the star; (2) constraint arising from the directly observable signatures of a star being eaten by a captured PBH.

Considering first situation, the numerical estimate shows that there is only a tiny fraction of stars would have captured a PBH, even if PBHs make up all of the dark matter. They conclude that the survival of stars over a cosmological timescale does not rule out any mass range of PBHs as a component of dark matter.

The second one also implies that the destruction

of stars by PBHs is 3-4 orders of magnitude less than supernovae, which means the expected observational signature has beyond our model.

4 White dwarf survival

They treat the problem of PBHs transit through a carbon/oxygen white dwarf and consider the possibility of ignition the carbon by the passage of a PBH and the ignition provoking a runaway explosion. There are two ways to constrain PBHs. One constrains the abundance of PBHs by observation of WD in a certain mass range. The other looks for the rate of Type Ia supernova since the passage of PBH could explode WD with masses lower than the Chandrasekhar mass. But the second one is not clear, we only talk about the first constraint.

I also skip the mathematical derivation of the velocity and density profiles and then the minimum PBH mass for ignition at each situation, finally the rate of collisions assuming the PBH will pass through the WD, reach a minimum radius and then leave the star.

In Figure 2, it shows the minimum required PBH mass for runaway explosion produced by dynamical friction from the passage of a PBH through a WD of a given total mass. The mass shell $m(r)$ where we attempt ignition is considered to get the smallest minimum PBH mass. And they show a lower curve with label "no KH" which stands for ignoring the Kelvin-Helmholtz instability while the upper one requiring the burning time shorter than the KH instability time.

In Figure 3, they show the range of parameter space where ignition can occur. For each WD range, they consider both requiring and not requiring $\tau_{burn} < \tau_{KH}$. And for $T \geq 1.4 \times 10^{10}\text{K}$, carbon dissociation occurs, in which we can not determine if the ignition occurs.

To constrain the fraction of PBHs, they calculate

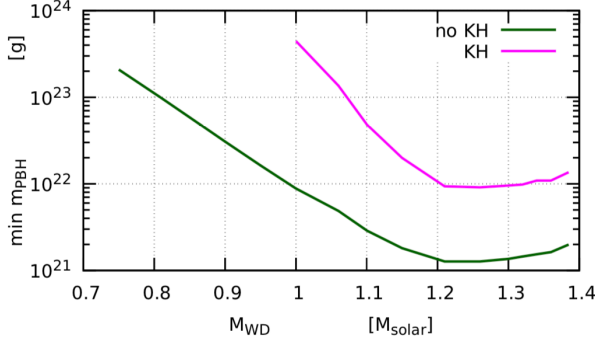


Figure 2: (Montero et al. 2019) The minimum PBH mass needed to achieve runaway for specific WD total mass. The green line shows the model without considering convection losses by KH instabilities

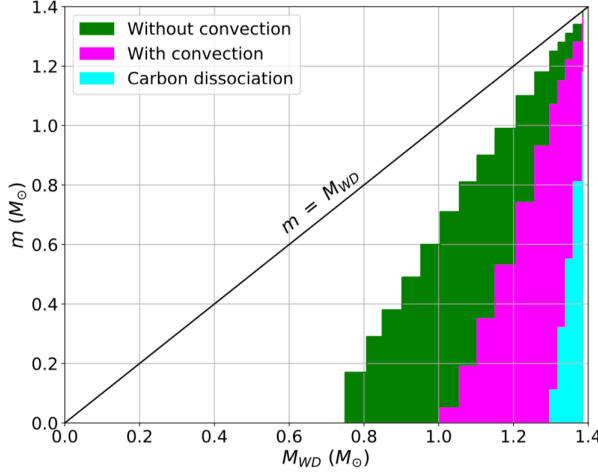


Figure 3: (Montero et al. 2019) The parameter space where the ignition occurs.

the rate of collisions between a WD and a PBH,

$$\Gamma = 2.65 f_{PBH} \frac{\rho_{DM}}{m_{PBH}} \frac{\tilde{l}^2}{v_{gal}} \quad (3)$$

where they use parameter to the Galactic disk: $v_{gal} = 225\text{km/s}$ and $\rho_{DM}c^2 = 0.4\text{GeV/cm}^3$, and \tilde{l} is the maximum specific angular momentum leading to ignition. And in Figure ??, they show the rate results for each mass range of WD. In all cases, they found that even the massive WDs can survive for longer than a Hubble time. The WD constraint in Milky Way does not exclude $f_{PBH} = 1$ at any

MPBH.

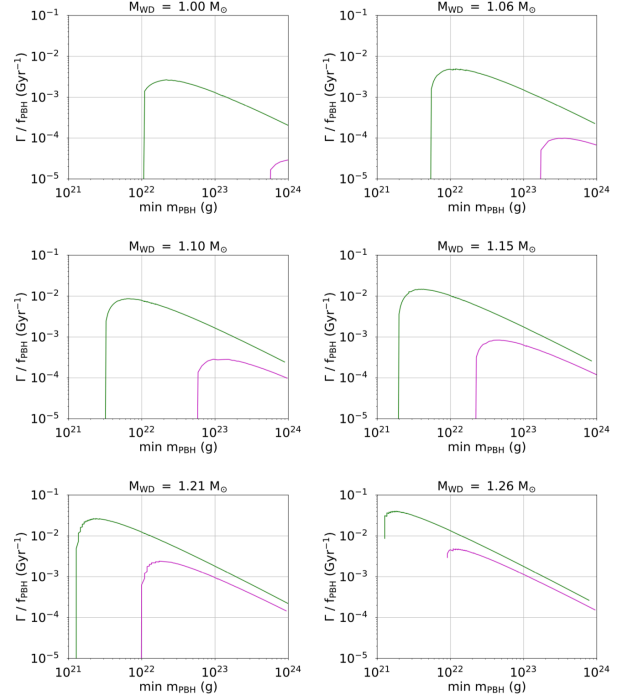


Figure 4: (Montero et al. 2019) The relationship between rate and the PBH mass to cause ignition

5 Conclusion

After revisiting the constraints on asteroid-mass PBHs as a dark matter candidate, none of the mechanisms examined can currently exclude PBHs as dark matter candidates for the mass range from $3.5 \times 10^{-17} M_{\odot}$ to $4 \times 10^{-12} M_{\odot}$. However, there remain significant astrophysical uncertainties in their calculation. It still requires further studies to constrain the asteroid-mass window.

Reference

- Montero-Camacho P, et al. 2019, arXiv:1906.05950
- Niikura H, et al. 2019 PRD, 2019, 99(8): 083503.
- Graham P W, et al. PRD, 2019, 92: 063007

c17

ボイドの形状進化と潮汐場の系統的
調査

名古屋大学大学院 理学研究科

簗口 睦美

ボイドの形状進化と潮汐場の系統的調査

簗口 睦美 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

銀河団などの高密度な構造で囲まれた低密度領域であるボイドは、重力理論や宇宙論のプロープとして重要であり、これまでも観測的検証への応用が多くなされている。しかし、そのほとんどは大域的な一様等方性の仮定や、Icke (1984) による、ボイドが球状に成長するという報告に基づく、極めて一般的な解析を行ったものが多く、個々のボイドの物理量を決定する要因に関しては未だ統一的な理解が得られていない状況にある。

超銀河団スケールの構造であるボイドは、電磁相互作用や、超新星爆発のフィードバックなどの局所的な現象による効果を比較的受けにくいと考えられる。このため、これらの効果を見れば、ボイドの物理量を決定する要因としては、重力的成長が主であると考えられる。そこで本研究では、潮汐場に対するボイドの応答性を調べるため、N 体シミュレーションを用いて重力場とボイド形状の発展傾向との相関を測定した。その結果、微小なスケールの密度揺らぎによって瞬間的にボイドの楕円率に潮汐場の情報を持たない大きな分散が生じ、楕円率分布の統計的有意性を下げている可能性が示唆された。

1 Introduction

現在、我々の宇宙は星や銀河など、豊かな構造に満ちている。1980 年代に、銀河団を超えるスケールの構造である宇宙の大規模構造が発見され、銀河をはじめとする高密度領域だけでなく、銀河の少ないボイド領域にも目が向けられるようになった。特に、ボイドはダークエネルギーが問題となる超銀河団スケールの構造であると同時に、重力以外に相互作用をするような成分 (e.g. 電磁気相互作用をするバリオン) による効果が、長距離力である重力の効果よりも比較的小さいと考えられる。このため、ボイドは銀河と比べて純粋に重力的に形成された構造であると考えられ、近年のダークエネルギーやダークマター問題に観測的な示唆を与えることが期待される。実際、これまでもボイドを用いた宇宙論パラメータへの制限や重力理論の検証が進められている。一方、このようなボイドを用いた応用的研究の多くでは、密度場の大域的な一様等方性の仮定や、Icke (1984) による、ボイドが球状に成長するという報告に基づく、極めて一般的な解析を行っている。このような解析では、例えば重力以外の異なる要因で決定されているボイド同士を同等に扱っている可能性があり、これは一方にとってはノイズが入っている

状態とみなされるため、理論の制限力や観測事実の解釈等に多大な影響を及ぼすと考えられる。このため、個々のボイドの物理量やその進化傾向、それらを決定する要因の調査は重要な意味を持つ。

本研究では、個々のボイドの発展傾向を重力的観点から説明することを目的とし、以下の手順で解析を行う。まず、ボイドが潮汐力によって歪められると仮定すると、時間が経つにつれて潮汐力の方向にボイドの長軸が向き、その方向にボイドが伸びることが期待される。これを確かめるために、ボイドと同じ体積を持つ球上で動径方向重力勾配を計算し、その四重極成分を最大化する方向とボイドの長軸がなす角の進化傾向を調べる。この角度は、我々の仮定が正しければ、時間進化に伴って小さくなるはずである。また、ボイドの潮汐力への応答を定量的に見積もるために、潮汐力の大きさとボイドの形状進化の間の相関を調べる。

2 Methods

N-body Simulation

本研究では、以下のセットアップによる N 体シミュレーションを行った。

表 1: シミュレーションセットアップ

N	L (Mpc/h)	Ω_{m0}	Ω_{b0}	$\Omega_{\Lambda 0}$	h
512^3	500	0.31	0	0.69	0.70

$z = 20$ までの粒子分布は 2 次 Lagrange 摂動を用いて生成し、N 体計算は赤方偏移 $z = 20$ から行った。

Void identification

$z = 0$ 付近の各スナップショットに関して、各々独立に、ボイド同定ツールキット VIDE (Sutter et al. (2014)) を用いてボイドを検出した。本研究で用いる VIDE は ZOBOV (Neyrinck (2008)) によるアルゴリズムを用いて、以下のようにボイドを同定している。

1. 粒子の二等分面によって、シミュレーションボックスを Voronoi セル (以下単にセル) に分割する。このとき、各セルは粒子をただ一つ含み、セルの体積の逆数を粒子数密度と捉える。
2. Watershed Algorithm と呼ばれる手法により、セルを小領域 (zone) にグループ分けする。この手法は、任意のセルに対し、その隣接するセルの中で最も密度の低いものを選んで行き、最終的に行き着いたセル (極小値をとるようなセル) によってグループ分けするものである。
3. 小領域のうち、それらを隔てる領域の密度 (表層のセルの体積) が低い順に、順次小領域を統合 (グルーピング) していく。VIDE のデフォルトの設定では、平均密度の 0.2 倍に達するまでこの統合操作を行った後、自分を含むようなより大きいグループが存在しないようなものをボイドとしている。

Void tracking

本研究では、個々のボイドの時間発展を見る。そのために、各スナップショット中のボイドが同じボイドであるかどうかを判定する必要がある。これは、ボイドの統合や分裂、生成や消滅などを考えると、必ずしも自明な問題ではないが、ここでは以下のルールに従ってボイドを同定した。

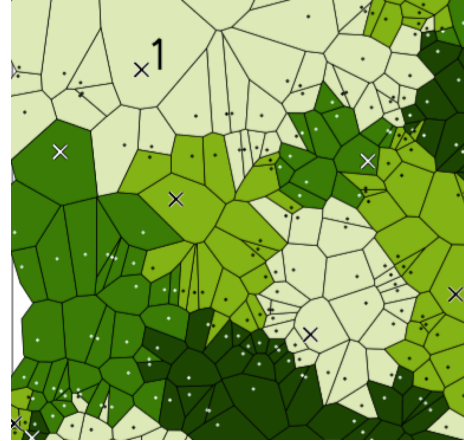


図 1: Voronoi セルに分割されたシミュレーション領域の一部 (改 Neyrinck (2008))。手順 2 によるグループが色の違いで表されている。

1. 粒子 ID を用い、低赤方偏移側 (未来) のボイドを A、高赤方偏移側 (過去) のボイドを B として、どれだけ粒子を受け渡したかを表す $UP = N_{A \cap B} / N_A$ とどれだけ粒子を受けとったかを表す $DP = N_{A \cap B} / N_B$ をすべてのボイドのペアに対して計算する。ただし、 N_i はボイド i のメンバー粒子数であり、 $N_{i \cap j}$ はボイド i とボイド j が共有する粒子数である。
2. これら UP と DP を同時に最大化するようなペアのみを「追跡可能」なボイドとして抽出する。

これによって、注目する赤方偏移区間中で合体分裂を経たとしても、その中で”主流” (粒子数が最も多く受け継がれる) となるようなボイドを一対一対応で抽出することになる。

なお、合体分裂をしているかの指標として、結果どの程度の粒子が受け渡されたかを示す粒子保持率 $PR = \sqrt{UP DP}$ を計算する。この値が大きいボイドは合体分裂をほとんど行っていないと捉えることができる。

Definitions

ボイドの特徴を表す物理量の定義は先行研究によって様々あり、適当な定義に関して未だ十分な合意が得られていないが、本研究では VIDE で算出されるものを中心に、主に以下の量を用いる。

- 有効半径
ボイドの体積（シミュレーションでは、ボイドを構成する voronoi セルの体積の合計） V を用いて、 $4\pi R^3/3 = V$ を満たす R を有効半径とする。
- 軸の方向
各ボイドのメンバー粒子に対し、重心からの距離に関して最小二乗法を適用することで、ボイドを 3 軸不等楕円体でフィッティングし、その楕円体の各軸の方向をボイドの軸方向とみなす。
- 楕円率
ボイドを 3 軸不等楕円体でフィッティングした時の軸長 $a_1 > a_2 > a_3$ を用いて、

$$e \equiv 1 - \frac{\sqrt{a_2 a_3}}{a_1} \quad (1)$$

で定める。定義により楕円率は 0 から 1 の値をとる。

また、潮汐場の定義及び計算は以下のように行う。半径 r の球上における重力場の動径方向成分に対し、Legendre 展開を行う。

$$F_n^{(l)}(r) = -\frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial \Phi(r, \hat{\theta})}{\partial r} P_l(\mu) d\mu, \quad (2)$$

ここで、 \mathbf{n} は Legendre 展開の極の方向であり、 $\mu = \hat{\theta} \cdot \mathbf{n}$ である。ここにおいて、四重極成分を最大化する方向を潮汐場の方向と呼ぶことにし、この方向とボイドの長軸方向のなす角をここでは単に alignment と呼ぶ。また、その時の潮汐力の大きさに、潮汐場の方向とボイド長軸の内積をかけたものを有効潮汐力と呼ぶことにする。

3 Results & Discussions

まず、ボイドが潮汐力によって歪められる場合、alignment は時間進化に伴い減少することが期待されるが、すべての追跡可能なボイドに関してこれを調べると、平均的にむしろ増加していた。しかし、 $PR \geq 0.75$ の、あまり粒子交換をしていないボイドに絞ると、減少していることがわかった。これは、粒

子交換によってボイド長軸の方向が背景潮汐場の情報を失うことを示唆する結果である。

次いで、有効潮汐力とボイドの楕円率進化の相関を調べた。もしボイドが周囲の潮汐場によって歪められるならば、有効潮汐力とボイドの楕円率増加量との間に正の相関が認められるはずである。ただし、ボイドが球に近く、進化の過程で長軸方向が大きく変わるような場合にはその限りではないため、長軸方向が 45 度以上変わるようなボイドは除いた（なお、このようなボイドの数は全体の 5% 程度であり、これらを含めても結果は大きく変わらなかった）。

図 2 は 1Gyr あたりの楕円率の増加量と有効潮汐力の相関を、最低粒子保持率の関数としてプロットしたものである。この図を見ると、粒子交換をあまり行わないボイドのみの場合、わずかながら期待どおり重力場とボイドの応答に正の相関が見られるが、粒子交換するボイドを含めていくと相関が消失することがわかる。

楕円率の増加量と有効潮汐力の関係について、より詳しく見ていくと、図 3 に示すように粒子交換によって楕円率が大きく増減している事が明らかになった。特に有効潮汐力が小さい場合に、粒子流入するとボイドが歪み、粒子流出した場合にはボイドが丸くなるという傾向が顕著である。いくつかのボイドを実際に見てみると、図 4 のように粒子が入ってくるとその方向にボイドの境界が伸び、粒子がちぎれて出て行くとボイドがその方向に縮む傾向が確かに見られる。

これらの結果から、ボイドスケール以下の揺らぎがホワイトノイズのように作用して楕円率分布の統計的有意性を下げている可能性があるが、シミュレーション解像度や密度場のスムージングスケールに依存する可能性もあるため、さらなる検証が必要である。

4 Summary

本研究では、ボイドの物理量及び進化傾向を決定する主要因を解明する目的で、特にその候補の一つである重力場に注目し、N 体シミュレーションを用いてボイドの進化傾向の調査および解釈を試みた。その結果、粒子交換をほとんど行わないボイドに限定

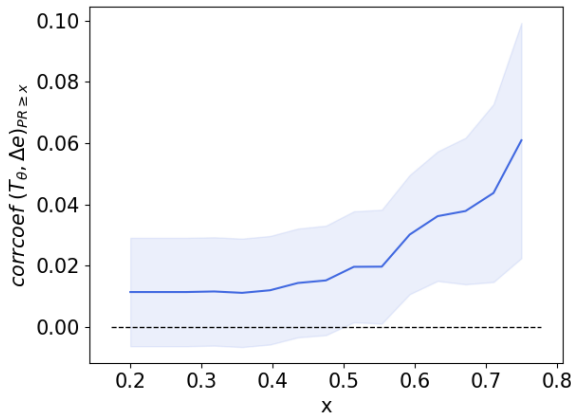


図 2: 1Gyr あたりの楕円率の増加量と有効潮汐力の相関。横軸は粒子保持率の下限。影の部分は 95%信頼区間。粒子交換をあまり行わないポイドのみの場合、わずかながら期待どおり重力場とポイドの応答に正の相関が見られるが、粒子交換するポイドを含めていくと相関が消失する。

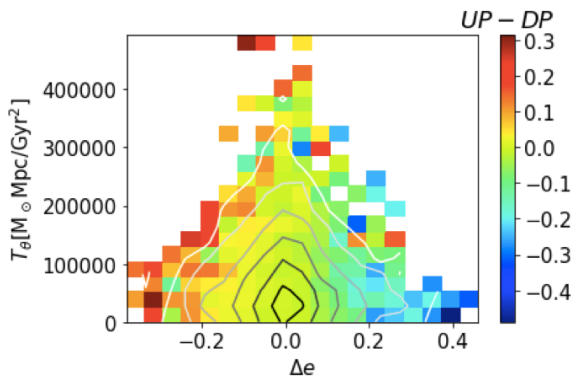


図 3: 1Gyr あたりの楕円率の増加量に対する有効潮汐力の数分布。等高線は対数スケールでのポイド数分布、色はポイドが進化の前後で受けとった粒子の割合から受け渡した粒子の割合を引いたものであり、この値が大きいと周囲からの粒子流入（合体）、小さいと周囲への粒子流出（分裂）が起きていることを示す。

した場合には、ポイドの長軸方向は背景潮汐場の四重極成分の方向に揃って行く傾向が見られ、さらに、有効潮汐力とポイドの楕円率増加量の間には正の相関が認められた。この結果は、潮汐力によってポイドがゆがめられるという描像を支持する。

一方で、進化を追うことができるポイド全てを含めた解析ではポイドの長軸と潮汐場の四重極成分の方向は平均的に離れて行き、有効潮汐力とポイドの楕

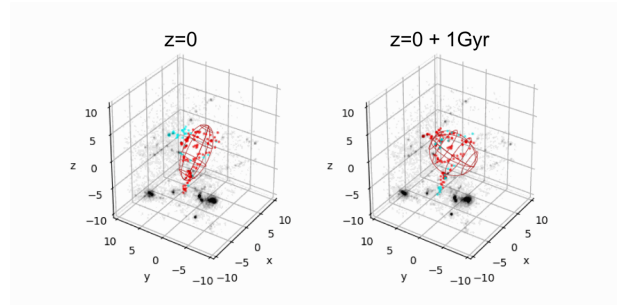


図 4: 粒子交換しているポイドの例。z 軸方向が潮汐力の方向であるが、ポイドはそちらの方向に伸びるのではなく、粒子がくっついた方向に伸び、粒子がちぎれた方向に縮んでいる。

円率増加量の間にあった相関も消失した。粒子保有率を指標としたより詳細な調査により、特に有効潮汐力が小さな場合において、ポイドより小スケールの密度揺らぎが瞬間的にポイドの楕円率に潮汐場の情報を持たない大きな分散を生じさせ、楕円率分布の統計的有意性を下げている可能性が示唆された。これがシミュレーション特有のものか、物理的な現象として捉え、モデル化することが可能であるか、今後検証していきたい。

Acknowledgement

貴重な研究費から本夏の学校への旅費を補助していただきました、名古屋大学 教授 杉山直様、日頃ご指導・議論していただいています同大学 講師 西澤淳様、教授 竹内努様、また、第 49 回天文天体若手夏の学校の企画運営いただいた方々へ、厚く御礼申し上げます。

Reference

J. Icke. MNRAS., Vol. 206, pp. 1-3, 1984.
 Platen E., van de Weygaert R., Jones B. J. T., Vol. 387, p.128, MNRAS, 2008.
 Sutter P. M., Elahi P., Falck B., Onions J., Hamaus N., KnebeA., Srisawat C., Schneider A., Vol. 445, p.1235, MNRAS, 2014.
 P. M. Sutter et al. A&C, Vol. 9, p. 1, 2014.
 M. C. Neyrinck. MNRAS., Vol. 386, pp. 2101-2109, 2008.

c18

ガウス過程を用いた宇宙の大規模構造
の復元

名古屋大学大学院 理学研究科

吉田 貴一

ガウス過程を用いた宇宙の大規模構造の復元

吉田 貴一 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙の進化を記述する現代宇宙論は現在観測されている現象をよく説明することができている。我々が予測する理論と観測は「パワースペクトル」という統計量を用いて検証を行う。しかし、我々は宇宙を一つしか観測することができないためそこから生じる誤差 (コズミックバリエーション) を避けることができず、統計量を扱う限りこの誤差が宇宙論の不定性を決めてしまう。そこで本研究では、統計量に頼らず密度ゆらぎの時間発展を直接調べることでコズミックバリエーションを超える新たな精密宇宙論を開拓することに着目した。

我々が実際の観測から得られるものは光円錐上の情報のみである。つまり、我々が遠方宇宙を観測するとそれだけ「過去」のゆらぎを観測することになる。一方で、何らかの方法で遠方宇宙の「現在」のゆらぎを予測することができれば、観測量と比較することでゆらぎの時間発展を知ることができる。異なる時刻のゆらぎは線形成長因子 D を介して結びつき、 D を知ることで宇宙論のモデルに制限を与えることが可能になる。

本発表では回帰モデルの予測方法の一つである「ガウス過程」を用いてゆらぎの再構築を行い、暗黒物質の密度パラメータに与えた制限について報告をするとともに、その問題点についても議論する。

1 Introduction

現在、観測機器や技術の発展などにより「精密宇宙論」という学問は急速に前進した。例えば、宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) の観測は、我々のビッグバン理論を支持する重要な証拠にもなった。また、*Planck* 衛星による CMB の温度の非等方性や *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS) による大規模構造の観測などにより宇宙論における未定パラメータなどが非常に高い精度で分かってきた。従来、我々が予言する理論との比較は「パワースペクトル」という分散を用いた評価が行われてきた。図 1 は *Planck* (2015) による CMB 温度ゆらぎの角度パワースペクトルの観測結果である。 l は角度のスケールを示し、 l が小さいほど大きなスケールの情報を示している。

図 1 より、大きなスケールにおいて観測の誤差が大きいことが見てとれる。これは我々が宇宙を一つしか観測できないことから生じる原始的な誤差 (コズミックバリエーション) であり、この誤差はパワースペクトルなどの統計量を扱う限り避けることはできない。

そこで、本研究ではパワースペクトルを用いることなく宇宙論を決める新たな方法の開発を目指す。その方法としてダークマターの密度ゆらぎ $\delta(x, t)$ の時間発展を用いることができる。我々は光を用いて観

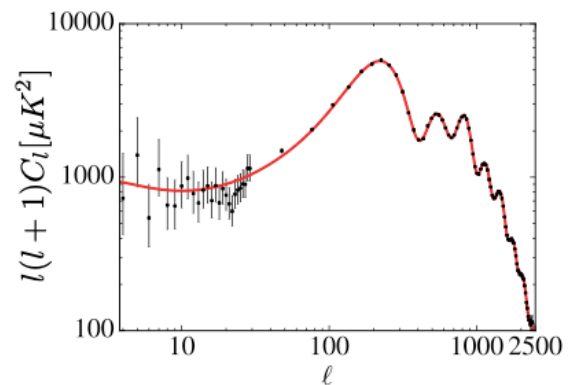


図 1: CMB 温度ゆらぎの観測

測を行うため、我々が得ることのできる情報は光円錐上 $\delta(x = c(t_0 - t), t)$ に限られる。つまり、遠方宇宙を観測すればするほど、それだけ過去の宇宙を観ることになる。一方で、何らかの方法で現在の時刻の密度ゆらぎ $\delta(x, t_0)$ を予測することができれば、密度ゆらぎの線形成長率 $D(t) = \delta(x, t) / \delta(x, t_0)$ を調べることができる。

本発表では機械学習の分野で使われる「ガウス過程」を用いることで線形成長因子 D を推定した。ガウス過程は関数形を仮定することなしに回帰を行う

ことができるノンパラメトリック回帰モデルの一種である。

構成は以下のようになっている。まず、第 2 章ではガウス過程の基礎について解説を行う。第 3 章では問題設定と方法について述べる。第 4 章でその結果を議論し、第 5 章でアルゴリズムの問題点について言及する。

2 ガウス過程

今、座標 $\mathbf{x}_N = [x_1, x_2, \dots, x_N]$ に対する観測データ $\delta_N = [\delta_1(x_1), \delta_2(x_2), \dots, \delta_N(x_N)]$ があるとする。ガウス過程とは、観測データ δ_N の同時分布 $P(\delta_N)$ が以下の式に従うことである。

$$P(\delta_N) = \mathcal{N}[\delta_N | 0, K(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}'_N)] \quad (1)$$

ここで、 $\mathcal{N}[\delta_N | m, \sigma^2]$ は平均 m 、分散 σ^2 のガウス分布を示す。共分散行列 $K(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}'_N)$ の各成分はカーネル関数という量で定義され、今回は次の式で与えられるガウスカーネルを用いた。

$$k(x_i, x_j) = \theta_0 \exp\left(-\frac{(x_i - x_j)^2}{2\theta_1^2}\right) \quad (2)$$

式 (1) より、ガウス過程は座標 \mathbf{x} のみの関数であることがわかる。これは座標の値が近ければ近いほど観測データの値も近いことを仮定しており、そのスケールなどはカーネル関数のパラメータ θ_0, θ_1 で決める。

さて、次に新たな座標 x_{N+1} を用意した時、これに対応するデータ $\delta_{N+1}(x_{N+1})$ の値を予測する。まず、(1) の定義から、 $\delta_{N+1} = (\delta_N, \delta_{N+1})$ の同時分布は以下のように書ける。

$$P(\delta_{N+1}) = \mathcal{N}[\delta_{N+1} | 0, K(\mathbf{x}_{N+1}, \mathbf{x}'_{N+1})] \quad (3)$$

(1) を事前分布として用いることで、 δ_N を得た時に δ_{N+1} を得る条件付き確率 $P(\delta_{N+1} | \delta_N, \mathbf{x}_N, x_{N+1})$ が次の式により計算できるため、観測したデータから次の点 δ_{N+1} を確率分布として予測することができる。

$$P(\delta_{N+1} | \delta_N, \mathbf{x}_N, x_{N+1}) = \frac{P(\delta_{N+1})}{P(\delta_N)} \quad (4)$$

3 データと方法

ここでは、シミュレーションデータと、異なる時刻の密度ゆらぎの再構築の方法について議論する。

3.1 シミュレーションデータ

一次元の宇宙をモデルとして考える。次の図はとある視線方向の密度ゆらぎのシミュレーションデータである。

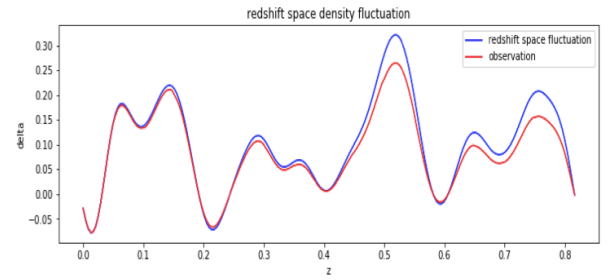


図 2: 視線方向の密度ゆらぎの様子

ここで、青線は現在の時刻の密度ゆらぎ $\delta_{true}(x, t_0)$ を示す。一方で、赤線は我々が観測することのできる光円錐上のゆらぎ $\delta_{obs}(x, t)$ である。観測量 $\delta_{obs}(x, t)$ は次の式に従い生成した。

$$\delta_{obs}(x, t_i) = \delta_{true}(x, t_0) D_{true}^i(\Omega_{m0} = 0.3, t_i) \quad (5)$$

D_{true}^i は線形成長因子であり、連続関数であるが簡単のため時間に応じて 16 分割した。問題設定は、我々が δ_{obs} のみを知っていると思った時、どのようにして δ_{true} および D_{true} を知るかである。

3.2 ゆらぎの復元方法

簡単のため、上の観測データのはじめの 3 つのピンを用いて復元の方法を述べる。次の図で我々の観測データは赤線の δ_{obs} である。

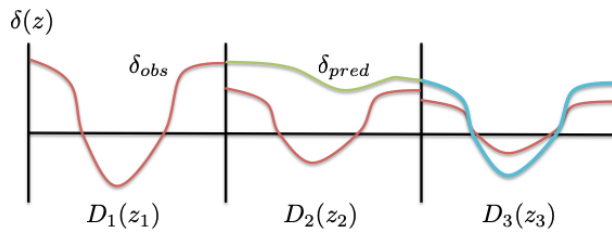


図 3: 復元の様子

- まず、3つ目の線形成長因子の値 D_3 を任意に決め、ビンの中の観測量 δ_{obs} を $1/D_3$ 倍して復元する (青線)。
- 次に、1つ目のデータと3つ目の復元したデータを使い、ガウス過程で2つ目のゆらぎを予測する (緑線、これを $\delta_{\text{pred}}(D_3)$ と呼びその分散を σ^2 とする)
- 観測した2つ目のデータを $1/D_2$ 倍して次の値が最小になる D_2 を見つける。

$$\chi^2(D_2, D_3) = \frac{\frac{\delta_{\text{obs}}}{D_2} - \delta_{\text{pred}}(D_3)}{\sigma^2} \quad (6)$$

- 以上の過程を様々な D_3 に対して行い、最も χ^2 が小さくなる時の D_2, D_3 を採用する。

このプロセスを D_4, D_5, \dots と続けて行っていくことで、密度ゆらぎを復元し、線形成長因子の値を推定した。

4 結果

次の図は上記で説明したプロセスを使って線形成長因子の値を推定した結果である。ただし、横軸と縦軸はそれぞれスケール因子と線形成長因子を表す。横軸のスケール因子は値が1に近いほど現在であり、0に近いほど過去を表す。また、赤線はシミュレーションデータを生成する際に用いた答えの線形成長因子 D_{true} であり、黒点はガウス過程を用いて予測した線形成長因子の値である。

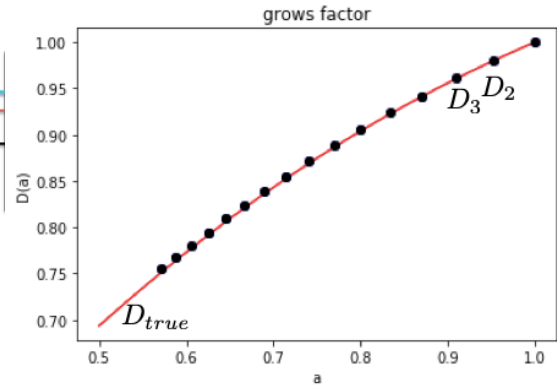


図 4: 線形成長因子の推定

予言した線形成長因子を用いて物質の密度パラメータ Ω_{m0} を推定すると $\Omega_{m0} = 0.2992 \pm 0.0013$ となった。*Planck* (2015) の結果 (TT,TE,EE+lowP+lensing) によると、密度パラメータの値は $\Omega_{m0} = 0.3121 \pm 0.0087$ であるためより精度よく予測ができた。

5 問題点

今回のシミュレーションでは、小スケールのゆらぎの成分を消した非常に滑らかなものに離散的な線形成長因子を作用させることで観測データを作った。しかし、実際に観測するゆらぎは小スケールも含んだランダム性の強いゆらぎであり、線形成長因子は離散的なものではなく時間に関する連続関数である。実際、線形成長因子を連続関数として扱った時にはガウス過程による予測はうまくできなかった。また、今回は完全な線形理論のみを用いて議論を行ったが実際の宇宙を考える際には非線形成長も考慮に入れる必要がある。このように、現実の宇宙に適応するにはまだ克服すべき課題は多く残っている。

6 結論

今回の研究では、従来解析に用いられているパワースペクトルによる評価が抱える問題点に着目した。その問題とは、パワースペクトルにはコズミックバリエーションという避けられない誤差があるため宇宙論パラメータの不定性が決まってしまうというものであ

る。

そこで新しい宇宙論の解析手法として密度ゆらぎの時間発展を直接調べることで線形成長因子の推定を試みた。その方法としてノンパラメトリック回帰モデルの一つであるガウス過程を用いることで遠方宇宙の異なる時刻のゆらぎを予言することを考えた。

その結果、誤差の範囲内で正しく答えの線形成長因子の値を推定することができた。一方で、現実の宇宙にこのアルゴリズムを適応するにはまだ課題が残っており、改良が必要である。今後の計画として N 体シミュレーションなどで非線形効果の影響などを調べていくことを考えている。

c19

すばる HSC を用いた弱重力レンズ観測
による宇宙論

東京大学 カブリ数物連携宇宙研究機構
時 聡志

すばる HSC を用いた弱重力レンズ観測による宇宙論

時 聡志 (東京大学 カブリ数物連携宇宙研究機構 M1)

Abstract

本発表は文献 [1] のレビューである。[1] では cosmic shear power spectrum のすばる HSC を用いた tomography による観測結果の解析から、 Λ CDM モデルにおいて宇宙論パラメータ Ω_m と σ_8 の値の制限として $S_8 = \sigma_8 \left(\frac{\Omega_m}{0.3}\right)^\alpha = 0.800^{+0.029}_{-0.028}$ ($\alpha = 0.45$)、 $\Omega_m = 0.162^{+0.086}_{-0.044}$ という強い結果を得ている。さらに nonzero のニュートリノ質量、 w CDM モデル、すなわち Λ CDM を超える宇宙論モデルの場合についても考察している。

1 イントロダクション

遠方銀河から発せられた光の経路は、途中の宇宙の大規模構造の重力により曲げられ、結果としてその銀河像に歪み効果を引き起こす (cosmic shear と呼ばれる)。多数の銀河像を統計解析することで、この cosmic shear 効果を引き出すことができる。cosmic shear は物質密度パラメータ Ω_m と密度揺らぎの振幅を特徴づける σ_8 に強く依存し、cosmic shear を観測することでこれらの宇宙論パラメータに対する制限を与えることができる。また、重力レンズ効果を用いることで、自ら光を発さないダークマターの分布を調べることもできる。

今回レビューする文献 [1] では、すばる HSC (Hyper Supreme-Cam) による cosmic shear の観測結果の解析から、 Λ CDM モデルにおける σ_8 及び Ω_m の値に対して強い制限を与えている。個々の銀河では、固有の形状の歪みの方が weak lensing による歪みよりも大きいため、cosmic shear の測定には大量の銀河を観測して統計を取る必要があり、すばる HSC の広天域銀河サーベイが威力を発揮する。また、[1] では weak lensing による銀河の形状の歪みを複数の redshift bin に分けて観測する手法である tomography を用いている。redshift は時間のパラメータとなるので、tomography は物質分布の時間発展を追うこともできる観測手法である。本発表では (1) における cosmic shear の観測手法とその解析手法を概観する。

2 Cosmic Shear

2.1 Cosmic Shear

点源からの光が重力ポテンシャル $\phi(\mathbf{x}, t)$ によって曲げられる時、見かけの位置 (角度ベクトル) θ 、lensing がない場合の本来の位置 β は次のレンズ方程式

$$\beta = \theta - \alpha(\theta) \quad (1)$$

で結ばれ、ここで Φ は projected gravitational potential と呼ばれ、

$$\alpha = \frac{\nabla_{\theta} \Phi(\theta)}{c^2} \quad (2)$$

$$\Phi(\theta) = \frac{2}{D_S} \int_0^{D_S} dD_L$$

$$\phi(D_L \theta^i, D_L; t = t_0 - D_L/c) \frac{D_{SL}}{D_L} \quad (3)$$

と書かれる。 β と θ の間のヤコビ行列は lensing がな

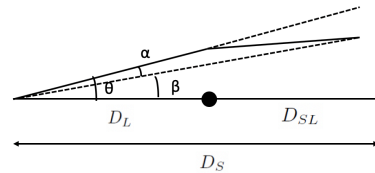


図 1: 重力レンズ

い場合には単位行列になるが、lensing がある場合にそこからのずれを表す量として、distortion tensor Ψ_{ij} を

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial \theta_j} = \delta_{ij} - \Psi_{ij} \quad (4)$$

と定める。この時 distortion tensor は

$$\Psi_{ij} = \begin{pmatrix} \kappa + \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & \kappa - \gamma_1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

と書くことができ、 κ を convergence、 $\gamma_{1,2}$ を cosmic shear という。物理的には convergence は像の拡大率を表し、shear は像の楕円的な歪みを表す量である。観測的には、Shear は銀河の ellipticity と呼ばれる量から求めることができる。

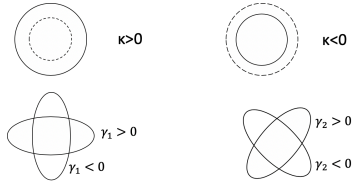


図 2: convergence と shear の物理的意味

2.2 Cosmic Shear Power Spectrum

cosmic shear から E モード、B モードと呼ばれる座標に依らない二つのモード

$$\tilde{E}(\mathbf{l}) = -\tilde{\gamma}_1(\mathbf{l}) \cos(2\phi_l) - \tilde{\gamma}_2(\mathbf{l}) \sin(2\phi_l) = \tilde{\kappa}(\mathbf{l}) \quad (6)$$

$$\tilde{B}(\mathbf{l}) = \tilde{\gamma}_1(\mathbf{l}) \sin(2\phi_l) - \tilde{\gamma}_2(\mathbf{l}) \cos(2\phi_l) = 0 \quad (7)$$

が定まる。ここに書いたように B モードは理想的には 0 になる。したがって観測が信頼できるかどうかの指標として用いられる。これらのパワースペクトル C_l は二点相関関数から

$$\langle E^i(\mathbf{l}) E^j(\mathbf{l}') \rangle = (2\pi)^2 \delta_D^2(\mathbf{l} + \mathbf{l}') C_l^{EE,ij} \quad (8)$$

のように定まる。ここでは Tomography を想定して z の bin を考えた。 i, j は bin のラベルである。BB モード、EB モードについても同様である。BB モード、EB モードは理想的には 0 になるべき量である。Convergence κ についても同様にパワースペクトラム $C_l^{\kappa\kappa}$ が定まる。[1] においてこれらのパワースペクトラムは種々の宇宙論パラメータに依存しており、パワースペクトラムは観測量なのでここから宇宙論パラメータを制限することができる。さらにこの依存

性は宇宙論モデルにも依る。実際の観測領域は有限なので、

$$\langle X_\ell Y_{\ell'}^* \rangle = \Omega_{\text{sky}} \delta_{\ell-\ell'}^K C_\ell^{XY} \quad (9)$$

によってパワースペクトラムが計算される。 Ω_{sky} は観測領域の面積である。

3 Method

3.1 すばる HSC の優位性

survey catalog	area [deg ²]	No. of galaxies	$n_{\text{g,eff}}^{(H12)}$ [arcmin ⁻²]	$n_{\text{g,eff}}^{(C13)}$ [arcmin ⁻²]	z range	tomography
KiDS-450	450	14.6M	8.53	6.85	0.1 - 0.9	4 bins
DES Y1	1321	26M	5.50	5.14	0.2 - 1.3	4 bins
HSC Y1	137	9.0M	17.6	16.5	0.3 - 1.5	4 bins

図 3: KiDS-450, DES Y1, HSC Y1 の比較

すばる HSC とは 8.2m のすばる望遠鏡に取り付けられた wide-field imaging camera であり、他の観測と比べて銀河の有効密度が圧倒的に、より大きな z の領域まで観測できることが特徴である。また、画像の質も非常に良いため、光学系による点源の広がりを表す PSF も小さいという利点がある。

3.2 Pseudo- C_l Method

実際の shear の観測では、真の shear と観測される shear との間に

$$\gamma^{(obs)}(\boldsymbol{\theta}) = W(\boldsymbol{\theta}) \gamma^{(true)}(\boldsymbol{\theta}) \quad (10)$$

の関係がある。ここで W は window function で、各ピクセルのウェイトを与え、観測領域の外または明るい星が存在する領域では 0 である。この window function がかかっているために Fourier 変換すると convolution が生じ、観測されるパワースペクトラムは真のパワースペクトラムの異なるモードが couple したものになる。これを考慮すると l の bin b のパワースペクトルは

$$C_b^{(true)} = M_{bb'}^{-1} \sum_{\ell}^{|\ell| \in \ell'_b} P_{b'\ell} \left(C_\ell^{(obs)} - \langle N_\ell \rangle_{\text{MC}} \right) \quad (11)$$

と書くことができる。 M は Ω_{sky} と W の Fourier 変換 \tilde{W} に依存する行列で、 $P_{bl} = \frac{l^2}{4\pi}$ である。 $\langle N_\ell \rangle_{\text{MC}}$

はノイズスペクトラムで、[1] では 10000 回のモンテカルロシミュレーションで推定している。図 4 に shear スペクトラムの 3 つのモードの観測結果を示す。期待通り、EB モード、BB モードはおおよそ 0 になっていることが見て取れる。

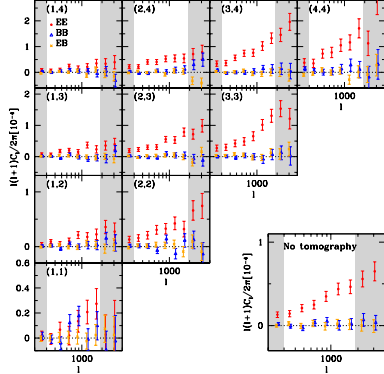


図 4: [1] における Tomography によるパワースペクトラムの観測結果

3.3 Mock Shear Catalog と Blinding

前述の解析手法の妥当性を確認するために、[1] では銀河の位置は変えずに ellipticity のみを人口的に変えた擬似 shear カタログを用意し、それらの解析からその擬似カタログに対応する宇宙論パラメータが再現されることを確認している。さらに本解析においてもこの擬似カタログを用いたブラインド解析と呼ばれる手法を採用している。すなわち、真のデータに加えて擬似カタログ二つを用意しそれぞれのデータを別のチームが解析するが、各チームは自分の解析するデータがどのデータなのか解析の最後まで知らされないようにする。これによって先行研究の結果と比較するなどして生じうる confirmation bias の発生を避けることができると期待される。

4 Results

4.1 Λ CDM における結果

Tomographic power spectra のデータから、MCMC 法 (Markov Chain Monte Carlo) を用いた

ベイズ推定によって宇宙論パラメータの従う確率分布を求めた結果が図 5、図 6 である。ここから、宇宙論パラメータの制限として $S_8 = \sigma_8 \left(\frac{\Omega_m}{0.3}\right)^\alpha = 0.800^{+0.029}_{-0.028}$ ($\alpha = 0.45$)、 $\Omega_m = 0.162^{+0.086}_{-0.044}$ を得ている。

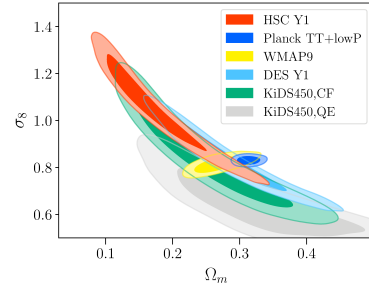


図 5: Ω_m と σ_8 の制限

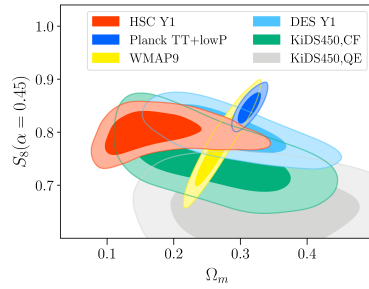


図 6: Ω_m と S_8 の制限

ベイズ推定におけるパラメータには、宇宙論パラメータだけでなく様々な系統誤差のパラメータも含まれている。具体的には大気や光学系による点源の広がりを表す PSF、銀河の redshift distribution、近接する銀河の形状の相関である intrinsic alignment、密度揺らぎに対するバリオン物理の影響 (例えば AGN や超新星などが密度揺らぎに影響することが知られている)、 z, l の bin の取り方、最後にニュートリノ質量である。(図 5、6 の計算ではニュートリノは massless としている。)

4.2 Beyond Λ CDM

現実にはニュートリノは小さな質量を持つので、その影響も考慮するためニュートリノ質量もパラメー

タとして動かした時の結果が図 7 である。図 7 では *Planck* の観測結果と比較している。[1] での shear だ

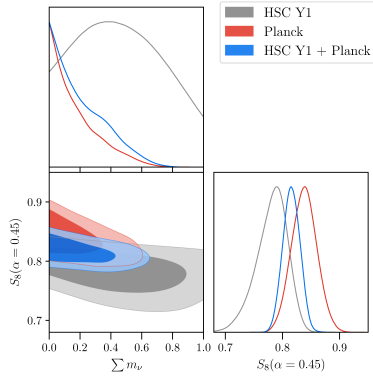


図 7: ニュートリノ質量がある時の *Planck* との比較

けの解析からはニュートリノ質量に対する良い制限は得られていない。さらに、ダークエネルギーの状態方程式パラメータ w をパラメータとして動かした時の結果が図 8 である。この時、 S_8 の制限は悪くな

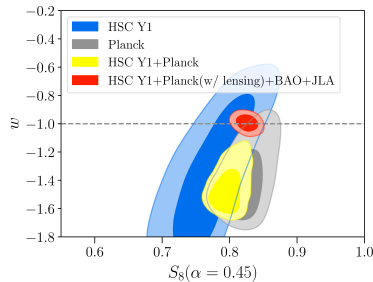


図 8: ニュートリノ質量がある時の *Planck* との比較

り、 w についても良い制限は得られていない。図 8 では *Planck* による観測結果も同時に示されているが、HSC、*Planck* 共に $w < -1$ を支持していると言える。

5 Discussion

図 5,6,7 から分かるように HSC と *Planck* の観測には若干のずれがある。 σ_8 は *Planck* よりやや大きく、 S_8 と Ω_m はやや大きい。これは解析において考慮していない何らかの系統誤差の影響である可能性もあるが、[1] では Λ CDM モデルを仮定して解析し

ているため、 w の時間変化や修正重力などの何らかの Λ CDM を超えた効果の影響である可能性があり、このずれが有意なものかどうか今後の観測に期待される。

Reference

C.Hikage et al. (2019), Pub. Ast. Soc. Japan 71, 43 [arXiv: 1809.09148]

c20

宇宙マイクロ波背景放射とザックス・
ヴォルフエ効果

新潟大学大学院 自然科学研究科

石倉 来実

宇宙マイクロ波背景放射とザックス・ヴォルフェ効果

石倉 来実 (新潟大学大学院 自然科学研究科)

Abstract

宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) とは、全天でほぼ等方的に観測される電磁波である。ビッグバン理論によると、宇宙初期は高温・高密度の電離状態にあり、宇宙膨張とともにその温度は低下する。温度が 3000K 程度まで下がると、宇宙は急速に中性化 (再結合) し、この時に物質との熱平衡から切り離された光子が現在、CMB として観測されている。近年、精密な観測により CMB の非等方性の存在が明らかになった。本発表では、わずかな密度ゆらぎがある場合に生じる CMB の温度ゆらぎ (ザックス・ヴォルフェ効果) について考察する。そして、ゆらぎの波長が再結合期の宇宙の地平線スケールよりも大きい場合には、重力ポテンシャル差による効果が重要であることを示す。

1 Introduction

1965 年、ペンジャスとウィルソンによって初めて CMB が発見された。その後、1989 年に打ち上げられた人工衛星 COBE によって、CMB のスペクトルの精密な測定が行われ、そのスペクトルが非常に高い精度で絶対温度 2.7K のプランク分布と一致していることが分かった。1992 年には COBE を用いた CMB の非等方性の観測により、初めて温度ゆらぎが発見された。特に、再結合期の地平線スケールよりも大きな角度での非等方性は、宇宙誕生直後の姿を我々に教えてくれる宇宙の化石であり、このスケールのゆらぎとしてザックス・ヴォルフェ効果がある。温度ゆらぎの定量的な解析では、パワースペクトルと呼ばれる統計量が広く用いられている。図 1 は温度ゆらぎの観測結果と理論曲線を示しているが、多重極モーメントが $l < 10$ のところ、すなわち大きな角度のところザックス・ヴォルフェ効果を表している。

本発表では、CMB を質量を持たない光子の集団とみなし、その分布関数を無衝突ボルツマン方程式に基づき考察する。はじめに、一様等方宇宙における厳密解の導出手順を復習し、併せて分布関数の温度の正確な意味を確認する。次に、密度ゆらぎに起因する計量ゆらぎが温度ゆらぎに影響する様子を紹介する。具体的には、曲率定数が 0、かつダスト優勢の宇宙における計量ゆらぎの式を用いて、光子の分布関数を求める。温度ゆらぎ (ザックス・ヴォルフェ効果)

は重力項と重力に起因する速度項からなることを示し、さらに再結合期の地平線よりも大きなスケールでは重力項が、小さなスケールでは速度項が、それぞれ優勢であることを示す。

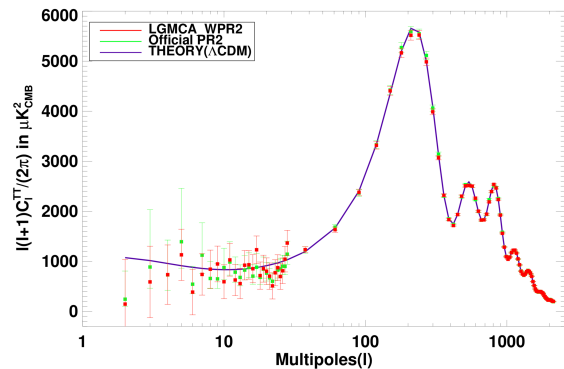


図 1: CMB 温度ゆらぎのパワースペクトル。実線は、観測をもっとも良く再現する理論曲線 (Bobin et al 2016)

2 無衝突ボルツマン方程式

2.1 光線的測地線

重力以外の影響を受けない電磁波は、光線的測地線 $x^a(\lambda)$ に沿って伝わる。このとき、光線条件と測地線方程式はそれぞれ次のようになる。

※以下、 $a, b = 0 \sim 3$ とする。

$$\dot{x}^a = \frac{dx^a(\lambda)}{d\lambda} \quad (\lambda: \text{アフィンパラメータ}) \text{ として}$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_{a,b=0}^3 g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b = 0: \text{光線条件} \quad (1)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^a} \quad : \text{測地線方程式} \quad (2)$$

2.2 光子の位相空間と分布関数

光子の 4 元運動量は、解析力学の一般化運動量の定義より $p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} = \sum_{b=0}^3 g_{ab} \dot{x}^b$ とかける。光線条件 ($L = 0$) より p_0 を従属変数とみなせるので、 p_0, x^0 を位相空間から除外すると、光子の物理的な位相空間は $(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = (x^1, x^2, x^3, p_1, p_2, p_3)$ を座標とする 6 次元空間になる。

時刻 t において、位相体積要素（位相空間上の微小な体積） $d\mathbf{r} d\mathbf{p} = dx^1 dx^2 dx^3 dp_1 dp_2 dp_3$ に含まれる光子数を $\delta N = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{p}$ と表すとき、 $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ を光子の分布関数という。

2.3 無衝突ボルツマン方程式

無衝突ボルツマン方程式は、

$$\frac{df(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{d\lambda} = \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{dx^i}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{dp_i}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) = 0 \quad (3)$$

となる。これは、光線軌道上において $\frac{d}{dt} \delta N = 0$ が成り立つ（何も起きない）場合の輸送方程式である。もし L を除く自明でない保存量 σ が見つければ、 $F(\sigma)$ を任意関数として、 $f = F(\sigma)$ は特解となる。

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{d\sigma}{d\lambda} \frac{dF(\sigma)}{d\sigma} = 0 \quad (4)$$

3 一様等方宇宙における CMB

空間的に平坦な一様等方宇宙における計量は、

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (5)$$

で与えられ、 $a(t)$ はスケール因子、 $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ である。また、曲率は 0 とする。この

とき、無衝突ボルツマン方程式の特解は $f = F(a^2 \dot{x}, a^2 \dot{y}, a^2 \dot{z})$ となる。光線条件より、 $C > 0$ を適当な定数として $\sigma = C \dot{a}(t)$ であれば $d\sigma/d\lambda = 0$ が満たされるので、CMB を表す特解として $f = F(\sigma) = (e^\sigma - 1)^{-1}$ を選ぶ。

ここで、波の位相関数 S が定義できるとき、観測者の固有時 τ での世界線を $x^a(\tau)$ として、振動数を

$$\nu = -\frac{dS}{d\tau} = -\sum_{a=0}^3 \frac{dx^a(\tau)}{d\tau} \frac{\partial S}{\partial x^a} \quad (6)$$

で定義する。電磁波に対する幾何光学近似では

$$\frac{\partial S}{\partial x^a} = \sum_{b=0}^3 g_{ab} \frac{dx^b(\lambda)}{d\lambda} \quad (7)$$

とかける。これより、光子の振動数は、

$$\nu = -\sum_{a,b=0}^3 g_{ab} \frac{dx^a(\tau)}{d\tau} \frac{dx^b(\lambda)}{d\lambda} = -\sum_{a,b=0}^3 g_{ab} u^a \dot{x}^b \quad (8)$$

となる。 u^a は観測者の 4 元速度である。一様等方時空内の共同観測者に対する振動数は、 $u^a = dx^a(\tau)/d\tau = (c, 0, 0, 0)$ より、 $\nu = c^2 \dot{t}$ となる。

$T(a) = a_0 T_0 / a(t)$, $C = hc^2 / k_B T_0 a_0$ として σ を ν で書き換えると、分布関数は

$$f = \left(\exp \left(\frac{h\nu}{k_B T(a)} \right) - 1 \right)^{-1} \quad (9)$$

となる。また、

$$T(a) = \frac{a_0}{a(t)} T_0 = (1 + z(t)) T_0$$

とかけ、 $1 + z(t) = a_0 / a(t)$ は赤方偏移因子である。このとき、分布関数 f を特徴づけるパラメータ T_0 は、熱力学的な温度の意味を持たない。

4 ダスト優勢宇宙でのゆらぎ

密度揺らぎの存在により一様等方からゆらいでいる時空上での計量は、ニュートン・ゲージの下で

$$ds^2 = -e^{2\psi_N(\mathbf{r})} c^2 dt^2 \quad (10)$$

$$+ e^{-2\psi_N(\mathbf{r})} a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (11)$$

となる。曲率は 0 とし、添字 N はニュートン・ゲージを表している。ここで、非相対論的な物質のエネルギー運動量テンソルの形は

$$T^{ab} = \varepsilon \frac{u^a}{c} \frac{u^b}{c} \quad (12)$$

となる。速度場を

$$\sum_{a,b=0}^3 g_{ab} u^a u^b = \sum_{a=0}^3 u^a u_a = -c^2 \quad (13)$$

として規格化し、 $i, j = 1 \sim 3$ として T_{ab} の各成分を次のように表す。

$$\begin{cases} T_{00} = \rho(t)c^2(1 + \Delta(\mathbf{r}, t)) \\ T_{0i} = -\rho(t)c(1 + \Delta(\mathbf{r}, t))a(t)v_i(\mathbf{r}, t) \\ T_{ij} = \rho(t)(1 + \Delta(\mathbf{r}, t))a(t)^2v_i(\mathbf{r}, t)v_j(\mathbf{r}, t) \end{cases} \quad (14)$$

ここで、密度ゆらぎ Δ 、速度ゆらぎ v_i 、計量ゆらぎ ψ を一次の微小量とすると、アインシュタイン方程式の線形解は以下ようになる。

$$\begin{cases} \rho(t) = (6\pi G t^2)^{-1}, \quad a(t) = A t^{\frac{2}{3}} \quad (A > 0 \text{ は積分定数}) \\ \frac{\partial \psi_N(\mathbf{r})}{\partial t} = 0 \quad (\text{ニュートン・ポテンシャルは } \psi_N(\mathbf{r})c^2) \\ \Delta_N(\mathbf{r}, t) = \frac{c^2 \nabla^2 \psi_N(\mathbf{r})}{4\pi G \rho(t)a(t)^2} = \frac{3c^2}{2A^2} \nabla^2 \psi_N(\mathbf{r}) t^{\frac{2}{3}} \propto a(t) \\ \mathbf{v}_N(\mathbf{r}, t) = (v_{Ni}(\mathbf{r}, t)) = -\frac{c^2 t}{a(t)} \nabla \psi_N(\mathbf{r}) \\ \mathbf{v}_N(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{v}_N(\mathbf{r}, t) = \left(\sum_{i,j=1}^3 g_{ij} u^i u^j \right)_N \end{cases} \quad (15)$$

ニュートン・ゲージにおいて、ダストと共に遅い速度で運動する観測者の固有時は、座標速度の二乗を 0 で近似すると $\tau \approx e^{\psi_N(\mathbf{r})} t$ となる。ここで、 \mathbf{r} は観測者の位置である。 $a(t) = A t^{\frac{2}{3}}$ より、位置 \mathbf{r} での座標時間 $t(\mathbf{r})$ と固有時間 $\tau(\mathbf{r})$ について、次の公式が得られる。

$$a(t(\mathbf{r})) = a(\tau(\mathbf{r}))e^{-\frac{2}{3}\psi_N(\mathbf{r})} \quad (16)$$

5 ザックス・ヴォルフェ効果

ニュートン・ゲージを用いると、測地線方程式より $C_N > 0$ を適当な定数として、保存量は $\sigma_N =$

$C_N a(t)e^{2\psi_N(\mathbf{r})} c^2 \dot{t}$ となる。

ここで、物質に対して静止する観測者を設定し、

$$\begin{cases} (\dot{x}^a) = (ct, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \approx ct \left(1, \frac{-\mathbf{n}}{a(t)} \right) \\ \text{※ } \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \sum_{i=1}^3 (n_i)^2 = 1 \quad (\mathbf{n}: \text{観測する向き}) \\ (u^a) = \left(ce^{-\psi_N(\mathbf{r})}, \frac{v_{Ni}(\mathbf{r}, t)}{a(t)} \right) \end{cases} \quad (17)$$

として u^a を観測者の 4 元速度とすると、観測される振動数は

$$\nu = - \sum_{a,b=0}^3 g_{ab} u^a \dot{x}^b \quad (18)$$

$$\approx e^{\psi_N(\mathbf{r})} c^2 \dot{t} \left(1 + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_N(\mathbf{r}, t)}{c} \right) \quad (19)$$

とかける。

これより σ を ν で書き換える。ここで、(16) 式より $\tau(\mathbf{r}) = \tau$ とし、パラメータ τ ですべての \mathbf{r} に共通の『同時刻』を指定すると、

$$\sigma_N = C_N \nu a(t) e^{\psi_N(\mathbf{r})} \left(1 + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_N(\mathbf{r}, t)}{c} \right)^{-1} \quad (20)$$

$$= C_N \nu a(\tau) e^{\frac{1}{3}\psi_N(\mathbf{r})} \left(1 + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_N(\mathbf{r}, \tau)}{c} \right)^{-1} \quad (21)$$

現在の値を添字 0、再結合時の値を添字 rec でそれぞれ表し、観測者の位置を $\mathbf{r}=\mathbf{0}$ とすると、以下のような関係式が得られる。

$$\sigma_N = C_N \nu_0 a_0 \exp\left(\frac{1}{3}\psi_N(\mathbf{0})\right) \left(1 + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_N(\mathbf{0}, \tau_0)}{c} \right)^{-1} \quad (22)$$

$$= C_N \nu_{rec} a_{rec} \exp\left(\frac{1}{3}\psi_N(\mathbf{r})\right) \left(1 + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_N(\mathbf{r}, \tau_{rec})}{c} \right)^{-1} \quad (23)$$

ここで、CMB の温度ゆらぎを $T_0(\mathbf{n})/T_{rec} = \nu_0/\nu_{rec}$ で定義すると、

$$\frac{T_0(\mathbf{n})}{T_{rec}} \approx \frac{a_{rec}}{a_0} \left\{ 1 + \frac{1}{3}(\psi_N(\mathbf{r}) - \psi_N(\mathbf{0})) - \frac{\mathbf{n}}{c} \cdot (\mathbf{v}_N(\mathbf{r}, \tau_{rec}) - \mathbf{v}_N(\mathbf{0}, \tau_0)) \right\} \quad (24)$$

$$\equiv \frac{a_{rec}}{a_0} \left(1 + \frac{\Delta T_0(\mathbf{n})}{T_0} \right) \quad (25)$$

(25) 式で $\frac{\Delta T_0(\mathbf{n})}{T_0}$ を定義することにより、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T_0(\mathbf{n})}{T_0} = & + \frac{1}{3} (\psi_N(\mathbf{r}) - \psi_N(\mathbf{0})) \\ & - \frac{\mathbf{n}}{c} \cdot (\mathbf{v}_N(\mathbf{r}, \tau_{rec}) - \mathbf{v}_N(\mathbf{0}, \tau_0)) \\ & + 0 \end{aligned} \quad (26)$$

1 項目はポテンシャルの差の効果、2 項目は速度差の効果である。3 項目はポテンシャルの時間変動の効果であるが、このモデルでは 0 となる。この温度ゆらぎがザックス・ヴォルフ効果である。

6 Discussion

(26) 式の重力項と速度項について、再結合期での値の比較を以下行う。 \mathbf{v}_N の式 ((15) 式) より、

$$\left| \frac{\mathbf{v}_N}{\psi_N c} \right| = \left| \frac{ct \nabla \psi_N}{a \psi_N} \right| \quad (27)$$

である。今、位置 x において波長 L_x のゆらぎ $\psi_N = \Psi_N \sin\left(\frac{ax}{L_x}\right)$ を考えると、三角関数をオーダー 1 の量とみなして

$$\frac{\nabla \psi_N}{\partial x} \sim \frac{a}{L_x} \psi_N \quad (28)$$

となる。 $a(t) = At^{\frac{2}{3}}$ ((15) 式) より、宇宙の地平線スケールは $L_H = c \left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt}\right)^{-1} = \frac{3}{2} ct$ となるので、

$$\therefore \left| \frac{\mathbf{v}_N}{\psi_N c} \right| = \left| \frac{ct \nabla \psi_N}{a \psi_N} \right| \sim \frac{ct}{L_x} \sim \frac{L_H}{L_x} \quad (29)$$

とかける。これより、波長が再結合期の地平線よりも長いような大角度スケール (1 角度以上) のゆらぎでは、重力項が優勢になることが分かる。ゆらぎの波長が再結合期の地平線と同程度になると重力項と速度項が同じオーダーになるが、この場合一般にザックス・ヴォルフ効果よりも輻射流体の音波効果の方が優勢になる。このように、ゆらぎの波長が再結合期の地平線よりも短くなるとザックス・ヴォルフ効果以外のゆらぎの効果が大きくなるので、ザックス・ヴォルフ効果が重要になるのは大角度スケールにおいてである。

7 Conclusion

無衝突ボルツマン方程式に基づいて光子の分布関数を求め、そこからザックス・ヴォルフ効果が重力項と重力に起因する速度項からなることが分かった。また、波長が再結合期の地平線よりも長くなるような大角度スケールでは重力項が優勢となることが示された。

Acknowledgement

本発表のために指導して下さったスタッフや研究室の方々から感謝いたします。また夏の学校をご支援くださった皆様に感謝申し上げます。

Reference

J. Bobin, F. Sureau, and J.-L. Starck, ApJ. 591(2013), 50