2018年度第48回
天文・天体物理若手夏の学校

集録集

重宇

謝辞

2018年度天文・天体物理若手夏の学校は、基礎物理学研究所 (研究会番号:YITP-W-18－02) を始め、国立天文台、理論天文学宇宙物理学懇談会、一般社団法人 豊橋観光コンベンション協会、光学赤外線天文連絡会、高エネルギー宇宙物理連絡会、野辺山宇宙電波観測所からのご支援、また、企業・個人(プログラム集参照)からご寄付により成り立っております。事務局一同厚く御礼申し上げます。

重力・宇宙論分科会

オーラルアワード(重力・宇宙論分科会)

順位	講演者	所属	学年	講演タイトル
1位	田中俊行	名古屋大学	D1	21-cm 線グローバルシグナルに残された初代星の痕跡
2位	大宮英俊	京都大学	M1	S 行列による低エネルギー有効理論の制限
3位	阿部克哉	名古屋大学	M1	スニヤエフ・ゼルドビッチ効果を用いた原始ブラックホールの密度パラメータへの制限
3位	古郡秀雄	名古屋大学	M1	事象の地平面上に生える光子の毛
3位	中司桂輔	立教大学	D1	non-singular ブラックホールからの量子的輻射

ポスターアワード(全分科会)

順位	分科会名	講演者	所属	学年	講演タイトル
1位	星惑	安部大晟	名古屋大学	M1	分子雲中におけるフィラメント形成と星形成開始条件の解明に向けた数値シミュレーション
2位	星惑	櫻庭遥	東京工業大学	M2	エンスタタイトコンドライト集積による地球大気形成
3位	銀河	安藤誠	東京大学	M1	COSMOS領域における原始銀河団コアの探索

index

index

——index

a1

スニヤエフ・ゼルドビッチ効果を用いた原始ブラックホールの密度パラメータへの制限

阿部　克哉 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙マイクロ波背景放射（CMB）などの観測により、宇宙の構成要素のうちおよそ 27%がダークマターであることが判明している。ダークマターとは宇宙の構造形成を司る非常に重要な物質である。しかし、未だその実態は明らかにされておらず、ダークマターの解明は宇宙論における重要課題の 1 つとなっている。そのダークマターの候補の 1 つに原始ブラックホール（PBH）がある。PBH とは、宇宙初期に高密度領域が重力崩壊して形成されるブラックホールである。未だに観測例がなく、現在様々な観測によってその存在量に制限を与える取り組みがされている。

本研究ではスニヤエフ・ゼルドビッチ効果（SZ 効果）と呼ばれる現象の観測により、PBH の密度パラメータに制限を与える。SZ 効果とは CMB 光子が高温プラズマを通過した時に、逆コンプトン散乱を通じて電子からエネルギーを受け取り、CMB の温度スペクトルが歪む現象である。PBH ごく近傍のガスは、降着時の重力エネルギー解放により温度が上昇し熱制動放射を引き起こす。そのため PBH は UV や X 線の放射源となり、周囲のガスを加熱し電離する。これらの加熱、電離されたガスが SZ 効果を引き起こす。

本研究ではまず、PBH 周辺の電離・温度構造を明らかにするため、PBH の放射光度を仮定し輻射輸送シミュレーションを実施した。それによると、例えば 100$M_\odot$ の質量を持つ PBH の場合、エディントン光度の 1%程度の放射で数 kpc スケールの電離領域を作ることがわかった。この結果をもとに PBH による SZ 効果を計算し、さらには CMB の温度ゆらぎのスペクトルに与える影響を見積もった。この結果を South Pole Telescope（SPT）の観測結果と比較することにより PBH の密度パラメータに新しい制限を与えた。

1 Introduction

Planck 衛星による宇宙マイクロ波背景放射（CMB）などの観測から、宇宙の構成要素のおよそ 27%はダークマターと呼ばれる未知の物質であることが判明している。ダークマターとは宇宙の構造形成を司る非常に重要な物質であるが、未だその実態は明らかにされておらず、ダークマターの解明は宇宙論における重要課題の 1 つである。そのダークマターの候補の 1 つに原始ブラックホール (PBH) がある。PBH とは、宇宙初期に高密度領域が重力崩壊して形成されるブラックホールである。未だに観測例がなく、現在様々な観測によってその存在量に制限を与える取り組みがされている。

今回私はスニヤエフ・ゼルドビッチ効果（SZ 効果）と呼ばれる現象の観測により、PBH の密度パラメータに制限をつけることを考えた。SZ 効果とは CMB 光子が高温プラズマを通過した時に、逆コンプトン散乱を通じて電子からエネルギーを受け取る現象である。PBH ごく近傍のガスは、PBH に降着する際重力エネルギーを解放し温度が上昇するため、制動放射によって UV や X 線を放つ。そのため PBH の周辺のガスは電離・加熱され高温プラズマとなり、SZ 効果を引き起こす。本研究ではその制動放射の光度（以下 $L_{\rm pbh}$ とする。）を ϵ というパラメータを用いて扱い、この放射により引き起こされる SZ 効果、さらには SZ 効果により引き起こされる CMB のスペクトルの非等方性について議論する。ここで ϵ とは $L_{\rm pbh} \equiv \epsilon L_{\rm edd}$ として定義される、$L_{\rm pbh}$ とエディントン光度 $L_{\rm edd}$ の比である。

具体的にはまず、PBH の質量 $M_{\rm pbh}$ と ϵ を仮定して見積もった光度をもとに PBH からの放射の輻射輸送を解くことにより、各赤方偏移での PBH 周辺のガスの状態を明らかにする。その情報から PBH が

各赤方偏移で SZ 効果をどの程度生じさせるのかを計算することができる。そして PBH による SZ 効果に伴う CMB 温度のスペクトルに非等方性を計算し、この非等方性が South Pole Telescope（SPT）の観測結果に矛盾しないように PBH の密度パラメータ $f_{\rm pbh}(=\Omega_{\rm pbh}/\Omega_{ダークマター})$ を決めることで、この密度パラメータに上限を設けることができる。

本発表ではまず、本研究に関わる物理と輻射輸送シミュレーションのセットアップ、そして本研究で使用した角度パワースペクトルの式の紹介をする。その後、それらの計算から PBH の密度パラメータの上限を見積もった結果を順に説明していく。

2 Methods

この章では PBH により生じる SZ 効果を見積もり手法、PBH 周辺のガスに関する輻射輸送シミュレーション、さらには PBH の数密度への制限方法を具体的に紹介する。

2.1 Compton y-parameter

SZ 効果を見積もる時には以下のように定義される Compton y-parameter（以下 y や y-parameter と表す。）と呼ばれる無次元物理量を考える。これは視線方向から飛んでくる CMB 光子がどの程度散乱されるかを表す物理量である。

$$y=\frac{c\sigma_{\rm T}}{m_{\rm e}c^2}\int dt\ n_{\rm H}x_{\rm e}k_{\rm B}T_{\rm gas} \tag{1}$$

ここで $\sigma_{\rm T}$、$m_{\rm e}$、c、$n_{\rm H}$、$x_{\rm e}$、$k_{\rm B}$、$T_{\rm gas}$ はそれぞれトムソン散乱断面積、電子の質量、光速、水素核数密度、電離度、ボルツマン定数、そしてガスの温度である。y-parameter は言い換えれば CMB 光子が高温プラズマ中の電子からどの程度エネルギーを与えられたかを表す量であり、それゆえ CMB の温度ゆらぎと以下のような関係を持つ。（Zeldovich & Sunyaev (1969)）

$$\frac{\Delta T}{T_{\rm cmb}}\simeq\frac{x}{1-e^x}\left(\frac{x}{\tanh(x/2)}-4\right)y\equiv g(x)y \tag{2}$$

ここで $x\equiv h\nu/k_{\rm B}T_{\rm e}$ である。

2.2 Radiative transfer simulation

PBH によって生じる y-parameter を計算するためには PBH 近傍のガスの電離・温度構造を詳しく知る必要がある。そのため 1 次元球対称輻射シミュレーショ ンの計算を用いて、PBH 近傍のガスの電離・温度構造を調べる。

ガスの状態を記述する方程式は以下の式である。

$$\frac{dx_{\rm HI}}{dt}=-k_{\rm HI,\gamma}+\alpha_{\rm B}n_{\rm H}x_{\rm e}x_{\rm HII} \tag{3}$$

$$\frac{d{\rm T}_{\rm gas}}{dt}=(\gamma-1)\frac{\mu m_{\rm p}}{k_{\rm B}\rho}\left(\frac{k_{\rm B}T}{\mu m_{\rm p}}\ \frac{d\rho}{dt}+\Gamma-\Lambda\right) \tag{4}$$

ここで $x_{\rm HI}$、$\alpha_{\rm B}$、$x_{\rm HII}$、γ、μ、$m_{\rm p}$、ρ はそれぞれ,HI fraction、再結合率（Peebles (1993)）、HII fraction、比熱比、平均分子量、陽子の質量、ガス質量密度であり、$k_{\rm HI,\gamma}(R)$ は以下の式 (5) で表される、$L_{\rm pbh}$ による電離率である。

$$k_{\rm HI,\gamma}(R)=\frac{x_{\rm HI}(R)}{4\pi R^2}\int_{\nu_{\rm L}}^{\infty}\frac{L_{\nu,{\rm pbh}}}{h\nu}\sigma_{{\rm HI},\nu}e^{-\tau_{{\rm HI},\nu}(R)}\ d\nu \tag{5}$$

ここで R、ν、$\nu_{\rm L}$、$\sigma_{{\rm HI},\nu}$、$L_{\nu,{\rm pbh}}$、$\tau_{{\rm HI},\nu}$ はそれぞれ PBH からの距離、周波数、Lyman limit 周波数、電離光子の吸収断面積、$L_{\rm pbh}$ の周波数ごとの光度、周波数ごとの HI ガスによる光学的厚みである。本研究では $L_{\rm pbh}$ の周波数依存性として $L_{\nu,{\rm pbh}}\propto\nu^{-1.5}$ を仮定した。

さらに式 (4) の Γ は加熱率である。加熱過程として中性水素が光電離されることによる加熱のみを考慮した。

$$\Gamma=\frac{n_{\rm HI}(R)}{4\pi R^2}\int_{\nu_{\rm L}}^{\infty}\frac{L_{\nu,{\rm pbh}}}{h\nu}(h\nu-h\nu_{\rm L})\sigma_{{\rm HI},\nu}e^{-\tau_{{\rm HI},\nu}(R)}d\nu \tag{6}$$

また式 (4) の Λ は冷却率であり、本研究では再結合放射冷却、衝突電離冷却、水素原子冷却、コンプトン冷却の 4 つを考慮した。（Fukugita, M. &Kawasaki, M（1994)）そして宇宙膨張による Hubble flow を考慮することにより宇宙膨張による効果も計算に取り入れた。

実際の計算に関するセットアップは以下の通りである。

- 赤方偏移の初期値は $z=200$

- ガスの水素核密度、電離度、温度の初期値は $z=200$ 時の銀河間ガスの値
- ガスの密度と背景の温度、電離度は銀河間ガスの時間進化に従う

2.3 Angular power spectrum

本節では，PBH による y-parameter の非等方成分の評価に用いた角度パワースペクトルについて紹介をする。本研究では簡単のため全ての PBH が同じ質量であることを仮定する。

本研究では宇宙に分布している PBH による寄与を考えるため、角度パワースペクトルは $C_l^{\mathrm{TT}} = C_l^{\mathrm{TT}(1)} + C_l^{\mathrm{TT}(2)}$ と表せる。$C_l^{\mathrm{TT}(1)}$ は PBH 内部の過密度領域の相関を表す項で、$C_l^{\mathrm{TT}(2)}$ は PBH 間の相関を表す項である。ここで簡単のため、この温度の角度パワースペクトルを y-parameter の角度パワースペクトルに書き直す。その際式 (2) を用いると $C_l(yy) \sim C_l^{\mathrm{TT}}/g^2(x)$ のように書き直すことができる。

宇宙論的スケールにおいてリンバーの式を適用すると、y-parameter の角度パワースペクトルに書き直したこれら 2 つの項の積分表式は以下のように記述できる。（Cole & Kaiser (1988)）

$$C_l^{yy1} = \int dz \frac{dV}{dzd\Omega} n_{\mathrm{pbh}}(M,z) \times (y_{l,\mathrm{pbh}}(M,z))^2 \tag{7}$$

$$C_l^{yy2} = \int dz \frac{dV}{dzd\Omega} P(k = \frac{l}{d_{\mathrm{M}}(z)}) \times (n_{\mathrm{pbh}}(M,z) y_{l,\mathrm{pbh}}(M,z))^2 \tag{8}$$

ここで V と d_{M} は共動座標系での体積と距離である。さらに k は波数、l は天球面上での見込み角に対応する波数、P は物質の密度ゆらぎのパワースペクトル、そして n_{pbh} は PBH の数密度 [1/Mpc^3] である。また、$y_{l,\mathrm{pbh}}$ とは PBH による y-parameter を l にフーリエ変換した値、

$$y_{l,\mathrm{pbh}} = \int_0^\infty d^2\theta \; y(\boldsymbol{\theta}) \exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\ell}) \tag{9}$$

である。

3 Results

$M_{\mathrm{pbh}} = 10, 100, 1000$ [M$_\odot$] に対して、それぞれ $\epsilon = 0.01, 0.0001$ の計 6 パターンにおいて輻射輸送の数値シミュレーションを行い、上式 (7)、(8) を用いて CMB の温度揺らぎを計算した。$M_{\mathrm{pbh}} = 10$[M$_\odot$]、$\epsilon = 0.0001$ の PBH 周辺のガスの輻射輸送数値シミュレーションの結果は図 1 と図 2 である。宇宙膨張に乗って電離領域、加熱領域も広がっていることがわかる。

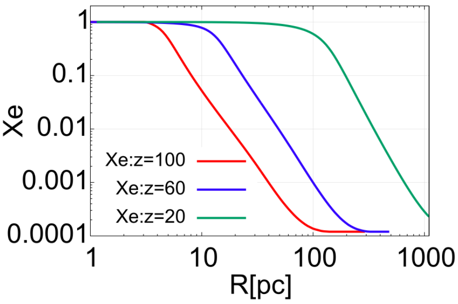

図 1: 各赤方偏移における PBH 近傍の電離構造 $M_{\mathrm{pbh}} = 10\mathrm{M}_\odot$、$\epsilon = 0.0001$ 縦軸は電離度、横軸は原点（PBH）からの距離 [pc] である。

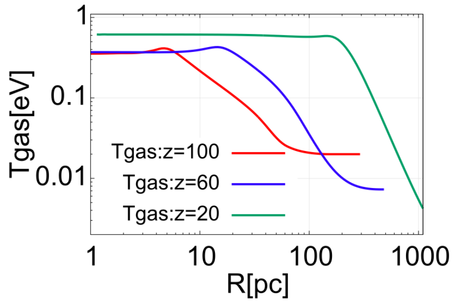

図 2: 各赤方偏移における PBH 近傍の温度構造 $M_{\mathrm{pbh}} = 10\mathrm{M}_\odot$、$\epsilon = 0.0001$ 縦軸は温度 [eV]、横軸は原点（PBH）からの距離 [pc] である。

計算した y-parameter から角度パワースペクトルを見積もった結果が図 3 である。図の黒線が primordial な CMB の温度ゆらぎのスペクトルと SPT による観測結果である。

さらに図 3 から、PBH により生じる CMB 温度ゆらぎが観測結果に矛盾しないような PBH の密度パ

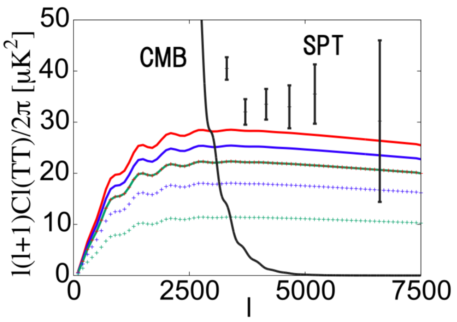

図 3: PBHs による SZ 効果から生じた CMB 温度ゆらぎの角度パワースペクトルと CMB の観測結果（SPT）$M_{\rm pbh} = 10, 100, 1000[{\rm M}_\odot]$、$\epsilon = 0.01, 0.0001$ 縦軸は角度パワースペクトル $[\mu{\rm K}^2]$、横軸は l である。赤色は $M_{\rm pbh} = 1000[{\rm M}_\odot]$、青色は $M_{\rm pbh} = 100[{\rm M}_\odot]$、緑色は $M_{\rm pbh} = 10[{\rm M}_\odot]$ を表し、さらに実線は $\epsilon = 0.01$、点線は $\epsilon = 0.0001$ を表す。

ラメータを計算することにより、以下の表 1 のような上限がつくことがわかった。

ϵ	質量 $[{\rm M}_\odot]$	$\max(f_{\rm pbh})$
0.01	1000	3.8243×10^{-4}
	100	4.0499×10^{-4}
	10	4.3216×10^{-4}
0.0001	1000	4.3216×10^{-2}
	100	4.8031×10^{-2}
	10	6.0371×10^{-2}

表 1: PBH の密度パラメータの上限. $M_{\rm pbh} = 10, 100, 1000[{\rm M}_\odot]$、$\epsilon = 0.01, 0.0001$

4 Conclusion

本研究では 1 次元球対称の輻射シミュレーションを用いて PBH 周辺のガスの電離・温度構造を計算し、PBH による CMB スペクトルへの影響の見積もりから PBH の密度パラメータへ制限を与えた。表 1 の結果を先行研究 （Ali-Haïmoud& Kamionkowski (2017)）の図に書き加えたのが図 4 である。この結果、$M_{\rm pbh}$ や ϵ の値によっては $f_{\rm pbh}$ に今までよりも厳しい制限が与えられる可能性があることが明らかになった。

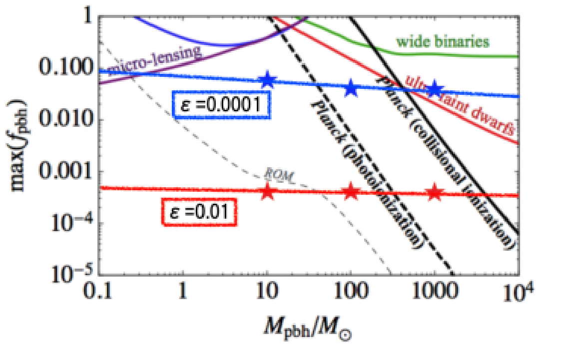

図 4: 先行研究 （Ali-Haïmoud& Kamionkowski (2017)）と本研究の PBH の密度パラメータの上限 $M_{\rm pbh} = 10, 100, 1000[{\rm M}_\odot]$、$\epsilon = 0.01, 0.0001$

5 Disscution & Future work

以上より $L_{\rm pbh}$ の大きさを仮定することで PBH の密度パラメータへ制限を与えることができた。しかし $L_{\rm pbh}$ の典型的な大きさ、すなわち PBH 付近のガスによって生じる放射の光度に関しては未だ詳しくわかっていない。そのため、今後の課題としては $L_{\rm pbh}$ の現実的な見積もりを行い、さらなる PBH の密度パラメータへの制限を求めていきたい。

また PBH の質量に関しても、今回は全ての PBH が同じ質量であることを仮定したので質量分布を設けるなど改善の余地がある。

Acknowledgement

本発表のためにご指導してくださった名古屋大学宇宙論研究室の皆様に深く感謝いたします。

Reference

Fukugita, M., & Kawasaki, M. 1994, mnras, 269, 563

Ali-Haïmoud, Y., & Kamionkowski, M. 2017, prd, 95, 043534

Cole, S., & Kaiser, N. 1988, mnras, 233, 637

Zeldovich, Y. B., & Sunyaev, R. A. 1969, apss, 4, 301

Peebles, P. J. E.1993, Principles of Physical Cosmology by P.J.E. Peebles. Princeton University Press, 1993. ISBN: 978-0-691-01933-8,

——index

a2

特異点の無いブラックホールモデルの安定性について

西村和 也 (立教大学大学院 理学研究科

Abstract

一般相対論とは、理論的な面からも観測的な面からも正当性が支持されている重力に関する理論である。一般相対論によると、ブラックホール (以降、BH) は粒子の吸収だけをし放出することはないとされているが、1975 年に S. W. Hawking は量子力学的な効果まで考えると、$T = \frac{\kappa}{2\pi}$ の熱放射 (Hawking 輻射) をすることを示した。結果として BH は熱放射をしながら蒸発し、最終的には消滅してしまう。 通常の古典力学では、BH の解には曲率が無限大になってしまう特異点が存在する。特異点は event horizon に守られており、特異点の情報が我々の世界に漏れ出すことがないために無害である (例外として、特異点が event horizon に守られていない「裸の特異点」と呼ばれるものも見つかっている)。しかし BH が蒸発する最終過程を考える際、この特異点を無視することができない。このため、この特異点を回避するモデルがいくつも提唱されている。

私は、この輻射過程を古典力学から大きく逸脱しない方法で説明できる可能性がある regular BH(以降、RBH) についてと、このモデルがどの程度現実的なモデルなのかを示す論文について報告する。まずは RBH がいかにして特異点を回避するのかを議論する。RBH は、中心にある特異点を特異点のない領域に置き換えたものである。次に、RBH に存在する内部地平面が有限のタイムスケールで破壊されてしまうことを見る。 一方輻射の過程は無限のタイムスケールであるため、内部地平面との考察から自己矛盾が生じてしまうことをみる。

1 幾何学の setting

一般相対性理論において BH を記述する解はいくつも存在するが、一例として「球対称かつ性的な時空」を記述する Schwarzschild 解を挙げる。

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + F(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \qquad (1)$$

ただし、$d\Omega^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$、$F(r) = 1 - \frac{2M}{r}$ と書く事にする。さて、Schwarzschild 解を見ると、明らかに F は $r = 0, 2M$ で発散してしまっている。しかし、座標変換を施す[1]事によって $r = 2M$ の発散を回避することが可能なため、この点は座標の取り方に由来する座標特異点である。一方で $r = 0$ の点は座標変換で消す事のできない「真の特異点」である。この点では曲率が発散してしまっており、一般相対論は予言能力を失ってしまう。

この曲率の発散を回避するため、解に以下の様な修整を加える。

$$ds^2 = -e^{-2\phi(r)}F(r)dt^2 + F(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \qquad (2)$$

ただし、今回は球対称かつ漸近的平坦な時空を想定している。このとき

$$F(r) = 1 - \frac{2M(r)}{r}$$

である。

$r = 0$ でエネルギー密度が有限値かつ、$r \to \infty$ で漸近的平坦である条件から $m = \alpha r^3$ かつ $F(0) = F(\infty) = 1$ であることがわかる。horizon は式 (2) の

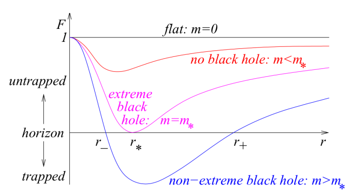

図 1: RBH の $F(r)$ の振る舞い

[1] 最も単純な方法は、null 座標を導入する事である。

座標特異点 $F(r) = 0$ に存在するため、図 (1) の青いグラフには horizon が 2 つ (RBH)、ピンク色のグラフは 1 つ (extreme black hole 以降 EBH)、赤のグラフはゼロである。RBH の horizon の r をそれぞれ $r = r_+$、$r = r_-$ と書き、順に「外部地平面 (outer horizon)」「内部地平面 (innner horizon)」と呼ぶ。
Eddington-Finkelstein 座標を用いて座標特異点を消去すると、式 (2) は

$$ds^2 = -e^{-2\phi(r)}F(r)dv^2 + 2e^{-\phi(r)}drdv + r^2 d\Omega^2 \quad (3)$$

と書ける。ingoing と outgoing の光はそれぞれ $dv = 0$ $\frac{dr}{dv} = \frac{e^{-\phi(r)}F(r)}{2}$ と書ける。outgoing の光を horizon 付近で Taylor 展開して

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dv} &= \frac{e^{r_\pm}}{2}F'(r_\pm)(r - r_\pm) \\ &= -\frac{e^{r_\pm}}{2}\Big(\frac{2m(r)}{r}\Big)(r - r_\pm) \end{aligned} \quad (4)$$

と書ける。よって、表面重力定数 $\kappa_\pm$ を

$$\kappa_\pm = \frac{e^{r_\pm}}{2}F'(r_\pm) = -\frac{e^{r_\pm}}{2}\Big(\frac{2m(r)}{r}\Big) \quad (5)$$

と定義することが出来る。図 (1) の $r = r_\pm$ における傾きに注目すれば $\kappa_+ > 0, \kappa_- < 0$ と分かる。即ち

$$\begin{aligned} \frac{d(r - r_+)}{dv} &= |\kappa_+|(r - r_+) \\ \frac{d(r - r_-)}{dv} &= -|\kappa_-|(r - r_+) \end{aligned} \quad (6)$$

である。

2 内部地平面の不安定性

現実に RBH が存在するとしたら、それは質量のある天体が重力崩壊で潰れた果てに出来るだろう。天体は重力崩壊で潰れながら放射を出し続ける。この放射は途中、potential に阻まれ一部が星に帰ってくる。このようにして、崩壊物体由来の ingoing な放射と outgoing な放射が時空に存在する事になる。
崩壊物体は、自ら放射を出している。これを ingoing 摂動、outgoing 摂動と呼び、null shell を用いて記述出来る。さらにこれを計算する手法として DTR 関係 (Dray-'t Hooft-Redmount relation) が知られている。

DTR 関係を用いるための setting を行う。ingoing 摂動、outgoing 摂動を記述ために球対称な null shell を導入する。ingoing な null shell と outgoing な null shell が outer horizon の内部で交わる状況を考えよう。交点の位置を r_0 としておく。この状況を時空図 (Penrose 図) に書くと以下の通り。null shell によって 4 つの領域 A,B,C,D に分割される。

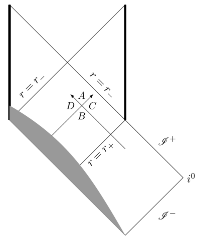

図 2: RBH における時空図

重力場の方程式と独立に DTR 関係の式

$$|F_A(r_0)F_B(r_0)| = |F_C(r_0)F_D(r_0)| \quad (7)$$

が成立し、それぞれの F は

$$F_*(r_0) = 1 - \frac{2M_*(r_0)}{r_0}$$

である。質量 M_A は、領域 A の質量を表す。式 (7) より

$$m_A(r_0) = m_{fin} \quad - \frac{2m_{out}(r_0)m_{in}(r_out)}{r_0 F_B(r_0)} \quad (8)$$

と書ける。ただし $m_{fin} = m_B(r_0) + m_{in}(r_0) + m_{out}(r_0)$ とし、更に $m_{in} = m_D(r_0) - m_B(r_0), m_{out} = m_C(r_0) - m_B(r_0)$ であり、それぞれ inghoing shell と outgoing shell の質量である。内部地平面での質量を見るために、交点 r_0 を $u = u_0$ 一定のまま v を内部地平面に近づける。このとき式 (8) の m_{fin} は物理的な意味を持っている有限な量であるが、最後の項の考察は注意深く行うべきである。なぜなら、$r_0(v)$ を内部地平面に近づけると $F_B(r_0) \to 0$ になってしまうからである。
まず m_{in} であるが、$m_{in}(r_0(v)) \propto v^{-\gamma}$ となることが知られている (Price の法則)。さらに、式（4）に表

面重力定数 $e^{-\phi(r_-)}F'(r_-) = -2|\kappa|$ を用いて微分方程式を解けば $F_B(r_0) \propto e^{-|\kappa|v}$ を得る。即ち、式 (8) は r_0 を内部地平面に近づける極限で

$$m_A(r_0(v)) \propto v^{-\gamma} e^{|\kappa_- v|} \tag{9}$$

と指数関数的に増大してしまう。この事を質量インフレーション (mass inflation) という。即ち、RBH の内部地平面の不安定性のタイムスケールは $\frac{1}{\kappa_-}$ である。表面重力定数が有限であるため、このタイムスケールも有限である。

3 RBH の蒸発

BH が蒸発するとき「①熱放射する BH の温度は $T = \frac{\kappa}{2\pi}$ で表される (Hawking 温度) ② BH が蒸発する過程は、連続的に平衡状態を保ち続ける準静的過程である」の 2 つを基本的な出発点とすることができる。
RBH が準静的過程を保ちながら蒸発し質量を減らしていく過程を考える。時間変化する RBH の質量は Stefan-Boltzman 則によって

$$\begin{aligned} \frac{dM(v)}{dv} &= -\sigma_{SB} T^4(v) A_+^2(v) \\ &= -C\kappa_+^4(v) r_+^2(v) \end{aligned} \tag{10}$$

と書ける。これを解けば蒸発にかかる時間を計算することができる。
蒸発の過程はダイナミカルであろうから、RBH の解 (2) を

$$ds^2 = -e^{-2\phi}Fdv^2 + 2e^{-\phi}drdv + r^2 d\Omega^2 \tag{11}$$

と書き直す。ここで注意すべきは、$\phi = \phi(r, M(v)), F = F(r, M(v))$ とダイナミカルな変数に置き換わっている点である。図 (1) のピンク色のグラフは EBH を表している。このときの外部地平面の位置を $r = r_*$ と書く。図 (1) から明らかに

$$\frac{\partial F(r_*, M_*)}{\partial r} = 0 \tag{12}$$

が成立する。

$r = r_*, M = M_*$ のとき RBH は EBH になるが、このとき蒸発が最終局面に達したことを意味する。よって EBH になる直前の状態 ($r_+ = r_* + \Delta r = r_*(1+\varepsilon), M = M_* + \delta M = M_*(1+\beta\varepsilon^\sigma)\mathcal{O}(\varepsilon^{\sigma+1})$) から出発して EBH になるまでに経過する時間を評価すれば良い。
外部特異面では $F\bigl(r_+, M(v)\bigr) = 0$ であるゆえ、$r = r_*, M = M_*$ の近傍で Taylor 展開すると

$$0 = F\bigl(r_*, M_*\bigr) + \frac{\partial F(r_*, M_*)}{\partial r}\delta r + \frac{\partial F(r_*, M_*)}{\partial M}\delta M + ... \tag{13}$$

と書ける。右辺の第 1,2 項は horizon であることと $F(r)$ の極値性から直ちに 0 だとわかる。更に、第 3 項は ε^2 以上のオーダーであることが分かるゆえ、

$$\beta = -\frac{1}{n!}\Bigl(\frac{\partial F(r_*, M_*)}{\partial M}\Bigr)^{-1} \frac{\partial^n F(r_*, M_*)}{\partial r^n} \tag{14}$$

$$\kappa_+ = \alpha\varepsilon^\gamma + \mathcal{O}(\varepsilon^\gamma) \tag{15}$$

とわかる。以上から式 (10) は

$$\Delta v = -\frac{M_*\beta\sigma}{r_*^2 C\alpha^4}\int_{\varepsilon_0}^{0} d\varepsilon\varepsilon^{\sigma-4\gamma-1} \tag{16}$$

と書ける。この積分が発散しない条件は

$$\sigma - 4\gamma > 0 \tag{17}$$

である。更に、表面重力定数は Taylor 展開すると

$$\kappa_+ = \frac{e^{-\phi(r_+)}}{2}\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{i+j+1}F}{\partial r^{i+1}\partial M^j} r_*^i \varepsilon^i \Delta M^j \tag{18}$$

のように書ける。
しかし、蒸発時間 (16) を有限に保ちながら表面重力定数 (18) を $r = r_+$ で $\kappa_+ = 0$ にするようなパラメーター γ, σ は存在しないことが分かる。すなわち、RBH の蒸発にかかる時間は無限大である。

4 Conclusion and Furture Work

RBH の内部地平面は潜在的に不安定であり、これが破壊されるタイムスケールは有限である事を見た。一方、RBH が蒸発するとき無限の時間がかかること

が分かった。すなわち、現実に RBH が存在していたとしても蒸発の最終過程までを説明する事はできないことが分かった。
今後の課題として、RBH のいくつかのモデルを比較しながら上の結果が成り立つ事を確認したい。また、蒸発時間を有限に保つためには「①熱放射する BH の温度は $T = \frac{\kappa}{2\pi}$ で表される (Hawking 温度) ② BH が蒸発する過程は、連続的に平衡状態を保ち続ける準静的過程である」の 2 つをやぶらなければならない事を確認したい。

Acknowledgement

拙い物理力の私を支えてくださった、立教大学理論物理研究室の皆様にここで感謝の気持ちを述べさせて頂きます。ありがとうございました。

Reference

Francesco Di Filippo, Stefano Liberati, Costantino Pacilio, Matt Visser 2018, arXiv:1805.02675 [gr-qc]

Valeri P. Frolov(2017). arXiv:1708.04698 [gr-qc]

Sean A. Hayward 2005, arXiv:gr-qc/0506126

——index

a3

ボースアインシュタイン凝縮体による超大質量ブラックホール形成

高橋 さくら (お茶の水女子大学大学院　人間文化創成科学研究科)

Abstract

銀河中心に偏在する超大質量ブラックホール (SMBH) は，赤方偏移 6 程度の早期宇宙にも既に存在していたという観測事実がある．この早期宇宙に形成された SMBH を説明するために様々な理論が考えられている．しかし，従来のバリオン性物質の成長から SMBH を形成する理論では，エディントン降着率を維持し続けたとしても，赤方偏移 45 で 10^3 の種ブラックホールが必要になる (Banados et al.2018)．そのどちらも実現するのは難しい．
そこで本研究では，バリオン性物質ではなく，ダークマター (DM) がボースアインシュタイン凝縮体 (BEC) である場合 (典型的にはアクシオン) を考え，それが自己重力によって崩壊し，SMBH を形成するというシナリオを考えた．凝縮体 DM は粒子ではなく波としてコヒーレントに振る舞うので速度分散が 0 になり，容易に崩壊することが可能であると考えられる．非相対論的な仮定のもと，BEC の運動を記述するグロスピタ・エフスキー方程式を近似した場で解くことにより，系の大きさの時間発展が求められた．また，典型的な物理量を代入することにより，ボゾンの自己相互作用や自己重力によってつぶれる効果と，角運動量によるそれを阻害する効果のつり合いで決まっていく，SMBH の質量関数が求められた．それらを数値計算で追った過程を説明する．

1　イントロダクション

赤方偏移 6〜8 程度の早期宇宙にも $M_{BH} = 10^7 - 10^{10} M_{SUN}$ の超大質量ブラックホールが観測されている．これらのブラックホール形成のメカニズムには様々な議論が存在するが，いまだに解明には至っていない．仮に BH が常にエディントン降着率を達成しつつ成長するとしら，種 BH は $z \sim 45$ で $M_{seed} > 10^3_{SUN}$ となることが数値計算から明らかにされているが，それは現実的とは言えない (Banados et al.(2017))．一般的には，超エディントン降着やダイレクトコラップスを考えることでそれらの困難を回避しようとされているが，そこでも様々な困難が生じている．その困難の原因はバリオン物質を考えていることにあるだろう．なぜなら，バリオン物質を考えると速度分散があるのでビリアル平衡に落ち着いてしまい，なかなか崩壊することができなくなるからである．そこで我々は，バリオンの粒子ではなく波が崩壊することで SMBH を形成というシナリオを考えた．

本研究では，ボースアインシュタイン凝縮体 (BEC) でできたダークマター (DM) が崩壊してブラックホール (BH) を形成するとした．BEC が従う方程式は，Gross-Pitaevskii 方程式と Poisson 方程式のみである．先行研究 (Gupta and Tahareja 2017) に従い，ラグランジアンを求め，ガウス近似した場を代入し積分することで有効ラグランジアンと有効ポテンシャルを得た．その有効ポテンシャルから BH になりうる領域と形成時間を求めた．

2　BEC 転移温度

崩壊する波として，ボースアインシュタイン凝縮体 (BEC) が適していると考えられる．なぜなら，以下に説明するように BEC の凝縮転移温度と宇宙の物質の温度を比較するとボソンが凝縮していると考えられるからである．1 粒子基底状態のエネルギーを $\epsilon = 0$ に取ると，理想ボース気体の分布関数は

$$g(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}$$

ここで $\beta = 1/k_B T$ である．また，全粒子数 N は

$$N = \frac{Vm^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3} \int_0^{\inf} \frac{\sqrt{\epsilon}}{e^{\beta(\epsilon-\mu} - 1} d\epsilon$$

ここで，m はボソンの質量，V は凝縮体が存在する体積である．よって，ボソンの凝縮転移温度は

$$T_{BEC} = \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B}\left(\frac{n}{\xi(3)}\right)^{2/3} \tag{1}$$

$n = N/V$ であり，ボソンの数密度を表す．ここで $n \propto [a(t)]^{-3}$ ($a(t)$ はスケールファクター）と考えられる．よって (1) 式より $T_{BEC} \propto [a(t)]^{-2}$ である．また，ダークマターの温度は $T_{DM} = [a(t)]^{-2}$ であることが知られているので，$T_{BEC} \propto T_{DM}$ となる．ここで現在のそれぞれの温度を求めてみる．ダークマターの温度は，$T_{DM} \propto [a(t)]^{-2} \propto t^{-4/3}$ 宇宙誕生から約 5 万年後の等密度時の温度を目安として約 1 万ケルビンとすると

$$T_{DM} = 10^4\left(\frac{t}{5\times 10^4 year}\right)$$

と考えられる．よって現在 (宇宙誕生から 138 億年後) では $T_{DM} \simeq 5.6\times 10^{-4}K$ となる．一方転移温度は，臨界密度 $\rho = 10^{-29}g/m^3$ より

$$n = \frac{10^{-29}\times 10^{-3}kg}{m}\frac{1}{Meter^3}$$

ボソン質量 $m = 10^{-5}eV/c^2$ とすると $T_{BEC} = 303K$ となる．(1) 式と現在の温度を比較すると，常に $T_{BEC} > T_{DM}$ が言えるで DM が BEC でできていると考えるのが自然である．

3 グロスピタエフスキー･ポアソン方程式

ボースアインシュタイン凝縮体 (BEC) は，以下の Gross-Pitaevskii 方程式と Poisson 方程式に従う．

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \phi(\vec{r},t) + g|\psi(\vec{r},t)|^2\right)\psi(\vec{r},t) \tag{2}$$

$$\Delta\phi(\vec{r},t) = 4\pi G|\psi(\vec{r},t)|^2 \tag{3}$$

また，計算をできるだけ解析的に表現して議論したいので，以下のように場をガウス型に近似する．

$$\psi(\vec{r},t) = A(t)exp\left[-\frac{\vec{r}^2}{2\sigma(t)^2} + i\alpha(t)\vec{r}\right] \tag{4}$$

$$\phi(\vec{r},t) = -\mu(t)exp\left[-\frac{\vec{r}^2}{2\tau(t)^2}\right] \tag{5}$$

BEC は (2) 式と (3) 式の運動方程式に従うので，以下のラグランジアンが考えられる．(Gupta and Thareja (2017))

$$L = \frac{i\hbar}{2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\vec{r}}\frac{\partial\psi^*}{\partial\vec{r}}\right)$$
$$-\frac{g}{2}|\psi|^2 - \frac{1}{8\pi G}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\vec{r}}\right)^2 - m\phi|\psi|^2$$

これに (4) 式と (5) 式の近似を代入し全空間で積分すると，以下の有効ラグランジアンを得ることができる．

$$L_{eff} = -\frac{2\sqrt{2}gN^2}{\pi^{2/3}\sigma^3} - \frac{12N\hbar^2}{m\sigma^2} - \frac{48N\hbar^2\alpha^2\sigma^2}{m}$$
$$+\frac{32\sqrt{2}mN\mu}{\sigma^3(2/\sigma^2+1/\tau^2)^{3/2}} - \frac{3\sqrt{\pi}\mu^2\tau}{G} - 24N\hbar\sigma^2\dot{\alpha}$$

この有効ラグランジアンから，系の大きさを表す $\sigma(t)$ に関する運動方程式と有効ポテンシャルが求められる．

$$V_{eff} = -\frac{GM^2}{\sigma(t)} + \frac{J^2}{2M\sigma(t)^2} + \frac{gM^2}{m^2\sigma(t)^3} \tag{6}$$

ここで，M は BEC の全質量，J は角運動量，m はボソン 1 粒子の質量である．この有効ポテンシャルをグラフに表すと図 1 のようになる．

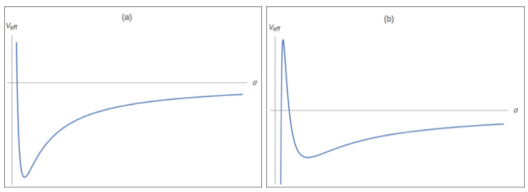

図 1: 有効ポテンシャルの形 : (a) 自己相互作用 g=0, (b) 自己相互作用 $g < 0$

有効ポテンシャルが極小値をとるときの $\sigma(t)$ を σ_b とし，g が負の場合の有効ポテンシャルが極大値をとるときの $\sigma(t)$ を σ_h とした．この時，BH の形成条件を

形成条件 1　$\sigma_b \leqq \sigma_s$　$(\sigma_s = 2GM/c^2)$

形成条件 2　$\sigma_b = \sigma_h$

とする．しかし，この方法では角運動量獲得と密度が中心集中していく時間発展を導入していないので，全体が BH になるか，BH が全くできないかのどちらかになってしまい，ダークハローの議論ができない．そのため 5 章に示す新たな BH 形成条件を考えた．

4 関数の完全系化

3 章では関数がガウス型で固定しているが，その近似の良さについての見積もりができていない．そこでより一般化された関数で計算することを試みた．(4)，(5) 式ではなく以下のように関数を仮定した．

$$\psi(\vec{r},t) = A(t)\sum_{l=0}^{2}\sum_{m=-l}^{l} exp\left[-\frac{\vec{r}^2}{2\sigma(t)^2}+i\alpha(t)\vec{r}^2\right]Y_{l,m}(\Phi,\theta) \tag{7}$$

$$\phi(\vec{r},t) = \sum_{l=0}^{2}\sum_{m=-l}^{l} -\mu(t)exp\left[-\frac{\vec{r}^2}{\sigma(t)^2}\right]Y_{l,m}(\Phi,\theta)Y_{l,m}(\Phi,-\theta) \tag{8}$$

ここで，$Y_{l,m}(\Psi,\theta)$ は球面調和関数である．本来であれば，ラゲール倍関数と球面調和関数を用いて完全直交な一般的な場を用いることが正当であるが，急激な動径方向の崩壊や極度な非等方性を表現するために動径方向のガウス近似と球面調和関数の組み合わせで場を仮定した．
ガウス近似の時と同様に，ラグランジアンに代入して計算すると

$$V_{eff} = \frac{GM^2}{3\sqrt{2\pi}\sigma(t)} - \frac{19J^2}{4M\sigma(t)^2} + \frac{gM^2}{3\pi^{3/2}m^2\sigma(t)^3}$$

という有効ポテンシャルが得られる．それはほぼガウス近似の場合と同様の結果であり，係数に若干の違いが出ている．

5 角運動量の時間発展の考慮

本来，BEC は密度が中心に集中するにつれ角運動量を獲得していくはずである．本研究では $g = 0$ の自己相互作用がない場合を考えた．式 (6) の有効ポテンシャルから求めた形成条件 1 $\sigma_b \leqq \sigma_s$ より

$$0 < J \leqq \sqrt{2}\frac{GM^2}{c} \tag{9}$$

ここで新しく

$$\mu \equiv \frac{cJ}{\sqrt{2}GM^2} \tag{10}$$

というパラメータを導入すると，(7) 式より新しい BH 形成条件が求められる．

$$0 < \mu \leqq 1 \tag{11}$$

また，BEC はコヒーレントに崩壊するので剛体回転しているものとし，密度は等方であるとした．よって密度揺らぎの時間発展は $\rho(r,t) = \beta(t)\frac{\rho_0}{(r/r_0)^2}$，角速度の時間発展は $\omega(r,t) = r\Omega(t)$ と与えられる．ここで準線形成長を想定して $\beta(t) = \left(\frac{t}{3\times10^9 year}\right)^{2/3}$，とした．$\Omega(t)$ の具体的な値については後に詳しく説明する．さらに BH の形成時間を Free Fall Time $\left(t_{ff} = \sqrt{1/G\rho(t)}\right)$ と仮定し，$t = t_{ff}$，$\mu = 1$ を連立して計算することで BH になりうる最大領域を考えることができる．

5.1 角速度 $\Omega(t)$ の具体的な形

Tidal Torque Theory (Sugerman et al.(2000)) より

$$J(t) = \int_a^3 V d\vec{r}\ \rho\vec{r}\times\dot{r}$$

ここで $\vec{r} = a(t)\vec{x},\ u = \dot{x},\ \vec{x}(q,t) = q - D(t)\nabla\phi$ とすると

$$\begin{aligned} J(t) &= \rho_b a^5\int_V d\vec{x}(1+\delta)\vec{x}\times\vec{u}\rho \\ &= \rho_0 a_0^3 a(t)^2 \dot{D(t)}\int_V d\vec{q}\vec{q}\times\nabla\phi(\vec{q})\ \propto t \end{aligned}$$

となり，角運動量は時間の線形成長していることが分かる．本研究では，$\rho(r,t) = \beta(t)\frac{\rho_0}{(r/r_0)^2}$，$\omega(r,t) = r\Omega(t)$ としたので

$$\begin{aligned} J(r,t) &= \int_0^r dr' 4\pi r'^2\rho(r',t)\omega(r',t)r' \\ &= \frac{4}{3}\pi r_0^2 r^3\rho_0\beta(t)\Omega(t) \propto t \end{aligned}$$

$\beta(t) = \left(\frac{t}{3\times10^9 year}\right)^{2/3}$ より $\Omega(t) = \alpha t^{1/3}$ となる．また，数値計算の結果から約 30 億年で現在の銀河の角運動量を獲得することが分かるので (Sugerman et al.(2000))

$$\alpha = \frac{230km/s}{R_{tot}}\frac{1}{(3Gy)^{1/3}}$$

とする．

6 結果と考察

角運動量の時間発展を考慮した場合において，$R_{tot} = 10kpc,\ M_{tot} = 10^{12}M_{SUN}, r_0 = 1kpc$ の典型

的な物理量を代入すると以下の形成されうる BH の質量と形成時間を求めることができる．

$$M_{BH} = 2 \times 10^7 M_{SUN},\ t_{ff} = 3 \times 10^6 year$$

この結果では，時間が短すぎて現実的ではない．ここで，BH に崩壊する最大領域の半径 r_s について見てみると，

$$r_s \propto G^{7/6} \pi^{4/3} r_0^{7/3} R_{tot}^{4/3} \rho_0^{7/6} c^{-4/3} \tag{12}$$

となっている．この式から r_s は ρ_0 にのみ依存し，その他は定数となっていることがわかる．したがって，中心の周りの部分でも崩壊し BH になる可能性がある．図 2 のように $\rho_0^* = \beta(t) \frac{\rho_0}{(r_n - \delta r_n / r_0)^2}$ とすると，

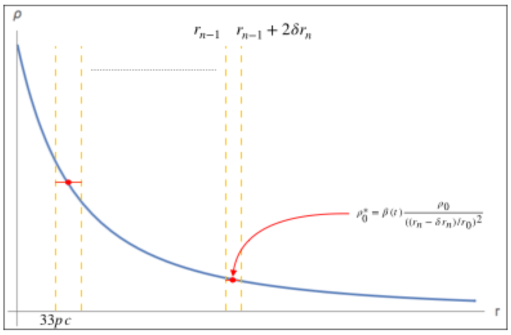

図 2: 密度分布と崩壊領域

中心の周りで BH を形成する場合の最大領域は

$$\delta r_n \propto G^{7/6} \pi^{4/3} r_0^{7/3} R_{tot}^{4/3} (\rho_0^*)^{7/6} c^{-4/3}$$

となる．外側に行くほど δr_n は小さくなるのでその分たくさん出来るだろうと考えられる．中心付近で形成された小さい BH は時間をかけて合体していく．合体にかかる時間 t_d はおおよそ $t_d \sim t_{ff} \times \frac{N}{lnN}$ であると考えられる．100 個合体するとしたら $t_d \sim 2 \times 10^8 year$ となる．

一方で，R_1 から R_2 まで崩壊したときのポテンシャルエネルギーの変化が全て熱に変わると仮定すると，半径の大きさ R_1, R_2 それぞれのポテンシャルエネルギーは $V_{R_1} = -fracGM_{R_1}^2 R_1$，$V_{R_2} = -fracGM_{R_1}^2 R_2$ となる．ここで，M_{R_1} は半径 R_1 より内側の BEC の全質量を表す．するとポテンシャルエネルギーの差は $dV = V_{R_1} - V_{R_2}$ となるので，それが全て熱に変換されたとすると BEC の温度は

$$T = \frac{dV}{nR_2^3 k_B} \tag{13}$$

例えば，$R_1 = 10kpc$ から $R_2 = 5kpc$ までつぶれたとすると，$T = 3.8 \times 10^6 K$ になる．これは $T \gg T_{BEC}$ より，崩壊した部分はガスになっていると考えられる．
小さい BH を形成出来る部分とガスになってしまう部分とのバランスで，銀河内にできるブラックホールの個数が決まっていくと考えられる．

7　まとめ

高い赤方偏移に存在する超大質量ブラックホールの形成のメカニズムについて，波の崩壊というシナリオで数値計算を行なった．その結果，BEC の崩壊で SMBH を形成することが可能であることが分かった．角運動量が崩壊を抑制し，ボソンの密度揺らぎが崩壊を促進しており，それらのバランスで BH になりうる領域が決められる．
しかし，ガウス近似を用いて計算を簡単にしているが，その近似の良さについての見積もりを行う必要があるだろう．なぜなら，角運動量の時間発展を考えた場合の形成される BH の質量と形成時間が現実的ではないが，その原因がガウス近似していることにある可能性があるからだ．また，今回は計算を簡単にするために非相対論的に計算しているが，今後は相対論を導入していく必要がある．

Reference

[1] Eduardo Banados 2018, Nature 533 473-476

[2] Pierre-Henri Chavanis 2014, Quantum Aspects of Black Holes, 151-194

[3] Pierre-Henri Chavanis 2016, Physical Review D 94 (8), 083007

[4] Patric Das gupta, & Eklavya 2017, Class Quantum Grav, 34, 035006

[5] Ben Sugerman, F.J.Summers, & Marc Kaminokwski 1999, MNRAS, 311, 762-780

——index

a4

——index

a5

事象の地平面上に生える光子の毛

古郡　秀雄　(名古屋大学大学院　理学研究科)

Abstract

ブラックホール (B.H.) 無毛定理によると、我々は質量、角運動量、電荷の値が同じ B.H. を区別できず、それがどう作られた B.H. なのかを知る事も出来ない。また、量子効果を考えると B.H. は放射を起こし最終的に消滅すると考えられている。この時、B.H. を形成した粒子達の情報はどこへ行ってしまうのだろうか?このような問いかけが情報パラドックスとして広く議論されてきた。本講演では、この問題を考える上での新しい切り口として、電磁気理論の漸近対称性の存在を紹介する。これには無限遠や地平面に軟光子を生成する大電荷が伴い、これは形成粒子の情報に保存先や逃げ道を提供する。

1　序論

4 次元時空における B.H. は質量 M, 角運動量 $\boldsymbol{J}$, 電荷 Q という 3 種類の保存量のみに特徴付けられる Kerr-Newman B.H. に微分同相な定常 B.H. に落ち着くことが無毛定理として知られている。B.H. を形成した粒子達の個々の情報や、どのように形成されたかという情報はこのパラメーターに現れていないので、B.H. はこれらの情報の一切を失っている、もしくは、地平面の内側に隠しているように思える。

また、量子効果を考慮すると B.H. は地平面近傍での粒子対生成により熱的な放射を起こす。無毛定理により、この放射は B.H. について $M, \boldsymbol{J}, Q$ についてしか知らないので、B.H. を形成した粒子と相関を持つことは出来ない。宇宙背景放射などによって B.H. の質量が増えることを無視すれば、B.H. は Hawking 放射によっていずれ完全に蒸発する。今、地平面はもはや存在しないので B.H. 形成の情報を保持する場所はどこにもなく、放射もその情報を持ち出し得ないので情報は完全に破壊されてしまったことになる。

この情報損失問題は情報パラドックスとして知られ、議論されている。本講演では、漸近的平坦性を持つ時空での電磁気学を考えることによって現れる無限個の保存量の存在が情報パラドックスを考える上での新しい切り口となる事を見ていく。

本講演では簡便のため以下質量 0 の粒子のみを扱うことにする。

2　Minkowski 時空での準備

無限遠での対称性の存在が本講演で最も重要な視点となるので、これを見やすい形にするため、Minkowski 時空の座標 (t, x^1, x^2, x^3) を遅延座標 $(u, r, z_-, \bar{z}_-)$, 及び先進座標 $(v, r, z_+, \bar{z}_+)$ で書き直す。遅延座標及び先進座標はそれぞれ、$x_i x^i = r^2$ は共通で $t = u + r$, $x^1 + ix^2 = \frac{2rz_+}{1+z_+\bar{z}_+}$, $x^3 = r\frac{1-z_+\bar{z}_+}{1+z_+\bar{z}_+}$, $t = v - r$, $x^1 + ix^2 = -\frac{2rz_-}{1+z_-\bar{z}_-}$, $x^3 = -r\frac{1-z_-\bar{z}_-}{1+z_-\bar{z}_-}$ で Minkowski 時空と関係している。すると線素は、

$$ds^2 = \begin{cases} -du^2 - 2dudr + 2r^2\gamma_{z_+\bar{z}_+}dz_+d\bar{z}_+ & :\text{遅延座標} \\ -dv^2 + 2dvdr + 2r^2\gamma_{z_-\bar{z}_-}dz_-d\bar{z}_- & :\text{先進座標} \end{cases}$$

となる。ここで、$\gamma_{z\bar{z}} = \frac{2}{(1+z\bar{z})^2}$ は 2 次元単位球面を Riemann 球面としてみた場合の (球面の) 計量である。遅延、先進それぞれの座標で $r \leftrightarrow -r$ とすると球面上の同じ点を指すので、z_+, z_- はお互いの対蹠点になっていることが分かる。

今、Minkowski 時空の Penrose 図を導入する。

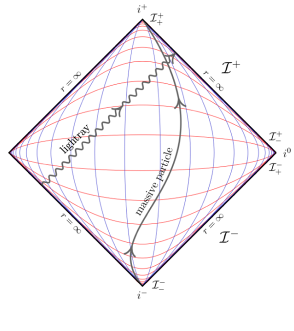

図 1: Minkowski 時空の Penrose 図 ([1] より)

図中の赤い線は t 一定面であり、青い線は r 一定面である。また、図中の i^- から i^+ に真っ直ぐ引いた $r=0$ の線に対して線対称な 2 つの点は (t,r) が共通で角度方向がお互いの反対である 2 点である。この図は Minkowski 時空の共形コンパクト化になっており、因果構造を保ちつつ無限遠を分類できる。$\mathcal{I}^\pm$ は未来/過去ヌル無限遠と呼ばれ、粒子は $t=-\infty$ で $\mathcal{I}^-$ から出で、$t=\infty$ で $\mathcal{I}^+$ に入っていくことになる。この事が図中の灰色の波線で表現されている。もう一つの今回重要となる無限遠が空間的無限遠 i^0 であり、次の小節では i^0 付近 $(\mathcal{I}^\pm_\mp)$ における電磁場の解析から漸近的対称性を導く。

2.1 電磁場の漸近的対称性と大電荷

Maxwell の電磁気理論は次の作用で記述される。

$$S := -\frac{1}{2e^2}\int F\wedge\star F + S_M \tag{1}$$

ここで、$\star$ は Hodge 双対を表す。S_M は適当な物質場の作用であり、F はゲージ場 A を用いて $F := dA$ で表されるゲージ不変な 2 形式である。この時、運動方程式は Maxwell 方程式

$$d\star F = e^2\star J \Rightarrow \nabla^\mu F_{\mu\nu} = e^2 J_\nu \tag{2}$$

で与えられる。ここで J は、$J^\mu := -\frac{\delta S_M}{\delta A_\mu}$ で定義されるものである。作用を e^2 で割っているのは物質の持つ電荷を整数にするためで、無限遠での球面内の電荷は

$$Q_E := \frac{1}{e^2}\int_{S^2}\star F = \int_\Sigma \star J \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

によって定義する。Σ は S^2 を境界に持つ適当な領域である。同様に整数化された磁荷 $Q_M := \frac{1}{2\pi}\int_{S^2} F$ で定義できるが、これは以後 0 として考える。

n 個の電荷 Q_k を持つ点粒子が定 4 元速度 $U^\mu_k = \gamma_k(1,\boldsymbol{\beta}_k), \gamma_k^2 = \frac{1}{1-\beta_k^2}$ で動いている状況を考える。点粒子同士の相互作用はひとまず考えない事にする。この時、電流 J は、

$$J_\mu(x) = \sum_{k=1}^n Q_k\int d\tau U_{k\mu}\delta^4(x^\nu_k - U^\nu_k\tau) \tag{4}$$

と書ける。ここで、各点粒子は $x^\mu_k(\tau) = U^\mu_k\tau$ となるような τ でラベルされた世界線上を動いている。この状況下において Maxwell 方程式から電磁場を求める問題は 1898 年に Liénard と Wiechert によって解かれた。その解は動径成分について

$$F_{rt}(t,\boldsymbol{x}) = \frac{e^2}{4\pi}\sum_{k=1}^n \frac{Q_k\gamma_k(r - t\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{\beta_k})}{|\gamma_k^2(t - r\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{\beta_k})^2 - t^2 + r^2|^{\frac{3}{2}}} \tag{5}$$

で与えられた。ここで、$r^2 = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} = r\hat{\boldsymbol{x}}$ とした。この解は遅延ポテンシャル、先進ポテンシャルに対して共に有効であることが分かっている。

さて、この解の無限遠方での性質を調べてみよう。式 (5) の $\hat{\boldsymbol{x}}$ を固定する。遅延座標 $(u,r,\hat{\boldsymbol{x}}_+)$ で式 (5) を書き換えて、$\mathcal{I}^+$ に持っていくために、u を固定したまま $r\to\infty$ の極限をとる。すると、$F_{rt} = F_{ru}$ の主要項が

$$F_{ru}|_{\mathcal{I}^+} = \frac{e^2}{4\pi r^2}\sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{\gamma_k^2(1 - \hat{\boldsymbol{x}}_+\cdot\boldsymbol{\beta_k})} = F_{rt}|_{\mathcal{I}^+} \tag{6}$$

のように得られる。$\mathcal{I}^+_-$ に持っていくには $u\to-\infty$ とすれば良いが、式 (6) が u に依らない形をしているので、これは $\mathcal{I}^+_-$ での値でもある。同様にして $\mathcal{I}^-$ での値を考えると、$F_{rt} = F_{rv}$ の主要項は

$$F_{rv}|_{\mathcal{I}^-} = \frac{e^2}{4\pi r^2}\sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{\gamma_k^2(1 + \hat{\boldsymbol{x}}_-\cdot\boldsymbol{\beta_k})} = F_{rt}|_{\mathcal{I}^-} \tag{7}$$

のように得られる。先程と同様にこれは v 依存性を持たないので、式 (7) が $\mathcal{I}^-_+$ での値と言える。適当な関数の $\mathcal{I}^+$ 周りや $\mathcal{I}^-$ 周りでの展開を、

$$f(u,r,z,\bar{z}) = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(u,z,\bar{z})}{r^n} \tag{8}$$

のように表す記法を用いると、
$\hat{\boldsymbol{x}}_-(z_-,\bar{z}_-) = -\hat{\boldsymbol{x}}_+(z_+,\bar{z}_+)$ を思い出して $z_\pm$ のどちらかを z で書き直せば、電磁場は

$$F^{(2)}_{ru}(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^+_-} = F^{(2)}_{rv}(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^-_+} \tag{9}$$

の関係を満たすことが分かる。相互作用がある場合でも、この物理的に妥当な状況においてこの関係は保たれる。無限の未来と無限の過去で粒子達の相互作用は無視できると考えられるからだ。

式 (9) によって即座に無数の保存量が Minkowski 時空での電磁気学に存在することがわかる。以下の境界条件を満たす適当な Minkowski 時空上の関数 ε

$$\varepsilon(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^+_-} = \varepsilon(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^-_+} \tag{10}$$

を考える。今、

$$Q_\varepsilon^+ := \frac{1}{e^2}\int_{\mathcal{I}_-^+} \varepsilon \star F \,, Q_\varepsilon^- := \frac{1}{e^2}\int_{\mathcal{I}_+^-} \varepsilon \star F \tag{11}$$

を定義する。 するとこれは $Q_\varepsilon^+ = Q_\varepsilon^-$ を満たし保存量である。この関数自由度を持つ無限個の保存量を大電荷と呼ぶ事にする。$\varepsilon = 1$ は電荷保存則を表すので、大電荷はまさに電荷の拡張である。これをさらに詳しくみてみよう。遅延座標系を用いると、

$$Q_\varepsilon^+ = \frac{1}{e^2}\int_{\mathcal{I}_-^+} \varepsilon \star F = \frac{1}{e^2}\int_{\mathcal{I}_-^+} d^2z\gamma_{z\bar{z}}\varepsilon F_{ru}^{(2)} \tag{12}$$

ここで、Maxwell 方程式の主要なものは、

$$\partial_u F_{ru}^{(2)} + D^z F_{uz}^{(0)} + D^{\bar{z}} F_{u\bar{z}}^{(0)} + e^2 J_u^{(2)} = 0 \tag{13}$$

である。ここで、D_z は計量 $\gamma_{z\bar{z}}$ を持つ単位球面についての共変微分で、$D^z := \gamma^{z\bar{z}} D_z$ とした。これを用いて大電荷に Gauss の法則を適用する。$\partial_u \varepsilon|_{\mathcal{I}^+} = 0$ となるように ε を選ぶと、式 (12) は $Q_\varepsilon^+ = Q_S^+ + Q_H^+$ のように部分積分される。ここで、軟電荷、硬電荷をそれぞれ以下のように定義した。

$$Q_S^+ := -\frac{1}{e^2}\int_{\mathcal{I}^+} dud^2z\big(\partial_z\varepsilon F_{u\bar{z}}^{(0)} + \partial_{\bar{z}}\varepsilon F_{uz}^{(0)}\big) \tag{14}$$

$$Q_H^+ := \int_{\mathcal{I}^+} dud^2z\varepsilon\gamma_{z\bar{z}} J_u^{(2)} \tag{15}$$

軟光子モードを $N_z := \int_{-\infty}^{\infty} du F_{uz}^{(0)}$ とすると[1]、

$$\partial_{\bar{z}} N_z - \partial_z N_{\bar{z}} = -[F_{z\bar{z}}^{(0)}|_{\mathcal{I}_-^+} - F_{z\bar{z}}^{(0)}|_{\mathcal{I}_+^-}] \tag{16}$$

が分かる。磁荷が存在しないという仮定から、 長距離場は存在せず、それ故に $F_{z\bar{z}}|_{\mathcal{I}_\pm^+} = 0$ となるので、$N_z =: e^2\partial_z N$ となる実関数 N が定義できる。$A_u^{(0)} = 0$ のゲージ条件を課すと、

$$e^2\partial_z N = [A_z^{(0)}|_{\mathcal{I}_-^+} - A_z^{(0)}|_{\mathcal{I}_+^-}] \tag{17}$$

として N_z の表式が容易にわかる。磁荷が存在しないため、この量は存在しても純粋にゲージによるものである。今、考えている保存電荷の表式は、

$$Q_\varepsilon^+ = 2\int_{S^2} d^2zN\partial_z\partial_{\bar{z}}\varepsilon + \int_{\mathcal{I}^+} dud^2z\gamma_{z\bar{z}}\varepsilon J_u^{(2)} \tag{18}$$

である。

[1]量子力学に移行するとこれは軟光子の消滅生成を表す場として扱われる。([1])

2.2 大電荷とその対称性変換

ここでは大電荷に対応する対称性が何なのかを Hamilton の正準形式の枠組みで同定する。古典正準形式では、$2N$ 次元位相空間 Γ があって、その元は $x^I := (\xi^i, \eta_j)\,, i, j = 1, 2, \cdots, N$ のような座標をなす。正準方程式を定めるためには閉形式、非退化なシンプレクティック 2 形式 $\Omega = \frac{1}{2}\Omega_{IJ} dx^I \wedge dx^J$ が必要である。この時、Dirac 括弧は以下で与えられる。

$$\big[A, B\big]_D = \Omega^{IJ}\partial_I A\partial_J B \tag{19}$$

電流無しの場合、電磁気の Ω は $\mathcal{I}^+$ 上で

$$\Omega_{\mathcal{I}^+} = \frac{1}{e^2}\int_{\mathcal{I}^+} dud^2z(\delta F_{uz}^{(0)} \wedge \delta A_{\bar{z}}^{(0)} + \delta F_{u\bar{z}}^{(0)} \wedge A_z^{(0)}) \tag{20}$$

とかける。$\partial_z\phi := \frac{1}{2}\big[A_z^{(0)}|_{\mathcal{I}_+^+} + A_z^{(0)}|_{\mathcal{I}_-^+}\big]$ として

$$A_z^{(0)}(u, z, \bar{z}) = \hat{A}_z(u, z, \bar{z}) + \partial_z\phi(z, \bar{z}) \tag{21}$$

で $A_z^{(0)}$ を u に独立な部分と従属な部分に分けると、

$$\Omega_{\mathcal{I}^+} = \frac{2}{e^2}\int_{\mathcal{I}^+} dud^2z\partial_u\delta\hat{A}_z \wedge \delta\hat{A}_{\bar{z}} - 2\int_{S^2} d^2z\partial_z\delta\phi \wedge \partial_{\bar{z}}\delta N \tag{22}$$

となる。式 (19) より

$$\big[Q_\varepsilon^+, A_z^{(0)}(u, z, \bar{z})\big]_D = \partial_z\varepsilon(z, \bar{z}) \tag{23}$$

が得られる。$\mathcal{I}^-$ でも同様に考えて、

$$\big[Q_\varepsilon^-, A_z^{(0)}(v, z, \bar{z})\big]_D = \partial_z\varepsilon(z, \bar{z}) \tag{24}$$

が得られる。電流が存在する場合でも、$\mathcal{I}$ では相互作用は無視できるため、式 (23) 及び式 (24) は変更されない。影響は物質場の硬電荷による変換による。J は $U(1)$ 対称性の Noether カレントであるから、

$$\Big[\int_{\mathcal{I}^{+/-}} \varepsilon\star J, \Phi_k(u/v, z, \bar{z})\Big] = -Q_k\varepsilon(z, \bar{z})\Phi_k(u/v, z, \bar{z}) \tag{25}$$

が得られる。このように、大電荷のうち軟電荷はゲージ場を、硬電荷は物質場をそれぞれ適切に、角度依存する関数 ε によってゲージ変換する。無限個の大電荷に対応する対称性は無限個のゲージ変換対称性であった。特に、ここで現れたゲージ場は軟光子モードによって生成されたことを述べておく。

3 B.H. 時空への応用

Minkowski 時空で無限個の保存量の存在を見た。これは i^0 付近での整合条件によって現れたものであるから、漸近的平坦な時空においても定義することができる。このことが情報損失問題の視点にどのような変更を加えるのか、エネルギー M の中性ヌル粒子を $v=0$ で打ち込んで Vaidya B.H. を形成した後、$v=v_0$ で非球対称ヌルカレント $J_v = \frac{Y_{\ell m}(z,\bar z)}{r^2}\delta(v-v_0), \ell > 0$ を再び B.H. に打ち込むモデルを用いて、時空へのバックリアクションを無視した線形摂動論で考える。この状況は次図のように描かれる。

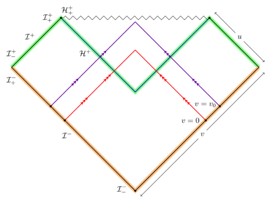

図 2: Vaidya B.H. へのカレント打ち込み ([1] より)

Maxwell 方程式に球面調和関数をかけて $\mathcal{H}^+$ 上で積分すると、

$$e^2\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'} = [Y_{\ell'm'} \star F]^{\mathcal{H}^+_+}_{\mathcal{H}^+_-} + \int_{-4M}^{\infty} dv \int d^2z[\{F^{(h)}_{vz} + \frac{1}{2}\Theta(-v)F^{(h)}_{rz}\}]\partial_{\bar z}Y_{\ell'm'} + c.c.] \tag{26}$$

となる。ここで、(h) は $\mathcal{H}^+$ への射影を表す。初期条件を $A^{(h)}_z|_{\mathcal{H}^+_-} = 0$ とし、表面項が消えるという仮定と、ゲージ条件 $A_r = 0,\ A_v|_{\mathcal{H}^+} = 0$ を課すとこの方程式は

$$A^{(h)}_z = \partial_z\left[\Theta(v-w)\frac{e^2}{\ell(\ell+1)}Y_{\ell m}(z,\bar z)\right] =: \partial_z\varepsilon_{\ell m} \tag{27}$$

と解ける。($w \in (-4M,\infty)$) ここで球面調和関数は以下を満たす。$D^2Y_{\ell m} = -\ell(\ell+1)Y_{\ell m}$.
このように、地平面上には入射粒子の情報 ℓ, m を持った光子がゲージ変換によって生える。逆に、

$$Q^{\mathcal{H}}_S := \frac{1}{e^2}\int_{\mathcal{H}} d\varepsilon_{\ell m}\wedge\star F$$
$$\Rightarrow [Q^{\mathcal{H}}_S, A^{(0)}_z(v,z,\bar z)|_{\mathcal{H}}]_D = \partial_z\varepsilon_{\ell m}(z,\bar z)$$

となることが Minkowski の場合と同様に (より複雑だが) 示せる。この事は、地平面上に確かに入射粒子の情報を含んだ大電荷が存在する事を示している。

4 議論

我々は地平面上に入射粒子の情報を持った大電荷が現れる事を見た。Hawking 放射は地平面上の物理量とは相関を持ち得るため、この事は放射粒子が入射粒子の情報の一部を持ち運ぶ事を可能にする。また、大電荷は Minkowski の場合に見たようにヌル無限遠に軟光子を加えるようなゲージ変換を起こすことも見た。軟光子の有無によって状態は区別出来るので、ヌル無限遠は情報を保持する場所を提供する。これらの事実は「B.H. 形成粒子の情報は、保持されるとしたら地平面の内側にある。」、「形成粒子の情報が外部に漏れ出る事はない。」という従来の前提を覆すものであり、今後情報損失問題を考える上で重要な視点となるだろう。

一方、今回のモデルで考えても、同じカレントを作るような粒子の送り方は区別できないため、全ての情報が保たれていると考える事はできない。従ってこの視点のみから情報損失を回復させることも残念ながらできないと考えられるだろう。しかし今、電磁気学以外の様々な理論での漸近的対称性とそれに関連する軟粒子を生み出す”電荷”の存在が今次々と見つかっている。([1]) このような状況では軟粒子の理論に与える影響は益々大きくなると考えられるので、軟粒子の性質の更なる理解が情報パラドックスの理解を更に広げるだろう。特に、漸近平坦な時空で現れる軟重力子の存在は重力とその量子構造との結びつきのヒントを与えてくれると期待される。([3])

今回見た無限個の漸近対称性は情報パラドックスのみならず、物理のより基本的な構造を考察する上での重要な足掛かりとなるのかもしれない。

5 参考文献

[1]A. Strominger,2016,arXiv:1703.05448 [hep-th].
[2]S. W. Hawking, M. J. Perry, and A. Strominger,2016,arXiv:1611.09175 [hep-th].
[3] T. He, V. Lysov, P. Mitra, and A. Strominger, JHEP 05 (2015) 151, arXiv:1401.7026 [hep-th].

——index

a6

non-singular ブラックホールからの量子的輻射

中司　桂輔 (立教大学大学院　理学研究科)

Abstract

本公演では [1] をレビューする。[1] では 2 タイプの non-singular ブラックホールから放射される量子的輻射のフラックスを評価している。その特徴的な振る舞いとして、[1] では non-singular ブラックホールのインナーホライズンからのフラックスが指数関数的に増大することが指摘された。この振る舞いは、インナーホライズンの不安定性に伴う急激なブラックホールの質量増加現象 (質量インフレーション) の帰結であると考えられている。non-singular ブラックホールのインナーホライズンの不安定性は [2] でも指摘され、non-singular ブラックホールが特異点の問題を解決する現実的なモデルになり得ない可能性が指摘された。しかし、[1] で調べられた 2 タイプの non-singular ブラックホールのうち 1 つでは、インナーホライズンからの量子的輻射がもう 1 方の non-singular ブラックホールと比較して抑制されている。本講演では、この結果が non-singular ブラックホールの持つ不安定性を解決するモデルを構築する手がかりになるかという観点から考察を行う。

1　Introdaction

一般相対性理論（GR）は、ブラックホールの内部や初期宇宙において特異点が存在するという問題を抱えている。ブラックホールの特異点に関して、特異点の周りには必ず事象の地平面が存在し、ブラックホール内部の情報は外部に影響を及ぼさないとする宇宙検閲官仮説が提唱されている。しかし、ブラックホールに対して量子論の効果を考慮すると、ブラックホールは熱的輻射（Hawking 輻射）をして時間経過とともに蒸発していき、最後には蒸発しきって消えてしまうと考えられている。このブラックホール蒸発の最終段階において特異点の問題は避けては通れず、盛んな議論の対象となっている。この問題を解決するために様々な試みがなされているが、その中に内部に特異点の存在しない non-singular ブラックホールがある。non-singular ブラックホールは特異点問題を解決する候補として注目されているだけではなく、星の重力崩壊などによりブラックホールが形成され、Hawking 輻射により蒸発して消滅するまでの過程を全て記述できる可能性があるモデルとしても注目されている。

2　Non-Singular Black Hole

[1] で考えられたのは球対称な non-singular ブラックホールである。最も一般的な球対称時空のメトリックは

$$\begin{aligned} dS^2 &= \sigma^2 ds^2 \\ ds^2 &= -\alpha^2 f dv^2 + 2\alpha dv dr + r^2 d\Omega^2 \end{aligned} \qquad (1)$$

と書ける。ここで、$d\Omega^2$ は S^2 の立体角を表し、$f = f(v, r)$、$\alpha = \alpha(v, r)$ であり、α は redshift function と呼ばれる。non-singlar ブラックホールでは曲率特異点が回避されているので、メトリックの中にそのスケールに対応したパラメーター l が入る。通常、この l はプランク長 l_{Plank} のオーダーであると考え、[1] では l を基準とし σ に長さの次元を持たせ、無次元化した ds^2 のメトリックを用いて議論する。

[1] では、non-singular ブラックホールは形成したあと、最後には蒸発しきって消えるような動的なモデルを考えている。このことは、通常の意味での event horizon を持たず、apparent horizon のみを持つことを意味している。apparent horizon の位置は $f(v, r) = 0$ の位置に存在し、時間経過、ブラックホールの質量変化に伴い、その数と半径は変化する。また、漸近的平坦性から、中心で曲率が発散しないために $f(v, r)$ は 2 つ以上偶数個のゼロ点を持たなけれ

ばならず、さらに $f(v,r)$ と $\alpha(v,r)$ の無限遠での振る舞いは $f(v,r)|_{r\to\infty} = \alpha(v,r)|_{r\to\infty} = 1$ であることを要請している。

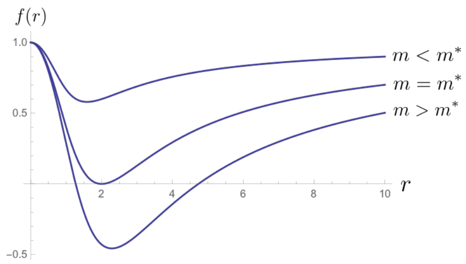

図 1: non-singular ブラックホールにおける apparent horizon の数。ブラックホールの質量によって apparent horizon の数が変化する。

3 Quantum Flux at $\mathscr{I}^+$

蒸発している non-singular ブラックホールからの量子的輻射を考えるためにこの時空における massless スカラー場を考える。さらに、解くべきスカラー場の方程式から、量子的輻射に主に寄与しているモードは S 波であることがわかるので S 波のみを考える。また、トレースアノーマリーが現れないようにするためにここでは 2 次元近似を適用する。この近似のもとでは量子的輻射のエネルギーフラックス $< T^{u_- u_-} >$ は、

$$\begin{aligned}\mathscr{E} &= -\frac{1}{24\pi}\{u_-, u_+\} \\ &= \frac{d^3u_-}{du_+^3} / \frac{du_-}{du_+} - \frac{3}{2}\left(\frac{d^2u_-}{du_+^2} / \frac{du_-}{du_+}\right)^2 \end{aligned} \tag{2}$$

と表すことができる。ここで、u_- と u_+ はそれぞれ $\mathscr{I}^-$、$\mathscr{I}^+$ での遅延時間座標である。したがって、この表式から u_- が u_+ の関数、つまり $u_- = u_-(u_+)$ として求められれば量子的輻射のエネルギーフラックスを計算することができる。

同様に求められた $u_-(u_+)$ を用いると、以下の量も計算できる。

$$P = [u_-, u_+] = \ln\left|\frac{du_-}{du_+}\right| \tag{3}$$

$$W = \langle u_-, u_+\rangle = \frac{d^2u_-}{du_+^2} / \frac{du_-}{du_+} \tag{4}$$

これらの量はそれぞれ輻射エントロピー密度、outgoing null ray 密度と関係している。

4 Beams of Null Rays

まず、outgoing null rays を "数える" ためにパラメーター z を $r = r(v,z)$ と導入する。ここで導入した z は各 outgoing null ray に対して一定であり、$z = 0$ の null ray を fiducial と呼ぶ。つまり、

$$r_0(v) = r(v, z = 0) \tag{5}$$

とする。今、2 次元近似のもとでの null ray を考えているので、ingoing null ray は $v = const$ に従い、outgoing null ray は

$$\frac{dr}{dv} = \mathcal{Z}(v, r(v,z)) = \frac{1}{2}\alpha f \tag{6}$$

に従う。この関係から u_- と u_+ との関係を計算する際に便利な量を定義する。

まず、$r(v,z)$ の fiducial ray 周辺の ray を考える。

$$r(v,r) = r_0(v) + \Delta r(v,z) \tag{7}$$

$$\Delta r(v,z) = \sum_{n=1} \frac{z^n}{n!} r_n(v) \tag{8}$$

さらに $\mathcal{Z}(v,r)$ も fiducial ray の周りで展開すると、

$$\mathcal{Z}(v,r) = \mathcal{Z}_0(v, r_0(v)) + \sum_{m=1} \frac{\Delta r(v,z)^m}{m!} \mathcal{Z}_m(v) \tag{9}$$

と展開できる。ここで以下の量を定義する。

$$p(v) = [r(v,z), z]|_{z=0} \tag{10}$$

$$w(v) = \langle r(v,z), z\rangle|_{z=0} \tag{11}$$

$$\varepsilon(v) = \{r(v,z), z\}|_{z=0} \tag{12}$$

これらを定義すると、outgoing null ray が従う方程式が

$$\frac{dr_0}{dv} = \mathcal{Z}_0, \quad \frac{dp}{dv} = \mathcal{Z}_1 \tag{13}$$

$$\frac{dw}{dv} = \mathcal{Z}_2 e^p, \quad \frac{d\varepsilon}{dv} = \mathcal{Z}_3 e^{2p} \tag{14}$$

となる。これらを積分すると、u_- と u_+ との関係を求めることができる。

$\mathscr{I}^+$ での P、W、$\mathscr{E}$ を計算するために以下の手順を考える。

- $v = u^-$ に $\mathscr{I}^-$ から出て u^+ に $\mathscr{I}^+$ に到達する null ray を考える →fiducial ray
- $v = q$ の null 面を考え、その面と fiducial ray が交わる時の半径を r^+ とする。
- 次に、$u_- = u^- + \Delta v$ に $\mathscr{I}^-$ を出た null ray を考え、この null ray が u^- が作る面と交わる時の半径を $r_- = x$、$v = q$ 面と交わる時の半径を $r_+ = r^+ + y$ とする。
- ここで考えた null ray は最終的に $u_+ = u^+ + \Delta u$ に $\mathscr{I}^+$ に到達する。

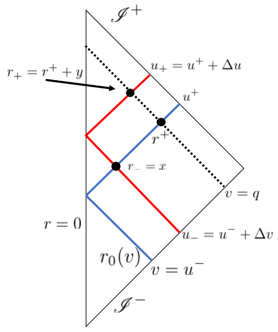

図 2: fiducial null ray と r_-、r_+ の関係

このように x や y を考えると、決められた fiducial ray に対して、$\{u_+, r_+, r_-, u_-\}$ の微分が対応する $\{\Delta u, y, x, \Delta v\}$ での微分の値と等しくなる。具体的には、例として $u_+ = q - 2r_+ = q - 2r^+ - 2y$ とすると

$$\frac{du_+}{dy} = -2, \quad \langle u_+, y\rangle = 0, \quad u_+, y \ = 0 \tag{15}$$

となり、x と u_- の間の関係は、$r = 0$ での redshift factor の値 α_0 を用いて

$$\frac{dx}{du_-} = -\frac{1}{2}\alpha_0 \tag{16}$$

$$\langle x, u_-\rangle = \frac{\alpha_0'}{\alpha_0} \tag{17}$$

$$\{x, u_-\} = \frac{1}{2}\alpha_0^2 a_2 + \frac{\alpha_0"}{\alpha_0} - \frac{3}{2}\left(\frac{\alpha_0'}{\alpha_0}\right)^2 \tag{18}$$

$$a_2(v) = \left.\frac{d^2\mathcal{Z}(v,r)}{dr^2}\right|_{r=0} \tag{19}$$

と書ける。あとは y と x の関係がわかれば u_- と u_+ の関係を求めることができる。この関係は

$$r_0(u_-) = 0, \quad p(u_-) = w(u_-) = \varepsilon(u_-) = 0 \tag{20}$$

という初期条件のもとで

$$[y, x] = p(q), \quad \langle y, x\rangle = w(q), \quad \{y, x\} = \varepsilon(q) \tag{21}$$

となることがわかるので、最終的な u_+ と u_- との関係は、

$$[u_-, u_+] = -p(q) - \ln\alpha_0 \tag{22}$$

$$\langle u_-, u_+\rangle = e^{-p(q)}\left[\frac{1}{2}w(q) - \frac{\alpha_0'}{\alpha_0^2}\right] \tag{23}$$

$$\{u_+, u_-\} = e^{-2p(q)}\left[\frac{1}{4}\varepsilon(q) + \frac{1}{\alpha_0^2}\{x, u_-\}\right] \tag{24}$$

となる。これで u_- と u_+ との関係を求めることができた。

5 Models of Evaporating Non-Singular Black Hole

蒸発している non-singular ブラックホールからの量子的輻射を計算するために [1] では以下のような 2 つのモデルを考えている。

Standard Model

$$f = 1 - \frac{\mu(v)r^2}{r^3 + \mu(v) + 1}, \quad \alpha = 1 \tag{25}$$

Modified Model

$$f = 1 - \frac{\mu(v)r^2}{r^3 + \mu(v) + 1}, \ \alpha = \frac{1 + r^5}{1 + r^5 + \mu^3(v)} \tag{26}$$

ここで $\mu(v)$ は mass function で

$$\mu(v) = \begin{cases} \frac{2v(q-\tau)(q-v)^{1/3}}{C((q-\tau)v-\tau v+\tau^2)} & 0 \le v \le q \\ 0 & v < 0, v > q \end{cases} \tag{27}$$

で与える。$\mu(v)$ は $0 \le v \le \tau$ の間に星の重力崩壊してブラックホールが形成されて最大質量 μ_0 となり、その後はブラックホールの量子的輻射によって質量

が減少していき、$v = q$ で蒸発しきるまでの過程をモデル化したものとなっている。apparent horizon の位置は

$$r_1(v) = \frac{1}{2}\left(\mu(v) + 1 + \sqrt{\mu^2(v) - 2\mu(v) - 3}\right)$$
$$r_2(v) = \frac{1}{2}\left(\mu(v) + 1 - \sqrt{\mu^2(v) - 2\mu(v) - 3}\right) \quad (28)$$

で与えられ、時間とともに質量が変化するのに伴ってその数と位置が変化する。

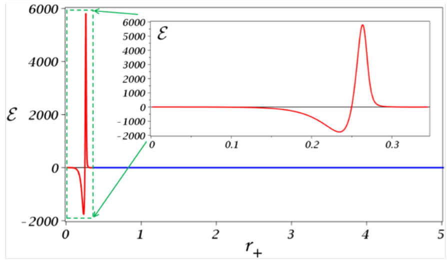

図 4: modified model のエネルギーフラックス $\mathscr{E}$

6 Results

[1] では standard model と modified model における量子的輻射のエネルギーフラックスが以下のように示されている。特異点のあるブラックホールからの量子的輻射と異なる点は、[1] で考えているモデルは最後にブラックホールが蒸発しきるので、apparent horizon 内からの量子的輻射も $\mathscr{I}^+$ に到達できるのでブラックホール内からのフラックスも計算できる点である。$v = 0$ に $r = 0$ から出た outgoing null ray が $v = q$ に到達した半径を $r_+ = \rho$ とすると、standard model の場合はピークがその付近に集中して位置しているが、modified model の場合は $0 \leq r_+ \leq \rho$ の範囲にピークが位置していることがわかる。

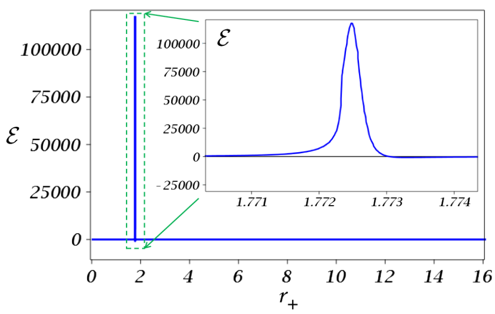

図 3: standard model のエネルギーフラックス $\mathscr{E}$

7 Discussion

[1] では non-singular ブラックホールからの量子的輻射を計算されている。[1] で考えられている non-singular ブラックホールは星などの重力崩壊から形成され、その後 Hawking 輻射などの量子的輻射により質量が減少して、最後にブラックホールが蒸発しきって消えるまでの過程をモデル化したものである。これまでの特異点を持つブラックホールでの Hawking 輻射の結果と異なる点は、[1] での non-singular ブラックホールは apparent horizon のみを持ち、内部に特異点を含まないので蒸発した後にブラックホール内部からの量子的輻射を計算できる点である。

こうして non-singular ブラックホールからの量子的輻射のエネルギーフラックスを評価すると、inner apparent horizon 付近から指数関数的なピークを持つ特徴的なフラックスになることが示された。この振る舞いは inner apparent horizon がその付近の outgoing null ray に対してアトラクターの役割を担っているためである。non-singular ブラックホールに入射した null ray は中心を通過して outgoing null ray になる。その後 inner apparent horizon 付近に集中しブラックホールが蒸発した後に内部からの量子的輻射としてエネルギーフラックスの特徴的な振る舞いが現れると考えられる。

[1] では、standard model と modified model の 2 タイプの non-singular ブラックホールからの量子的輻射が計算されている。この 2 タイプを比較したとき、modified model の場合はブラックホール内部からの量子的輻射のフラックスが standard model の場合に比べて抑制されるという結果が得られた。

Reference

[1] Frolov, Valeri P. & Zelnikov, Andrei, Phys. Rev. D95, 12, 124028(2017).

2]Raúl Carballo-Rubio et al., JHEP 1807 (2018) 023.

——index

a7

Exotic Compact Object における Echo の理論的性質と Template 作成

木村 和貴 (京都大学 基礎物理学研究所)

Abstract

一般相対論から導かれるブラックホールという概念は、量子論と組み合わせて考えると BH 情報パラドックスなどの問題が発生することが知られている。そこで現実には重力崩壊の結果、ブラックホールになるのではなく別の天体になるのではないかという考えが提唱されている。これを Exotic Compact Object という。本発表では Z.Mark et al(2017) に基づいてブラックホールと Exotic Compact Object を区別する重力波のエコーという現象について述べる。

1 Introduction

2016 年に初めて重力波が観測され、とうとう重力波天文学が幕を開けた。これから重力波観測が進めば宇宙の様々なことが観測的に理解されていくことだろう。この重力波観測によって知ることのできる情報の 1 つとして、我々がブラックホール (BH) と思っているものが本当に事象の地平線を伴うようなブラックホールなのかという問題がある。銀河系の超大質量ブラックホール付近の電波観測によって事象の地平線の存在を証明しようとしているプロジェクト (Event Horizon Telescope) も最近始まったが、今のところは事象の地平線の存在を強く裏付けるような観測結果は発表されていない。さらに、ブラックホールの事象の地平線の存在は量子力学との関係から様々な問題が知られていて、そのような問題を避けるために、Gravastar, firawall 等々様々な BH の代替物が考えられている。これらを Exotic Compact Object(ECO) と言う。

重力波観測によって BH と ECO を区別できるというのは,ECO にはリングダウン重力波のエコーが存在することに由来する。ECO は一般に BH で事象の地平線と考えられていた面に何らかの壁が存在しており、そこで重力波が跳ね返されるからである。本講演ではそのようなエコーが理論的にどのように記述されるか、またそのエコーを観測するためにテンプレートがどのように作成できるかについて (Mark et al. 2017) のレビューを行う。

まず section2 で、リングダウン重力波及びエコーを扱うための重力場の摂動が満たす方程式について概観する。(Martel & Poisson 2005) section3 では、BH と ECO の場合に重力場の方程式の解がどのように異なるかを両者を比較しながらみていく。section5 では、エコーのテンプレートがどのように作成できるかをみていく。

2 重力波の摂動方程式

Schwarzschild 時空を背景として、計量に対して摂動を考える。

$$g_{\alpha\beta} = g^{(0)}_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \tag{1}$$

ここで、フーリエ分解、球面調和関数による展開、亀座標 x の導入、ゲージ固定、補助変数の構成の操作を行うことによって重力場の摂動が満たす方程式を簡単な形で表すことができる。詳しい計算は (Martel & Poisson 2005) を参照。結果だけを書くと、重力場の摂動の方程式を解くということは各 ω, lm に対して以下の方程式を解くことと等価になる。

$$\frac{d^2\tilde{\Psi}^{lm}_{even}}{dx^2} + (\omega^2 - V^{lm}_{even})\tilde{\Psi}^{lm}_{even} = \tilde{S}^{lm}_{even} \tag{2}$$

$$\frac{d^2\tilde{\Psi}^{lm}_{odd}}{dx^2} + (\omega^2 - V^{lm}_{odd})\tilde{\Psi}^{lm}_{odd} = \tilde{S}^{lm}_{odd} \tag{3}$$

even,odd はそれぞれ計量の parity 変換に対する偶奇性の違いによって分解した際の成分であり、任意の

計量はこの Ψ_{even} と Ψ_{odd} を組み合わせることによって導出できる。つまり、このシンプルの形の方程式を解くだけで計量の摂動がきちんと求まることになっている。$V_{even}, S_{even}, V_{odd}, S_{odd}$ はそれぞれの方程式に入ってくる実効的なポテンシャルとソースタームであるが、具体的な表式はここでは省略する。

また、Schwarzshild 時空上の Massless スカラー場の波動方程式は以下のように書くことができる。

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\psi &= S \qquad (4) \\ \Leftrightarrow \frac{d^2\tilde{\psi}^{lm}}{dx^2} + (\omega^2 - V^{lm})\tilde{\psi}^{lm} &= \tilde{S}^{lm} \qquad (5) \end{aligned}$$

これは重力場の摂動に対する方程式と全く同じ形をしていて、しかも、有効ポテンシャルである $V^{lm}_{even}, V^{lm}_{odd}, V^{lm}$ はすべて $x = 0$ 付近にピークを持つ山なりのポテンシャルをしているので、スカラー場に対する議論は重力場の摂動に対しても適用できる。したがって以下では簡単のためにスカラー場に対する方程式について議論していくことにする。

3 BH と ECO の比較

この section では、BH と ECO の場合に、波動方程式

$$\frac{d^2\tilde{\psi}}{dx^2} + (\omega^2 - V)\tilde{\psi} = \tilde{S} \qquad (6)$$

の解がどのように異なってくるかを見る。

波動方程式の解は、境界条件が与えられ、その下で

$$\frac{d^2G(x,x')}{dx^2} + (\omega^2 - V)G(x,x') = \delta(x - x') \qquad (7)$$

を満たす Green 関数により

$$\tilde{\psi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(x,x')\tilde{S}(x') \qquad (8)$$

で与えられる。BH と ECO は波動方程式に対する境界条件が異なるため、Green 関数が異なり解も異なる。まず、BH の境界条件は $x \to \pm\infty$ で $V \to 0$ より平面波となることから、図 1 のように与えられる。式で書くと以下のようになる。

$$\begin{cases} \tilde{\psi} \propto e^{i\omega x} & as \quad x \to +\infty \\ \tilde{\psi} \propto e^{-i\omega x} & as \quad x \to -\infty \end{cases} \qquad (9)$$

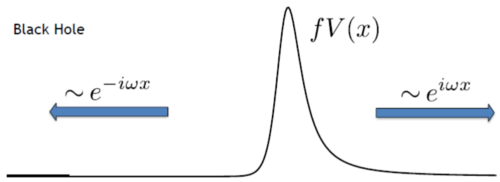

図 1: BH の境界条件

$x \to +\infty$ での境界条件は外部からブラックホールに入射してくる波がないことに対応し、$x \to -\infty$ での境界条件は波が事象の地平線に落ち込むことに対応している。

ECO の場合の境界条件は、、事象の地平線であった場所に壁が存在して、そこで波が j 反射されることから図 2 のようになる。ここで、$\tilde{\mathcal{R}}$ は壁の反射率を表している。

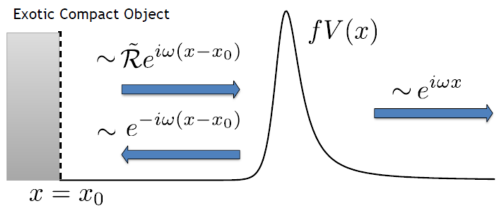

図 2: ECO の境界条件

式で書くと以下のようになる。

$$\begin{cases} \tilde{\psi} \propto e^{i\omega x} & as \quad x \to +\infty \\ \tilde{\psi} \propto e^{-i\omega(x-x_0)x} + \tilde{\mathcal{R}} e^{i\omega(x-x_0)} & as \quad x \to -\infty \end{cases} \qquad (10)$$

上に示した境界条件の下で BH と ECO の Green 関数を構成することによって、BH の Green 関数 G_{BH} と ECO の Green 関数 G_{ECO} に

$$\begin{aligned} G_{ECO} & \quad (x \to +\infty, x') \\ = & \quad G_{BH}(x \to +\infty, x') \\ & \quad + \tilde{\mathcal{K}} e^{2i\omega x} G_{BH}(x \to -\infty, x') \qquad (11) \end{aligned}$$

という関係があることがわかる。

続いて、上の Green 関数の関係から BH と ECO の場合の重力波形がどのように関係づいているかを見る。まず、BH の場合は無限遠 ($x \to +\infty$) での重力波形と事象の地平線 ($x \to -\infty$) へ向かう重力波形

は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}\tilde{\psi} \quad & (x \to +\infty) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx' G_{BH}(x \to +\infty, x') \tilde{S}(x') \\ &\equiv Z_{BH}^{out} e^{i\omega x} \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\psi} \quad & (x \to -\infty) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx' G_{BH}(x \to -\infty, x') \tilde{S}(x') \\ &\equiv Z_{BH}^{in} e^{-i\omega x} \end{aligned} \tag{13}$$

$Z_{BH}^{out} e^{i\omega x}$ の項はリングダウン重力波に対応している。ECO の場合、無限遠 $(x \to +\infty)$ での重力波形は Green 関数の関係式 (11) を用いて以下のように書ける。

$$\begin{aligned}\tilde{\psi} \quad & (x \to +\infty) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx' G_{ECO}(x \to +\infty, x') \tilde{S}(x') \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx' G_{BH}(x \to +\infty, x') \tilde{S}(x') \\ & \quad + \tilde{\mathcal{K}} e^{2i\omega x} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' G_{BH}(x \to -\infty, x') \tilde{S}(x') \\ &= Z_{BH}^{out} e^{i\omega x} + \tilde{\mathcal{K}} Z_{BH}^{in} e^{i\omega x} \end{aligned} \tag{14}$$

この表式を見ると、ECO の場合は、BH の時と同じリングダウン重力波の成分 $Z_{BH}^{out} e^{i\omega x}$ に加えて新たな項 $\tilde{\mathcal{K}} Z_{BH}^{in} e^{i\omega x}$ が加わっていることがわかる。これがエコーに対応している。

実際に $\tilde{\mathcal{K}}$ を解析的に求めると、級数展開の形でエコーの項は以下のように書くことができる。

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{K}} Z_{BH}^{in} &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{K}}_n Z_{BH}^{in} \\ &= \tilde{\mathcal{K}}_1 Z_{BH}^{in} + \tilde{\mathcal{K}}_2 Z_{BH}^{in} \\ & \quad + \tilde{\mathcal{K}}_3 Z_{BH}^{in} + \cdots \\ &= \tilde{T}_P \cdot \tilde{R}_{ECO} \cdot Z_{BH}^{in} \cdot e^{-2i\omega x_0} \\ & \quad + \tilde{T}_P \cdot \tilde{R}_{ECO} \cdot \tilde{R}_P \cdot \tilde{R}_{ECO} \cdot Z_{BH}^{in} \cdot e^{-4i\omega x_0} \\ & \quad + \tilde{T}_P \cdot \tilde{R}_{ECO} \cdot \tilde{R}_P \cdot \tilde{R}_{ECO} \cdot \\ & \qquad \tilde{R}_P \cdot \tilde{R}_{ECO} \cdot Z_{BH}^{in} \cdot e^{-4i\omega x_0} \\ & \quad + \cdots \end{aligned} \tag{15}$$

ここで、$\tilde{R}_P, \tilde{T}_P, \tilde{R}_{ECO}$ はそれぞれポテンシャルの反射率、透過率、ECO の壁の反射率である。(図 3) この式を見ると、級数の項がそれぞれのエコーを表していることがわかる。

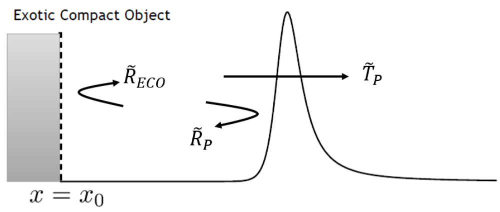

図 3: エコーの項に現れる因子

4 ECO に落ち込む粒子からのエコー

ECO の壁の反射率を $\tilde{R}_{ECO} = 1$(完全反射) とした時に、Innermost stable circular orbit から回転しながら ECO に落ち込む粒子から発生するエコーを数値計算によって発生させると図 4 のようになる。それぞれのエコーのスペクトルを表したものが図 5 である。これを見ると、ポテンシャルの反射率、透過率のスペクトルによってエコーには $\omega = \Omega_R$ の成分が含まれていることがわかる。このポテンシャルの反射率と透過率が等しくなる周波数は Quasi-Normal Mode である。

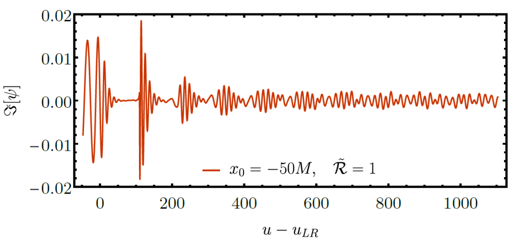

図 4: ECO に落ち込む粒子からのエコー

5 エコーのテンプレート作成

section4 で見たようにエコーには Quasi-Normal Mode 付近の周波数のみが寄与していた。したがって、Z_{BH}^{in} のテンプレートとして Quasi-Normal Mode 付近の形が似ているテンプレートを作成できれば良

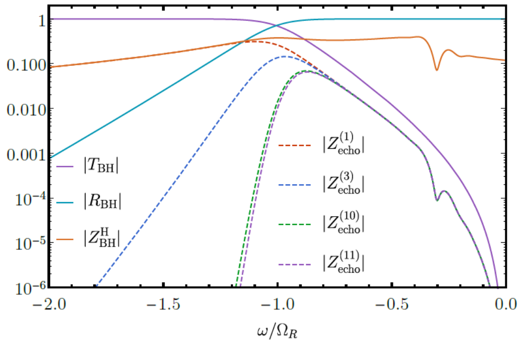

図 5: エコーのスペクトル

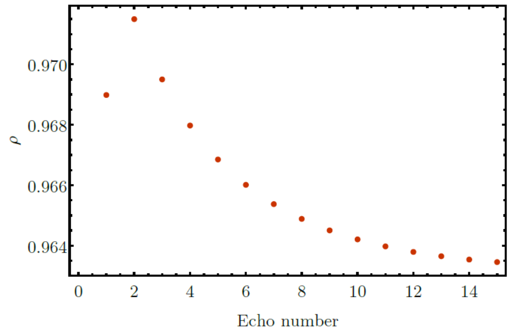

図 7: ECO に落ち込む粒子からのエコー

いエコーのテンプレートが作成できると考えられる。そこで、Z^{in}_{BH} のテンプレートを Quasi-Normal Mode を中心としたガウシアンで作成することを考える。実際に作ったテンプレートが図 6 で、実際のエコーとのオーバーラップを表したものが図 7 である。これさｓを見ると、今の場合は良いテンプレートになっていることがわかる。

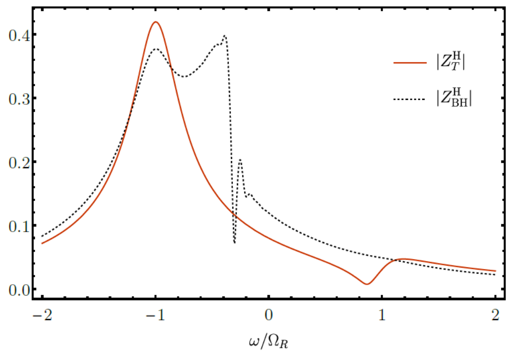

図 6: ECO に落ち込む粒子からのエコー

6 Conclusion

BH と ECO の場合それぞれの境界条件の下で重力場の満たす方程式の Green 関数を構成することによって、ECO の重力波形を BH の重力波形と関連付けることができ、エコーのスペクトルを知ることができる。また、エコーの、Quasi-Normal Mode 付近のスペクトルは失われるという性質を用いることによって簡単に良いテンプレートが作成できることがわかった。

Acknowledgement

本発表にあたり、京都大学天体核研究室、基礎物理学研究所宇宙グループの先輩方、特に福島肇さん、山本貴宏さん、金沢瞭さんには心より感謝いたします。

Reference

Z. Mark, A. Zimmerman, S.M. Du, & Y. Chen 2017, Physical Review D 96.8 (2017): 084002.

K. Martel, & E. Poisson 2005, Physical Review D 71.10 (2005): 104003.

——index

a8

重力波データ解析におけるベイズ統計の有用性の検討

武田 芽依 (新潟大学大学院 自然科学研究科)

Abstract

統計学の代表格として、頻度論統計学とベイズ統計学が挙げられる。一般的に統計学というと頻度論のことを指し、古典的統計学とも言われる。一方、ベイズ統計は近年注目されている統計学である。頻度論は、ある仮説をもとに実験を行い、得られたデータはその仮説においてどの程度の確率で得られる値なのかと考える。ベイズ統計は、実験を行なって得られたデータをもとに、そのデータを出す確率が高い仮説は何かと考える。そこで、データを得る前の事前確率と、データを得た後の事後確率というベイズ独特の概念を導入する。両者のアプローチの違いは、一般に同じ実験に対して異なる結論を生じることがある。重力波を始め，突発的な天体現象の観測では，その現象が起こる頻度やそれを起こす天体の質量などのパラメータの推定に対しては，ベイズ統計に基づく解析が有用である。本発表では、頻度論とベイズ統計を比較しながらその性質、有用性等をおっていくと共に、重力波データ解析においてベイズ統計を用いることについて評価する。

1 Introduction

2016 年 2 月 11 日、アメリカにあるレーザー干渉計重力波観測所である LIGO が重力波の初観測を発表し、重力波の存在が確固たるものとなった。重力波は時空のゆらぎが波動として伝わるものであり，強い重力場の急激な変動により放射される。それが発せられるのは突発的であり、何度も繰り返し同じイベントを観測することはできない。よって得られるデータ１つ１つの価値が非常に重い。重力波データ解析では、その１つのデータから統計量を推定し重力波を発生した現象の性質を探る。この統計量は、頻度論統計学で扱うと、信頼性が低くなってしまう。よってこのような分野では頻度論でなく、ベイズ理論を基にしたベイズ統計学が用いられる。ベイズ理論では、常識や事前に得られる情報の更新という概念を用いてデータを扱っており、その有用性は近年認められ、統計学における地位は頻度論と並んだ。よって、頻度論とベイズ統計の概念の違いを理解し、扱いたい事象に対してどちらが有用なのか的確な判断が求められる。そこで、重力波データ解析におけるベイズ統計の有用性について再確認する。

構成は以下の通りである。2 章で頻度論とベイズ統計、データ解析の手法の 1 つである Matched filter 法について述べ、3 章ではベイズ統計と Matched filter 法の共通点を挙げる。これらは $MicheleMaggiore$ (2008) を元とする。4 章では $J.Veitchetal.$ (2015) より、LIGO が提供するパラメータ推定ソフトウェアでのベイズ統計の用いられ方をみる。5 章で結論とする。

2 Priniple

2.1 頻度論統計学

頻度論統計学とは、無限の試行のうちその事象が起きる頻度の程度を扱う学問である。したがって、ここで定義される確率 $P(X)$ の確率変数 X は反復試行可能なものであることという制約がある。以下では、頻度論で見られる代表的な手法についてまとめる。

2.1.1 推測統計

統計学は、データの集合を基にデータの特性を掴むための科学的な手法である。ここでは、対象の集合の全要素から得られる特性値全体のデータの集合を母集団と呼ぶ。この母集団の全てを調べることが不可能、または無意味なとき、母集団から標本を無作為に抽出し、それを基に元の母集団の分布の特徴を推測することを推測統計という。推測統計には、主に点推定、区間推定があり、前者は母集団を特徴付

ける母数の値を推定し、後者は母数の値の範囲を推定する。

点推定で代表的なものとして、最尤法が挙げられる。ここでは値の尤（もっと）もらしさを表す尤度という統計量の概念を導入する。データの集合を $d = \{d_1, d_2, ..., d_N\}$ とし、母数を θ とすると尤度関数は以下のように定義される。

$$L(\theta|d) \equiv \prod_{i=1}^{N} P(d_i|\theta) \tag{1}$$

$P(A|B)$ は、条件付き確率といい、事象 B が起こる条件の下で事象 A が起こる確率である。$P(d_i|\theta)$ は、母数が θ であるときに各データ d_i が得られる確率を表す。全データ d の確率を掛け合わせたものが尤度関数 $L(\theta|d)$（以下、$L(\theta)$）であり、データ d を固定し母数 θ を変数とした関数である。確率ではないことに注意されたい。また、尤度関数は便宜上自然対数をとった対数尤度関数 $\ln L(\theta)$ で考えることが多い。この尤度関数（または対数尤度関数）を最大にする θ を最尤推定量とし、$\hat{\theta}_{ML}$ で表す。

$$\frac{\mathrm{d} \ln L(\theta = \hat{\theta}_{ML})}{\mathrm{d}\theta} = 0 \tag{2}$$

つまり、尤もらしさを表す統計量を最も尤もらしくするパラメータの値が $\hat{\theta}_{ML}$ である。母数そのものにはなり得ない。

次に、区間推定について述べる。まず、有意水準を決める。これは、一般的に 0.01 か 0.05 とするが、たとえば 0.01 とする。母数 θ（これは定数である）の母集団に対して多数回（数学的には無限回）の実験により θ の推計値が $\theta_1 < \theta < \theta_2$ の範囲に入る確率が $1 - 0.01 = 0.99$ のとき、この区間 $[\theta_1, \theta_2]$ を「99% 信頼区間 (confidence interval)」という。母数 θ は、観測できないがあくまで定数だから、「θ が θ_1 から θ_2 である確率が 99% である」という意味ではないことに注意されたい。

2.1.2　検定

検定とは、統計学的にテストをすることである。主張したい仮説を対立仮説（たとえば、宇宙人が存在する）、それを否定する仮説を帰無仮説（宇宙人は存在しない）とする。帰無仮説が正しいとき、実際に観測された以上の外れ値が得られる確率（p 値という）を求める。このとき、この確率が大きいか小さいか判断するための境界（有意水準）を決めておく。この値は任意であり、値そのものに意味はない。p 値が有意水準より小さい場合、帰無仮説を棄却し、対立仮説を採択する。そうでない場合、帰無仮説を棄却できず、どちらの仮説も採択できない。

2.2　ベイズ統計学

ベイス統計の考え方は、前の章で扱った頻度論と大きく異なる。まず、頻度論でもあり得る条件付き確率の定義式をみる。事象 B が起こるという条件の下で、N 種類の事象 $A(A_1, A_2, ..., A_N)$（A_i は互いに排反）が起こる条件付き確率は、

$$P(A_i|B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} \tag{3}$$

とかける。乗法定理を用いると

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} \tag{4}$$

これが、ベイズの定理である。$\cup_i A_i = S$ (S は全事象) のとき、分母は $P(B) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i)$ とかける。

頻度論では、A も B も無限に再現可能な事象であった。つまり、前節でみたデータの値は確率変数として扱えるが、母数は確率変数として扱うことは許されない。しかしベイズは、ここで母数を確率変数として扱うことを許す。また、仮説や理論も確率変数として扱える。よって、ここで仮説 H とデータ d を考えると、

$$P(H|d) = \frac{P(d|H)P(H)}{P(d)} \tag{5}$$

$P(H|d)$ は事後確率 (posterior probability) であり、得られるデータが d のときに仮説 H である確率である。データ d を固定し、仮説 H を確率変数としているので、ベイズで新たに許された概念である。$P(H)$ は事前確率 (prior probability) であり、仮説 H が起こる確率である。いわゆる事前情報であり、たとえば質量は非負という常識をここに与えられる。これも、

ベイズ独特の概念である。$P(d|H)$ は仮説 H の下でデータ d が得られる確率である。尤度関数 (likelihood function) と呼ばれ、前節の最尤法で導入された概念である。つまり頻度論でも許される概念である。最後に、$P(d)$ は証拠 (evidence) といわれるもので、データ d が得られる確率である。これは、仮説 H に依らないので規格化因子とも言える。なお、扱う変数が連続量なとき、事後確率、事前確率は事後分布、事前分布とよぶ。

頻度論での点推定に対して、ベイズ統計ではベイズ推定がある。これは事後分布の期待値を推定量としており、点推定とは概念が異なる。

区間推定での信頼区間に対しては、信用区間 (credible interval) がある。これは、事後分布の面積の $x\%$（たとえば、90%）に等しい面積を区切る区間として定義される。よって、その範囲に母数が存在する確率は $x\%$ であるということである。対称に、信頼区間はこの範囲に、無限回の実験によって得られた母数の推定値の 90% が含まれるということである。頻度論では、母数はあくまで定数であり、存在の確率は考えられないのである。

検定においても、頻度論とベイズ統計では違いが生じる。頻度論での p 値は、帰無仮説が正しい確率ではない。帰無仮説は現象理解のための 1 つの仮説でしかなく、それと現実のデータの論理的な矛盾のなさの度合いを表しているだけである。しかし、ベイズ統計の検定では、仮説の確率を考えることが可能なため、事後確率を用いて帰無仮説が正しい確率を求めることができる。ここで、帰無仮説の事後確率が対立仮説のそれより大きいが、その差が微小であるとする。このとき安易に対立仮説を採択することは最適ではない。よって、有意水準の考え方を導入する。ここでは、（帰無仮説の事後確率）/（対立仮説の事後確率）とし、この値が閾値より小さいと帰無仮説の棄却を認めるとする。この事後確率の比を、事後オッズ比という。

2.3 Matched filtering

コンパクト連星合体の重力波は Matched filter 法という手法で解析される。波形が分かっている必要があり、コンパクト連星合体、特にブラックホール連星はその重力波波形がほぼ分かっている。なお、中性子星連星は、合体直後の波形はまだよく分かっていない。

検出器が捉えた時系列データである信号 $s(t)$ に重力波 $h(t)$ が含まれていた場合、検出器のノイズ $n(t)$ を用いて以下のようにかけるとする。

$$s(t) = h(t) + n(t) \tag{6}$$

ここで重力波の波形は理論的に予想されているとし、ノイズはガウス分布と仮定する。matched filter 法では、信号と理論波形の相関

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)h(t-\tau)dt \tag{7}$$

を取るが、周波数空間で、ノイズのスペクトル密度 $S_n(f)$ の逆数で重み付けした積分

$$\rho = 2\int_0^{\infty} \frac{\tilde{s}(f)\tilde{h}^*(f)}{S_n(f)}df \tag{8}$$

を用いるのが最適であることが知られている。

このように、信号に理論波形をマッチさせ、ρ があらかじめ設定された閾値を超えたら信号 s に重力波信号が含まれると判断する。これが matched filter 法である。

また、関数 A と B のスカラー積 $(A|B)$ を

$$(A|B) = 4\mathrm{Re}\int_0^{\infty} df \frac{\tilde{A}^*(f)\tilde{B}(f)}{S_n(f)} \tag{9}$$

と定義すると、式 (8) は、

$$\rho = \frac{1}{2}(h|s) \tag{10}$$

と表すことができる。

3 Discussion

ここでは、尤度関数と Matched filter 法の対応づけをみる。

まず、ノイズ n の確率密度関数 $P(n)$ を考える。ノイズはガウス分布の場合、$P(n)$ は、スペクトル密度 $S_n(f)$ を用いて以下のようになる。

$$P(n) = N\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} df \frac{|\tilde{n}(f)|^2}{(1/2)S_n(f)}\right\} \tag{11}$$

である。ここで、N は規格化定数である。式 (9) のスカラー積を用いて表すと以下のように書ける。

$$P(n) = N \exp\{-\frac{1}{2}(n|n)\} \tag{12}$$

重力波 $h(t)$ は、一般的には重力波波形を決めるパラメータ（たとえば、信号の到来時刻や質量）を θ として、$h(t;\theta)$ とかく。ここで、真のパラメータを θ_t とすると $s(t) = h(t;\theta_t) + n(t)$ より、$n = s - h(\theta_t)$ なので、尤度関数は以下となる。

$$\Lambda(s|\theta_t) = N \exp\{-\frac{1}{2}(s - h(\theta_t)|s - h(\theta_t))\} \tag{13}$$

指数の内積を展開し、$(s|s)$ の項は規格化定数 N に含める。ここで、波形パラメータ θ のうち、振幅を表すパラメータ a だけを分離して考えることができる。つまり、$h(t;\theta) = ah_a(t;\xi)$ とする。ここで、a 以外のパラメータを ξ とした。そうして自然対数をとると、

$$\ln \Lambda(s|a,\xi) = a(h_a|s) - \frac{a^2}{2}(h_a|h_a) \tag{14}$$

最尤推定量 $\hat{a}_{ML}$ を求め、対数尤度関数に代入すると、

$$\ln \Lambda(s|\xi) = \frac{1}{2}\frac{(h_a|s)^2}{(h_a|h_a)} \tag{15}$$

ここで、$h = h_a/\sqrt{(h_a|h_a)}$ と、規格化と思うと

$$\ln \Lambda(s|\xi) = \frac{1}{2}(h|s)^2 \tag{16}$$

よって、matched filter 法の式 (10) に相当することがわかる。

4 LALInference

LIGO は、LAL(LIGO Scientific Collaboration Algorithm Library) というデータ解析ライブラリを提供している。その中に、LALInference software library がある。これは、ベイズ統計に基づいて重力波のパラメータ推定を行うソフトウェアである。

ここで、ベイズの定理は以下のように表記されている。

$$P(\theta|d,H) = \frac{P(d|\theta,H)P(\theta|H)}{P(d|H)} \tag{17}$$

d は検出された信号、θ は波形パラメータ、H は仮説である。

重力波の波形モデルは、相対論のポスト・ニュートン近似と数値相対論に基づいて作られており、LALInference には設定が異なる複数のモデルが用意されている。モデルや事前確率の違う 2 つの仮説において、どちらが有用か検定する手段として、事後オッズ比が用いられる。この結果はあくまで目安程度に使用される。

尤度関数の計算では、ガウス分布で無相関なノイズを仮定し計算している。

事前確率は、何も情報を持ってないときには、理由不十分の原則から一様とするのが一般的であり、LALInference もそちらに習っている。

ベイズ統計は、論理は直感的で単純とも言えるが、パラメータの数だけ積分を要するので計算が非常に複雑である。LALInference は、ベイズ統計の計算コストに対して、MCMC, Nest, BAMBI の 3 つの手法を用意している。

5 Conclusion

頻度論とベイズ統計の考え方はデータを統計的に扱う姿勢が大きく異なり、結果の解釈も大きく異なることがわかった。頻度論の立場では観測結果から信頼できる推定量を出せないことから、ベイズ統計が有用であると言える。

Acknowledgement

夏の学校をご支援くださった皆様、そして運営スタッフの皆様に深く感謝いたします。また、本発表のためにご指導してくださった大原教授ならびに研究室の皆様に、この場を借りてお礼申し上げます。

Reference

Michele Maggiore, *Gravitational Waves Volume1: Theory and Experiments*, Oxford University Press, New York, 2008

J. Veitch et al. 2015, Phys. Rev. **D91**,042003

——index

a9

重力波 GW170817 の検出データに対する独立成分分析

粂 潤哉 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

2017 年 8 月 17 日、重力波 GW170817 が検出された。ところが、3 台の検出器のうちの 1 台、LIGO の Livingston のデータには大きなグリッチ雑音が乗ってしまっていた。波源の中性子星の各種パラメータを推定するためはこのグリッチ雑音を適切に取り除かなければならない。そこで本研究ではこのグリッチ雑音を取り除くために、非ガウス雑音の分離に適した信号分離法である「独立成分分析」を用いた解析を行った。まずはじめに、重力波信号とグリッチ雑音のテンプレートのみの混合信号を作成し、ガウス雑音のない場合のシミュレーションを行った。続いて、GW170817 の実際の検出データに対しても解析を行った。発表では独立成分分析の概説、シミュレーションの結果、実際のデータに対する独立成分分析の結果を述べる。

1 Introduction

2017 年 8 月 17 日、Advanced LIGO によって中性子星の連星による重力波、GW170817 が検出された。図 1 に示すのは、LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration によって発表された Livingston の検出データである [1]。

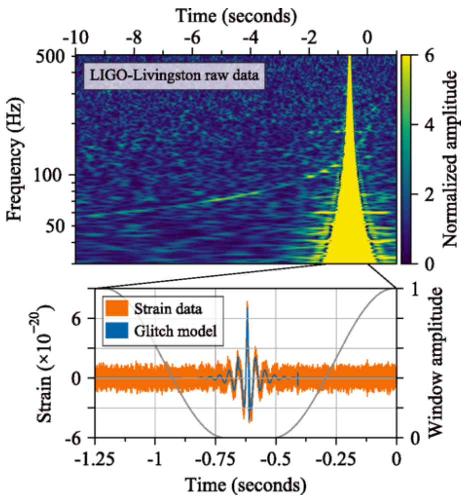

図 1: Livingston の測定データ

図 1 の下のグラフは Livingston の生の Strain データを時間軸に表したもので、-0.7s のあたりに突発的に大きな振幅の信号が発生していることがわかる。上のグラフは Strain データのスペクトログラムであり、こちらも-0.7s のあたりに黄色の柱のような信号が立っていることがわかる。これらはグリッチ雑音という非ガウス性の雑音によるものである。

[1] の文献では、このデータと Hanford で得られたデータを用いて中性子星連星の各種パラメータの推定を行っていたが、この際、図 1 に見られるようにグリッチ雑音の形を仮定することによって取り除いていた。このような手法でノイズを取り除こうとすると、グリッチのモデル化によるパラメータの誤差が生じてしまう。よって、中性子星の各種パラメータを精度よく推定するためには、このグリッチ雑音をモデル化することなく除去できる手法が必要となってくる。そこで、本研究では独立成分分析によるグリッチ雑音の分離を試みた。というのも、独立成分分析は非ガウス性の雑音をモデル化することなく取り除くことができる解析手法なのである [2]。

本稿では第 2 節で独立成分分析の概説を行い、第 3 節では実データへの適用前に行ったシミュレーションと結果を述べる。そして第 4 節で実際のデータへ適用した結果を述べ、今後の課題を議論する。

2 独立成分分析の原理と応用

まず独立成分分析 [3] についての概説を行う。n 個の信号源があり、これらの信号は互いに独立であるとする。時刻 t におけるこれらの信号を $\boldsymbol{s}(t) = (s_1(t), s_2(t), ..., s_n(t))^T$ と表そう。さらに、これらの信号のうちガウス分布に従うものはたかだか一つであ

るとする。この時、n 個の測定チャンネルがあり、それらの測定データを $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))^T$ と表す。$\boldsymbol{x}(t)$ は $\boldsymbol{s}(t)$ が次のように空間的に混合したものであるとする。

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}(t) \tag{1}$$

$\boldsymbol{A} = (A_{ij})$ は $n \times n$ 行列で、混合行列と呼ばれる。この $\boldsymbol{x}$ に推定行列 $\boldsymbol{W}$ をかけ、信号の復元を試みる。ここで得られる復元信号候補を $\boldsymbol{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), ..., y_n(t))^T$ とする。

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{W}\boldsymbol{x}(t) \tag{2}$$

測定データ $\boldsymbol{x}$ が確率分布 $p_X(\boldsymbol{x})$ に従うとき、復元信号候補 $\boldsymbol{y}$ の従う確率分布 $p_Y(\boldsymbol{y})$ は次のようになる。

$$p_Y(\boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{W}^{-1}| p_X(\boldsymbol{x}) \tag{3}$$

このとき、復元信号候補 $y_i(t)$ が互いに独立となるように $\boldsymbol{W}$ を最適化すると、

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{A}^{-1} \tag{4}$$

となる。ただし、$\boldsymbol{P}$ は分離信号の順番の不定性に対応する置換行列、$\boldsymbol{\Lambda}$ は各分離信号のスケールの不定性に対応する対角行列である。
以上が独立成分分析の原理であり、独立性と非ガウス性に基づくと、順番とスケールの不定性をのぞいて混合信号を分離することができるという手法である。

続いて、独立成分分析の GW170817 への応用を考える。VIRGO では GW170817 は検出されなかったので、今回測定によって得られているのは Livingston のデータ $x_1(t)$ と Hanford のデータ $x_2(t)$ の 2 つである。簡単のために、それぞれの測定系で発生するガウス雑音を無視し、2 つの検出器の重力波信号の振幅が同じであるとしよう。重力波が 2 つの検出器に同時に到達したと仮定すると、$x_1(t)$ には重力波の信号 g(t) とグリッチ雑音 n(t)、$x_2(t)$ には重力波の信号 g(t) のみが含まれている。これは以下のように信号が混合していると考えることができる。

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} g(t) + n(t) \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n(t) \\ g(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{s} \tag{5}$$

グリッチ雑音は非ガウス性の雑音であり、重力波の信号とは互いに独立ゆえ、$x_1(t)$ と $x_2(t)$ に対して独立成分分析を適用できる。このような状況下で実際に独立成分分析を適用するとどの程度グリッチを分離できるのか (どの程度 g と n を復元できるのか) を確かめるために、3 節のシミュレーションを行った。

ただし、実際のデータにはそれぞれの観測系において発生したガウス雑音が乗っているので、これらのノイズを $n_L(t)$、$n_H(t)$ と置くと測定データは以下のように表される。

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} g + n + n_L \\ g + n_H \end{pmatrix} \tag{6}$$

図 1 下の strain の振幅のオーダーは 10^{-20} であるが、重力波信号の振幅は 10^{-22} のオーダーであり、ほとんどガウス雑音の中に埋もれてしまっていることがわかる。このため重力波 g とグリッチ雑音 n を別の成分として分離するには、できる限り雑音 n_L, n_H を取り除かなければならないと予想される。

3 Simulation

重力波信号とグリッチ雑音以外の信号が存在しない場合の分離シミュレーションを行った。
・重力波のテンプレート波形の作成
本研究では python モジュールの Pycbc を用いてテンプレート波形を作成した。主なパラメータである連星の中性子星の質量は互いに等しく、中性子星の典型的な質量:$1.4M_\odot$ であるとした。また、波源までの光度距離は [1] を参考に 40Mpc とした。
・グリッチ雑音のテンプレート
グリッチ雑音の作成には以下の式を用いた。

$$n(t) = A \exp\left(-\frac{(t-t_0)^2}{\tau}\right) \sin(2\pi f t) \tag{7}$$

各パラメータは表 1 の通りに設定した。GW170817 の測定データに近い状況にするためにタイミング t_0、振幅 A は [1] を参考にした。

表 1: グリッチ雑音のテンプレートのパラメータ

f[Hz]	t_0[s]	A	τ[s]
100	-1.1	5×10^{-20}	6×10^{-5}

以上を用い、$x_1(t) = g(t) + n(t)$、$x_2(t) = g(t)$ の 2 つのデータを作成した。波形を図 2、図 3 に示す。

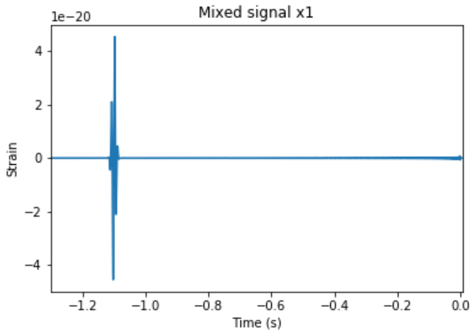

図 2: x_1:重力波とグリッチ雑音

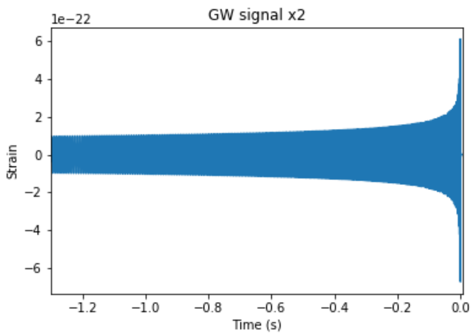

図 3: x_2:重力波のみ

図 2、図 3 の 2 つの信号に対して独立成分分析を適用した。その結果、重力波信号を主に含む成分 (図 4) とグリッチ雑音を主に含む成分 (図 5) に分離することができた。

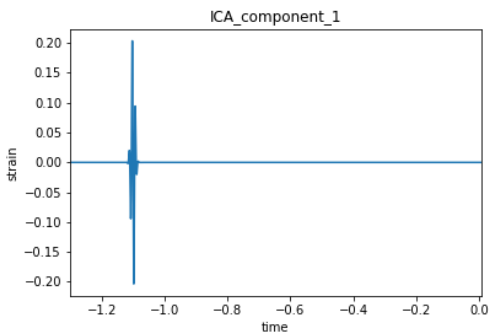

図 4: n_r:グリッチ雑音を主に含む成分

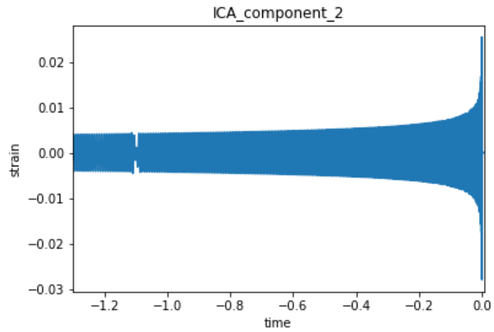

図 5: g_r:重力波を主に含む成分

図 5 の-1.1s のところを見ると重力波の波形がかけており、グリッチが完全には分離しきれてはいないことがわかる。x_1 からどれほどのグリッチ雑音を取り除けたかを以下のように定量的に評価した。
(i) 復元信号候補からグリッチ雑音を主に含む成分 n_r を差し引く:$\boldsymbol{y}(t) = (0, g_r(t))^T$
(ii) ここに推定行列の逆行列 $\boldsymbol{W}^{-1}$ をかけ、グリッチとして分離した信号を取り除いた分のデータを得る。
(iii) この波形と元の重力波テンプレートとの差を取り、分離できなかったグリッチ雑音を得る (図 6)。

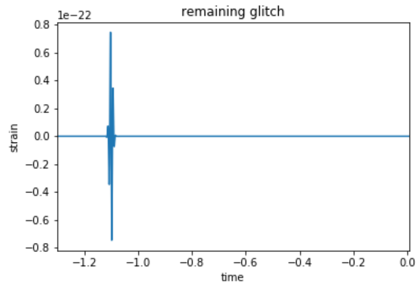

図 6: 分離できなかったグリッチ

残存するグリッチ雑音の振幅は 7.3×10^{-23} で、もとのグリッチの振幅から 1.5×10^{-3} 倍小さくなった。以上より、独立成分分析は重力波信号からグリッチ雑音を取り除く手法として有効であると考えられる。なお、推定行列 $\boldsymbol{W}$ の逆行列を適当に規格化することで、混合行列 $\boldsymbol{A}$ を推定すると

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1.0046 \\ 0.0016 & 1 \end{pmatrix}$$

となり、(5) 式の $\boldsymbol{A}$ に近い行列が得られた。

4 GW170817 への適用

シミュレーションではグリッチ雑音を取り除くのに独立成分分析が有効であることがわかった。そこで、GW170817 の実際のデータに対しての適用を試みた。以下にその詳細と結果を示す。
まず、測定データに対してホワイトニングとバンドパス処理を行った。バンドパスは重力波信号が十分入るように範囲を 30Hz〜400Hz とした。このような処理をした 2 つのデータに対して独立成分分析を適用した。

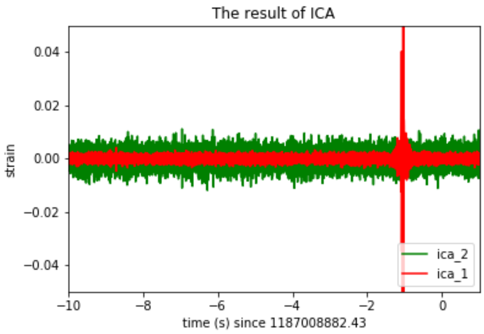

図 7: 独立成分分析による分離結果

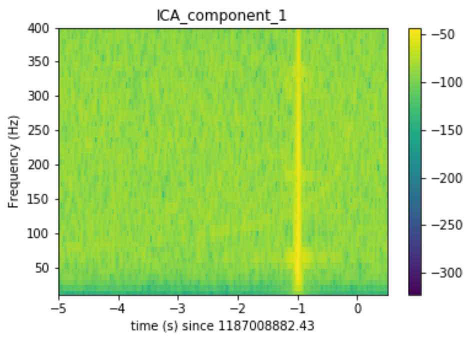

図 8: グリッチを主に含む分離成分

なお、波源の推定位置 [1] を元に重力波信号の時間差を計算し、その分だけ Livingston のデータをずらしてから独立成分分析を行った。分離した 2 成分を図 7 に示す。また、グリッチを含む成分のスペクトログラムは図 8 のようになった。
およそ-1.1s のところにグリッチ雑音に対応する黄色い縦線が見える。さらによく見ると、図 1 のスペクトログラムと同様の重力波のチャープ波形が残っており、分離前の Livingston のデータのスペクトログラムから大きな変化が見られなかった。
この時の推定行列 $\boldsymbol{W}^{-1}$ を適当に規格化することで混合行列の逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を推定すると、

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0.0065 \\ -0.00090 & 1 \end{pmatrix}$$

となり、単位行列に近いものとなった。つまり、分離信号のグリッチを含む成分はほとんど Livingston のデータそのままだったことになる。以上から分かるように、3 節のシミュレーションのように重力波信号とグリッチ雑音とを分離することはできなかった。

原因としては 2 節での考察のように、重力波信号がほとんど雑音の中に埋もれてしまっていることが考えられる。よって、それぞれの検出系のガウス雑音が乗っている Livingston と Hanford のデータを用いて上述のグリッチ雑音を分離することは、現状の解析手法では難しいという結論となった。
しかし、シミュレーションの結果を踏まえれば、グリッチのみを検出するような環境測定チャンネルを作成すれば、独立成分分析によってグリッチを取り除くことは十分可能であると考えられる。

Acknowledgement

本発表のために御指導くださったビッグバン宇宙国際研究センターの皆様に深く感謝いたします。

Reference

[1] B.P. Abbott et al. Phys. Rev. Lett. 119, 161101 (2017)
[2] S. Morisaki, J. Yokoyama, K. Eda and Y. Itoh, Proceedings of the Japan Academy, Series B, Vol. 92, Issue 8, p. 336-345 (2016)
[3] Amari S., Cardoso J.F. (1997) Blind source separation — Semiparametric statistical approach. IEEE Trans. Signal Process. 45, 26922700

——index

a10

宇宙ひもからの重力波:これまでの成果と今後の展望

津名 大地 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

宇宙ひもは、初期宇宙で起こったとされる相転移に伴い生じる位相欠陥である。 2 本の宇宙ひもが交差したり、1 本のひもが自身と交差したりすると、ある確率で独立したループが生まれる。このループの振動や、ループに存在するカスプ、キンクといった尖りのようなフィーチャーが重力波源となると考えられている。宇宙ひもを重力波で探る上で重要になってくるパラメータは二つあり、「ひもの張力」と「組み換え確率」である。前者はループからの重力波の強さを決め、後者は重力波源となるループのできやすさを決めるパラメータである。これまでの重力波による探査では宇宙ひもからの重力波は見つかっておらず、上記のパラメータ・モデルへの制限が行われてきた。本講演ではこれまでの宇宙ひもからの重力波をターゲットにした観測の成果を紹介し、将来の展望を述べる。

1 イントロダクション

2015 年 9 月二つのブラックホールの合体からの重力波が重力波検出器 Advanced LIGO によって観測され、この大発見は重力波天文学という新たな分野を確立した。一方で、重力波を放出すると考えられ、LIGO のターゲットとなっている現象はブラックホールや中性子星以外にも存在する。そのうち初期宇宙への重要なプローブの一つとして、仮説上の「宇宙ひも」というものがある。

宇宙ひもは、初期宇宙で起こったとされる相転移 (自発的対称性の破れ) に伴い、複数の因果関係のない時空領域の間で生じる一次元の位相欠陥である。宇宙ひもを含む位相欠陥の存在は Kibble (1976) によって最初に提唱され、GUT (大統一理論) の枠組みでの存在が予言されている。

宇宙ひもが起こすと予言されている観測現象は、宇宙背景放射 (CMB) の非等方性、遠方銀河のレンジング、重力波など多岐に渡り、これまで様々な観測によって宇宙ひもの探査が行われ、宇宙ひもに関係するパラメータの観測的制限が行われてきた。本収録では宇宙ひもからの重力波解析が述べられている Siemens et al. (2006)、Aasi et al. (2014) や最新の Abbott et al. (2018) を参照し、宇宙ひもから出るとされる重力波について簡単にまとめ、これらのパラメータ制限を行う手法、およびこれまでの成果と今後の展望について述べる。

2 宇宙ひもからの重力波

宇宙ひもの時間発展は、主に宇宙ひものループ生成とその重力波放射によって決まっている。特に、ループ上を伝播するカスプ、キンク (ざっくりした形は図 1 参照) というものが、ビーミングされた強いバースト的な重力波放射を起こす。また、これらのバースト放射が重ね合ったものは背景重力波を構成し、低周波でのパルサータイミングから高周波での地上重力波検出器まで、様々な手段で探査が可能である [1]。

ひものループサイズを l、 赤方偏移を z としたとき、観測されるカスプ/キンクからのバースト重力波の波形は、以下のような周波数のパワーローになる。

$$h(l,z,f) = A_q(l,z) f^{-q} \Theta(f_h - f) \Theta(f - f_l) \quad (1)$$

カスプの場合は $q = 4/3$, キンクの場合は $q = 5/3$ とした式で与えられる。周波数にはビーミング由来の高周波カットオフと、ループサイズ由来の低周波カットオフがある。各バーストにおけるビーム角は

$$\theta \sim [f(1+z)l]^{-1/3} \propto f^{-1/3} \quad (2)$$

であり、θ が observing angle よりも小さい場合は観測ができないので、これで周波数の最大値が与えられる。

[1] バーストと背景重力波の違いは直感的には、強くてレアなシグナルは「バースト」として分解できるものであり、弱くて頻繁なシグナルは一つ一つを分解することができなくてその重ね合わせがバックグラウンドとして観測される、といった具合である。

一方ループサイズは宇宙の大きさ程度と考えられていて、低周波カットオフ ($\sim c/l \sim 10^{-19}\mathrm{Hz}(l/100\mathrm{Gpc})$) は現在の重力波検出器の帯域よりはるかに小さい。実際のところ、カットオフは検出器の帯域 (例えばLIGOであれば地面振動が顕著になる ~ 10 Hz) によって決められる。

振幅は以下のように与えられる。

$$A_q(l,z) \sim \frac{G\mu l^{2-q}}{(1+z)^{q-1} r(z)} \tag{3}$$

ここで $G\mu$ は「ひもの張力」と呼ばれ、重力波の強さを決めるパラメータである。固有距離 $r(z)$ は、適当な宇宙論パラメータを仮定することで求められる。

このようなバーストが起こる頻度は、宇宙ひもループによって決まる。大きさ l の宇宙ひもの振動のタイムスケールは $\sim l/c$ で与えられ、一つのループがカスプ/キンクを n 個持つとすると、バースト頻度は $\sim nc/l$ 程度となる。ループあたりのカスプ・キンクの数はどの程度あるかは制限がほとんどついていないが、パラメータの制限を行う場合は O(1) として与えることが多い。

一つのループ上のカスプ・キンクからの重力波放射の振幅とその頻度を求めたら、あとはループがどの程度宇宙に存在するかを見積もることが必要になる。ループは時間とともに上記の重力波放射で減衰してサイズが縮んでいく。したがって、宇宙ひもループの分布関数はループサイズ l と時間 t の関数 $n(l,t)$ となる。生成と重力波放射による崩壊によってループの分布は平衡状態に落ち着き、その後は宇宙膨張に従った「スケーリング」解となる。平衡状態の分布関数については宇宙ひものシミュレーションに基づいた様々なモデルが存在し、重力波観測によって各モデルについて制限を与えることが可能となる。

全モデルに共通する点として、ひも同士が相互作用する確率として「組み換え確率」p というパラメータが定義できる。これはひもの相互作用自体が確率的であることと、4次元以上の時空を動くひもは相互作用を避けやすいことなどが理由としてあり、典型的に $10^{-3} < p < 1$ とされている。一般的には p が小さいほど平衡状態に達するのが遅れるので、ループの分布関数はより大きくなる。シミュレーションによっては $n(l,t,p) \propto p^{-2} - p^{-0.6}$ が得られているが、典型的には $n(l,t,p) \propto p^{-1}$ と取られることが多い。

3 重力波探査・パラメータ制限

背景重力波によるパラメータ制限は、背景重力波自体について得られる「重力波のエネルギー密度」の制限を、単純に上記の放射の振幅・レートの議論を用いて宇宙ひもの制限に焼きなおすという方法で行われる。ここでは、バースト重力波をどのように探査しているかを具体的に述べる。

カスプ・キンクからのバースト重力波の探査は、これまでブラックホールや中性子星の合体からの重力波探査と同じマッチドフィルター法という手法を用いる。すなわち、パラメータが異なる多数のテンプレート波形を用意し、データの中からテンプレートに「合う」部分、すなわちシグナルと考えられるものを探すことを行う。

テンプレートは以下のような形で用意する。

$$t(f) = f^{-q}\Theta(f_h - f)\Theta(f - f_l) \tag{4}$$

つまりシグナルは $s(f) = At(f)$ で与えられる。前述の通り f_l は検出器のノイズから決まるので、f_h を変化させたテンプレートをたくさん用意する。過去のLIGO-Virgo の解析では、a few 10 − a few 1000 Hz 程度の数十程度のテンプレートを用意している。

まずは簡単のためテンプレートを規格化することを行う。そのためにノイズで重み付けされた内積

$$(x|y) = 4\mathrm{Re}\int_0^\infty df \frac{x(f)y^*(f)}{S_h(f)} \tag{5}$$

を定義する。ただし $S_h(f)$ はノイズのスペクトル密度と呼ばれるもので、ノイズの周波数成分を $n(f)$ とすると $\langle n(f)n^*(f')\rangle = \frac{1}{2}S_h(f)\delta(f-f')$ で定義される。規格化には以下の変換を行う。

$$t(f) \Longrightarrow \hat{t}(f) = t(f)/\sqrt{(t|t)} \tag{6}$$

検出器からのデータがシグナル+ノイズで $h(t) = s(t) + n(t)$ と表されている時の $\rho = (h|\hat{t})$ を考えよう (これが Signal-Noise Ratio, SNR と呼ばれるものである)。シグナルがない時、つまり $h(t) = n(t)$ の時、SNR は (定常・ガウス性のノイズの場合)

$$\langle\rho\rangle = \langle(n|\hat{t})\rangle = 0,\ \langle\rho^2\rangle = \langle(n|\hat{t})^2\rangle = 1 \tag{7}$$

の標準正規分布である。一方で、シグナル成分の $h(f) = A\sqrt{(t|t)}\hat{t}$ がある場合には、SNR は

$$\langle\rho\rangle = A\sqrt{(t|t)} > 0,\ \langle\rho^2\rangle - \langle\rho\rangle^2 = 1 \tag{8}$$

の正規分布で与えられる。シグナルがあると、SNR が 0 よりも大きな値になるのが見て取れる。

データ $h(t)$ に対して SNR の時間変動 $\rho(t)$ を計算する。SNR にある閾値 $\rho_{\rm th}$ を設定して、この閾値よりも大きい SNR を持つ区間をトリガーとして拾う。閾値が大きすぎるとシグナルを逃しやすくなり、小さすぎるとトリガーが増えすぎて以後の処理が大変になる。これらを踏まえて、過去の LIGO-Virgo の探査では $\rho_{\rm th} \sim 4$ あたりを閾値としている。

このような手法でトリガーを調べたら、複数台の検出器で「同時に」来たトリガーを選び出す。簡単のため A,B 二台の検出器で考えると、二つのトリガーが同じバースト起源である場合、その到達時間の差は重力波が A,B 間を光速で進む時間 ($\sim O(10)$ ms) よりも短いはずである。A のトリガーと B のトリガーがこの時間差の制限を満たす場合[2]、この二つのトリガーを「coincident event」としてセットで抽出する。

これらの coincident event について最後にシグナルとしての確からしさの「格付け」を行う。直感的には、各イベントのパラメータが「シグナルがあったとした時に出てくる確率」と「ノイズしかないとした時に出てくる確率」を計算し、その比 (likelihood ratio) をもって「シグナルらしさ」を見積もる。なおこれまでの LIGO-Virgo の探査では、前者の計算に必要なシグナルのサンプルはデータに人工的にシグナルを足すことで生成し、後者の計算に必要なノイズのみのサンプルは、検出器のデータの時間を互いにずらすことで作られてきた。

ノイズしかないサンプルを解析することで、 ある likelihood ratio のイベントがノイズのみからどの程度の頻度で起こるかを推定することができる。この頻度がかなり低いような coincident event があった場合、このイベントはシグナルである可能性が高いということになる。もう少し定量的に述べると、1 年間の観測でノイズのみでは $O(10^6)$ 年に一度程度しか起こらないシグナルが見つかった場合、5 シグマの確からしさでシグナルであると認められる。

このようなシグナルが見つからなかった場合は、各パラメータ・モデルから計算されるレートを用いてパラメータの制限を行うことができる。人工的にシグナルを入れたデータを解析することによって、どの程度の振幅であれば例えば 90% の確率で検出できるか、というのがわかる。その振幅の重力波を観測時間の間で出せるような宇宙ひものモデル・パラメータは、90%の確からしさで棄却される。

[2]本当はトリガー自身のピーク時間の不確定性などの要因で、もう少し制限を緩く取っている

4　現在までの成果、今後の展望

2017 年 12 月現在、宇宙ひも由来の重力波バーストおよび背景重力波の探査によって得られている上限をまとめたプロットを図 2 に示す。この図では、先に述べたひもの張力 $G\mu$、組み換え確率 p の二つの (縮退した) パラメータの制限を示している。

$M = 1, 2, 3$ とあるのは、3 つの異なるシミュレーションから得られている宇宙ひも分布関数のモデルを意味している。モデルによって大きく異なる制限が得られているが、$M = 1, 2$ に関してはパルサータイミングが最も強い制限を得ている一方、$M = 3$ では Advanced LIGO-Virgo O1 の背景重力波の観測が最も強い制限を得ているといえる。

また、これらの制限が今後重力波検出器 Advanced LIGO - Virgo の発展によってどの程度発展していくかも同じ図に示されている。全てのモデルについて O1 から Advanced LIGO の Design 感度への向上により、$G\mu$ が 4 桁程度小さいところまでプローブが可能になり、$M = 1, 3$ については今までの全ての制限よりも強い制限を得られると考えられる。パルサータイミングについても、今後 SKA などのサーベイでパルサーの統計数を増やしていくことで、背景重力波をより感度良く探ることが可能になるだろう。今後の感度を上げた観測で実際に宇宙ひもが見えるかどうか、将来が楽しみな結果となっている。

Reference

Aasi J. et al. 2014, Physical Review Letters, 112, 131101

Abbott B. P. et al. 2018, Physical Review D, 97, 102002

Kibble T. W. B. 1976, J. Phys A 9, 138

Siemens X., Creighton J., Maor I., et al. 2006, Physical Review D, 73, 105001

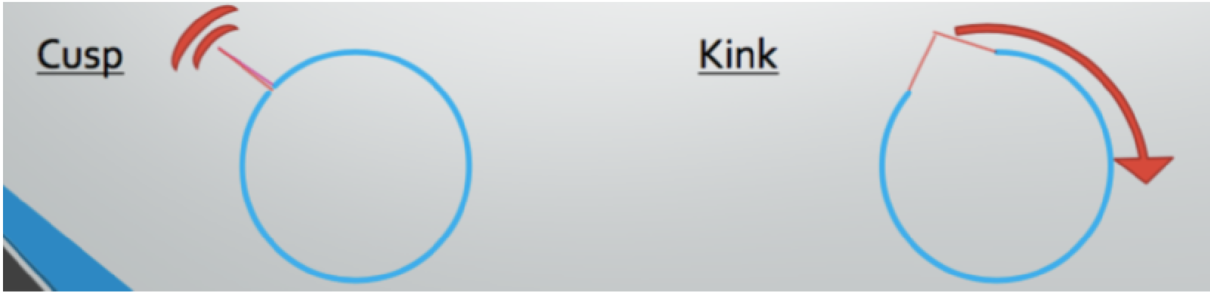

図 1: カスプとキンク

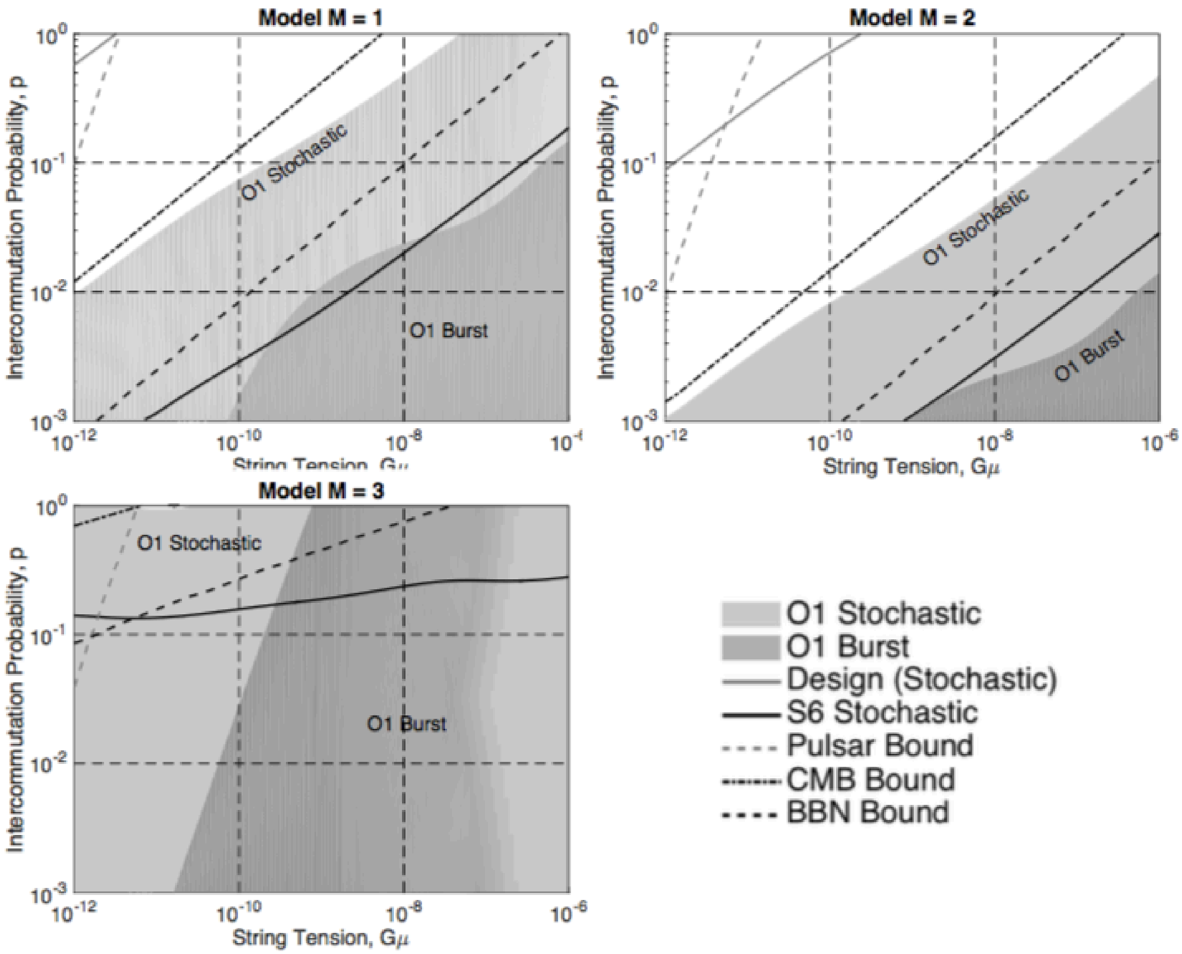

図 2: 宇宙ひもの制限 (Abbott et al. (2018) より)

——index

a11

——index

a12

Lensing 解析における Baryon physics の効果

伊藤　輝 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

lensing による個々の halo の二次元密度分布を測った場合、光源銀河の shape noise の影響が大きく精度の良い signal を得ることができないため、一般には sample となる halo を stack することで重力レンズの寄与だけを抜き出す。得られた signal に適当な halo model を仮定して fitting を行い halo の質量 M_{fit} を求めることができる。今回の発表ではいくつかの halo model の紹介と各 model での M_{fit} の違いを、sample となる halo の質量の平均 $\langle M \rangle$ との比 $M_{fit}/\langle M \rangle$ で表した。また halo のフィラメント構造を定量的に説明する 2-halo term の有無で M_{fit} がどうのように変化するかも説明する。

1　Introduction

galaxy cluster の質量ごとの abundance を求めることは σ_8 や $\Omega_m h$ などの宇宙論パラメータの制限につながる。また cluster abundance の時間発展を追うことができれば dark energy の状態方程式の変数 w などの制限もつけることができる。cluster を使った宇宙論パラメータの制限に用いられる手法として X 線観測や Sunyaev Zel'dvich 効果などが挙げられる。cluster 観測においては宇宙論モデルから得られる halo の質量から理論的な予言を得ることになる。したがってこのような理論的枠組みの中から個々の cluster の質量、または cluster の sample を平均化した質量を求める必要がある。X 線観測や SZ 効果では個々の cluster の質量を推定することができるがいくつかの物理条件を仮定する必要がある。一方背景銀河の歪みを用いた weak lensing 観測からはほぼ直接的に cluster の視線方向に積分された質量密度分布を測ることができる。この質量密度分布に適当な halo モデルを仮定した理論的な密度分布で fit することによって cluster の質量を見積もることができる。しかしながら waek lensing を用いて個々の cluster の signal を測ろうとすると背景銀河の shape noise の影響が大きく十分な推定が行えない。そのため複数の clusuter sampled で stack(平均化) することにより背景銀河の重力レンズ効果のみの歪みの寄与を抽出必要がある。この場合得られる clusuter の情報は統計的なものになる。先行研究では stack した halo の二次元密度プロファイルに halo モデルを仮定した理論的なプロファイルをフィットすることで得られる halo の質量 M_{fit} を stack した sample となる個々の halo の質量を平均した $\langle M \rangle$ と同じものであると皆してきた。しかし stack した二次元密度プロファイルのフィット解である M_{fit} が $\langle M \rangle$ と一致するとういう確証はなく、また理論的な halo model の違いによって得られる M_{fit} も異なる。今回の発表ではいくつかの halo model を紹介し、今後の研究展望を示す。

2　重力レンズ

光源から放たれた光は空間に対して垂直に進む。重力を持った物体の周りは空間が曲がるため光も見かけ上曲がって進むように見える。このような現象を重力レンズという。光源となる背景銀河から放たれた光が銀河団などのレンズ天体により方向が曲げられて我々が観測する場合を考える。天球上の二次元角度ベクトルとして見かけ上の背景銀河の位置を $\vec{\theta}$、実際の位置を $\vec{\beta}$ とする。重力レンズ効果による $\vec{\theta}$ から $\vec{\beta}$ への写像の局所的な表現は以下の式で表せる。

$$\delta\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1-\kappa-\gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1-\kappa+\gamma_1 \end{pmatrix} \delta\vec{\theta} \qquad (1)$$

κ は convergence と呼ばれるもので背景銀河の形を変えず大きさを変える変数である。一方 γ_i は shear で光源の大きさは不変で歪みの成分を表す変数であり、$i = 1, 2$ は 45° 傾いた方向の歪みを表す。観測的には背景銀河の輝度から個々の背景銀河の楕円率 χ

を求めることができる。χ は重力レンズによる寄与と個々の銀河の特徴を表す shape noise の影響がある。そこで sample となるレンズ天体の背景銀河で stack することで shape noise の影響を十分減らすことができ結果的に以下のように重力レンズによる歪みだけを取り出すことができる。

$$\langle \chi \rangle \simeq 2\gamma \tag{2}$$

また γ は以下の式のようにレンズ天体の二次元密度プロファイルで表現することができる。

$$\gamma(\theta) = \frac{\Delta\Sigma(\theta)}{\Sigma_{cr}} \tag{3}$$

Σ_{cr} は critical surface density で背景銀河とレンズ天体の位置で決まる係数である。$\Delta\Sigma(\theta)$ は

$$\Delta\Sigma(\theta) = \bar{\Sigma}(<\theta) - \Sigma(\theta) \tag{4}$$

であり $\Sigma(\theta)$ は位置 θ での local な密度プロファイルであり、$\bar{\Sigma}(<\theta)$ は halo 中心から θ 内までの密度を平均化したものである。

3 halo model

銀河団のようなレンズ天体の質量を重力レンズ解析から求める場合、一般には銀河団を halo とみなして halo model の密度関数でフィットする。dark matter halo の最も有名な density prifile は Navarro, Frenk, & White の NFW profile である。

$$\rho_{\rm NFW}(r) = \frac{\rho_s}{(cr/r_{\rm vir})(1+cr/r_{\rm vir})^2} \tag{5}$$

c は concentration parameter で c が大きいほど中心に質量が集中していることを表す。ρ_s と $r_{\rm vir}$ は以下のような定義である。

$$\rho_s = \frac{c^3 M}{4\pi r_{\rm vir}^3 m(c)} \tag{6}$$

$$r_{\rm vir} = \left[\frac{3M}{4\pi\Delta\bar{\rho}_{m0}}\right]^{1/3} \tag{7}$$

$m(c)$ は c で決まる無次元関数である。

$$m(c) = \ln(1+c) - \frac{c}{1+c} \tag{8}$$

NFW model では $r_{\rm vir}$ 内の密度分布をうまく記述するのに有効である。しかし $\rho_{\rm NFW}$ を $r \to \infty$ で体積積分すると質量が発散してしまう。takada & Jain (2003) では $r_{\rm vir}$ で truncated する NFW プロファイルを提案した (TJ model)。TJ model では halo は典型的に $r_{\rm vir}$ 内に質量が存在しているとみなし、密度プロファイルの規格化は質量保存を維持している。

$$\rho_{\rm TJ}(r) = \frac{\rho_s}{(cr/r_{\rm vir})(1+cr/r_{\rm vir})^2}\Theta(r_{\rm vir} - r) \tag{9}$$

Θ は Heviside step 関数である。TJ model での問題

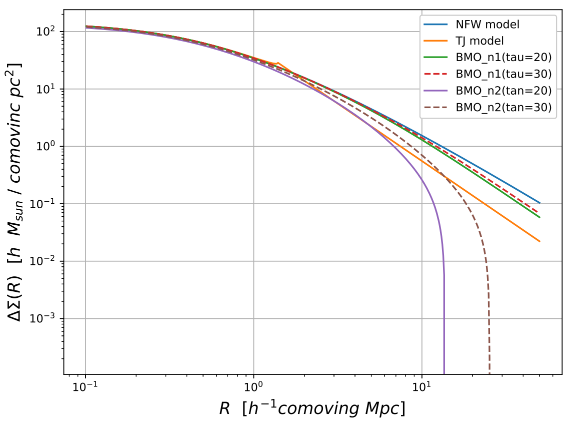

図 1: 各 halo model の密度プロファイル。free parameter は $M = 10^{14}[h^{-1}M_{\odot}]$、$c = 4.0$、$\tau = 20, 30$($\tau = 20$ が実線、$\tau = 30$ が点線)

は $r = r_{\rm vir}$ において微分不可という点と、実際の halo では $r_{\rm vir}$ よりも大きい領域にも多少の広がりを持つという点である。Baltz, Marshall, & Oguri (2009) では NFW が tidal radius、r_t 内で維持され r_t より大きい場所では pow low で滑らかに cut off される model(BMO model) を提案した。

$$\rho_{\rm BMO}(r) = \frac{\rho_s}{(cr/r_{\rm vir})(1+cr/r_{\rm vir})^2}\left(\frac{r_t^2}{r^2+r_t^2}\right)^n \tag{10}$$

$n = 1, 2$ では $\Delta\Sigma(r)$ の解析解がある。(Baltz, Marshall, & Oguri (2009))。また NFW model の解析解は (Golse, & Kneib (2002))、TJ model は (takada & Jain (2003a,b)) などを参照されたい。本研究では halo model を特徴付けるパラメータとして M と c を

、また BMO model ではそれに加えて $\tau = cr_t/r_{\rm vir}$ を free paramater とする。

4 2-halo term

halo の周りのフィラメント構造は halo を stack することで等方的で動径方向のみの密度分布とみなすことができる。この構造の $\Delta\Sigma$ を 2-halo term(halo model のプロファイルは 1-halo term) と言い以下のように書ける。

$$\Delta\Sigma_{2halo}(r) = \bar{\rho}_{m0}\int_0^\infty \frac{k{\rm d}k}{2\pi}P_m^{\rm L}(k)J_2(kr) \qquad (11)$$

J_2 は二次の Bessel 関数である。典型的に $r > r_{\rm vir}$ では 2-halo term が支配的になる。

5 Methods

本研究では N 体シミュレーションを使って、ある M_{min} 以上の質量を持った全ての halo を stack して得られた $\Delta\Sigma$ を各 halo model のプロファイルと 2-halo term でフィットし M_{fit} を求めた。同様に N 体の結果

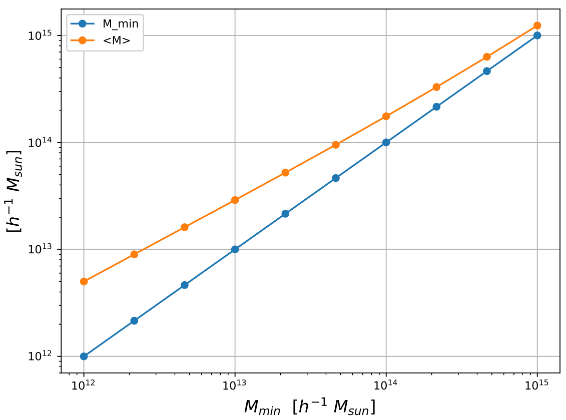

図 2: 黄色の線は M_{min} に対する $\langle M\rangle$ のプロット、青線は M_{min}-M_{min}。mass function は質量が大きほど小さく M_{min} が大きければ $\langle M\rangle$ は M_{min} 自体に近付く。

から得られた halo の mass function も使って M_{min} 以上の mass で平均を取ったものを $\langle M\rangle$ とする。宇宙論パラメータは *Planck* cosmology(Planck Collaboration et al. 2016) から $\Omega_{\rm b0} = 0.02225$、$\Omega_{\rm c0} = 0.1198$、$\Omega_\Lambda = 0.6844$、$ln(10^{10}A_s) = 3.094$、$n_s = 0.9645$ とした。また redshift は $z = 0.5$ としている。

6 Results

free parameter は NFW model と TJ model では M、c, また BMO model ではそれに加えて τ の三つである。また式 (7) の Δ は本研究では 200 としており M と $r_{\rm vir}$ は実質 M_{200}、r_{200} である。$\Delta\Sigma$ の動径方向は $r_{\rm max} = 5, 10, 20, 50$ [comoving Mpc h^{-1}] までのの 4 パターンで、1-halo term のみの場合と 1-halo + 2-halo term の場合でそれぞれフィットした。1-halo term のみ場合より 1+2halo term でのフィットの方が M_{fit} が小さくなる。これは 1-halo term のみでの fitting では r_{vir} より大きいスケールも $\Delta\Sigma_{1halo}$ のみで解析する必要があるためである。一方 $\Delta\Sigma_{2halo}$ は free parameter によらず一定であるので、2-halo term が支配的になる $r_{\rm max} = 20, 50$ [comoving Mpc h^{-1}] における $\Delta\Sigma_{1halo} + \Delta\Sigma_{2halo}$ での fitting では得られる M_{fit} はほぼ同じになる。今回の研究で各 halo model によって得られる M_{fit} は有意に違いが出ることが分かった。また M_{fit} と $\langle M\rangle$ の比は必ずしも 1 に近い訳ではなく、$0.8 < M_{fit}/\langle M\rangle < 1.1$ ほどの範囲に存在することが確認できた。

7 Discussion and Conclusion

重力レンズから得られる stack された $\Delta\sigma$ は等方的で統計的な halo の性質を持っている、一方同じ sample の halo で得られた M_{fit} と $\langle M\rangle$ は必ずしも一致する訳ではなく、また選んだ halo model の違いで M_{ft} の値も異なることが分かった。今回の研究では dark matter halo の性質のみを説明する model での fitting であったが。より実際的には観測する対象は銀河団などであり、銀河団内部でのガス運動などの baryon physics を考慮して計算する必要がある。そのためこのような baryon physics を第一原理的に

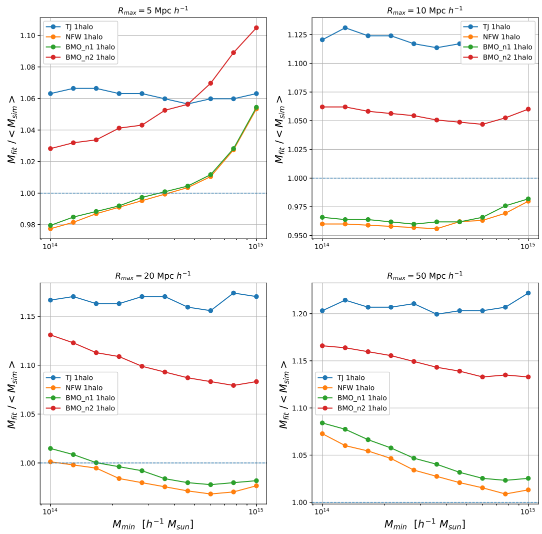

図 3: $\Delta\Sigma_{1halo}$ のみでのフィット。青線が TJ model、黄色の線が NFW model、緑線が BMO(N=1)、赤線が BMO(n=2)。

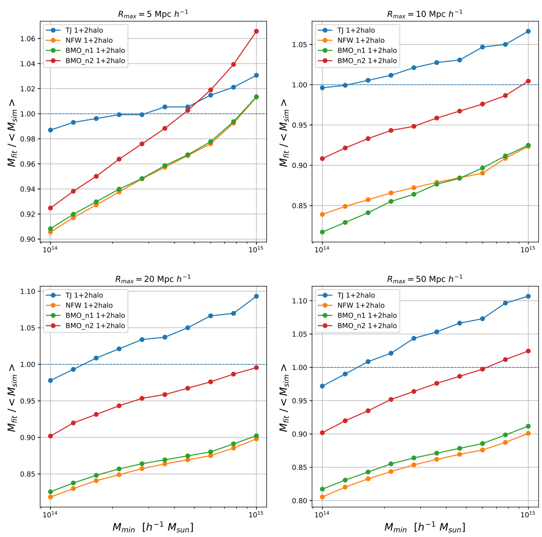

図 4: $\Delta\Sigma_{1halo}$ ＋ $\Delta\Sigma_{2halo}$ でのフィット

説明できるような parameter を導入した model を作り fitting することが今後の課題となる。

Reference

Murata, R., Nishimichi, T., Takada, M., et al. 2018, APJ, 854, 120

Takada, M., & Jain, B. 2003, MNRAS, 344, 857

Oguri, M., & Hamana, T. 2011, MNRAS, 414, 1851

Baltz, Edward. A., Marshall, P., & Oguri, M. 2009, jcap, 1, 015

Golse, G., & Kneib, J.-P. 2002, aap, 390, 821

Planck Collaboration et al., 2016, A&A, 594, A13

——index

a13

——index

a14

弱い重力レンズからの銀河バイアス推定

近藤 寛人 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙の階層的構造形成によって銀河の分布はダークマターの分布をある程度トレースすることがわかっている。しかし実際には分布間に違いがあり、その差異を銀河バイアスと呼ぶ。銀河形成モデルに応じて予測される銀河バイアスが異なるため、観測から銀河バイアスを詳細に決めることは銀河形成シナリオの検証につながる。本発表では、弱い重力レンズ効果から銀河バイアスの赤方偏移依存性を調査した論文をレビューする。観測される銀河と観測者までの間に大きな質量が存在すると、重力により観測される銀河の見かけの形状が歪む。この現象は弱い重力レンズ効果と呼ばれ、質量分布を反映した銀河像の歪みからシアーと呼ばれる物理量が観測される。ダークマターを含む質量によるシアーマップと銀河の個数密度分布から変換される銀河のシアーマップの相関をとることで、線形な銀河バイアスを調べる手法が先行研究で示され、Cosmic Evolution Survey のデータを用いて銀河バイアスを推定している。また別の先行研究で赤方偏移依存性の解析が追加され、シミュレーションテストが行われているが、観測データは解析されていない。レビューする論文中では、先行研究の手法を用いてより広域な銀河探査である Dark Energy Survey 科学的評価データを解析することで、統計的不確かさを抑えて赤方偏移依存性を推定している。銀河バイアスを推定する他の方法には、銀河分布の 2 点相関を用いる手法と宇宙マイクロ波背景放射の重力レンズ効果を用いる手法がある。弱い重力レンズからの結果は、これらの結果と一致しており、他と比べて宇宙論パラメータの影響が小さい点で優れている。また解析に並行してシミュレー ションテストを行うことで、広域銀河探査における本手法を精査している。今後他の広域銀河探査へ本手法を適用して各観測から独立した結果を得ることで、銀河バイアスの更なる解明が期待される。

1 Introduction

宇宙の構造形成において、はじめにダークマターの密度ゆらぎが成長し、その高密度領域で銀河が形成される。しかし銀河とダークマターのゆらぎの間にはずれが存在し、そのずれを銀河バイアスと呼ぶ。銀河バイアスは、銀河の個数密度分布からダークマターの密度分布を推定することを可能にし、銀河進化などを研究する上でも有用である。銀河バイアスの主流の推定手法は銀河の二点相関関数を用いたものであるが、これは銀河の観測のみによるものであり、ダークマターの分布については観測量から直接的に求めてはいない。この手法では、ダークマターの相関を宇宙論モデルから構築するため宇宙論モデルに強く依存する。一方で弱い重力レンズ効果用いた手法では、観測された銀河の形状データを解析することでダークマターの分布を推定している。観測から推定されるダークマターの分布と銀河分布を組み合わせているため、弱い重力レンズを用いた銀河バイアス推定の宇宙論モデルへの依存性は小さくなる。レビューする論文中では二本の先行研究によって確立された手法を用いて DES SV データの解析を行っている。先行研究のうち一本は手法の確立及び Cosmic Evolution Survey のデータを解析している (A.Amara et al. 2012)。続くもう一本では赤方偏移依存性の取扱の改良及びシミュレーションテストが行われている (A.Pujol et al. 2016)。

以降では 2 章で基礎となる理論の説明、3 章では解析に合わせたシミュレーション及び解析手法の説明、4 章で解析結果、5 章でまとめを行う。

2 Background Theory

2.1 銀河バイアス

銀河バイアスが線形であることを仮定すると、銀河バイアス b はダークマターの密度ゆらぎ δ と銀河の個数密度ゆらぎδ_gの相関係数として定義される。

$$\delta_g(z,R) = b(z,R)\delta(z,R) \tag{1}$$

ここで R はスムージングスケール、z は赤方偏移である。最も単純な定数バイアスは、ダークマターの密度ゆらぎの二点相関関数ξ_{dm}と銀河の個数密度ゆらぎの二点相関関数ξ_gから式 (2) のように表現できる。ただし一般に銀河バイアスは銀河の特徴によって値が異なることが知られているが、十分に大きなスムージングスケールでは上記の銀河バイアスと一致する。

$$\begin{aligned}\xi_g(r) &= \langle\delta_g(\boldsymbol{r}_0)\delta_g(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r})\rangle \\ &= b^2\langle\delta(\boldsymbol{r}_0)\delta(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r})\rangle \\ &= b^2\xi_{dm}(r)\end{aligned} \tag{2}$$

2.2 弱い重力レンズ

重力レンズは光源と観測者の間にある質量により光の経路が曲がる現象である。重力レンズで用いられる物理量は、像の歪みを表すシアー $\boldsymbol{\gamma} = \gamma_1 + i\gamma_2$ と光の強度及び像の大きさの変化を導くコンバージェンス κ である。弱い重力レンズ効果の観測では、観測された局所的な銀河像の歪みの傾向からシアーを求めている。またフーリエ空間ではシアーとコンバージェンスは Kaiser-Squires 変換 (KS 変換)(N.Kaiser&G.Squires1993) と呼ばれる変換で可換であり

$$\tilde{\kappa}(\boldsymbol{l}) - \tilde{\kappa_0} = D^*(\boldsymbol{l})\tilde{\gamma}(\boldsymbol{l}) \ ; \ \tilde{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{l}) - \tilde{\gamma_0} = D(\boldsymbol{l})\tilde{\kappa}(\boldsymbol{l}) \tag{3}$$

$\tilde{X}$は場 X のフーリエ変換を示す。$\boldsymbol{l}$ はフーリエ変換により天球面上の座標$\boldsymbol{\theta}$に対応し、$\tilde{\kappa_0}, \tilde{\gamma_0}$は変換時のオフセットである。$D$ は $\boldsymbol{l}$ の二次モーメントの組み合わせであり

$$D(\boldsymbol{l}) = \frac{l_1^2 - l_2^2 + i2l_1l_2}{|\boldsymbol{l}|^2} \tag{4}$$

と表される。

2.3 銀河バイアスと相関関数

一般にコンバージェンスは天球面上の座標 $\boldsymbol{\theta}$ 方向の密度ゆらぎを積分した量として計算することができる。同様にして、$\boldsymbol{\theta}$方向の銀河の個数密度揺らぎから得られる銀河のコンバージェンスκ_gを定義する。

$$\kappa_g(\boldsymbol{\theta}, p_s) = \int_0^\infty d\chi q(\chi, p_s)\delta_g(\boldsymbol{\theta}, \chi) \tag{5}$$

$$q(\chi, p_s) \equiv \frac{3H_0^2\Omega_m\chi}{2c^2a(\chi)}\int_\chi^\infty d\chi_s \frac{\chi_s - \chi}{\chi_s}p_s(\chi_s) \tag{6}$$

ここでχは銀河までの共動距離であり、q は重力レンズによる重み付けになっている。また q 内部のχ_sは銀河までの共動距離、p_sは共動距離χ_sに対応する銀河の確率密度である。特定の共動距離の範囲$\Delta\chi'$に存在する銀河の個数密度ゆらぎのコンバージェンスκ'_gを定義するため、$\phi'(\chi)$ を導入する。

$$\Delta\chi' = \int_0^\infty d\chi\phi'(\chi) \tag{7}$$

$$\kappa'_g(\boldsymbol{\theta}, p_s) = \int_0^\infty d\chi q(\chi, p_s)\phi'(\chi)\delta_g(\boldsymbol{\theta}, \chi) \tag{8}$$

また以降では特定の共動距離 χ(もしくは赤方偏移 z) 区間のみを取り出した物理量には $'$ をつけて表現する。赤方偏移区間に依存したコンバージェンスの相関をとることで b'を定義する。

$$b' = \frac{\langle\kappa'_g\kappa'_g\rangle}{\langle\kappa'_g\kappa\rangle} = \frac{\langle\kappa'\kappa'\rangle}{\langle\kappa'\kappa\rangle}b = fb \tag{9}$$

f はϕ'により特定の赤方偏移区間を取り出すことによる効果を分けている。

3 Method and Simulation

3.1 銀河バイアス推定

データ解析には DES SV のデータが使われている。観測範囲は 116deg^2 であり、等級が $i < 22.5$ である銀河のデータを利用している。各銀河の赤方偏移が計測されており、赤方偏移$\Delta z = 0.2$ 毎に区分けされた銀河マップ及びシアーマップを作成し使用する。

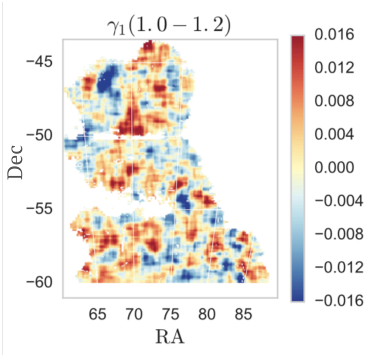

図 1: DES SV データのシアーマップの例 (C. Chang et al. 2016)z=1.0-1.2 の観測によるシアー γ_1 マップ

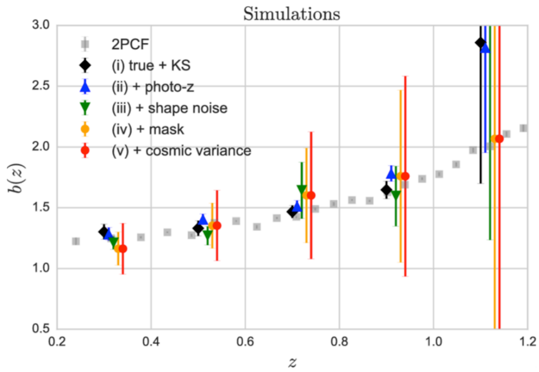

図 2: シミュレーションから推定される誤差 (C. Chang et al. 2016) 縦軸は銀河バイアス、横軸は赤方偏移。灰色の点は銀河の二点相関を用いて推定される銀河バイアス、黒青緑オレンジ赤のエラーバー付きの点はそれぞれ本文中の (i)(ii)(iii)(iv)(v) の手順に対応する。

その後銀河マップを銀河のコンバージェンスマップに変換し、さらにKS変換で銀河のシアーマップに変換する。弱い重力レンズの観測から作成したシアーマップと銀河のシアーマップの相関をとることで銀河バイアスを推定する。

$$b = \frac{1}{\mu} \tag{10}$$

$$\mu = f\frac{\langle \gamma'_{\alpha,g}\gamma_{\alpha}\rangle}{\langle \gamma'_{\alpha,g}\gamma'_{\alpha,g}\rangle - \langle \gamma'^{N}_{\alpha,g}\gamma'^{N}_{\alpha,g}\rangle} \tag{11}$$

実際の解析では銀河バイアス b の逆数μを計算しており、N の項は銀河サンプル数からくるショットノイズを補正している。またαはシアーの独立な 2 成分を表す。直接銀河バイアスを計算する場合と比較して、安定しているためμを推定量として用いている。

3.2 シミュレーションによる誤差評価

解析によって生じる誤差を調べるため解析に並行してシミュレーションを行っている。はじめに 900deg^2 の銀河マップ及びシアーマップを形成し、そこに KS 変換、赤方偏移計測、形状ノイズ、マスクなどの誤差を逐次的に加えることで現実の観測データに沿ったマップを得る。これを用いて銀河バイアスを計測することで、各解析段階における誤差を評価する。

図 2 での誤差はそれぞれ
(i) コンバージェンスシアー変換を行う際のオフセットによる誤差
(ii) 赤方偏移計測における誤差
(iii) 銀河の本質的な形状に由来するシアー計測の誤差
(iv) 観測領域として 116deg^2 への切り抜きとスムージング時のデータの切り捨てによる誤差
(v) 観測する領域の選択及び背景銀河の形状を変えることによる誤差
である。(iv)(v) の誤差は統計誤差であり、観測データの更新による観測（解析）領域の拡張により減少することが期待される。一方で (iii) の誤差はシアーを測定を行う上で切り離すことのできない系統誤差である。

4 Results

解析によって得られた銀河バイアスは表 1 のようになった。

弱い重力レンズを用いた結果は、銀河の二点相関関数とほぼ 1σ のレベルで一致しており、高赤方偏移では銀河バイアスの値が大きくなるという共通の傾向が見られる。また CMB レンズを用いた手法とも 2σ レベルで一致している。

表 1: DES SV データ解析からのバイアスと 1σ エラー

	レンズの赤方偏移 (z_{mean})			
	0.2-0.4	0.4-0.6	0.6-0.8	0.8-1.0
This work (NGMIX+SKYNET)	1.12±0.19	0.97±0.15	1.38±0.39	1.45± 0.56
This work (IM3SHAPE+SKYNET)	1.21±0.25	1.12±0.24	0.90±0.19	0.91±0.28
This work (NGMIX+TPZ)	1.23±0.23	1.07±0.18	1.39±0.40	1.29±0.44
This work (NGMIX+BPZ)	0.84±0.11	1.00±0.16	1.13±0.26	0.95±0.24
Crocce et al.(2016)	1.07±0.08	1.24±0.04	1.34±0.05	1.56±0.03
Giannantonio et al.(2016)	0.57±0.25	0.91±0.22	0.68±0.28	1.02±0.31

表 2: 上段の括弧内は用いたシアー計測と赤方偏移計測のアルゴリズムを示している。また下段の数値は同じ DES SV データを用いた異なる手法で推定された銀河バイアスの値であり、Crocceet al. (2016) が銀河の二点相関関数、Giannatonio et al. (2016) が CMB レンズを用いた手法である。

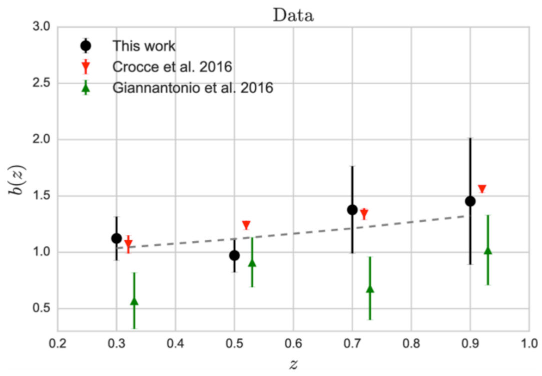

図 3: 推定された銀河バイアス (C. Chang et al. 2016) 横軸は赤方偏移 z。各ポイントは色ごとに弱い重力レンズを用いた手法（本稿表 1 一段目）(黒)、銀河の二点相関関数を用いた手法 (赤)、CMB レンズを用いた手法 (緑) であり、点線は本稿の結果の線形補間である。(各点の値は表 1 を参照)

5 Conclusion

銀河バイアスを測定する手法に弱い重力レンズ効果を用いることで、ダークマターの分布を観測量から取り入れている。これにより宇宙論モデルへの依存性が低く、観測に基づいた銀河バイアス推定となっている。またシミュレーションからの誤差推定では、各解析工程での誤差を計算し、推定される誤差を分解した。DES SV データ解析により得られた結果は銀河の二点相関関数の結果とよく一致している。DES の観測領域拡大や他の広域銀河探査のデータを解析することでさらに詳細な銀河バイアスの解明が期待される。

Acknowledgement

本発表を行うにあたり，指導をしてくださった名古屋大学宇宙論研究室の皆様に心より感謝致します。

Reference

Amara A., et al., 2012, MNRAS, 424, 553

Chang C., et al., 2016, MNRAS, 459, 3203

Crocce M., et al., 2016, MNRAS, 455, 4301

Giannantonio T., et al., 2016, MNRAS, 456, 3213

Kaiser N.& Squires G., 1993, ApJ, 404, 441

Pujol A., et al., 2016, MNRAS, 462, 35

——index

a15

——index

a16

BAO 復元アルゴリズムの提案と評価

杉山　素直 (Kavli 数物連携宇宙研究機構)

Abstract

宇宙の晴れ上がり以前に強く結合していた光子とバリオンは一つの流体として振動していたが（BAO)、結合が切れると位相が固定され宇宙に刻み込まれ大規模構造として観測される。BAO の振動スケールは CMB の観測から精密に測定されているので大規模構造の観測から精密な宇宙論パラメタの測定が出来ることを意味する。この BAO スケールを宇宙論パラメタの制限に最大限に活用するためには、非線型成長で歪められてしまった密度場を復元して BAO のシグナルを復元する必要がある。標準的にはラグランジュ的流体として密度場を扱い復元を行うが、本講演でレビューする論文ではさらに 5 つの復元アルゴリズムを提案し性能のテスト、復元の機構を調べる。6 つのアルゴリズムはラグランジュとオイラー描像に大別され、さらにそれぞれに対して Growth-Shift(GS),F2,Random-Random(RR) の種類に分類される。N 体計算で作成したカタログでアルゴリズムのテストを行ったところ、LGS がもっとも復元がよく、次いで EGS,EF2 も十分実用に耐える性能を持つことがわかった。LGS と EGS は摂動の 2 次のレベルでは完全に等価なアルゴリズムで言えることから、LGS では不透明だった復元の寄与を EGS のより明瞭な議論で説明することができた。

1　BAO の起源と観測

Baryon Acoustic Oscillation(BAO, バリオン音響振動) とは、宇宙の晴れ上がり以前に強く結合していた光子とバリオンが一つの流体として振舞っていた時の振動のことをいう。光子が脱結合すると BAO の位相は固定され、このゆらぎを元にして構造形成が進むので、大規模構造は BAO スケールという特徴的なスケールを持っていることがわかる。BAO スケール $r_{\rm BAO}$ が分かっていると、銀河の赤方偏移 Δz と角度 $\Delta\theta$ を観測することによってハッブルパラメタと角形距離を赤方偏移の関数として

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \frac{c\Delta z}{r_{\rm BAO}} \\
D_A(z) &= \frac{r_{\rm BAO}}{(1+z)\Delta\theta}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

と測定することができる。このため、BAO は宇宙の標準物差し (standard ruler) と呼ばれている。またハッブルパラメタと角形距離は宇宙論パラメタを用いて

$$
\begin{aligned}
H(z) &= h\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_X \exp\left[3\int_0^z \frac{1+w(z)}{1+z}{\rm d}z\right]} \\
D_A(z) &= \frac{c}{1+z}\int_0^z \frac{{\rm d}z}{H(z)}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

と計算できることから、BAO はダークマターのプローブとして使われることがわかる。実際、BAO スケールは CMB の観測から精密に求められている量の一つで、銀河分布に適切に物差しを当てることができれば宇宙論パラメタの測定精度の向上に繋がるので大規模構造を探るモチベーションの一つにあげられる。

物差しを当てる方法は、現在 BAO が大規模構造に刻まれていることから銀河分布から 2 点相関関数を計算すればいいことがわかる。2 点相関関数というのはあらゆる銀河ペアの間隔をカウントするようなもので、銀河分布の特徴的なスケールを与える指標であり、これのフーリエ変換をパワースペクトルという。大規模構造の 2 点相関関数をとると BAO スケールの間隔で銀河が分布しているのでそこにピークを持つ関数形となる。図 1 は横軸距離、縦軸 2 点相関関数の図で $100Mpc/h$ に確かにピークがあるこ

とが確認できる。

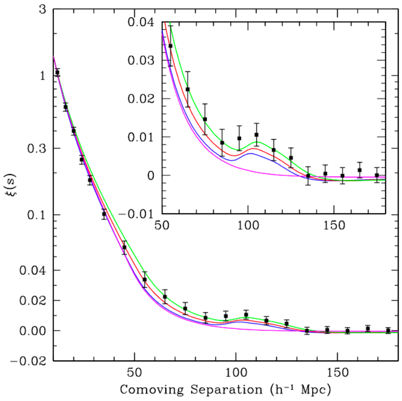

図 1: 2 点相関関数 ((D. J. Eisensteinet et al. 2005)))

らアルゴリズムにしたがって流体の各点で移動度を計算している（左下）。計算した移動度で戻した密度分布は初期位置を復元している（右下）。

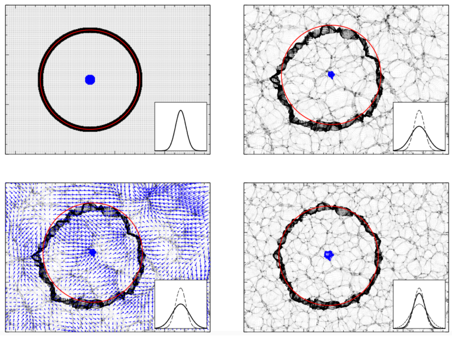

図 2: BAO 復元 ((Nikhil Padmanabhan et al. 2012))

2　BAO 復元の必要性

前節で述べたような標準物差しの利用は銀河分布から適切に BAO スケールを取り出すことができた時に限る、すなわち現実の大規模構造は小スケールで非線型成長をしているので 2 点相関関数のピークは BAO スケールからずれるたりピーク高が落ちたりする。ピーク位置のズレは BAO スケールの読み間違えなので間違った宇宙論パラメタの測定に繋がるし、ピーク高の減少はシグナルの減少なので宇宙論パラメタの測定精度に悪影響を及ぼす。これは CMB から求められている高精度な BAO スケールを十分に活かしきれていないということを意味しているので、観測される非線型成長した銀河分布から線形成長の銀河分布を復元して正確に BAO スケールを取り出したいというモチベーションが生まれる。

このために標準的に用いられる復元アルゴリズムとしてダークマターゆらぎをラグランジュ流体として捉え、構成粒子を適当な移動度のもとで元の位置に戻すという方法が用いられている。ここでは BAO 復元を直感的に捉えるために図 2 を用意した。初期条件としてガウシアン型の密度を入れて中心から特徴的スケール 150Mpc 流体を黒くマークしている（左上）。非線形成長によって黒かった流体要素が初期位置の赤線から離れて拡散している（右上）。密度場か

3　様々な復元アルゴリズム

本公演でレビューする論文では標準的な BAO 復元アルゴリズムに加え 5 つのアルゴリズムを提案し計 6 個のアルゴリズムの特性を評価し性能をテストする。 6 個のアルゴリズムは流体の描像でオイラー (E) とラグランジュ(L) に大別され、それぞれの中でさらに Growth-Shift(GS)、F2、Random-Random(RR) に分類される。GS は復元によって非線形な密度成長項と Shift 項を差し引くことから、F2 は摂動の 2 次まで保ったまま計算することから（2 次のカーネルの名前が F2 である）、RR はランダム密度場を使って非線形項を差し引くことから、このように命名される。オイラー描像では復元されたスペクトルが、観測する密度場のスペクトルから復元で差し引かれた密度場のスペクトルを差し引いた形でかけるので、BAO 復元からくるパワースペクトルへ補正が物理的に理解されやすいという利点がある。一方でラグランジュ描像では明にパワースペクトルを元の密度場のスペクトルを用いて書く事ができないので、ラグランジュ描像の復元の性能がよかったとしてもその物理的寄与が見にくくなっている。そこで、オイラーとラグランジュで対応する各アルゴリズムは摂動展開した時に 2 次のオーダーでは厳密に一致する事に注目することによって、ラグランジュ描像での復元に部分的な説明を与えるということを

行う。後で見るが、LGS がもっとも良い復元性能を持っていてこの理由をオイラーとのつながりから部分的に説明する事も本論文で複数アルゴリズムを提案している事の重要な結果である。

表 1: BAO 復元の種類

	Growth Shift(GS)	F2 F2	Random Random(RR)
Euler	EGS	EF2	ERR
Lagrange	LGS	LF2	LRR

3.1 Eulerian アルゴリズム

位置を $\mathbf{x}$、共形時間を η と表記する。EGS は連続の式を用いて密度場の時間微分を与えることによって復元を行う。連続の式を使うと速度場が必要になるが、速度場は観測することが難しいので窓関数で平滑化した密度場から推定される線形速度場を利用する。観測する密度場を $\delta(\mathbf{x},\eta)$ とすると EGS 密度場を

$$\begin{aligned}\delta^{\mathrm{rec}}_{\mathrm{EGS}}(\mathbf{x}) &= \delta(\mathbf{x},\eta)- \\ &\quad \mathbf{s}(\mathbf{x},\eta)\cdot\nabla\delta(\mathbf{x},\eta) - \delta_R(\mathbf{x},\eta)\delta(\mathbf{x},\eta) \\ \mathbf{s}(\mathbf{k},\eta) &= \frac{i\mathbf{k}}{k^2}W_R(k)\delta(\mathbf{k},\eta)\end{aligned} \tag{3}$$

と定義する。添字 R は窓関数によって平滑化されていることを表し、$\mathbf{s}(\mathbf{x},\eta)$ は線形化された速度場に対応するもので displacement field と呼ばれる。2 − 3 項は δ の 2 次になっているがそのうちの片方が窓関数で線形化されていることが復元においては重要である。2,3 項が順に Shift,Growth になっている。
EF2 は密度場が満たす流体方程式を摂動の 2 次までとったものである。(Blake D. Sherwin & Matias Zaldarriaga 2012)

$$\begin{aligned}\delta^{\mathrm{rec}}_{\mathrm{LF2}} &= \delta(\mathbf{x}) - \frac{17}{21}\delta_R(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}) \\ &\quad - \mathbf{s}(\mathbf{x})\cdot\delta(\mathbf{x}) - \frac{4}{21}K_R^2(\mathbf{x})\end{aligned} \tag{4}$$

EGS の Growth 項が小さくなった代わりに Tidal 項が加わる。EGS と同じく係数だけに非対称に線形化を行う。

ERR は LRR のアナロジーで定義する。これから見るが、LRR は LGS と LF2 の線型結合でかけることをオイラーにおいても同じ係数で EGS と EF2 の線型結合で定義する。

$$\begin{aligned}\delta^{\mathrm{rec}}_{\mathrm{ERR}} &= \frac{7}{4}\delta^{\mathrm{rec}}_{\mathrm{EF2}} - \delta^{\mathrm{rec}}_{\mathrm{EGS}} \\ &= \delta - \frac{2}{3}\delta_R\delta_R - \mathbf{s}\cdot\nabla\delta_R - \frac{1}{3}K_{RR}^2\end{aligned} \tag{5}$$

3.2 Lanrangian アルゴリズム

ラグランジュ描像では構成粒子の移動度が時間発展すると考える。この移動度には EGS のところで定義した $\mathbf{s}$ を使う。単純には観測する密度場から移動度だけ構成粒子を移動させれば線形密度場が復元されそうだが、これだと粒子の初期位置が現在のいちから時間発展していくと考えていることになってしまうが、そうではなくてむしろ粒子は線形密度場から時間発展して移動していくのでこのズレを埋める必要がある。そこでランダムな密度場を用意してきてこれを同じく $\mathbf{s}$ で移動させる。観測密度場を $\mathbf{s}$ で移動させた場を $\delta_d[\mathbf{s}]$, ランダム密度場を $\mathbf{s}$ で移動させた場を $\delta_s[\mathbf{s}]$ と定義する。さらに同様にして $\delta_d[-\mathbf{s}], \delta_d[-\mathbf{s}]$ も定義する。この 4 つの密度場を使ってラグランジュでの復元を行う。4 つの $\delta_x[\pm\mathbf{s}]$ の組み合わせ方はたくさんあり中には復元と反対方向の密度場を構成してしまう組み合わせもあるので、摂動の 2 次まで展開した時に非線型成長項を引くことによって線形密度場を復元できているもののみを選び出した時に出てくる独立な組み合わせが LGS と LRR である。

$$\begin{aligned}\delta^{\mathrm{rec}}_{\mathrm{LGS}} &= \delta_d[\mathbf{s}] - \delta_s[\mathbf{s}] \\ \delta^{\mathrm{rec}}_{\mathrm{LRR}} &= \delta - \frac{1}{2}(\delta_s[\mathbf{s}] + \delta_s[-\mathbf{s}])\end{aligned} \tag{6}$$

摂動の 2 次まで展開すると LGS が EGS と一致することが確かめられるので LGS と定義する。LGS と LRR の適当な線型結合もまた復元アルゴリズムとして許されるが、そのようなもののうち、摂動の 2 次まで展開した時に EF2 と一致するものを LF2 と定義する。

$$\delta^{\mathrm{rec}}_{\mathrm{LF2}} = \frac{3}{7}\delta^{\mathrm{rec}}_{\mathrm{LGS}}[\mathbf{s}] + \frac{4}{7}\delta^{\mathrm{rec}}_{\mathrm{LRR}}[\mathbf{s}] \tag{7}$$

3.3　パワースペクトル

ラグランジアン描像では復元された密度場を復元されていない密度場であらわに書くことができないのでパワースペクトルが書けないので、結果がいいアルゴリズムであってもどういった成分を復元することによってパフォーマンスを出しているのかが見えづらいというデメリットがある。この点でオイラー描像ではあらわに復元密度場を復元されていない密度場で書くことができるのでパワースペクトルにした時に寄与が見やすくなる。その一例として EGS のパワースペクトルをここでは考察する。EGS の式 3 から直ちに

$$\hat{P}^{\mathrm{rec}}_{\mathrm{EGS}}(k) = \hat{P}_{\delta,\delta} - 2\hat{P}_{s,\delta} - 2\hat{P}_{\delta\delta,\delta} + \hat{P}_{\delta\delta,\delta\delta} + \hat{P}_{s,s} + 2\hat{P}_{\delta\delta,s} \tag{8}$$

密度場に関して第 1 項が 2 点、第 2,3 項が 3 点、第 4,5,6 項が 4 点になっている。復元の仕組みはオイラー描像でこれらの各 n 点の寄与を見ていくことでわかるということになる。

4　アルゴリズムの性能テスト

我々が見たいのはあくまでも BAO が作る相関関数のピークなのでこれをシグナルとして、系統的なノイズに対する比をアルゴリズムの性能として捉えることができる。小スケールに入るにしたがって非線型成長によるシグナルの減少がより強くなるので、興味があるのはある程度小さいスケールでシグナルが復元できているか否かというところとなる。そこで、大きいスケールからある最小のスケールまでに復元できた積算のシグナルを見ることが便利で、これを波数空間で描いたものが図 3 である。$k_{\mathrm{max}} = 0.20h/Mpc$ での値を見ると、復元していない積算パワースペクトルに対して復元したものはシグナルを回復していて、特に LGS、EGS、EF2 が良い性能を持っていて、復元なしの積算パワースペクトルに対して +38%, +31%, +23% の積算シグナルを得ている (at $k_{\mathrm{max}} = 0.4h/Mpc$)。LGS が一番いい性能を示していて、これは 2 次の摂動で EGS と等価であることに注意すると、部分的には Growth-Shift から来る 3、4 点関数による寄与で説明が出来て、残りは EGS にはない、より高次の復元を LGS が含んでいるということから説明が出来る。その中でも 3,4 点の寄与を分けて plot したものが図 4 である。実線の 3 点関数の方が点線の 4 点関数より復元した signal を占めていることがわかる。

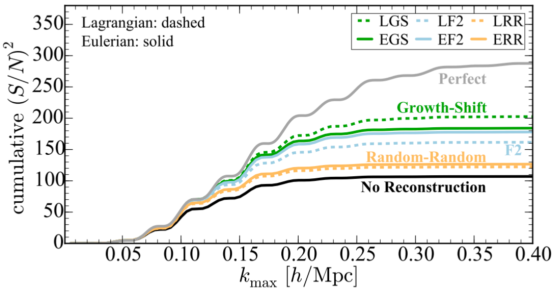

図 3: アルゴリズム性能テスト (Marcel Schmittfull)。各アルゴリズムに対して累積 signal/noise を plot している。灰色が初期パワースペクトル。

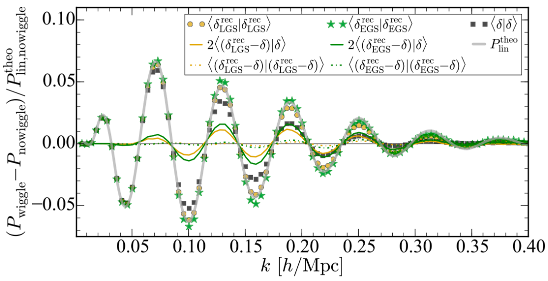

図 4: アルゴリズム性能テスト (Marcel Schmittfull)。2,3 点関数の寄与を分離したもの。実線、点線が 2,3 点関数に対応する。

Reference

Marcel Schmittfull et al.,Phys. Rev. D 92, 123522 (2015)

D. J. Eisensteinet al.,Astrophys.J.633:560-574(2005)

Nikhil Padmanabhan et al.,MNRAS.427,3,2132-2145(2012)

Blake D. Sherwin, Matias Zaldarriaga,Phys. Rev. D 85, 10352 (2012)

——index

a17

CMB の弱い重力レンズ効果と中性水素の相互相関による 21cm 線の検出可能性

田中 章一郎 (熊本大学大学院 自然科学教育部)

Abstract

宇宙再電離期や再電離後の遠方の宇宙は観測が困難であり、未だに観測的に理解されていない部分が多い。そこで、当時の物質の分布を探る直接的な観測量として、中性水素 (HI) の超微細構造によって生じる 21cm 線が有用である。しかし、遠方 (z>1) の 21cm 線の観測は銀河系シンクロトロン放射をはじめとする前景放射によって妨げられている。この影響を軽減するために、先行研究 (Guha. 2009) で提案された 21cm 線と CMB への弱い重力レンズ効果 (Weak Gravitational Lensing : WGL) の相互相関を考える。

1 Introduction

21cm 線の観測は、宇宙再電離期や再電離後の遠方の宇宙を直接探ることが期待されている。さらに、観測される 21cm 線は宇宙論的赤方偏移を受けているため、これを周波数毎に観測することで時系列の物質分布を知ることができる。このように 21cm 線の観測はこれまで観測できなかった領域の宇宙を観測することができる可能性を秘めている。

しかし、この観測は銀河系シンクロトロン放射をはじめとする前景放射によって妨げられている。相互相関という手法により、前景放射の影響を統計的に避けることで 21cm 線の検出可能性について議論することができる。本研究では、21cm 線と CMB への弱い重力レンズ効果 (WGL) の相互相関を考え、宇宙論パラメータを変更した時の相互相関パワースペクトルを求めた。そして、パラメータの制限にしばしば用いられるフィッシャー行列を用いて、宇宙の中性水素の割合 Omega_HI 制限を行い、最新の Omega_HI 制限 (Bull et al. 2015) との比較を行った。

2 21cm line -WGL Cross-Correlation

中性水素は、陽子と電子一つずつから成り、それぞれ 1/2 のスピンを持っている。このスピンの向きが平行の時、反平行の時に比べてエネルギー準位は高い。そのため、スピンの向きが平衡状態から反平衡状態に遷移する際に電磁波を放出、吸収を行う。その電磁波のエネルギーを波長に変換すると 21cm になることから、これを 21cm 線という。

一方、WGL とは銀河や銀河団などの大規模構造の持つ重力場の影響を受けて光路が曲げられる現象である。CMB の場合、CMB の輝度温度マップにおいて二次的な非等方性として現れる。宇宙の晴れ上がりからの CMB は我々の元に届くまでに、宇宙大規模構造を通過してくるので、重力レンズの効果を受ける。また、他のゆらぎの影響も受ける。これが二次的な非等方性である。この CMB の弱い重力レンズ効果の観測量として、収束場がある。これは重力レンズによる歪みを定量化し、視線方向の密度ゆらぎの積分として表される。収束場 κ は以下の式で表される。

$$\kappa(\boldsymbol{\theta}) = \frac{4\pi G}{c^2}\int_0^{x_s} dx \frac{S_K(x_s - x)S_K(x)}{S_K(x_s)} \times a^2[t(x)]\bar{\rho}[t(x)]\delta[x, \boldsymbol{\theta}, t(x)] \tag{1}$$

δ は密度ゆらぎである。$S_{\mathrm{k}}(x_s - x)S_{\mathrm{k}}(x)/S_k(x_s)$ は重み関数であり、重力レンズ効果の効率が距離に応じて変化することを示す。a はスケールファクターである。ρ は質量密度である。

今回、再電離後期 (z<6) における 21cm 線を考えることで、21cm 線と CMB の WGL との相互相関を取ることができる。この時代において、銀河間物質中の HI はほとんど電離してしまっている。この時の HI は主に銀河に付随して存在していることから、観

測される 21cm 線にはその銀河の物質ゆらぎの分布の情報が含まれている。同時に、このゆらぎは CMB の温度マップに WGL の影響を及ぼしているため、WGL の収束場には密度ゆらぎを通して 21cm 線との相関が生まれる。また、ゆらぎの分布は宇宙論パラメータに強く依存している。そのため、ある z に存在する銀河からの 21cm 線を観測することで、その z における宇宙論パラメー タ Omega_HI の制限が可能である。

3 power spectrum

先行研究で提案された計算手法を用いて 21cm 線と収束場の cross correlation angular power spectrum を求めた。[図 1] WGL は大きい角度スケールで像を歪ませるために、収束場を球面調和関数 Y_{lm} で展開することができる。

$$\kappa(\hat{\boldsymbol{n}}) = \sum_{l,m}^{\infty} a^{\kappa}_{lm} Y_{lm}(\hat{\boldsymbol{n}}) \tag{2}$$

この展開係数 a_{lm} を用いて、パワースペクトル $C^{\mathrm{HI}-\kappa}_{lm}$ を定義する。

$$\langle a^{\kappa}_{lm} a^{*\mathrm{HI}}_{lm} \rangle = C^{\mathrm{HI}-\kappa}_{l} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \tag{3}$$

この計算で、予想される 21cm 線と収束場の cross correlation angular power spectrum は

$$C^{\mathrm{HI}-\kappa}_{l} \propto \frac{\pi}{2} A(z_{\mathrm{HI}}) \frac{F(z_{\mathrm{HI}})}{d_A(z_{\mathrm{HI}})^2} P\left(\frac{l}{r_{\mathrm{HI}}}\right) \tag{4}$$

$$A(z_{\mathrm{HI}}) = \frac{3}{\pi} \Omega_{m0} \left(\frac{H_0}{c}\right) \bar{T}(z_{HI}) \bar{x}_{HI} D_+(z_{HI}) \tag{5}$$

$$F(z_{\mathrm{HI}}) = \frac{d_A(z_{LSS} - z_{HI}) d_A(z_{HI}) D_+(z)}{d_A(z_{LSS}) a(z_{HI})} \tag{6}$$

$$\bar{T}(z_{HI}) = 4.0mK(1+z_{HI})^2 \left(\frac{\Omega_{b0}h^2}{0.02}\right)\left(\frac{0.7}{h}\right) \times \frac{H_0}{H(z_{HI})} \tag{7}$$

と表される。P は現在のダークマターパワースペクトルを表す。H_0、c、$\bar{x}_{HI}$、D_+ はそれぞれハッブル定数、光速度、平均中性率、成長モードを表す。また、d_A、z_{LSS}、Ω_{b0}、H、はそれぞれ共同距離、最終散乱面 (Last Scattering Surface) における redshift、バリオン密度パラメータ、ハッブルパラメータを表す。今回、ある z についてのシグナルを見るため、z 依存する関数は定数として考える。これは振幅の大きさに影響を与える。パラメータ (Ω_{m0}、$\Omega_{\Lambda 0}$、h、σ_8、n_s)=(0.28、0.72、0.7、0.82、0.97) である ΛCDM 宇宙論モデルを想定した。

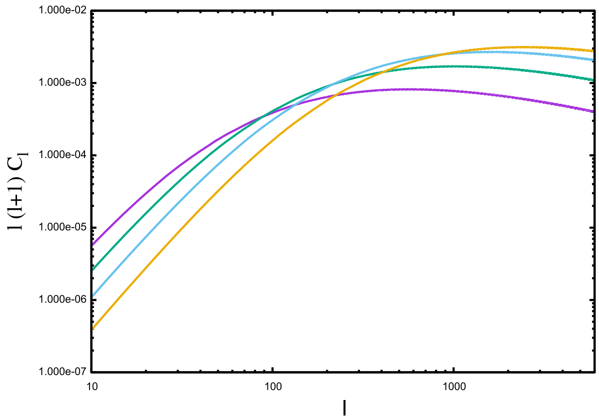

図 1: $C^{\mathrm{HI}-\kappa}_{l}$ の再現 (Guha. 2009) z=0.5(紫),1.0(緑),2.0(水色),5.0(橙) の時の $C^{\mathrm{HI}-\kappa}_{l}$ を示す。

今回、このパワースペクトルを元に宇宙論パラメータを変更し、フィッシャー解析を用いて宇宙論パラメータの制限を予測した。その時、SKA の 21cm 線観測を想定した。

SKA(Square Kilometre Array) とは、高感度・広帯域・広視野・高分解能を持った大型電波干渉計であり、センチ波、メートル波の観測を行う。現在この SKA を建設し、観測を行う SKA 計画が進行中であり、宇宙再電離期またはその後の宇宙からの 21cm 線の観測が期待されている。

4 Fisher matrix

将来の観測で得られると期待されている Omega_HI の制限を推定するためにフィッシャー解析を行った。尤度関数がガウス型であると仮定すると、フィッシャー

行列は

$$F_{ij} = \frac{1}{2}\left\langle \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial p_i \partial p_j} \right\rangle\Bigg|_{\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_{\rm fid}} \quad \boldsymbol{p} = (\Omega_{HI}、\sigma_8) \tag{8}$$

N 個の独立した観測データ $x_l(\boldsymbol{p})(l = 1, 2, \cdots N)$ に対して、χ^2 の値は

$$\chi^2(\boldsymbol{p}) = \sum_{l}^{N} \frac{[x_l(\boldsymbol{p}) - x_l(\boldsymbol{p}_{fid})]^2}{\sigma_l^2} \tag{9}$$

σ_x は $x_l(p)$ でのエラーを表す。
このときフィッシャー行列は

$$F_{ij} = \sum_{l}^{N} \frac{1}{\sigma_l^2} \frac{\partial x_l(\boldsymbol{p})}{\partial p_i} \frac{\partial x_l(\boldsymbol{p})}{\partial p_j} \tag{10}$$

フィッシャー解析において共分散行列 C_{ij} は、フィッシャー行列の逆行列である。

$$C_{ij} = F_{ij}^{-1} \tag{11}$$

$\sqrt{F_{ij}^{-1}}$ から予想される p_i の 1σ での誤差を見積もることができる。

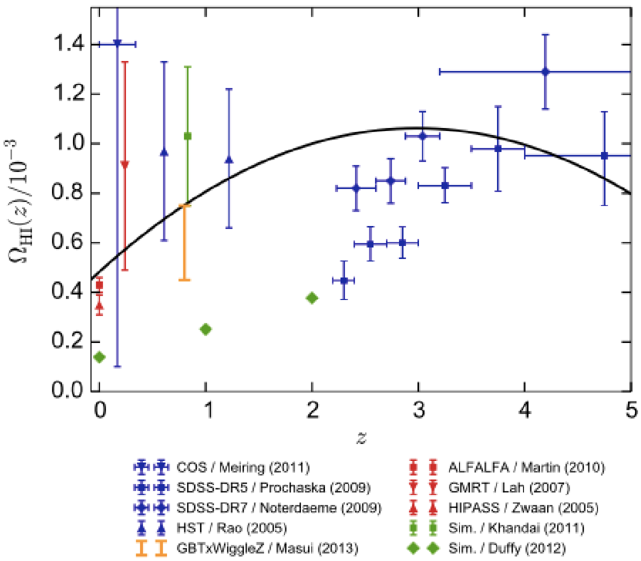

図 2: $\Omega_{\rm HI}$ の制限 (Bull et al. 2015)

5 Conclusion&Prospect

今回、z=0.5 の時の $C_{lm}^{{\rm HI}-\kappa}$ を $\Omega_{\rm HI}$ の制限に用いた。他の z(z=1.0,2.0,5.0) の $C_{lm}^{{\rm HI}-\kappa}$ における Ω_{HI} の制限を最新の Omega_HI 制限 (Bull et al. 2015) との比較を行う。

また、本研究での宇宙論パラメータの制限は、二つのパラメータ ($\Omega_{\rm HI}$,σ_8) のみを変更して行った。その際、他の宇宙論パラメータは固定している。それに伴う影響が今回の制限にどのように及ぼされていくのか今後確認していく。

特に、現在得られている銀河系シンクロトロン放射の分布を用いて、前景放射の相互相関への影響を明らかにする。これによって、さらなる $\Omega_{\rm HI}$ の制限を行い、より厳密な 21cm 線の検出可能性について研究を行っていく。

Reference

Tapomoy Guha Sarkar, 2009, Journal of Cosmology and Astrophysics , Issue 02,pp.002(2010)

Bull et al.2015, ApJ 803, 21 (2015)

——index

a18

21-cm 線グローバルシグナルに残された初代星の痕跡

田中俊行 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙初期に形成された密度ゆらぎが成長し, ハローと呼ばれる暗黒物質の構造が形成される．そのハロー内にて, 宇宙で最初の世代の恒星である初代星が形成される．初代星から供給される重元素は後の星形成を促進し, 電離光子は宇宙の熱史に直接影響する．その影響度合を決定づけるのは初代星の星質量である．故に多くの理論研究が初代星の星質量関数の解明を試みてきた．しかし, 各研究間で異なる形の星質量関数が示唆されており, 未だ合意形成に至っていない.

この現状の打開策となり得るのが 21-cm 線観測である．21-cm 線とは中性水素の超微細構造由来の電磁波であり, そのシグナル強度は水素の状態（e.g. 密度, 温度, 電離度）に依存する．先行研究では輻射輸送/流体シミュレーションを用い, 個々の初代星周囲のガスの状態を計算することで, 21-cm 線シグナル分布を見積もっている．しかし, 初代星起源の 21-cm 線シグナルは視直径が小さく, Square Kilometre Array (SKA) などの将来観測でさえ分解できないと考えられている．一方, 電波望遠鏡 EDGES の観測報告により昨今注目を集めている 21-cm 線の全天平均シグナル（21-cm 線グローバルシグナル; 以後単にグローバルシグナル）の観測は空間分解する必要がないため, 比較的観測が容易である.

そこで本研究では, 輻射流体シミュレーションにより得られた初代星周囲の物理量分布を応用し, グローバルシグナルの初代星質量依存性を調査した．その結果, 星寿命と星周囲のガスの加熱率の星質量依存性がグローバルシグナルに反映されることが初めて明らかとなった.

1 Introduction

現在広く認められている宇宙論の構造形成モデル (ΛCDM モデル) によると, 赤方偏移 $z \sim 20-30$ にて, ミニハロー $M_{\rm halo} \sim 10^{5-6} M_{\odot}$ が形成され, その中心付近にて初代星は形成されると考えられている．宇宙で最初の電離光子と重元素の供給源天体で初代星は, 宇宙の熱史と構造形成に多大な影響を与える．その影響の程度は初代星の星質量に強く依存する．しかし, 現在初代星の観測証拠は乏しく, 観測からの制限は未だない．一方, 理論研究によって, 初代星は典型的に大質量であると予言されているが, 星質量関数の形に関しては各先行研究間で合意形成に至っていない (e.g. Hirano et al. 2015; Susa et al. 2014).

そこに一石を投じようとしているのが 21-cm 線観測である．21-cm 線とは, 中性水素の超微細構造由来の放射であり, SKA に代表される次世代大規模電波干渉計による観測に期待が寄せられている．しかし, 初代星周囲の 21-cm 線構造を輻射輸送/輻射流体シミュレーションによって見積もった先行研究 (e.g. Chen & Miralda-Escudé 2014; Yajima & Li 2014; Tanaka et al. 2018) によると, SKA の分解能をもってしてもシグナル構造を分解することは難しい.

初代星個々のシグナル構造の観測は難しいが, EDGES の観測報告 (Bowman et al. 2018) により昨今注目を集めている 21-cm 線グローバルシグナルは, 21-cm 線シグナルの全天平均値であるため, 空間構造を分解する必要がなく, 比較的観測が容易である．これまでグローバルシグナルは理論計算によって予言されていた．しかし, 初代星の星形成率密度は考慮されていても, 星質量は考慮されてこなかった．また, 様々な物理過程を簡単にモデル化することによって宇宙の平均的な物理量を計算し, 21-cm 線輝度温度を計算している．しかし, 実際には 21-cm 線シグナルは空間構造をもっており, その空間重み付き平均値がグローバルシグナルとして観測される．この両者は一般的には一致しないため, 21-cm 線シグナルの 3 次元分布の空間平均値を計算することで、グローバルシグナルを見積もる必要がある.

そこで本研究では, 初代星質量依存性を考慮しつつ, 初代星周囲の物理量を輻射流体シミュレーションによって詳細に計算した先行研究の結果を応用し, 様々な星質量の場合で 21-cm 線の 3 次元マップを作成する. その 3 次元マップを空間平均することで, グローバルシグナルを計算し, その星質量量依存性を調査する.

2 Methods

2.1 21-cm signal

21-cm 線輝度温度は宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) との差として次のように書ける (Furlanetto & Oh 2006):

$$\begin{aligned}\delta T_{\rm b} =& \frac{T_{\rm S} - T_{\rm CMB}(z)}{1+z}(1-{\rm e}^{-\tau_{21}}) \\ \approx& 38.7\frac{n_{\rm HI}}{\bar{n}_{\rm H}}\left(\frac{1+z}{20}\right)^{1/2}\frac{T_{\rm S}-T_{\rm CMB}(z)}{T_{\rm S}}\ {\rm mK},\end{aligned} \tag{1}$$

ここで, $T_{\rm S}$, $T_{\rm CMB}(z)$, τ_{21}, $n_{\rm HI}$, $\bar{n}_{\rm H}$ はスピン温度, z における CMB 温度, 21-cm 線の光学的厚み, 中性水素の数密度, 宇宙における水素の平均密度である. スピン温度は, CMB 光子による励起・脱励起, ガス粒子との衝突, Lyα 光子との相互作用 (WF 効果) のバランスによって次のように決定される:

$$T_{\rm S}^{-1} = \frac{T_{\rm CMB}^{-1} + x_{\rm c}T_{\rm gas}^{-1} + x_\alpha T_\alpha^{-1}}{1+x_{\rm c}+x_\alpha}, \tag{2}$$

ここで, T_α は Lyα 光子の色温度である. Lyα 光子の光学的厚みが十分大きい時, $T_\alpha = T_{\rm gas}$ が成立する. 本研究では, 常にこれが成り立つ状況を扱う. 衝突結合定数 $x_{\rm c}$ と Lyα 結合定数 x_α はそれぞれ次のように与えられる:

$$x_{\rm c} = \frac{C_{10}T_*}{A_{10}T_{\rm CMB}}, \qquad x_\alpha = \frac{P_{10}T_*}{A_{10}T_{\rm CMB}}, \tag{3}$$

ここで, C_{10}, P_{10}, A_{10}, T_* はそれぞれ, 衝突による脱励起率, 単位時間あたりに 1 つの水素原子に生じる Lyα の散乱回数, 水素の超微細構造の自発放射係数, 超微細構造間のエネルギー差に対応する温度である. $T_* = 0.068$ K, $A_{10} = 2.85 \times 10^{-15}\ {\rm s}^{-1}$ である.

上式が示しているように, 空間の各点において, x_α, $x_{\rm c}$, $T_{\rm gas}$, 中性水素の電離度 $x_{\rm ion,\ HI}$ が求まると式 (2) より $T_{\rm S}$ が得られ, 式 (1) により 21-cm 線輝度温度が得られる.

2.2 Radiative Hydrodynamics Simulations

21-cm 線シグナルの三次元マップ作成に先立ち, まず, 個々の初代星周囲の物理量を計算する必要がある. そこで本研究では, Tanaka et al. (2018) で用いられた一次元球対称輻射輸送シミュレーションの計算コードを使用した. ミニハローの中心に 1 つの初代星が形成された時刻を初期時刻として計算を開始する. 星から放射される光子の輻射輸送と電離等の化学反応, それに伴うガスの運動をすべて整合的に解く. 核種は e, HI, HII, H^-, H_2, H_2^+, HeI, HeII, HeIII を扱う. また, ハロー内のガス密度分布を冪乗則に従うモデルにより考慮した. 実際の計算結果の一例を図 1 に示す.

2.3 21-cm Global Signal

この節では, 本研究で用いたグローバルシグナルの計算方法を述べる. 星周囲の物理量は $M_{\rm star}$ に依存する ($M_{\rm halo}$, $t_{\rm age}$, z にも依存する) ため, それを用いてグローバルシグナルを計算することで, グローバルシグナルの星質量依存性を調べることができる. 赤方偏移は現在最も注目されている $z = 20$ に固定する (Bowman et al. 2018).

1. まず, 三次元計算領域内に星年齢 $t_{\rm age}$ の 10 個の初代星をランダムに配置する. 領域の境界には周期境界条件を適用する. 1 つの星が平均的に占める体積は $n_{\rm star}^{-1}$ Mpc^3 なので, 計算領域の体積は $10n_{\rm star}^{-1}$ Mpc^3 に相当する. ここで, 初代星の数密度 $n_{\rm star}$ は次のように与えられる:

$$n_{\rm star} = \frac{\dot{\rho}_\star t_{\rm life}}{M_{\rm star}}, \tag{4}$$

ここで, $t_{\rm life}(M_{\rm star})$ は初代星の寿命, $\dot{\rho}_\star$ は星形成率密度である. グリッドの数は空間分解能が少なくとも 4 physical kpc となるように設定す

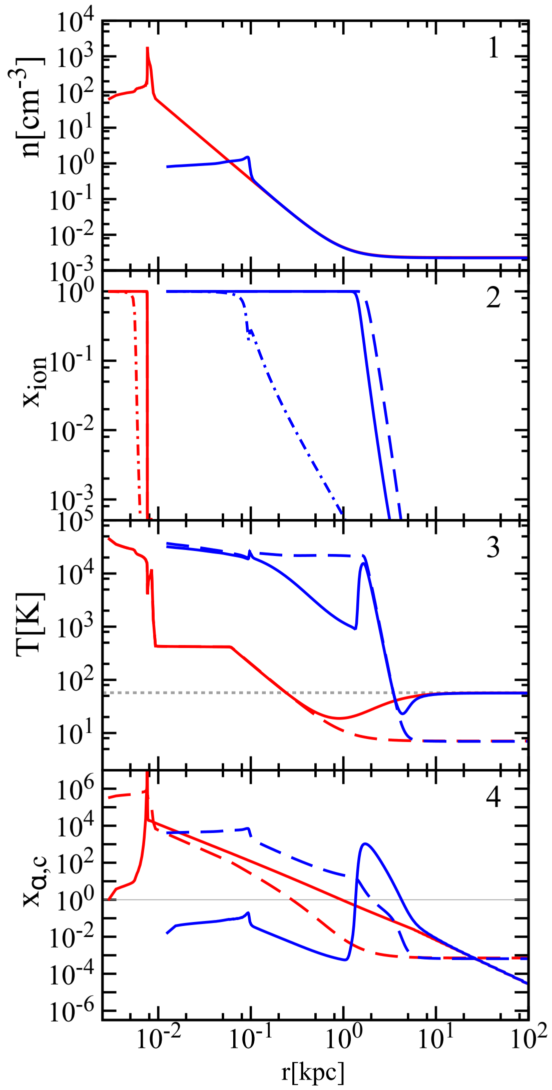

図 1: 星からの距離の関数としての初代星周囲の物理量分布．上から順に，ガスの数密度，電離度 (HI:実線，HeI:破線，HeII: 一点鎖線)，温度 (ガス温度: 破線，スピン温度: 実線)，結合定数 (Lyα 結合定数: 実線，衝突結合定数: 破線) である．星誕生からの時刻は 0.5Myr (赤線) と 2.7 Myr (青線).

る．星年齢とハロー質量はそれぞれ一様確率分布関数と Press-Schechter 質量関数に従う確率分布関数を用いてランダムに決定する．本研究では特に，グローバルシグナルの星質量依存性を明らかにすることに重点を置いているため，初代星は全て同じ質量 M_{star} を持つとする．

2. 計算領域中の星の位置と輻射輸送シミュレーションから得られたそれぞれの星周囲の物理量分布より，各グリッドの物理量を決定する．その際，全ての星からの寄与を考慮する: 中性水素の数密度 n_{HI} は足し合わせ，ガス温度 T_{gas} は最大値をとる．また，Lyα の結合定数 x_α は足し合わせるが，シミュレーションから得られる結果より外側では $x_\alpha \propto r^{-2.4}$ を仮定し外挿する (Pritchard & Furlanetto 2015)．また，ライマン系列光子の horizon を考慮する (Ahn et al. 2015).

3. 各グリッドに与えられた T_{gas}, n_{HI}, x_α を用いることで[1]，δT_{b} を計算し (1)，全てのグリッドの δT_{b} の平均を取ることでグローバルシグナル $\delta T_{\mathrm{b,\ global}}$ を得る[2].

異なる M_{star} と $\dot{\rho}_\star$ のパラメータセットに対し，異なる星の位置，年齢，ハロー質量にて 2000 回計算を実行し，平均値と分散を求める．

3 Results

得られたグローバルシグナルを初代星質量と星形成率密度の関数としてプロットしたものが図 2 である．星質量依存性は主に星の寿命とガスの加熱率に起因している．まず，図 2 の $T_{\mathrm{gas}} = T_{\mathrm{IGM}}(z)$ を仮定した細線から，星質量に依存する星寿命の影響を議論する．先行研究 (e.g. Furlanetto 2006; Pritchard & Loeb 2010) が示しているように，高い星形成率密度の場合，$|\delta T_{\mathrm{b,\ global}}|$ は大きくなる．これは，星の数が多いほど WF 効果がより効き，T_{S} が T_{gas} により強く結合することに起因している．また，$|\delta T_{\mathrm{b,\ global}}|$ は星質量が大きいほど小さくなる．これは，Lyα 光子数が合計星質量量に比例するからである: $\propto \dot{\rho}_\star t_{\mathrm{life}}$ (式 4)．ただし，星の寿命に起因するグローバルシグナルの星質量依存性は小さい．

[1] 衝突結合定数 x_{c} に関しては $z = 20$ にて十分小さいか，x_α より十分小さくなるため $x_{\mathrm{c}} = 0$ として扱う．

[2] 宇宙の平均密度場中にハローを配置するため，強いグローバルシグナルを得てしまう．そのため，計算領域内の平均密度が宇宙の平均密度になるよう $\delta T_{\mathrm{b,\ global}}$ を re-scale し整合性を持たせる．

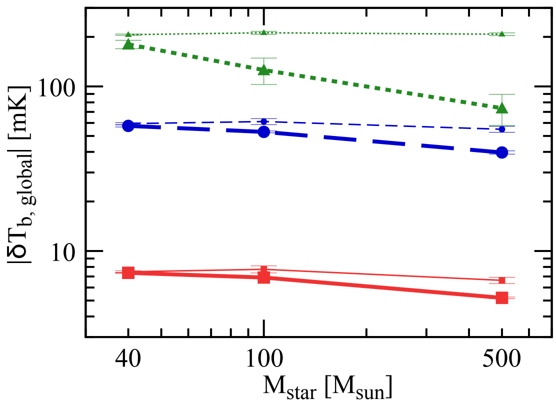

図 2: グローバルシグナルの絶対値．赤方偏移 $z = 20$, 星形成率密度 $\dot{\rho}_\star = 5 \times 10^{-5}$ $\mathrm{M_\odot\ yr^{-1}\ Mpc^{-3}}$ (赤実線), $\dot{\rho}_\star = 5 \times 10^{-4}$ $\mathrm{M_\odot\ yr^{-1}\ Mpc^{-3}}$ (青破線), $\dot{\rho}_\star = 5 \times 10^{-3}$ $\mathrm{M_\odot\ yr^{-1}\ Mpc^{-3}}$ (緑点線) 実際の値は全て負である．太線は輻射輸送シミュレーションより得られたガス温度分布を用いた結果である．一方, 細線は $T_{\rm gas} = T_{\rm IGM}$ として計算した結果である．

図 2 の太線と細線の差はガス加熱の重要性を示している． もっとも SFRD が高い場合 ($\dot{\rho}_\star = 5 \times 10^{-3}$ $\mathrm{M_\odot\ yr^{-1}\ Mpc^{-3}}$), WF 効果が強く, グローバルシグナルは平均ガス温度に強く依存するため, 太線と細線の差は大きくなる．しかし, $M_{\rm star} = 40\ \mathrm{M_\odot}$ の場合, 合計星質量が大きいにも関わらず, ガス加熱の効果は比較的小さい．これは星周囲のガスの加熱率の星質量依存性に起因する．星質量が大きい場合, 星から放射される電離光子はハロー内ガスを星の寿命に対して十分短い時間で電離する．そのため, ハローから電離光子が脱出する割合 (電離光子脱出率) が大きく, ハロー周囲のガスを効率よく加熱する．一方, 星質量が小さい場合, 星からの電離光子の数が少なく, ハロー内ガスを電離するのに時間がかかるか, または, 星寿命の間に完全には電離できない．そのため, 平均的な電離光子脱出率は小さくなり, 周囲のガス加熱は比較的効かない．

4 Conclusion

本研究では, 初代星の星質量が 21-cm 線グローバルシグナルにどのように反映されるかを調査した．その際, 輻射流体シミュレーションにより得られた個々の初代星周囲の物理量分布の結果を応用した．ある SFRD に対して, 長寿命である低質量の初代星はより多くの Lyα 光子を供給する．そのため, WF 効果がより効果的になる．しかし, この寿命の差によるグローバルシグナルの星質量依存性は比較的弱いことがわかった．より強い星質量依存性はガスの加熱率に起因する: 大質量星はより多くの電離光子を放射するため, 星の寿命に対して早い段階で電離光子脱出率が大きくなり, 周囲のガスを効率よく加熱する．一方, 小質量星の場合, 加熱率は低い．本研究により得られたこれらの結果は, グローバルシグナルの観測データと本研究のモデルを比較することにより, 観測データから初代星質量の情報が得られることを示唆している．

Reference

Ahn, K., Xu, H., Norman, M. L., Alvarez, M. A., Wise, J. H. 2015, ApJ

Bowman, J. D., Rogers, A. E. E., Monsalve, R. A., Mozdzen, T. J., Mahesh, N. 2018, Nature

Chen, X., Miralda-Escudé, J. 2008, ApJ

Furlanetto, S. R. 2006, MNRAS

Furlanetto, S. R., Oh, S. P. 2006, ApJ

Hirano, S., Hosokawa, T., Yoshida, N., Omukai, K., Yorke, H. W. 2015, MNRAS

Pritchard, J. R. and Furlanetto, S. R. 2006, MNRAS

Pritchard, J. R. and Loeb, A. 2010, Phys. Rev. D

Susa, H., Hasegawa, K., Tominaga, N. 2014, ApJ

Tanaka, T., Hasegawa, K., Yajima, H., Kobayashi, M. I. N., Sugiyama, N. 2018, ArXiv e-prints: 1805.07947

Yajima, H., Li, Y. 2014, MNRAS

——index

a19

ライマン α 線を用いた小スケールの等曲率ゆらぎへの制限

吉田 貴一 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

現在観測される宇宙の大規模構造は、宇宙初期に存在した密度ゆらぎが時間とともに成長して形成されたものである。初期のゆらぎには、曲率ゆらぎと等曲率ゆらぎがある。*Planck* 衛星による宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) の温度ゆらぎの観測結果は、大スケールにおいて曲率ゆらぎのみを考慮した場合とよく一致している。一方、*Planck* 衛星で制限されていない小スケールにおいて等曲率ゆらぎを生成するシナリオも存在する。このモードを制限するためには、*Planck* 衛星のデータよりも小さなスケールの情報が必要である。このような小スケールの情報を得るために、Lyα forest を用いることができる。Lyα forest は高分解能で観測できており、この吸収線は小スケールの密度ゆらぎの情報を含んでいる。

本発表ではクエーサーからの Lyα forest のデータと *Planck* 衛星のデータを合わせることで、小スケール $k \sim 1$ h/Mpc における等曲率ゆらぎに与えた制限について報告をした。

1 Introduction

ビッグバンの証拠である宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) の観測やダークマターの必要性を示す宇宙の大規模構造の観測などにより、我々の宇宙に関する知識は格段に増大した。2015 年にはレーザー干渉計重力波観測所 (LIGO) がブラックホール連星からの重力波の検出に成功し、宇宙解明への新たな扉が開かれた。

CMB のわずかな温度の非等方性は現在観測される宇宙の大規模構造が曲率のゆらぎから生じたという理論により説明ができている。しかし、*Planck* 衛星が観測したスケールは $k \sim O(0.1)$ h/Mpc までであるため宇宙の全てのスケールが曲率のゆらぎから始まったとは言い切れない。ゆらぎの初期条件の候補にはもう一つ、等曲率ゆらぎというものがある。例えば、ブラックホール連星の起源の候補とされる「宇宙初期に誕生したブラックホール (PBH)」の数密度のゆらぎは等曲率ゆらぎを作る (Gong & Kitajima 2017)。さらに、このモデルから生じるゆらぎは *Planck* 衛星が観測したスケールよりも小さい領域に痕跡を残すため、あまり制限ができていない。本研究ではこのような小スケールの等曲率ゆらぎに着目した。

小スケールのゆらぎの情報を知るために、銀河間ガス (IGM) 中における中性水素の分布の情報を持つ Lyα forest を用いることができる。今回は *Sloan Digital Sky Survey*(SDSS) が観測したクエーサー 3035 個の Lyα forest のデータから得られた $z = 3, k \sim 1$ h/Mpc における密度ゆらぎのパワースペクトル (McDonald et al. 2006) を用いた。このデータと *Planck* 2015 の CMB の観測データを組み合わせることで、小スケールの等曲率ゆらぎに与えた制限について報告をする。また、角度パワースペクトル、および物質の密度ゆらぎのパワースペクトルの計算は CLASS を用いた。

第 2 章では宇宙の初期条件の概要、第 3 章では Lyα forest とそれを用いた制限方法、第 4 章では結果の報告、最後にまとめと今後の課題について述べる。

2 Initial condition

初期の宇宙の構成成分には光子、ニュートリノ、コールドダークマター、バリオンがある。ここでは、それらが作る 2 つの独立な初期条件と観測による現在の制限について簡単に述べる。

2.1 Curvature perturbation

曲率ゆらぎはインフレーション理論で予言されるゆらぎである。このモードを考える時、エントロピーのゆらぎは 0 であるため断熱ゆらぎと呼ぶこともあ

る。この時曲率ゆらぎ ζ は超ハッブルスケールで一定の値をもつ。そのため当時の宇宙の構成要素全てを足した全密度がゆらぐ。しかし、上で述べたようにエントロピーのゆらぎがないので構成要素の密度ゆらぎの比は一定である。これを式で示すと以下のようになる。

$$\delta\rho = \sum_a \delta\rho_a \neq 0 \tag{1}$$

$$\frac{\delta_a}{1+w_a} = \frac{\delta_b}{1+w_b} \tag{2}$$

ただし、a,b は成分の種類を示し、δ, w はそれぞれ密度ゆらぎ、状態方程式パラメータである。

次の図は CMB の温度ゆらぎの角度パワースペクトルである。データ点は *Planck* 衛星の観測結果を示し、赤線はベストフィットの理論曲線を示す。曲率ゆらぎを初期条件とした時、観測データをうまく説明できる。

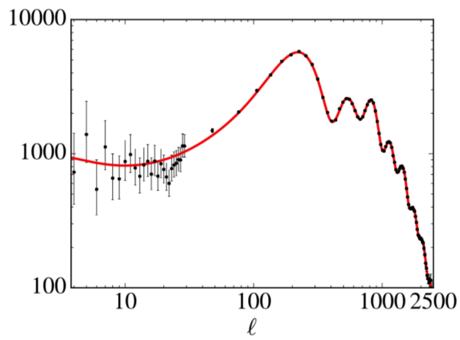

図 1: CMB 温度ゆらぎの角度パワースペクトル

2.2 Isocurvature perturbation

超ハッブルスケールで曲率ゆらぎとは独立に発展するゆらぎが等曲率ゆらぎである。このゆらぎは「等曲率」であるため曲率のゆらぎは 0 である。そのかわり、エントロピーゆらぎ S_{ab} が成長するモードである。等曲率ゆらぎは次のように表現できる。

$$S_{ab} = \frac{\delta_a}{1+w_a} - \frac{\delta_b}{1+w_b} \tag{3}$$

初期宇宙は放射優勢期であったため、他の成分を放射成分 (光子+ニュートリノ) と比較することが多い。考える成分によって異なる等曲率ゆらぎを考えることができ、バリオン等曲率モード (BI)、コールドダークマター等曲率モード (CDI)、ニュートリノ等曲率モード (NI) などがある。また、以下ではコールドダークマター等曲率モードのみについて考える。

3 Methods

この章では小スケールの等曲率ゆらぎへ制限を与えるために用いた Lyα forest について、そしてその方法について説明をする。

3.1 Lyα forest

Lyα 吸収線は電子のエネルギー準位が $n=1$ から $n=2$ に励起する時に見られるスペクトルであり、中性水素の場合この波長は 1216 Å に対応する。銀河やクエーサーなどの天体が放射した光は、我々に届くまでに銀河間ガス (IGM) 中の中性水素領域を通過するため、Lyα の吸収線が見られる。さらに、この光は赤方偏移をしながら我々に届くので、中性水素領域を通過した時にちょうど 1216 Å に相当するスペクトルが吸収される。よって最終的に我々が観測する時には多くの吸収線を見ることができ、これを Lyα forest と呼んでいる。

3.2 Lyα forest とダークマターの密度ゆらぎ

ここでは Lyα forest とダークマターの密度ゆらぎがどのように結びついているのかを述べる。

観測される Lyα 吸収線のフラックスは中性水素領域の光学的深さ τ を用いて次のように表現できる。ただし $F_{\rm obs}$ は観測したフラックスであり、$F_{\rm emit}$ は天体が放射した時のフラックスである。

$$F_{\rm obs}(\lambda) = F_{\rm emit}(\lambda)e^{-\tau(\lambda)} \tag{4}$$

光学的深さは中性水素の数密度 $n_{\rm HI}$ に比例している。そして、「銀河間ガスは中性水素の再結合率と星や銀河からの紫外線によるイオン化率が釣り合っている」という平衡状態を仮定すると

$$\tau \propto n_{\rm HI} \propto \rho_b^2 T^{-0.7} \tag{5}$$

という関係を導くことができる。ここで ρ_b はバリオンの密度であり、温度の指数は水素の再結合率の温度依存性から得られる。また、IGM が光イオン化による加熱と宇宙膨張による断熱冷却の影響のみを受けるような低密度のガスであると仮定すると IGM の温度とバリオンのゆらぎ δ_b は

$$T = T_0(1+\delta_b)^\alpha \tag{6}$$

と書くことができる。ここで T_0 は IGM の平均密度における温度を示す。また、α および T_0 は宇宙の熱史に依存し、$0.3 < \alpha < 0.6, T_0 \sim 10^4$ K である。

低密度ガスであるためガスを支配している力は重力のみで圧力はあまり効かない。よってバリオンのゆらぎ δ_b が大まかにダークマターのゆらぎ δ をトレースしていると思うと、上の関係式から光学的深さはダークマターの密度ゆらぎを用いて

$$\tau(z) \propto (1+\delta(z))^\beta \tag{7}$$

と書くことができる ($\beta = 2 - 0.7\alpha$)。よって Lyα forest の観測から視線方向のダークマターの密度ゆらぎの分布がわかるため、パワースペクトルを計算することができる。

CMB は角度分解能が見ることのできるスケールを決めているが、Lyα forest は視線方向をどれだけ細かく見ることができるかという振動数分解能がスケールを決める。SDSS の観測は、CMB よりも小さなスケール $k \sim O(1)$ h/Mpc まで調べることのできる優れた分解能を持つ。

3.3 制限方法

等曲率ゆらぎへの制限はマルコフ連鎖モンテカルロ法 (MCMC) で行う。用いたものは *Planck* 2015 の CMB の観測データと SDSS のクエーサー 3035 個の観測データから得られた赤方偏移 $z = 3, k \sim 1.0$ h/Mpc における物質の密度ゆらぎのパワースペクトルの値である (McDonald et al. 2006)。ΛCDM モデルで用いられる宇宙論パラメータ $(\theta_s, \Omega_\mathrm{b}h^2, \Omega_\mathrm{c}h^2, A_\mathrm{s}, n_\mathrm{s}, \tau_\mathrm{reio})$ に等曲率ゆらぎの曲率ゆらぎに対する振幅 f_cdi を加えてパラメータ推定を行った。

等曲率ゆらぎと曲率ゆらぎは独立であるため f_cdi を用いた等曲率ゆらぎのパワースペクトルは曲率ゆらぎのパワースペクトルに足されることで寄与する。

$$P_\mathrm{cdi}(k) = A_s f_\mathrm{cdi}^2 \frac{2\pi}{k^3}\left(\frac{k}{k_0}\right)^{n_\mathrm{cdi}-1} \tag{8}$$

ただし、等曲率ゆらぎのスペクトル指数は $n_\mathrm{cdi} = 4$ とした。また、MCMC を行う際に、$\log_{10}(f_\mathrm{cdi})$ をパラメータとした。

4 Results

次の図は MCMC でパラメータ推定を行った時の結果である。

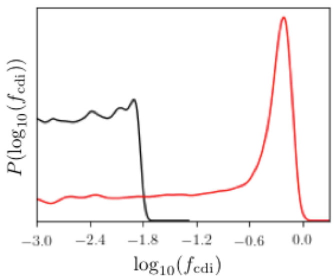

図 2: f_cdi の確率密度

図 2 の横軸は $\log_{10}(f_\mathrm{cdi})$ の値を示しており、縦軸はその値をとる確率を示す。赤の線で書いたものが *Planck* CMB のデータのみを用いた時の結果を示し、黒の線で書いたものが Lyα forest のデータを加えた時の結果を示す。*Planck* CMB のデータのみを用いた時よりも Lyα forest のデータを加えた時の方が f_cdi の許される値の範囲が小さくなっていることがわかる。実際それぞれの場合の 95%の信頼区間は、*Planck* CMB のデータのみの時は $\log_{10}(f_\mathrm{cdi}) < -0.1135$、Ly$\alpha$ forest のデータを加えた時は $\log_{10}(f_\mathrm{cdi}) < -1.858$ となった。つまり、ここで考えている等曲率ゆらぎは曲率ゆらぎに対して 1 %以下しか寄与できないという結果となった。

5 Conclusion and future work

今回は *Planck* 2015 の CMB の観測データと、SDSS によるクエーサーの観測データ (Lyα forest) を組み合わせることで、スペクトル指数 $n_{\rm cdi}=4$ の等曲率ゆらぎの曲率ゆらぎに対する振幅 $f_{\rm cdi}$ への制限を行った。そして、$f_{\rm cdi}$ は 1%以下しか許されないという結果を得た。これは *Planck* 衛星の結果のみを用いて制限を与えた時の 10 倍以上厳しい。

本研究で考えたような CMB よりも小さなスケールの宇宙論を調べるためのデータとして、Lyα forest はとても有用である。

今回着目したスケール $k\sim 1\ h/{\rm Mpc}$ よりもずっと小さなスケールのゆらぎは非線形領域に入っているため、より複雑な物理になることが予想される。しかし、例えばウォームダークマターモデルはそのようなスケールに痕跡を残すと言われており、今後の課題として制限をつけたい。

Acknowledgement

本発表のためにご指導してくださった宇宙論研究室の皆様に感謝申し上げます。特に講師の田代寛之さん、ポスドクの北嶋直弥さん、博士課程の大場淳平さん、簑口睦美さんには忙しい中多くの助言をいただきました。ありがとうございました。

Reference

Gong, J.-O., & Kitajima, N. 2017, JCAP, 8, 017

McDonald, P., Seljak, U., Burles, S., et al. 2006, ApJS, 163, 80

——index

a20

アクシオンの自己相互作用による宇宙の構造進化

福永 颯斗 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

アクシオンとは素粒子物理学から予言されるスカラー粒子である．QCD アクシオンが導入されて以降，超弦理論からもアクシオンの生成が予言されている．多くの場合アクシオンの質量は軽く，持ちうる質量の範囲は広いと考えられている．一方で，宇宙論においてアクシオンのようなスカラー場が宇宙に存在すれば，インフレーションやダークマターといった，宇宙論における未解明の物理を解決することができる．以上のことからアクシオンの宇宙論的な性質について調べ，観測的に制限をつけることは有意義である．

本講演では，まず先行研究 [1]，[2] で用いられている解析手法を用いて，アクシオンの密度ゆらぎの成長について議論する．その際アクシオンを質量を持つ耳痛ばと仮定した上で，密度揺らぎの時間発展を導いている．しかし，一般にはアクシオンの非線形な自己相互作用が存在する．そこで，自己相互作用を考慮したアクシオンのポテンシャルを与えて，その場合の密度ゆらぎの進化について議論する．

1 Introduction

近年の観測結果により，宇宙に存在する物質要素の多くがダークマターとして存在することが知られている．ダークマターの存在量は Planck による宇宙背景放射の観測から指摘されており，宇宙のエネルギー密度の 26.8% を占めることが知られている．また，現在の宇宙は，銀河，銀河団，ボイドなどによって大規模構造を形作っていることがわかってきた．この成り立ちを初期宇宙のダークマターの密度揺らぎからも説明することができる．特に，非相対論的粒子から構成されるコールドダークマターは小スケールのゆらぎが消されずに存在し，小さな構造から先に形成される．それが重力によって集まることで，より大きい構造を作る．このようにダークマターについて調べることで宇宙の構造形成について調べることができる．以上よりダークマターについて調べることは現在の宇宙物理において有意義であると考えられる．

ダークマターにはいくつかの候補があり，素粒子物理学から予言される候補の一つとしてアクシオンが挙げられる．この粒子は強い CP 問題を解決するために導入されたスカラー場であるが，その性質からダークマターとして扱うことができる．論文 [5] ではアクシオンのダークマターとしての振る舞いを調和振動子型のポテンシャルを用いて調べると，小スケールではゆらぎの成長がおきず，観測とのずれが生じることが述べられている．そこで先行研究 [1][2] ではポテンシャルを調和振動子型とそれに非調和振動子部分を微小量加えたものを用いて，重力不安定性を起こすスケールの違いについて解析的な議論がなされ，非調和振動子部分を加えると，小スケールの揺らぎの成長が期待されることが述べられている．また，一般にはアクシオンのポテンシャルは非調和振動子の部分があることで非線形な自己相互作用を起こしうるポテンシャルをもつことが示唆されている．そこで本講演では非調和振動子部分における自己相互作用が生じることが予想されるポテンシャルを用いて，密度ゆらぎの成長について調べる．

2 アクシオンの密度ゆらぎ

アクシオン場は対称性が破れたことによって生じるスカラーボソンである．まず初めに線形摂動論を用いたアクシオン場の方程式について述べる．ただし，共形ニュートンゲージを考え，非等方圧力は 0 とする．このときスカラー摂動を考えた計量は

$$ds^2 = (1 + 2\Psi)dt^2 - a^2(t)(1 - 2\Psi)d\mathbf{x}^2 \tag{1}$$

となる．ここで Ψ は重力ポテンシャルを表す．またラグランジアンは計量を $g_{\mu\nu}$，アクシオン場を ϕ，ポ

テンシャルを $V(\phi)$ と表すと，

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi) \tag{2}$$

となる．背景のアクシオン場の運動方程式は Klein-Gordon 方程式から得られ，

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \tag{3}$$

となる．ここで $\dot{}$ は時間 t による微分であり，$'$ は背景場 ϕ による微分を表す．また背景のアクシオン場は一様等方を仮定し，時間のみに依存するとする ($\phi(\mathbf{x},t) = \phi(t)$)．このとき，線形化した非一様場および重力ポテンシャルの方程式は

$$\begin{aligned} \delta\ddot{\phi} + 3H\delta\dot{\phi} + V''(\phi)\delta\phi &- \frac{\nabla^2}{a^2}\delta\phi \\ &= 4\dot{\phi}\dot{\Psi} - 2V'(\phi)\Psi \end{aligned} \tag{4}$$

$$\frac{\nabla^2}{a^2}\Psi = \frac{1}{2M_{\rm Pl}^2}[\dot{\phi}\delta\dot{\phi} + V'(\phi)\delta\phi + 3H\dot{\phi}\delta\phi - \dot{\phi}^2\Psi] \tag{5}$$

と表すことができる．ここで H はハッブルパラメータを表し，$\delta\phi(\mathbf{x},t)$ はアクシオン場の非一様成分を表す．また $M_{\rm Pl} \equiv 1/\sqrt{8\pi G}$ はプランク質量である．(5) 式はアインシュタイン方程式の摂動から得られるものであり，右辺 [ ] 内は密度ゆらぎ $\delta\rho$ を表している．今，構造形成の重力不安定性理論を考えるにあたり，因果的な領域にしか物質を集めることができないことから sub-Horizon 領域を考える．そこで (4)，(5) 式に $H^2, |\dot{H}| \ll k^2/a^2$ の近似を用いる．すると重力ポテンシャルを ϕ と $\delta\phi$ で表すことができる．

$$\Psi \sim -\frac{a^2}{2M_{\rm Pl}^2k^2}[\dot{\phi}\delta\dot{\phi} + V'(\phi)\delta\phi] \tag{6}$$

$$\dot{\Psi} \sim -\frac{a^2\dot{\phi}}{2M_{\rm Pl}^2k^2}[\delta\ddot{\phi} + V''(\phi)\delta\phi] \tag{7}$$

以下でこれらの方程式系を用いて，ゆらぎ $\delta\phi$ の性質について述べる．これにあたり，まず先行研究 [1], [2] で述べられている解析手法について述べる．

2.1 ジーンズ不安定性

ゆらぎの成長を考えるにあたり，特徴的なスケール: ジーンズスケールについて述べる．ジーンズスケールとは重力による収縮と圧力による反撥が釣り合うスケールであり，これよりも大きいスケールではゆらぎが成長する．まず解析的な計算が可能なモデルとして，調和振動子型のポテンシャル ($m^2\phi^2/2$) と非調和振動子部分を微小に加えたモデル ($m^2\phi^2/2 + \lambda\phi^4/4$) を考える．ただし，$\phi \ll 1$ では調和振動子に収束すると仮定し，$m^2 \gg |\lambda|\phi^2$ とする．

具体的に起きている不安定性はパラメータ共鳴であり，一般的にマシュー方程式

$$\delta\ddot{\phi} + (P - 2Q\cos(2\tau))\delta\phi = 0 \tag{8}$$

によって記述される．これは系のパラメータ P, Q が変化する微分方程式であり，モードによって安定解と不安定解がある．解の振る舞いの違いは P と Q の値で決まり，図 1 の instability chart で区別できる．

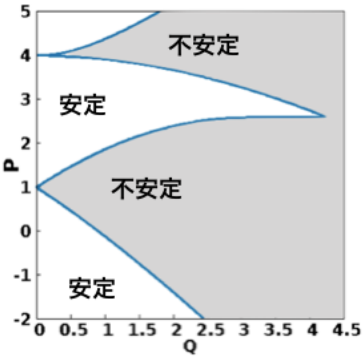

図 1: マシュー方程式の instability chart．P と Q の値が定まれば，解が安定か不安定か決まる．

例えば，調和振動子型のポテンシャルを考えると，背景場が $\phi(t) = \phi_0\cos(mt)$ で振動しているとする．ただし，ϕ_0 は定数とし m はアクシオンの質量とする．この場合，P，Q の値はそれぞれ

$$P = 1 + \left(\frac{k}{m}\right)^2 - \frac{m^2\phi_0^2}{2M_{\rm Pl}^2k^2}, \quad Q = \frac{m^2\phi_0^2}{2M_{\rm Pl}^2k^2} \tag{9}$$

となる．これと図 1 より，不安定解をもつバンドとして $|Q| > |P-1|$ を満たす領域があげられる．不安定解をもつモードでは，解が指数関数的に増大する．このとき，調和振動子型のポテンシャルのジーンズスケールは

$$k_J^4 = \frac{m^4\phi_0^2}{M_{\rm Pl}^2} \tag{10}$$

となる．ポテンシャルに非調和振動子の効果を微小に加えると $m^2 \gg |\lambda|\phi^2$ の近似のもとでジーンズス

ケールを求めることができ，

$$k_J^4 = \frac{m^4\phi_0^2}{M_{\rm Pl}^2} - \frac{9}{4}\lambda\phi_0^2 k^2 \tag{11}$$

となる．これより，$\lambda < 0$ では，(9) 式と比較すると，不安定性を起こすスケールが小さくなることがわかる．この解析結果より，ポテンシャルに非調和振動子の部分があると，密度揺らぎの成長がより小さいスケールでも起こることがわかる．

2.2 アクシオンのポテンシャル

前節でアクシオンのポテンシャルとして非調和振動子の部分が存在すると，ジーンズスケールが変わることについて述べた．ここでは自己相互作用を起こす非調和振動子成分を含むアクシオン場のポテンシャルについて議論する．

一般的にアクシオンは離散的な対称性を持つことが知られている:$\phi = \phi + 2\pi n f$．ただし，n は整数，f は崩壊定数である．また非摂動論的効果を考えると natural inflation [3] のような cosine 型

$$V(\phi) = m^2 f^2 (1 - \cos(\phi/f)) \tag{12}$$

がアクシオンのポテンシャルとしてよく考えられる．一方で，natural inflation 型のモデルは観測器の精度が上がるにつれて，高い信頼度で棄却されるようになってきた．そこで観測結果に反しないようなモデルとして pure natural inflation モデル [4] が挙げられる．これはポテンシャルが ϕ の冪で与えられるものであり，具体的には

$$V(\phi) = m^2 f^2 \left[1 - \frac{1}{(1+(\phi/f)^2)^p}\right] \tag{13}$$

のような形をしている．比較を簡単にするために p=0.5 とし，(12)(13) 共に $\phi \ll 1$ で $m^2\phi^2/2$ に漸近するポテンシャルを考える．以上の三つのポテンシャルの概形を図 2 に示す．

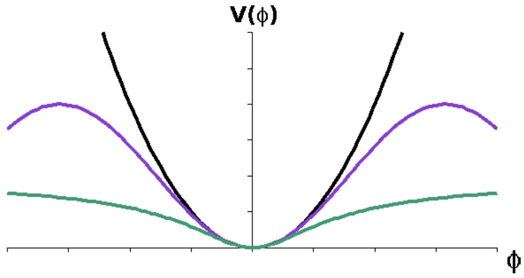

図 2: ポテンシャルの概形図．黒は調和振動子型，緑が cosine 型．青が Pure natual 型である．横軸は場の値 ϕ，縦軸はポテンシャルの振幅 $V(\phi)$ である．

本研究では非調和振動子の効果を調べるにあたり，上記二つのモデルと調和振動子型のものを比較する．

3 Results

まず $\delta\phi_k$ のスペクトルについて初期条件 $\phi_i/M_{\rm Pl} = 10^{-3}$，$\delta\phi_i/M_{\rm Pl} = 10^{-6}$，$f/M_{\rm Pl} = 10^{-3}$ のもとで 3 つのポテンシャルにおいて計算を行った．ここでスケールファクター a については，時間 t のべきを仮定する ($a \propto t^q$)．このとき放射優勢なら $q = 1/2$ となる．

以上の仮定の下で $\delta\phi$ の運動方程式を数値計算する．

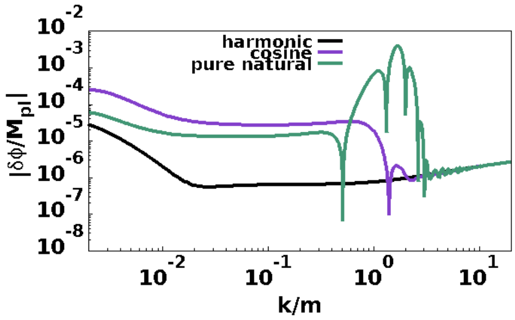

図 3: $\delta\phi$ のスペクトル．色とポテンシャルの関係は図 2 と同じ．時刻 mt=100．横軸は波数 k/m，縦軸は $\delta\phi$ を振動の平均値を絶対値で表した量である．

次に密度ゆらぎのスペクトルについても同様の初期条件の下で計算を行なった．ただし背景の密度と比較をするために無次元量 $\delta \equiv \delta\rho/\rho$ を導入する．

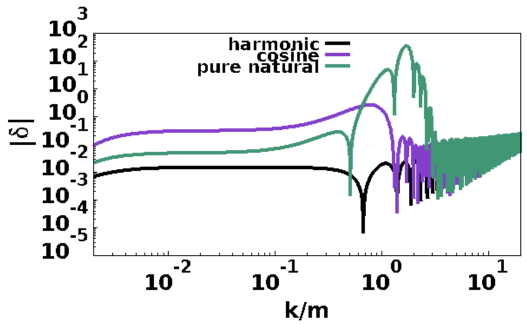

図 4: δ のスペクトル．色とポテンシャルの関係，時刻は図 2 と同じ．横軸は k/m，縦軸は δ は平均値を絶対値で表した量である．

ここで，Pure natural 型において $k/m \sim 1$ で特徴的なピークが見えているので，その波数における δ の時間発展を以下に示す．

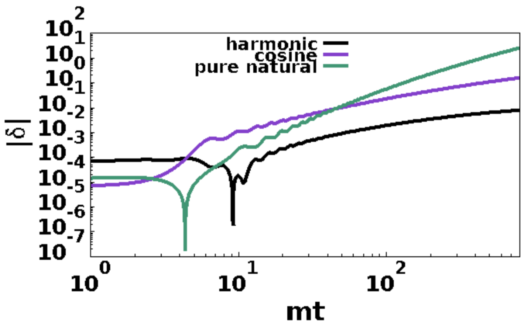

図 5: 波数 k/m=1.0 のときの δ の時間発展．色とポテンシャルの関係は前述のものと同じ．横軸は時刻 mt，縦軸は δ について周期ごとに平均値を求め絶対値をとっている．

4 Discussion

2.1 節で述べたように，非調和振動子型のポテンシャルでは調和振動子型のポテンシャルに比べて，重力不安定性がより小さいスケールでも起こることが予想される．これは図 3 において，調和振動子型のポテンシャルでは $k/m < 10^{-2}$ で効いている不安定性が他の二つのポテンシャルではより大きい k/m まで起きていることを表す．さらに自己相互作用によって $k/m \sim 1$ まで振幅の底上げが起きている．特に Pure natural 型では $k/m \sim 1$ に特徴的なピークが見えているが，重力の影響とは別にマシュー方程式の不安定領域に入っていることによる narrow resonance であると考えられる．重力不安定性と自己相互作用による不安定性を合わせると調和振動子型に比べて成長解をもつ k/m の上限が 100 倍程度になることがわかる．これは図 4 から密度揺らぎの発展に関しても同様なことが言え，図 4 がそれを示す．

以上のことから論文 [5] で述べられている観測との不一致が重力不安定性を起こすスケールの増大と自己相互作用によって説明できる可能性がある．これに伴いダークマターによる宇宙の構造形成を考えた際に，アクシオンで説明できる領域が広くなることが言える．

5 Conclusion

論文 [5] では調和振動子型のポテンシャルでは密度ゆらぎのスペクトルについて観測と合わないことが示唆されていた．そこでポテンシャルに非調和振動子部分が存在すると重力不安定性がより小さいスケールまで起こることがわかった．さらに，自己相互作用による不安定性が起きることによって，論文 [1][2] よりもより小さいスケールまでゆらぎの成長解があることがわかった．ただし今回の数値計算はダイナミクスの理解のために初期条件を任意にとっていたため，現実の宇宙論モデルに初期条件を合わせる必要がある．これは将来の研究課題として残すこととする．

Reference

[1] Swagat S. Misha, Varun Sahni and Yuri Shtanov 2017 JCAP 1706 no.06, 045

[2] Matthew C. Johnson and Marc Kaminkowski 2008 Phys.Rev. D78 063010

[3] K. Freese, J. A. Frieman and A. V. Olinto 1990 Phys. Rev. Lett. 65, 3233

[4] Y.Nomura, T.Watari, M.Yamazaki 2018 Phys. Lett. B776 227-230

[5] Renee Hlozek et al. 2015 Phys. Rev. D91 no.10,103512

——index

a21

Inhomogeneous Primordial magnetic field strength and its impact on Primordial Nucleosynthesis

Yudong LUO (The University of Tokyo, Department of Astronomy)

Abstract

We investigate the effect on the abundances of these elements from the presence of a stochastic primordial magnetic field (PMF) whose strength is spatially inhomogeneous. We assume a uniform total energy density and a large-scale stochastic PMF with a power law (PL) correlation function and a gaussian distribution of field strength. In this case, domains of different temperatures exist in the BBN epoch due to variations in the local PMF. We show that in such case, the effective distribution function of particle velocities averaged over domains of different temperatures deviates from the Maxwell-Boltzmann (MB) distribution. We perform BBN network calculations considering the PMF strength distribution. In this model, the ^{7}Li abundance is significantly reduced. We also discuss the possibility that the baryon-to-photon ratio decreased after the BBN epoch. In this case, we find that if the η value during BBN was larger than the present-day value, all produced light elements are consistent with observational constraints.

1 Introduction

The large scale Primordial Magnetic Field (PMF) can be the seeds connected to observed strong magnetic fields in galaxies at present day. Resent study (Yamazaki, Dai G & Kusakabe, Motohiko 2012) suggested that PMF can make effect on many cosmological phenomena such as Big Bang Nucleosynthesis (BBN). In their model, the PMF field strength is constrained from Cosmic microwave background (CMB) power spectrum with in a co-moving length-scale $\lambda = 1$ Mpc, this length scale is beyond the horizon during BBN epoch, so that within this co-moving length scale, the magnetic energy density can be treated as a uniform value and such a homogeneous PMF can affect primordial elemental abundances (Yamazaki, Dai G & Kusakabe, Motohiko 2012).

However, the survival length scale for PMF during the BBN epoch (with temperature set as 0.3 MeV) is constrained to be $2.1 \cdot 10^4$ cm $< L_B < 6.7 \cdot 10^4$ cm (Yamazaki et al. 2012), which is inside λ. i.e. we can not exclude a possibility of fluctuation PMF which can dissipate after primordial nucleosynthesis epoch.

Based on this motivation, we propose a stochastic PMF whose strength is spatially inhomogeneous. The PMF energy density is constrained from CMB power spectrum. For a fluctuated PMF, it can lead to an inhomogeneity of the energy density. Therefore, the photon radiation energy will become inhomogeneous as well and eventually change the baryonic velocity distribution function. This should affect the primordial nucleosynthesis. In order to investigate the effect from the aforementioned fluctuated PMF, we develop a new BBN reaction network code including inhomogeneous energy density with up-to-date nuclear cross section data. Quantitative comparison between theoretical results and most recent observations of light elemental abundances is also carried on.

2 Temperature fluctuation induced by inhomogeneous PMF

So far, the BBN network calculations have mainly considered the photon energy density to be homogeneous during the entire epoch. Here, however, we consider large-scale energy density fluctuations in the temperature (or equivalently photon energy density). The nuclear reactions occur locally, this means that the local velocity distribution function for baryons is,

$$f_{\rm MB}(v|\beta') = \Big(\frac{m\beta'}{2\pi}\Big)^{3/2} 4\pi v^2 \exp{(-\frac{\beta' m v^2}{2})}. \quad (1)$$

Here, β' refers to the inverse temperature $1/kT'$ and T' corresponds to the local temperature. This is just the classical MB distribution which refers to the velocity distribution function of particles for a certain temperature kT'$= 1/\beta'$ in equilibrium. The averaged thermonuclear reaction rate for a given temperature (kT'$= 1/\beta'$) written as

$$\begin{aligned}\langle\sigma v\rangle(\beta') &= \int \sigma(E) v f_{\rm MB}(v|\beta') dv \\ &= \int \Big(\frac{m\beta'}{2\pi}\Big)^{3/2} 4\pi v^3 \sigma(E) \exp{(-\frac{\beta' m v^2}{2})} dv,\end{aligned} \quad (2)$$

where m_{12} is the reduced mass. Because local fluctuations of the energy density occur due to the inhomogeneous PMF, locally nuclei obey a classical MB distribution with inverse temperature equal to β'. The thermonuclear reaction rates averaged over the set of temperature fluctuations is then given by

$$\begin{aligned}\langle\sigma v\rangle(\beta) &= \int \langle\sigma v\rangle(\beta') f(\beta') d\beta' \\ &= \int \Big[\int \sigma(E) v f_{\rm MB}(v|\beta') dv\Big] f(\beta') d\beta' \\ &= \int \sigma(E) v F(v) dv.\end{aligned} \quad (3)$$

We defined a new function $F(v)$ which is independent of β' as an effective distribution function averaged over the set of temperature fluctuations:

$$F(v) \equiv \int d\beta' f(\beta') f_{\rm MB}(v|\beta'). \quad (4)$$

The derivation of this deviation from a classical MB distribution is similar to that deduced in Beck, Christian (2001). Now, we can simply assume that the distribution function of magnetic energy density $f(\rho_{\rm B})$ follows a gaussian distribution with a peak located at the mean value $\rho_{\rm Bc}$

$$f(\rho_{\rm B}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^{\dagger}_{\rm B}} \exp\Big[-\frac{(\rho_{\rm B}-\rho_{\rm Bc})^2}{2\sigma^{\dagger 2}_{\rm B}}\Big] \quad (5)$$

we then introduce the fluctuation parameter $\sigma_{\rm B}$ as a dimensionless quantity, i.e., $\sigma_{\rm B} = \sigma^{\dagger}_B/\rho_{\rm Bc}$ to describe the fluctuations of the PMF. In the limit of $\sigma_{\rm B} \to 0$, this is a delta function which corresponds to the homogeneous case. Now we assume that the total energy density is uniform for all volumes, but with some fraction contributed from the magnetic energy density, i.e. $\rho_{\rm tot} = \rho_{\rm B} + \rho_{\rm rad} = const$, and define an effective temperature $T_{\rm eff}$ as

$$\rho_{\rm tot} = \frac{\pi g_*}{30} T^4_{eff}. \quad (6)$$

With the variable transformation, the final expression for the distribution function for β is then

$$\begin{aligned}f(\beta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\rm B}} \frac{2\pi g_*}{15} \beta^{-5} \\ &\cdot \exp\Big[-\frac{(\frac{\pi g_*}{30}(T^4_{\rm eff}-\beta^{-4})-\rho_{\rm Bc})^2}{2\sigma^2_{\rm B}}\Big].\end{aligned} \quad (7)$$

In this model, primordial baryons are in local equilibrium with the same temperature and obey Maxwellian distribution; Globally, due to the existence of a fluctuated PMF, radiation energy density becomes inhomogeneous as the radiation temperature does. This inhomogeneity eventually leads to a non-Maxwellian baryonic distribution function.

3 Results

We have encoded the temperature averaged reaction rates as described in Eqs. (3) and (7) to calculate the BBN reaction network and compare the results with the observationally inferred abundances for D, ^{4}He and ^{7}Li.

In Fig. 1, we illustrate light element abundances as a function of baryon-to-photon ratio η_{10} with the allowed parameter values of $\rho_{\rm Bc}$ and $\sigma_{\rm B}$. In the grey region, the D/H and Y_p calculations are consistent with observations, and the ^{7}Li/H value is reduced to $(3.18 - 3.52) \times 10^{-10}$ compared with Standard BBN. However, this is still above the Spite Plateau (Sbordone, L. et al. 2010).

In Fig.2, we explore the possibility to find a parameter region with a concordance for all light element abundances with a higher value for the baryon-to-photon ratio. The fraction $\rho_{\rm Bc}/\rho_{\rm tot}$ is chosen as 0.11 which is the mean magnetic field strength constrained from the observed mean ^{4}He abundance. The calculated element abundances are shown as functions of η_{10} for the fluctuation parameter $\sigma_{\rm B} = 0.53$. Although there is no solution to the Li problem within the η_{10} range of WMAP observation (Hinshaw, G. et al. 2013) (light blue vertical band), at $\eta_{10} = 8.2 \pm 0.1$ (light orange vertical band), all of the elements fall into a region that is consistent with the observational constraints. It is possible to have this larger η value in BBN epoch since a dissipation of the PMF between BBN and the last scattering of the background radiation can results in an evolution of the η value, also induced by other mechanisms such as the radiative decay of exotic particles can have the same effect.

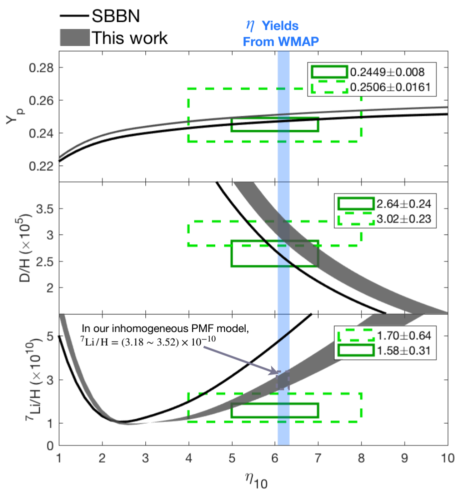

図 1: Abundances of Y_p, D/H and ^{7}Li/H as a function of the baryon to photon ratio η. The boxes show the adopted observational constraints for each elements. This figure shows that larger $\sigma_{\rm B}$ values can suppress the production of ^{7}Li but increase the value of D/H. The vertical blue band shows the Planck constraint on η_{10}.

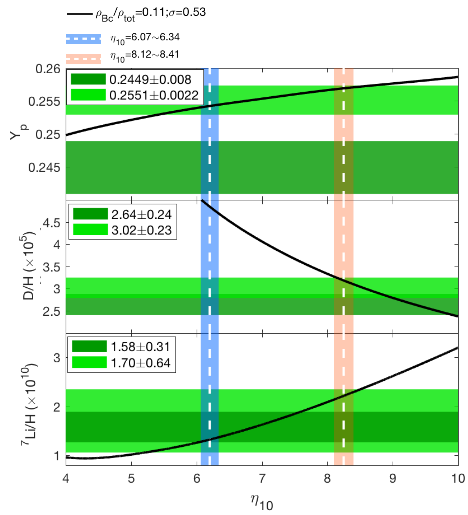

図 2: Primordial element abundances as anfunction of η_{10} for the fixed $\sigma_{\rm B} = 0.53$. The horizontal bands show the observational constraints on abundances. The light blue vertical band is the value inferred from the Planck analysis, and the light orange band shows the possible η_{10} region for which concordance is possible for all three elements.

4 Conclusion

The PMF in this work is described as a stochastic field. PMF energy density obeys a narrow Gaussian distribution under the presumption of a constant value of total energy density. We then derived the expression for the temperature distribution function. In this model, primordial baryons are in local equilibrium with the same temperature and obey Maxwellian distribution; Globally, due to the existence of a fluctuated PMF, radiation energy density becomes inhomogeneous as the radiation temperature does. This inhomogeneity eventually leads to a non-Maxwellian baryonic distribution function. We calculated the baryonic distribution function in our PMF model and apply this fluctuated PMF to the BBN calculation. By comparing our results with observed constraints on η (baryon-to-photon ratio obtained from Planck and WMAP satellites), D/H and Y_p (^{4}He mass fraction), we find that a PMF whose mean energy density is 8% $\sim$ 13% of total energy (corresponds to a present PMF of 1.18 $\sim$ 1.51 μG) can be consistent with both primordial elemental observations and CMB data. Fluctuated PMF has two effects on BBN: 1) enhancement of Hubble expansion rate; 2) Deviation of baryonic distribution function from classical Maxwellian distribution. By taking into account these two effects, the primordial ^{7}Li abundance prediction is reduced in our model to a value of (3.18—3.52) $\times 10^{-10}$ which is closer to the observational value. We also discussed the possibility that η is larger than the value obtained from WMAP observation, in this case, the baryon-to-photon ratio decreased after primordial nucleosynthesis, we find that with the baryon to photon ratio $\eta_{10} = 7.59 - 8.97$, and fluctuation parameter $\sigma_{\rm B} = 0.45 - 0.61$, there is a possible solution to the Li problem.

Reference

Yamazaki, Dai G, & Kusakabe, Motohiko(2012): Effects of power law primordial magnetic field on big bang nucleosynthesis. Phys. Rev. D 86(12), 123006

Yamazaki, Dai G et al.(2012): The search for a primordial magnetic field. Physics Reports 517, 141

Beck, Christian(2001): Dynamical Foundations of Nonextensive Statistical. Mechanics Phys. Rev. Lett. 87(18), 479

Sbordone, L. et al.(2010): The metal-poor end of the Spite plateau. I. Stellar parameters, metallicities, and lithium abundances. A&A 522, 26

Hinshaw, G. et al.(2013): Nine-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results. The Astrophysical Journal Supplement 208, 19

——index

a22

S 行列による低エネルギー有効理論の制限

大宮　英俊 (京都大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙論では様々な問題を解決するために、一般相対論や素粒子標準模型を修正、拡張しようとするモデルがたくさんある。そして、これらの多くはより基本的な理論 (ひも理論など) の低エネルギー有効理論として現れるとされている。ここでは、見かけ上、局所的かつローレンツ不変な理論であっても、適当な理論の低エネルギー有効理論として現れないことを示す。

本発表では、S 行列に対する条件から、低エネルギー有効な理論に加わる制限について説明し、これをブレーンワールド模型の一つである DGP 模型に適用することで、この模型が高エネルギー側の性質の良い理論から得られないことについて議論する。

1　Introduction

低エネルギーで成立している理論はすべてもっと高エネルギーにおける理論の低エネルギー極限として現れるのだろうか？　言い換えるなら、宇宙論の諸問題を説明するために構成した修正重力理論やインフレーション模型は本当にひも理論などの究極の理論から導くことができるのだろうか？ ここで言う究極の理論とは、量子論の確率解釈ができる（ユニタリ性）や、因果律を破らないといった素朴な直感を満たすようなものを指す。

本講演では、通常の S 行列の公理（上の究極の理論を定式化したもの) を満たすような理論には Positivity Bound と呼ばれる条件がつき、これにより低エネルギー有効理論に対して制限がつくことを示す。また、これを DGP モデルと呼ばれるブレーンワールド模型に対して適用することでこのモデルが

2　S 行列の公理

この節では S 行列の公理と Positivity Bound を説明する。

2 体-2 体散乱の場合に S 行列の公理を述べる。そのために、mandelstam 変数 s, t, u を次で導入する:

$$s = -(p_1 + p_2)^2 = -(p_3 + p_4)^2$$
$$t = -(p_1 - p_3)^2 = -(p_2 - p_4)^2$$
$$y = -(p_1 - p_4)^2 = -(p_2 - p_3)^2$$

p_1, p_2 は ingoing な粒子の運動量、p_3, p_4 は outgoing な粒子の運動量 (図 1)。特に、重心系で考えて、重心系のエネルギーと運動量をそれぞれ E_{cm}, p_{cm}、p_1 と p_3 の空間成分のなす角を θ とすると、

$$s = E_{cm}^2$$
$$t = -2p_{cm}^2(1 - \cos\theta)$$
$$u = -2p_{cm}^2(1 + \cos\theta)$$

また、散乱に関わる粒子の質量を m_i とすると、

$$s + t + u = \sum_{i=1}^{4} m_i^2$$

この過程の散乱振幅 $\mathcal{M}$ を p_1, p_2, p_3, p_4 の関数として書く代わりに、s, t, u の関数として書く。S 行列の公理は次のようになる (Eden,R.J (2002)):

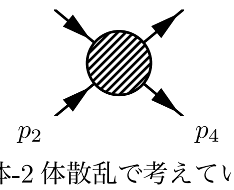

図 1: 2 体-2 体散乱で考えている状況。

1. S 行列がユニタリ
2. $\mathcal{M}(s,t,u)$ が s,t,u の解析関数。特に、s 平面で見たときの極と分枝線は以下のようになる (図 2)。

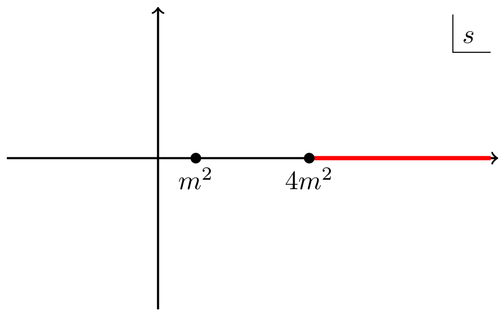

図 2: $\mathcal{M}(s)$ の解析的な構造。ただし、粒子の質量はすべて同じで m^2 とした。m^2 で一位の極、$s \geq 4m^2$ で分枝線。

3. $\mathcal{M}(s,t,u)$ は s,t,u の入れ替えで対称。
4. 有限の t に対して $\mathcal{M}(s,t) < s^{\alpha(t)}$ のように多項式で抑えられる。

場の量子論において、これらは次のような概念と対応している:

1. 確率の保存
2. ミクロ過程の因果律と相互作用の局所性。因果律は場を $\phi(x)$ とすれば、空間的に離れた２つの点 x, y に対して、

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0$$

   相互作用の局所性は、∂^{-1} のように、微分の逆が相互作用に現れない。

   また、極や分岐線は、粒子が生成されるエネルギーでは共鳴が起こることを反映している。

3. 粒子と反粒子の入れ替えで散乱振幅は変わらない。CPT 対称性を反映していると言ってよい。
4. 有限個の項により、発散を取り除くことができることに対応。

これらの公理のもと、次が示される (Eden,R.J (2002)):

光学定理

$$\Im(\mathcal{M}(s, t=0)) = 2p_{cm}\sqrt{s}\sigma_{tot}$$

Froissart Bound $t = 0, s \to \infty$ で

$$\mathcal{M}(s, t \to 0) < s(\log s)^2$$

今回レビューする A.Adams, et. al. (2006) による Positivity Bound は次の通り；

Positivity Bound

$\mathcal{A}(s) \equiv \mathcal{M}(s, t \to 0)$ の摂動の最低次 $\mathcal{A}_{tree}(s)$ に対して、

$$\mathcal{A}(s) = g\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{s^2}{\Lambda^4}\right)^n$$

と展開したとき、必ず $c_n > 0$。g は摂動のパラメター、Λ はカットオフのスケール。

3 証明の概略

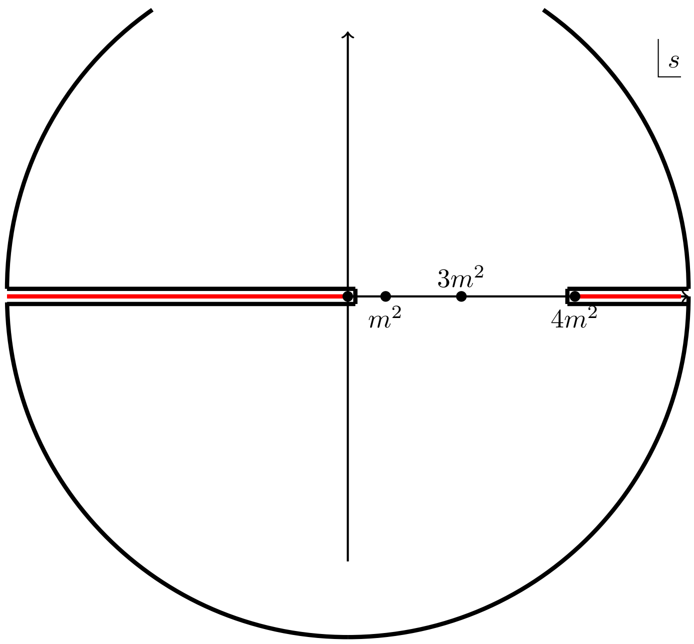

図 3: 積分経路 C と $\mathcal{A}(s)$ の s 閉園上における解析的性質を表した図。

図 3 の太線 (経路 C) に沿って次の量を積分する:

$$I^{(n)}(s) = \oint_C \frac{ds_0}{2\pi i}\frac{\mathcal{A}(s_0)}{(s_o - s)^2}$$

Cauchy の留数定理から、$I^(n)(s)$ は、$\mathcal{A}^{(n)}(s)$ と、$\mathcal{A}$ の極における留数を返す。一方、経路に沿って真面目に計算すると、実軸上は、光学定理から断面積がが出てきて、円周上は Froissart Bound から 0 になる。したがって、s/Λ で見たときに主要な項は実軸上の積分から来る断面積による寄与で、これは、断面積が正なので正。したがって、n 階微分が s/Λ で見たときの最低次で正になる。この議論は摂動を考えない全散乱振幅 $\mathcal{A}(s)$ で行った。摂動を考えれば、摂動のパラメターが入ってきて、上のような形になる。

4 Application

以上の議論を DGP 模型に適用する。DGP 模型は、以下の作用で与えられる。

$$S = 2M_4^2 \int_{brane} d^4x\ \sqrt{-g}R^{(4)} + 2M_5^2 \int_{bulk} d^4xdy\ \sqrt{-G}R^{(5)}$$

このモデルの特徴は、

- 長距離で重力を修正する
- 現在の加速膨張を説明できる

計量の (5,5) 成分の低エネルギー有効作用は次の通り (M.Luty et.al. (2003))。

$$S_{\text{eff}} = \int d^4x(-3(\partial_\mu\pi)^2 - \frac{1}{\Lambda^3}(\partial_\mu\pi)^2\Box\pi + \cdots)$$

この低エネルギー有効作用を用いて π の散乱振幅を計算すると、

$$\mathcal{M}(s,t) = \frac{i}{6\Lambda^6}(s^3 + t^3 + u^3)$$

これを用いると、

$$\mathcal{A}(s) = 0 \times \frac{s^2}{\Lambda^4} + \cdots$$

のように始まる。Positivity Bound によれば、(DGP 模型が基本的な理論から導けると考えるならば)s^2 の項は正である。しかし、今の場合正ではないので、DGP 模型は基本的な理論から導けるわけではないということになる。逆に言えば、もし DGP モデルが正しいと仮定するならば、ミクロの物理では我々の考えているようになっていないということになる。

5 Conclusion

ある現象論的に構成した理論が、物理的にもっともらしい、基本的な理論から導くことができるか否か、に対して Positivity Bound という制限がかかることを説明した。ここで大事なのは、理論を始めるために必要な、少数の仮定から様々な現象論的な理論に対して制限がかかることである。また、「制限」と言っても、それは今回述べたような基本的な理論

6 Acknowledgement

本発表にあたり、京都大学天体核研究室、基礎物理学研究所宇宙グループの先輩方には心より感謝いたします。また、広い心で発表を聞いてくださった皆様に感謝いたします。

Reference

A.Adams,et.al., 2006, J.High Energy Phys

Eden, R.J., et. al., 2002 , Cambridge University Press

Luty, Markus A.,et.al.,2003, Journal of High Energy Physics

——index

a23

真空エネルギーと余剰次元を用いた宇宙定数問題の解決

田中 ペドロ (神戸大学大学院 理学研究科)

Abstract

1998 年、Ia 型超新星の観測により、現在の宇宙が加速膨張していることがわかった。理論的に宇宙が加速膨張することを宇宙定数を導入することで説明できるが、実験と一致する宇宙定数のエネルギー密度を与える理論はいまだに提出されていない。本発表では、現在の宇宙加速膨張を引き起こす宇宙定数のエネルギー密度を、物質の真空エネルギーから来るものだと仮定して導出する。massless のスカラー場 ϕ と、ミンコフスキー空間 $(M^4)\times N$ 次元球面の余剰次元空間 (S^N) を考える。この massless のスカラー場 ϕ から取り出される真空エネルギーは、発散する項と有限に収まる項が出てくる。同じ宇宙定数に関わるのは有限に収まる項だと仮定して、N=odd,even の時の真空エネルギーの値を求める。最終的な結果として、実験で得られている宇宙定数のエネルギー密度と照らし合わして、余剰次元数 N と余剰次元の半径 α を変化させ適切な真空エネルギーを与える。

1 Introduction

ヘンドリック・カシミールによって真空エネルギーから力を取り出せることが 1948 年に理論的に発表された。それから今までの 70 年間、真空エネルギーに関する多くの研究がなされた。そのうちの一つとして、現在の宇宙の加速膨張の原因であろう宇宙定数を、真空エネルギーを用いて説明しようとする試みが行われている。真空エネルギーを用いて宇宙定数を説明しようとするモデルはいくつか提唱されてきたが、例えばプランクスケールでカットオフを入れた理論では実験値と 120 桁もの差が出てきてしまっている。今回、この宇宙定数問題を解決すべく考えられた一つの方法として、余剰次元を用いる方法を紹介したい。本発表では、先行研究のレビューとして, $M^4 \times S^N$ の余剰次元空間を考え、N=odd,even のそれぞれから宇宙定数を説明するのにふさわしい次元を決定する方法を述べる。最終的な結果は余剰次元の半径を 10μm にすると現在観測されている宇宙定数の値と一致するのだが、余剰次元の半径として 10μm は大きすぎる。この結果から、今回の方法では適切な宇宙定数を与えるものとは言えなかったが、この理論は余剰次元の半径を変える自由度が残されている点で、宇宙定数の実験値と一致させる値を得るのに十分な可能性を持った理論と言える。

2 宇宙定数と加速膨張

宇宙定数によって宇宙が加速膨張することを見る。Einstein 方程式と FLRW 計量は、

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{1}$$

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2\left(\frac{dx^2}{1-Kx^2} + x^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right) \tag{2}$$

と表される。宇宙定数 Λ は正とする。(1)、(2) 式を用いてフリードマン方程式を求めると、

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \tag{3}$$

となる。$a(t)$ が十分大きい時、Λ が支配的になることから、ρ と $K=0$ の寄与はほとんどないとすると、$a(t)$ は、

$$a(t) \sim \exp(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t) \tag{4}$$

が得られる。(4) 式より、Λ が正の時、スケールファクター $a(t)$ は指数関数的に加速膨張することがわかる。

3 カシミアエネルギー

1948 年、ヘンドリック・カシミールは、電磁場の真空エネルギーによって近くに置いた 2 枚の完全導

体板が引き合うことを理論的に示した。その時の真空エネルギーは、正則化することによって発散する項と有限におさまる項が得られた。カシミアエネルギーは、

$$E_c = -\frac{\hbar c\pi^2}{720\alpha^3}L^2 \tag{5}$$

となる。E_c はカシミアエネルギー、α は完全導体板間の距離を表し、L^2 は導体板の面積を表している。後に、宇宙定数の真空エネルギー密度を計算する時にも、発散する項と有限におさまる項が出てくるが、有限におさまる項は α^4 に反比例していて、これを物理的に意味のあるカシミアエネルギーとみて宇宙定数のエネルギー密度と比較する。

4 $M^4\times S^N$ massless スカラー場 ϕ

考える空間は、ミンコフスキー空間 $(M^4)\times N$ 次元球面の余剰次元空間 (S^N) である。エネルギー運動量テンソルの (00) 成分、T^{00} はエネルギー密度の次元をもつ。massless のスカラー場 ϕ の真空エネルギー密度 $\langle 0|T^{00}|0\rangle$ が宇宙定数から与えられるエネルギー密度と一致すると仮定して計算する。

$$((\partial_\mu)^2+\nabla_y^2)\phi(x,y)=0 \tag{6}$$

(x^μ : M^4の座標 y : S^Nの座標)
から求められるスカラー場 ϕ を用いて、$\langle 0|T^{00}|0\rangle$ を求めると

$$\langle 0|T^{00}|0\rangle = \frac{-i}{2(2\pi)^4}\int d^3k\int d\omega\omega^2\sum_{l=0}^{\infty}\frac{D_l}{(\frac{M_l^2}{\alpha^2})+k^2-\omega^2} \tag{7}$$

$(M_l^2=l(l+N-1),\ D_l=\frac{(2l+N-1)(l+N-2)!}{(N-1)!l!})$
となる。M_lは余剰次元の球面空間から得られる角運動量固有値を表しており、D_lはその縮退度を表している。k は M^4の運動量成分、ωはエネルギー成分を表している。この項は明らかに発散するが、ゼータ関数による正則化を用いて発散する項と有限におさまる項を取り出す。

4.1 $N=1$

$N=1$ の時、$M_l^2=l^2$、$D_0=1$、$D_{l\geq 1}=2$ から被積分項は、

$$\omega^2\sum_{l=0}^{\infty}\frac{D_l}{(\frac{M_l^2}{\alpha^2})+k^2-\omega^2} = \frac{\alpha\pi\omega^2}{(k^2-\omega^2)^{\frac{1}{2}}}\left(1+\frac{2}{e^{2\pi\alpha(k^2-\omega^2)^{\frac{1}{2}}}-1}\right) \tag{8}$$

が得られる。(8) 式第 1 項目は発散項で、第 2 項目が有限におさまる項である。第 1 項目を、ωを複素数として経路を変え積分すると

$$\int d^3k\int d\omega\frac{\alpha\pi\omega^2}{(k^2-\omega^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{2}{e^{2\pi\alpha(k^2-\omega^2)^{\frac{1}{2}}}-1} = -\frac{3\zeta(5)}{64\pi^6\alpha^4} = -\frac{5.0558077\times 10^{-5}}{\alpha^4} \tag{9}$$

が得られる。

4.2 N=odd, even

N=odd の時も N=1 の時と同じ流れで正則化を行う。N=even の時は、カシミアエネルギーとして評価される項も発散することと、正エネルギー解が得られなかったことのため宇宙定数項としてみなせる項が得られない。ここでは、N=odd の時の、有限におさまる真空エネルギーを図 1 と表 1 に示した。

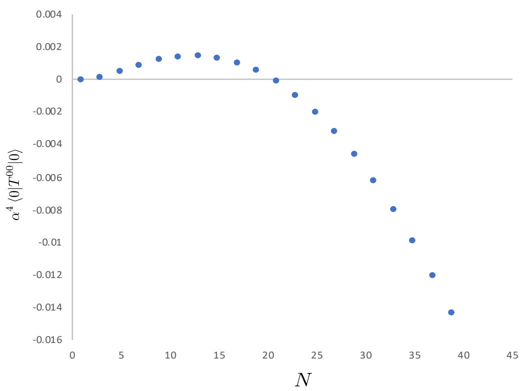

図 1: $M^4\times S^N$ での真空エネルギー. 横軸は N, 縦軸は $\alpha^4\ \langle 0|T^{00}|0\rangle$.

表 1: 奇数 N における真空エネルギー密度。α は球面の半径

N	$\alpha^4 \langle 0\vert T^{00}\vert 0\rangle$
1	-5.0558×10^{-5}
3	7.5687×10^{-5}
5	4.2830×10^{-4}
7	8.1588×10^{-4}
9	1.1338×10^{-3}
11	1.3293×10^{-3}
13	1.3740×10^{-3}
15	1.2524×10^{-3}
17	9.5591×10^{-4}
19	4.7935×10^{-4}
21	-1.7990×10^{-4}
23	-1.0231×10^{-3}
25	-2.0509×10^{-3}
27	-3.2631×10^{-3}
29	-4.6593×10^{-3}
31	-6.2388×10^{-3}
33	-8.0008×10^{-3}
35	-9.9444×10^{-3}
37	-1.2068×10^{-2}
39	-1.4372×10^{-3}

4.3 宇宙定数のエネルギー密度

スカラー場 ϕ のエネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ のそれぞれの真空期待値を求めると

$$\langle 0|T^{\mu\nu}|0\rangle = -\langle 0|T^{00}|0\rangle g^{\mu\nu} = -\frac{\Lambda}{8\pi G}g^{\mu\nu} \tag{10}$$

となり、余剰次元から得られる真空エネルギーが宇宙定数と関係付けられる。宇宙定数が正である時、宇宙加速膨張が起こることから、求めている真空エネルギーの値は正である。表 1 より、$\langle 0|T^{00}|0\rangle$ は N=3∼19 の時正の値をとる。実験から、宇宙定数のエネルギー密度は、

$$\frac{\Lambda}{8\pi G} \sim 10 \text{ GeV/m}^3 \tag{11}$$

が得られていることから、表 1 より、$\langle 0|T^{\mu\nu}|0\rangle \sim 10^{-3}/\alpha^4$ とし、$\hbar c = 2\times 10^{-16}$ GeV m も考慮すると、

$$\alpha \sim 10^{-5}\text{m} = 10\mu\text{m} \tag{12}$$

が得られる。

5 Discussion and conclusion

余剰次元から得られたエネルギー密度を実験値と比較することにより、余剰次元の次元 N は、$N = 3 \sim 19$、余剰次元の半径 α は、$\alpha \sim 10\mu$m の値を取ることがわかった。しかし 10μm は余剰次元の半径として大きすぎる。なぜなら、100μm の範囲でニュートンの万有引力の法則とほとんど誤差なく一致しているため、現実の余剰次元の半径はより小さいと考えられる。しかしこのモデルは、真空エネルギーを宇宙定数と一致させるために、余剰次元の半径を変えることができる点と、有限な真空エネルギーの正の解が得られる点で十分可能性のある理論と言える。今回は、スカラー場での計算を行なったが、今後の課題として、スピノル場、ベクトル場、テンソル場での計算や余剰次元空間を $M^4 \times S^{N_1} \times S^{N_2} \times \cdots$ とした時での計算を行いたい。

6 参考文献

H.B.G. Casimir Proc. K. Ned. Akad. Wet. 51, 793 (1948)

K. A. Milton The Casimir Effect, World Scientific Pub Co Inc; 1st edition (2001)

R. Kantowski and K. A. Milton Phys. Rev. D, 36:3712, (1987)

J. C. Long, H. W. Chan, and J. C. Price. Nucl. Phys. B, 539:23, (1999)

a24

——index

a25

Effects of Goldstone modes in Generalized Higgs G-Inflation

森 祐子 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

インフレーション理論は、宇宙初期の急激な加速膨張期を記述する理論である。インフレーションには様々なモデルが存在し、中でもインフラトンと呼ばれるスカラー場がインフレーションを引き起こすモデルがよく考えられている。そのモデルもスカラー場が単一か複数かどうかなど様々な場合がある。素粒子標準模型の中で唯一のスカラー場である Higgs 場をインフラトンとする場合を Higgs インフレーションといい、未知のスカラー場を導入するモデルよりも自然であると言える。

Higgs インフレーションでは 2 つの複素スカラー場を導入するため、スカラー場には 4 つの自由度が存在する。その自由度のうち 3 つ (Goldstone mode) は Higgs インフレーションの持つ SU(2) 対称性から消せるため、通常はスカラー場が単一な場合がよく研究されている。しかし、インフレーションのような高エネルギー状態では対称性が保たれているかわからないため、[1] のように Goldstone mode を考慮した複数場のモデルを考える必要がある。ところが、複数場の寄与を計算するとその寄与はインフレーション開始後すぐに弱まり、単一場を考えている場合と同じになってしまうことが知られている。そこで、より一般的な Higgs インフレーションモデルで複数場の寄与を調べ、Higgs インフレーションが単一スカラー場で十分かどうかを検討することが本研究の目的である。

1 Higgs インフレーション

Higgs インフレーションでは以下のように場が重力と結合している作用を考える。

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{M_{pl}^2}{2}R-\frac{\partial_\mu h\partial^\mu h}{2}-\frac{\lambda}{4}h^4-\xi h^\dagger hR\right] \tag{1}$$

$$h=\left(\begin{array}{c} h^\dagger \\ h^0 \end{array}\right),\ \left\{\begin{array}{l} h^\dagger=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi^1+i\chi^2\right) \\ h^0=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi+i\chi^3\right)\end{array}\right. \tag{2}$$

ここで、h はヒッグス場、λ,ξ は結合定数である。ϕ を Higgs スカラー、χ^i を Goldstone mode と呼ぶ。Higgs インフレーションでは重力との結合項 $\xi h^\dagger hR$ を入れないとゆらぎが観測量と合わなくなってしまうため、このような非最小結合を考える。(2) 式より、Higgs 場は $\phi,\chi^i(i=1〜3)$ の 4 つの自由度を持つことがわかる。Higgs の持つ SU(2) 対称性には 3 つの自由度があるため、Higgs インフレーションを考える際は Higgs スカラーのみをインフラトンとして残し考える。

2 Multifield の効果

Multifield の効果を見るために以下のような作用を考える [1]。以下では添え字 I,J,K をスカラー場のラベルとして扱う。

$$S=\int d^4x\sqrt{-\tilde{g}}\left[f(\varphi^I)\tilde{R}-\delta_{IJ}\tilde{g}^{\mu\nu}\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi^I\partial_\nu\varphi^J-\tilde{V}(\varphi^I)\right] \tag{3}$$

ここで、$f(\varphi^I)$ は重力場との結合関数を表す。この作用について $g_{\mu\nu}(x)=\frac{2}{M_{pl}^2}f(\varphi^I(x))\tilde{g}_{\mu\nu}(x)$ として conformal 変換すると

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{M_{pl}^2}{2}R-\frac{1}{2}G_{IJ}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi^I\partial_\nu\varphi^J-V(\varphi^I)\right] \tag{4}$$

となる。ここで、G_{IJ} は Field space の計量を表し、結合関数 $f(\varphi^I)$ を用いて

$$G_{IJ}(\varphi^K)=\frac{M_{pl}^2}{2f(\varphi^I)}\left[\delta_{IJ}+\frac{3}{f(\varphi^I)}f_{,I}f_{,J}\right] \tag{5}$$

で与えられる。スカラー場 φ^I を $\varphi^I=\phi^I+\delta\phi^I$ のように摂動の 1 次まで展開する。スカラー場の

background ϕ^I を用いて field space におけるベクトル A^I への共変微分 $\mathcal{D}_t$ を $\mathcal{D}_t A^I \equiv \dot{\phi}^J \mathcal{D}_J A^I = \dot{A}^I + \Gamma^I{}_{JK} A^J \dot{\phi}^K$ とおく。$\Gamma^I{}_{JK}$ は field space の計量で書かれたクリストッフェル記号である。これらの量を用いて以下の量を定義することができる。

$$\omega^I \equiv \mathcal{D}_t \hat{\sigma}^I, \quad \hat{\sigma}^I = \frac{\dot{\phi}^I}{|\dot{\phi}^I|} \tag{6}$$

この ω^I は turn rate と呼ばれ、複数場を考えた場合現れる特有の量である。Turn rate は field space における field trajectory の加速度を表す量となっている。単一場の場合、自由度が 1 つしかないために field trajectory が曲がることはないが、複数場の場合自由度が増えるので field trajectory の方向が変化し得る。Turn rate の大きさをを 2 つの場 ϕ, χ を持つ Higgs インフレーションの場合で求めると

$$\omega^2 = \frac{1}{|\dot{\phi}^I|^2} \frac{\lambda^2 M_{pl}^{10}}{(2f)^5 C} r^6 [C - \xi^2 r^2] - (V_{,\sigma})^2 \tag{7}$$

となる。ここで、$r^2 = \phi^2 + \chi^2$、$C = M_{pl}^2 + \xi(1+6\xi) r^2$ である。(7) 式の時間発展を見ると、turn rate の大きさはインフレーションが終わる頃には 0 になることからゆらぎ等の観測量に影響を及ぼすことはない。よって、複数場の場合を考えても単一場の時と同じになる。

3 Multifield Higgs G-インフレーション

スカラー場の運動方程式が 2 階微分までになる作用で考えられる最も一般的な単一場のモデルを G-インフレーションと呼ぶ [2]。本研究では簡易のため、作用の中のスカラー場の二階微分を含む項が 1 次までの作用を考える [3]。G-インフレーションを単一場から複数場に拡張する場合、スカラー場の運動方程式が二階微分までになるために Galileon 項 $G(\phi, X)$ が

$$G_{,\langle IJ \rangle} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G}{\partial X^{IJ}} + \frac{\partial G}{\partial X^{JI}} \right) \tag{8}$$

において全ての添え字に対して対称である必要がある [4]。この条件に注意して Higgs G-インフレーションをスカラー場が複数の場合に拡張すると、例えば

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [\frac{M_{pl}^2}{2} R + K(\phi^I, X^{IJ}) - \frac{A\delta^{JK}}{M^4} (\phi_I X_{JK} + \phi_J X_{IK} + \phi_K X_{IJ}) \Box \phi^I] \tag{9}$$

という作用を考えることができる。

4 Multifield Higgs-G インフレーションの一様等方時空におけるダイナミクス

(9) 式から以下の一様等方背景時空の式を得ることができる。

フリードマン方程式

$$\begin{aligned} &X^{IJ} \delta_{IJ} + V(\phi^I) \\ &+ \frac{3AH\dot{\varphi}^I X^{JK}}{M^4} (\phi_I \delta_{JK} + \phi_J \delta_{IK} + \phi_K \delta_{IJ}) \\ &- 2X^{IJ} \frac{A\delta^{LK}}{M^4} (\delta_{IJ} X_{KL} + \delta_{LJ} X_{IK} + \delta_{KJ} X_{LI}) \\ &- 3M_{pl}^2 H^2 = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

発展方程式

$$\begin{aligned} &2M_{pl}^2 \dot{H} + 2X^{IJ} \delta_{IJ} \\ &- \frac{4AX^{IJ}\delta^{LK}}{M^4} (\delta_{IJ} X_{KL} + \delta_{LJ} X_{IK} + \delta_{KJ} X_{LI}) \\ &- \frac{2A}{M^4} (X^{IJ} \ddot{\phi}^K - 3H\dot{\phi}^I X^{JK}) \times \\ &(\delta_{IJ} X_{KM} + \delta_{JM} X_{IK} + \delta_{KJ} X_{IM}) = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

場の運動方程式

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a^3} \frac{d}{dt} [a^3 \{ \frac{1}{2} \dot{\phi}^J \delta_{IJ} + \frac{3AHX^{JK}}{M^4} (\phi_I \delta_{JK} + \phi_J \delta_{IK} + \phi_K \delta_{IJ}) \\ &- \frac{A\dot{\phi}^J \delta^{MK}}{M^4} (\delta_{IJ} X_{MK} + \delta_{JM} X_{IK} + \delta_{KJ} X_{IM}) \\ &- \frac{A\dot{\phi}^I \delta^{MK}}{M^4} (\delta_{IJ} X_{MK} + \delta_{IM} X_{JK} + \delta_{KI} X_{JM}) \}] \\ &= -\frac{A\ddot{\phi}^K}{M^4} X^{JM} [(\delta_{IM} \delta_{JK} + \delta_{IJ} \delta_{MK} + \delta_{IK} \delta_{MJ})] \end{aligned} \tag{12}$$

現在、この 3 つの式について数値的な解析を行い、スローロール条件を満たしているか確認することでイ

ンフレーションを引き起こせているかどうかを検討している。インフレーションを引き起こせていることを確認し次第、turn rate に対応している量を見つけ multifield の効果が残るかどうかの検討をする。

Acknowledgement

天体物理若手夏の学校にご支援、ご賛同してくださった皆様に感謝しております。また、この場をお借りして日頃議論などにお付き合いしていただいている研究室の方々にも、御礼申し上げます。

Reference

[1] R.N.Greenwood 2013, Phys. Rev. D **87**, 064021 (2013) doi:10.1103/PhysRevD.87.064021 [arXiv:1210.8190 [hep-ph]].

[2] T.Kobayashi, M.Yamaguchi and J.Yokoyama, Prog. Theor. Phys. **126**, 511 (2011) doi:10.1143/PTP.126.511 [arXiv:1105.5723 [hep-th]].

[3] K.Kamada, T.Kobayashi, M.Yamaguchi and J.Yokoyama, Phys. Rev. D **83**, 083515 (2011) doi:10.1103/PhysRevD.83.083515 [arXiv:1012.4238 [astro-ph.CO]].

[4] T.Kobayashi, N.Tanahashi and M.Yamaguchi, Phys. Rev. D **88**, no. 8, 083504 (2013) doi:10.1103/PhysRevD.88.083504 [arXiv:1308.4798 [hep-th]].

a26

——index

a27

Gravitational Reheating Constraints on Quintessence Models

三嶋 洋介 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

標準ビッグバン理論に生じる諸問題は宇宙が初期に加速膨張をすることで解決される。しかし、インフレーション後に放射優勢期へ遷移する再加熱の機構は明らかになっていない。再加熱の機構として Gravitational reheating を考えると、その証拠となる観測量を将来的に見出だすことができる。本講演では観測可能なパラメータを紹介し、今後の課題として観測で区別できる Quintessential Inflation のモデルに関しても言及する。

1　Introduction

現在の宇宙の加速膨張は観測的に確認されているが、その機構は未解明である。また、宇宙の進化をよく記述する標準ビッグバン理論でも、その初期に平坦性問題などの不自然さが残る。その不自然さは初期宇宙に指数関数的な加速膨張を考えるインフレーション理論で解消され、この理論は観測事実との整合性からも支持されている。通常、前者は宇宙項を用いて議論され、後者はスカラー場を用いたモデルが提案される。しかし、両者とも指数関数的に加速膨張をするのであれば、同一のスカラー場によるものと考えてもよいだろう。このシナリオは、Quintessence Inflation[1] として説明される。

インフレーション理論では、加速膨張が終わる際に再加熱という機構を考える。これは加速膨張期から放射優勢期に移行する際にビッグバン宇宙を再現するために必要であり、通常はスカラー場と物質場が直接相互作用をすることですべてのエネルギーを移す。一方、Quintessence Inflation ではスカラー場のエネルギーが現在まで残存しなければならない。それは物質場が重力相互作用だけでエネルギーを獲得する Gravitational reheating という機構で実現できる [2]。

Gravitational reheating は再加熱期間が長くなり、スカラー場優勢の時期が続く。インフレーション起源の原始重力波がこの時期にホライズンの内側に入ることから、通常の再加熱機構とは異なる重力波のエネルギー密度の特徴が見られる。更に、この特徴には LISA や DECIGO といった重力波検出器で観測し得るパラメータも存在する。ここでは、スカラー場優勢期の宇宙の状態方程式をパラメータ w を用いて $p = w\rho$ と与えることで、一般的なモデルで議論をした [3]。こうして求めた観測可能なパラメータを元に、観測で区別可能な Quintessence Inflation のモデルに関しても今後の課題として言及する。本講演では、$c = \hbar = 1$ の自然単位系を用いた。

2　The model

共形時間を $a(\eta)d\eta = dt$ と定義すれば、平坦な Robertson-Walker 計量は

$$ds^2 = a^2(\eta)(-d\eta^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j)$$

と表せる。インフラトン ϕ 及び物質場 χ の作用は以下のものを考える。

$$\begin{aligned}
S &= S_{\rm R} + S_\phi + S_\chi \\
S_{\rm R} &= \int \sqrt{-g}d^4x \left[\frac{{M_{\rm pl}}^2}{2}R\right] \\
S_\phi &= \int \sqrt{-g}d^4x \left[-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)\right] \\
S_\chi &= \int \sqrt{-g}d^4x \left[-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\chi\partial_\nu\chi - \frac{1}{2}\xi\chi^2 R\right]
\end{aligned}$$

このとき、スカラー場優勢期の宇宙膨張は

$$\begin{aligned}
&\phi'' + 2\phi' + a^2\frac{dV}{d\phi} = 0 \\
&\mathscr{H}^2 = \frac{1}{3{M_{\rm pl}}^2}a^2\rho_\phi \\
&\mathscr{H}' = -\frac{1}{6{M_{\rm pl}}^2}a^2(\rho_\phi + 3p_\phi)
\end{aligned}$$

で記述できる ($M_{\rm pl}^2 = \frac{1}{8\pi G}, ' := \frac{d}{d\eta}, \mathscr{H} := \frac{a'}{a} = aH$)。エントロピーが保存する場合、宇宙の状態方程式はパラメータ w を用いて $p = w\rho$ と表せ、宇宙膨張の時間発展を追うことができる。スカラー場優勢期では

$$w = \frac{\rho_\phi}{p_\phi} = \frac{\frac{1}{2a^2}\phi'^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2a^2}\phi'^2 + V(\phi)}$$

という関係が成り立っている ($-1 \leq w \leq 1$)。

エネルギー保存則 $\rho_\phi' + 3\mathscr{H}(\rho_\phi + p_\phi) = 0$ を考えると

$$\rho_\phi \propto a^{-3(1+w)}$$

と求まるので、ホライズン半径は

$$H^{-1} \propto a^{\frac{3}{2}(1+w)}$$

と評価できる。

3 Gravitational particle production

物質場は重力場との相互作用でエネルギーが移る。物質場を方程式の解の完全系でモード展開をすると、モード関数は時間依存性を持つ。場を正準量子化した際の基底エネルギーはモード関数毎に代わり、それは Bogolyubov 係数 β_ω を用いて対応付けられる。$\xi \neq \frac{1}{6}$ であれば Minkowski 時空の共系変換にはならないため、重力場との相互作用が失われない。このときの相互作用項は $U(\eta) = \left(\frac{1}{6} - \xi\right) a^2(\eta) R(\eta)$ となり

$$\beta_\omega = \frac{i}{2\omega}\int_{-\infty}^{\infty} d\eta\, e^{-2i\omega\eta} U(\eta)$$

と求めることができる。このとき、生成される物質場のエネルギー密度 ρ_χ は

$$\rho_\chi = \frac{1}{2\pi^2 a^3}\int_0^\infty d\omega\, \omega^3 |\beta_\omega|^2$$

となる。$R(\eta) = \frac{6}{a^2}\frac{a''}{a}$ であることから、積分定数を μ として

$$\rho_\chi = -\frac{1}{32\pi^2 a^4}\int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_2 \ln(|\eta_1 - \eta_2|\mu) \times \frac{dU(\eta_1)}{d\eta_1}\frac{dU(\eta_2)}{d\eta_2}$$

と求まる [2]。ここで式 (11) を

$$x = \eta H_{\rm inf}, \qquad f(\eta H_{\rm inf}) = a^2(\eta)$$
$$U(\eta) = \frac{{a_{\rm end}}^2 {H_{\rm inf}}^2}{2}\tilde{U}(x)$$
$$\tilde{U}(x) = \frac{f_{xx} f - \frac{1}{2}{f_x}^2}{f^2} \quad f_x := \frac{d}{dx}$$

と変換すれば

$$\rho_\chi = \frac{{H_{\rm inf}}^4}{128\pi^2}\left(\frac{a_{\rm end}}{a}\right)^4 (1 - 6\xi)^2\, I$$

$$I = -\int_{-\infty}^{x} dx_1 \int_{-\infty}^{x} dx_2 \log(|x_1 - x_2|) \times \frac{d\tilde{U}(x_1)}{dx_1}\frac{d\tilde{U}(x_2)}{dx_2}$$

と表せる ($H_{\rm inf}$: インフレーション中の Hubble パラメータ、 $a_{\rm end}$: インフレーション終了時のスケール因子)。生成される物質場のエネルギーの大きさは I で決まり、これは宇宙の曲率の変化が大きいほど寄与をする。de Sitter 膨張からスカラー場優勢期までの宇宙膨張は

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x < -1,\ \text{加速膨張期} \\ \sum_{n=0}^{3} a_n x^n & -1 < x < x_0 - 1,\ \text{移行期} \\ b_0(b_1 + x)^{\frac{4}{3\omega+1}} & x_0 - 1 < x, \text{再加熱期}\ (w \neq -\frac{1}{3}) \end{cases}$$

と表わせる (x_0 は移行にかかる極小の時間) ので、移行期の曲率の変化が最も大きい。それぞれの時期がなめらかに繋がることを仮定すれば係数 $a_n, b_j (n = 0,1,2,3, j = 0,1)$ は、

$$a_0 = \frac{1}{4}(29 - 8w + 3w^2) - \frac{1+w}{2x_0}$$
$$a_1 = \frac{3}{4}(\frac{47}{3} - 8w + 3w^2) - 3\frac{1+w}{2x_0}$$
$$a_2 = \frac{3}{4}(9 - 8w + 3w^2) - 3\frac{1+w}{2x_0}$$
$$a_3 = \frac{1}{4}(5 - 8w + 3w^2) - \frac{1+w}{2x_0}$$
$$b_0 = \left(\frac{2}{1+3w}\right)^{-\frac{4}{1+3w}}$$
$$b_1 = \frac{3(1+w)}{1+3w}$$

と決まるので

$$I \simeq 9(1+w)^2\left(\frac{1}{x_0}\right)$$

と評価できる。生成される粒子の種数を N とし、$N_{\rm eff} := N(1-6\xi)^2$ を定義すれば

$$\rho_\chi = H_{\rm inf}^4 \frac{9N_{\rm eff}(1+w)^2}{128\pi^2}\left(\frac{a_{\rm end}}{a}\right)^4 \log\left(\frac{1}{x_0}\right)$$

となる ($\log\frac{1}{x_0} \sim \mathcal{O}(1)$ なので、以後省略する)。

物質場がインフラトンと直接相互作用をしない場合、物質場にエネルギーが移る効率は悪い。そのため、再加熱期間は通常よりも長くなる。このとき、宇宙が放射優勢期に移行するのは $\rho_\phi = \rho_\chi$ を満たすときと考えるのが妥当である。再加熱期のスカラー場のエネルギー密度は

$$\rho_\phi = 3{H_{\rm inf}}^2{M_{\rm pl}}^2\left(\frac{a_{\rm end}}{a}\right)^{3(1+w)}$$

であるので、放射優勢期に移行するときのスケール因子 $a_{\rm R}$ は

$$a_{\rm R} = a_{\rm end}\left(\frac{128\pi^2{M_{\rm pl}}^2}{3N_{\rm eff}(1+w)^2{H_{\rm inf}}^2}\right)^{\frac{1}{3w-1}}$$

と求めることができる [3]。重力相互作用の影響が小さい ($\xi \sim \frac{1}{6}$) ときやインフラトンのエネルギー密度の減少が大きい ($w \sim 1$) とき、$a_{\rm R}$ は大きくなる。これは、再加熱期間が長くなる描像に一致する。

4 Gravitational waves

共形時間で表した重力波の運動方程式は

$$h''_{ij} + 2\mathscr{H}h'_{ij} - \Delta h_{ij} = 0$$

である。この解は宇宙膨張による減衰を受けるが、時期毎に減衰度合いが変わる。これは遷移関数 $T_{\rm T}(k,\tau)$ を用いて表すことができる。そのため、重力波のエネルギー密度の減衰度合いは $T_{\rm T}$ を評価すれば分かる。

インフレーション起源の原始重力波のパワースペクトルはスローロール・パラメータ ϵ を用いて

$$P_{\rm GW}(k) = \frac{2{H_{\rm inf}}^2}{\pi^2{M_{\rm pl}}^2}\left(\frac{k}{\mathscr{H}}\right)^{-2\epsilon}$$

と計算されるので、波数に依存しないスケール不変なパワースペクトルとなる。

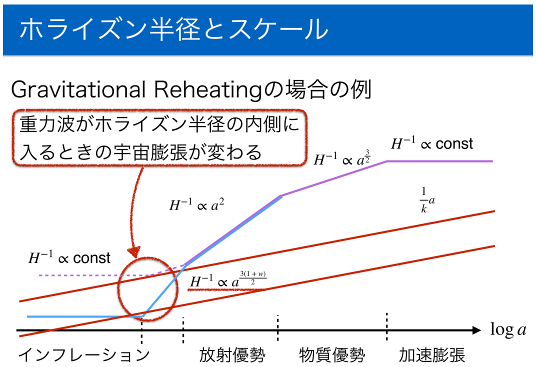

図 1: 宇宙の進化に対するホライズン半径の概略。紫線は直接相互作用する再加熱機構におけるホライズン半径を表し、青線は Gravitational reheating におけるホライズン半径を表す。再加熱期の宇宙膨張が変わるため、重力波の振幅の減衰の様子も変わる。

等密度時の波数を $k_{\rm eq}$ とすると、物質優勢期から現在までの遷移関数は

$$T_{\rm T}(k,\tau_0) = \frac{3\Omega_{\rm m0}}{(k\tau_0)^2}\sqrt{1+1.36\left(\frac{k}{k_{\rm eq}}\right)+2.5\left(\frac{k}{k_{\rm eq}}\right)^2}$$

と求まる [6]。これらを用いれば、現在の重力波のエネルギー密度は

$$h^2\Omega_{\rm GW} = \frac{k^2P_{\rm GW}{T_{\rm T}}^2}{12{a_0}^2{H_0}^2}\begin{cases}\times 1 & k \le k_{\rm R} \\ \times\left(\frac{k}{k_{\rm R}}\right)^{\frac{6w-2}{3w+1}} & k_{\rm R} < k \le k_{\rm end}\end{cases}$$

と表せる [7]($k_{\rm R}$: 放射優勢期移行時の波数、$k_{\rm end}$: インフレーション終了時の波数)。ここで

$$\frac{k_{\rm end}}{k_{\rm R}} = \frac{a_{\rm end}H(a_{\rm end})}{a_{\rm R}H(a_{\rm R})} = \frac{1}{2}\left(\frac{128\pi^2{M_{\rm pl}}^2}{3N_{\rm eff}(1+w)^2{H_{\rm inf}}^2}\right)^{\frac{1+3w}{2(1-3w)}}$$

という関係から $k_{\rm end}$ を求めることができる。

5 Results

重力波のエネルギー密度をスペクトル分解したグラフは図 2,3 である。ここでは重力波のエネルギー密度が一番大きいときの振る舞いをみるため、$w=1$ の場合で考えた。それぞれは、物質場と重力場の結合定数の値で比較をしている。$\xi = 0$ の場合は、比較

的エネルギーが移る効率は良い。そのため、再加熱期間が短くより高エネルギーの波数もホライズン半径の内側に入ってくる。その結果、重力波検出器が観測できる領域よりも高エネルギー領域で再加熱期にホライズン半径の内側に入ってきた重力波の振る舞いが現れる。一方、$\xi \sim \frac{1}{6}$ の場合はエネルギーが移る効率は悪い。そのため再加熱期間が長くなり、放射優勢期に移行する時期が遅くなる。その結果、放射優勢期に移行するときのエネルギーが低くなり、重力波検出器で観測し得る結果を示す。

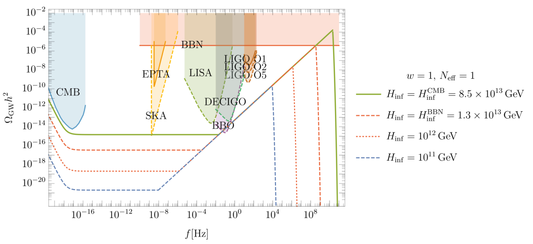

図 2: $\xi = 0$ かつ $w = 1$ における重力波のエネルギー密度の例 [3]。この場合は重力波検出器で直接検出できない。重力と最小結合している場合はまだ効率が良く、より高エネルギーの波数がホライズン半径の内側に入ってくるため、重力波検出器できる領域と被らない。

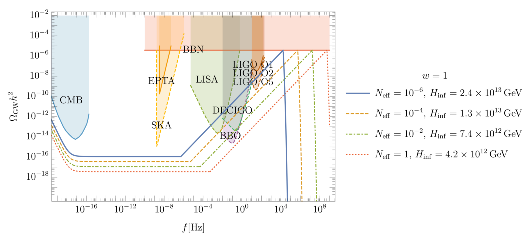

図 3: $\xi \sim \frac{1}{6}$ かつ $w = 1$ における重力波のエネルギー密度の例 [3]。この場合は結合定数が $\frac{1}{6}$ に近いほど再加熱中のエネルギーが移る効率は悪くなる。放射優勢期に移行するときのエネルギーが低くなるため、重力波検出器が観測し得る結果を示す。

6 Discussion

Gravitational reheating の痕跡を重力波検出器で観測する場合、$w = 1$ かつ $\xi \sim \frac{1}{6}$ であることが望ましい。$w = 1$ で Quintessential Inflation を考える場合、一例として図 4 のような振る舞いになっている。今後はこれらのモデルを検討していく。

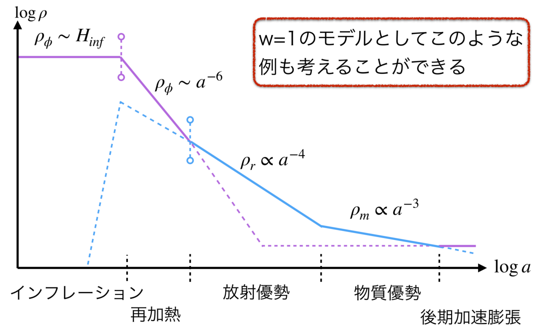

図 4: $w = 1$ を踏まえた Quintessential Inflation の検討例。紫線がインフラトンのエネルギー密度を表し、青線が物質場のエネルギー密度を表す。実線がその時期の宇宙のエネルギー優勢成分を示している。

Acknowledgement

本発表のための議論にたくさんの時間を割いてくださった理論物理学研究室の皆様に深く感謝致します。

Reference

[1] P. J. E. Peebles and A. Vilenkin, Phys. Rev. D **59**, 063505 (1999)

[2] L. H. Ford, Phys. Rev. D **35**, 2955 (1987).

[3] M. Artymowski, O. Czerwinska, Z. Lalak and M. Lewicki, JCAP **1804**, no. 04, 046 (2018)

[4] K. Dimopoulos and T. Markkanen, JCAP **1806**, no. 06, 021 (2018)

[5] K. Dimopoulos and C. Owen, JCAP **1706**, no. 06, 027 (2017)

[6] S. Babak et al., Phys. Rev. D **95**, no. 10, 103012 (2017)

[7] S. Kuroyanagi, T. Takahashi and S. Yokoyama, JCAP **1502**, 003 (2015)

——index

b1

Gravitational redshift in void-galaxy cross-correlation function in redshift space

南 岳/Yue Nan (広島大学大学院 理学研究科)

Abstract

We construct an analytic model for the void-galaxy cross-correlation function that enables theoretical predictions of the dipole signal produced dominantly by the gravitational redshift within voids for the first time. By extending a theoretical formulation for the redshift-space distortion of galaxies to include the second order terms of the galaxy peculiar velocity $\boldsymbol{v}$ and the gravitational potential, we formulate the void-galaxy cross-correlation function multipoles in the redshift space, the monopole $\xi_0^{(s)}$, dipole $\xi_1^{(s)}$ and quadrupole $\xi_2^{(s)}$. We find that the dipole $\xi_1^{(s)}$ is dominated by the gravitational redshift, which provides a unique opportunity to detect the gravitational potential of voids. Thus, for the dipole $\xi_1^{(s)}(s)$, the gravitational redshift is crucial. Although the higher order effect is almost negligible on the monopole $\xi_0^{(s)}$, it has an influence on the quadrupole $\xi_2^{(s)}$. The effects from the random velocity of galaxies and the definition of the void center on the dipole signal are also discussed. Our model offers a new theoretical probe for detecting gravitational redshift within voids, and further tests on cosmology and gravity.

1 Introduction

The large-scale structure of the universe is observed in redshift maps of galaxy redshift surveys such as Sloan Digital Sky Survey (SDSS). The mapping of galaxies from real space to redshift space produces statistical anisotropies caused by peculiar velocities relevant to the gravitational clustering, i.e. the redshift-space distortion (RSD). The RSD in the large-scale structure of galaxies is beneficial when testing cosmological models, dark matter models, general relativity and its alternative theories such as modified gravity.

The lowest density areas in the large-scale structure larger than $10h^{-1}$Mpc, i.e., voids, have become a useful tool for testing cosmological models and gravity theories (N. Hamaus et al. (2014, 2017); A. J. Hawken et al. (2017)). Accurate models of galaxy distributions of voids in the linear theory of density perturbations have been developed (Y.-C. Cai et al. (2016); N. Hamaus et al. (2017); S. Nadathur & W. Percival (2017)). The peculiar velocities of the galaxies are essential for void-galaxy cross-correlation in redshift space, however, these models are usually constructed up to the leading order of peculiar velocities of galaxies (e.g. S. Nadathur & W. Percival (2017)).

We investigate possible signatures of the gravitational redshift and the higher order effect of peculiar velocities in the galaxy distribution associated with cosmic voids in redshift space in this work, by developing an analytic theoretical formulation for the void-galaxy cross-correlation.

2 Formulation

For details of this section, please refer to Ref. Y. Nan & K. Yamamoto (2018).

When there is a shift of the redshift from the gravitational potential and the peculiar velocity, δz, the distance in redshift space can be expressed as

$$S = \int_0^{z+\delta z} \frac{dz'}{H(z')} \simeq \chi + \frac{\delta z}{H(z)} - \frac{H'(z)}{2H^2(z)}\delta z^2, \quad (1)$$

where we evaluated the shift in the comoving distance by δz up to the second order.

To include the shift of a photon's energy caused by the gravitational potential and the Doppler effect of peculiar velocity, we need to consider the second order terms of the peculiar velocity. We work within the Newtonian gauge of cosmological perturbation theory. Denoting the gravitational potential and the peculiar velocity by ψ and $\boldsymbol{v}$, respectively, we may express δz up to the order of $\mathcal{O}(\boldsymbol{v}^2)$ (see D. Sakuma et al. (2018)),

$$\delta z = (1+z)\left(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 - \psi\right), \tag{2}$$

where $\boldsymbol{\gamma}$ is the unit vector of the line of sight, and $\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{v}$ denotes the usual Doppler effect, while the term $\boldsymbol{v}^2/2$ is the transverse Doppler effect.

We adopt a coordinate system with its origin at the center of a void, and denote the position of a galaxy as $\vec{r}$ and $\vec{s}$, respectively, in the real space and the redshift space with the plane parallel approximation.

As will be discussed later, the definition of the void center is not a trivial problem. We consider the case that the center of a void is shifted in the redshift space, taking the gravitational redshift as $\psi_c/\mathcal{H}(z_c)$. In this case, the redshift space and the real space are related by

$$\begin{aligned}\vec{s} \;\;=\;\; & \vec{r} + \left[\frac{\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{v}}{\mathcal{H}(z)} + \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{v}^2}{\mathcal{H}(z)} + \frac{(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{v})^2}{\mathcal{H}(z)}\right.\\ & \left. -\frac{\psi}{\mathcal{H}(z)} - \frac{H'(z)}{2\mathcal{H}^2(z)}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{v})^2 + \frac{\psi_c}{\mathcal{H}(z_c)}\right]\vec{\gamma}.\end{aligned} \tag{3}$$

To formulate the void-galaxy cross-correlation $\xi^{(s)}(s)$ in redshift space, we need to use the conservation property between redshift space and real space as follows:

$$1+\xi^{(s)}(s) = \big(1+\xi(r)\big)\det\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\vec{s}}\right|, \tag{4}$$

where the superscript (s) reminds us that $\xi^{(s)}(s)$ is a quantity in redshift space. For further calculations, we need investigations into the relations for quantities $r = |\vec{r}|$ and $s = |\vec{s}|$ between real space and redshift space. We use subscript $\parallel$ and $\perp$ for the component parallel and perpendicular to $\vec{\gamma}$ respectively.

To calculate the $\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{v}$ terms in the expression, we assume that the peculiar velocities of the galaxies associated with the void yield to the cosmological continuity equation as

$$\boldsymbol{v} = -\frac{1}{3}f(z)\mathcal{H}(z)\Delta(r)\vec{r}, \tag{5}$$

where the structure linear growth rate f and the average density contrast $\Delta(r)$ of the void within the radius r are involved.

Definition of the following dimensionless velocity will be helpful

$$\tilde{V}(z_c, r) \equiv -\frac{1}{3}f(z_c)\Delta(r). \tag{6}$$

Here, we adopt the approximation $z \simeq z_c$ for a distant observer.

To take the anisotropies related to line-of-sight direction into account, we define $\mu = s_\parallel/s$, which is the cosine of the angle between $\vec{s}$ and $\vec{\gamma}$ in redshift space.

With previous foundations we are able to obtain $\xi^{(s)}(s)$, the void-galaxy cross-correlation in redshift space, using conservation relation Eq. (4) after tedious calculations while keeping terms up to of $\mathcal{O}(v^2)$. For simplicity, we just show the multipoles here. The multipoles of the void-galaxy cross-correlation function are defined as:

$$\xi_\ell^{(s)}(s) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\xi^{(s)}(s,\mu)P_\ell(\mu)\,\mathrm{d}\mu, \tag{7}$$

where the anisotropies in redshift space associated with the line-of-sight is characterized by μ, and $P_\ell(\mu)$ are the Legendre polynomials. The monopole $\xi_0^{(s)}(s)$ and quadrupole $\xi_2^{(s)}(s)$ can be written as function of $\tilde{V}$, s and μ, presented in our paper (see Y. Nan & K. Yamamoto (2018)), which is the generalization of the result by S. Nadathur & W. Percival (2017). We omit specific expressions here for monopole and quadrupole, because they are irrelevant to ψ and ψ_c term, while we focus on the dipole component as follows:

$$\xi_1^{(s)}(s) = (1+\xi(s))\left[\frac{H'-3\mathcal{H}}{3}\tilde{V}^2 s + \frac{3H'-11\mathcal{H}}{15}\tilde{V}\tilde{V}' s^2 + \frac{\psi'(s)}{3\mathcal{H}}\right] + \xi'(s)\left[\frac{\psi(s)-\psi_c}{3\mathcal{H}(z_c)} + \frac{3H'-11\mathcal{H}}{30}\tilde{V}^2 s^2\right]. \quad (8)$$

We also take the random motions of galaxies with velocity dispersion into account by a gaussian-streaming process, taking a random velocity $v_\parallel$ into account, and the transformed quantity $\xi^\sigma(s,\mu)$ naturally contains the effect from the random velocity with the velocity dispersion σ_v^2. We also define the multipoles of $\xi^\sigma(s,\mu)$ in a similar way to Eq.(7).

These multipoles include the effects of the gravitational potential and the second order of the peculiar velocity of the spherical coherent motion of void, as well as random motions.

3 Plots/Results

With the previous formulation, we can adopt specific models for plotting the multipoles defined previously. We adpoted a simple exponential density contrast profile in Ref. A. J. Hawken et al. (2017) and a best-fit universal profile in Ref. N. Hamaus et al. (2014) for the plots of multipoles. We investigate into the details of dipole components and find that the dipole signal is dominated by the gravitational potential of the void.

We also investigated into the influence from the choice of void center characterized by ψ_c term on the dipole signal. For sake of space, we just present the results of the profile from A. J. Hawken et al. (2017) here. We present these results in Figs. 1—4.

4 Discussion

The higher order effect is not very significant for the monopole and the quadrupole components.

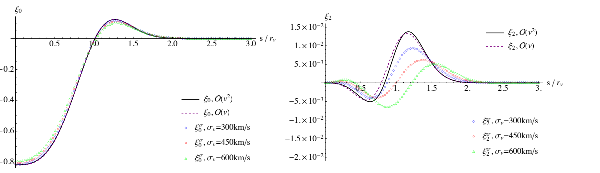

図 1: Left panel: Monopole $\xi_0(=\xi_0^{(s)})$ as a function of s/r_v for void profile in A. J. Hawken et al. (2017), with the different values of the velocity dispersion σ_v, where r_v is some characteristic radius of voids. Right panel: Quadrupole $\xi_2(=\xi_2^{(s)})$.

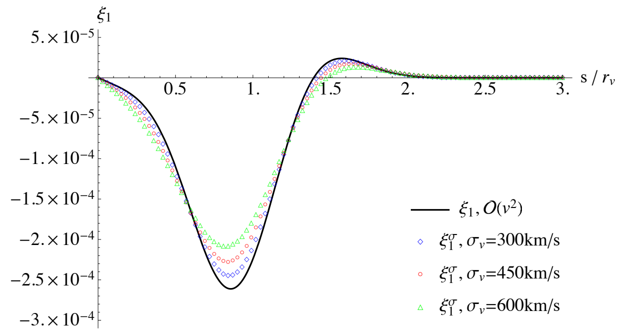

図 2: Same as Fig. 1 but for the dipole component $\xi_1(=\xi_1^{(s)})$ and ξ_1^σ as function of s/r_v.

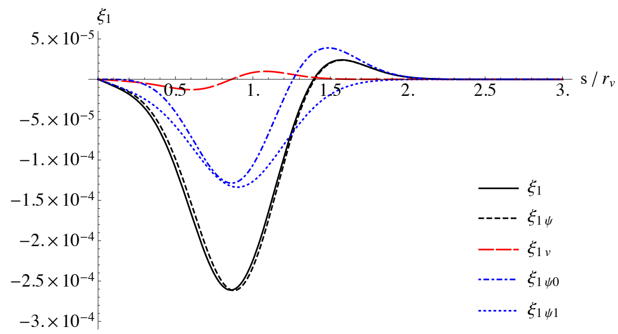

図 3: Details of the dipole components, $\xi_1(=\xi_{1\psi}^{(s)}+\xi_{1v}^{(s)})$, $\xi_{1\psi}^{(s)}(=\xi_{1\psi 0}^{(s)}+\xi_{1\psi 1}^{(s)})$.

However, the most interesting finding from the higher order effects is that the dipole component in the void-galaxy cross-correlation, dominantly reflects the gravitational potential through the gravitational redshift, as demonstrated in Fig. 2.

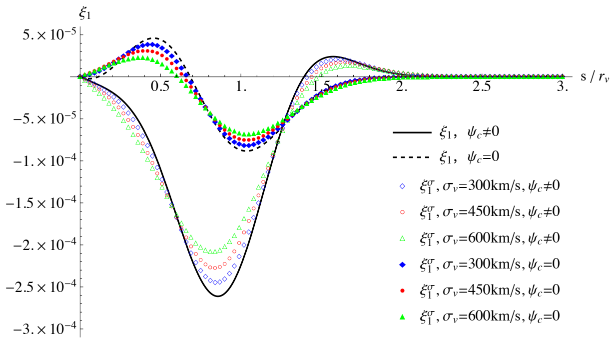

図 4: Same as Fig. 2 but with the added cases under the condition $\psi_c = 0$ for comparison.

Photons from the central region of a void are blueshifted compared with photons from the mean density region. This effect of the gravitational redshift is the origin of the dipole signal in the void-galaxy cross-correlation function, thus the dipole signal is therefore determined by the gravitational potential profile of the void. However, the dipole signal is not simply dominated by the gravitational potential $\psi(r)$. The contribution of the gravitational redshift to the dipole $\xi^{(s)}_{1\psi}(s)$, is given by the combination of the two terms,

$$\xi^{(s)}_1(s) \simeq \xi^{(s)}_{1\psi}(s) = \xi^{(s)}_{1\psi0}(s) + \xi^{(s)}_{1\psi1}(s) \\ = \frac{\psi'(s)}{3\mathcal{H}}(1+\xi(s)) + \frac{\psi(s)-\psi_c}{3\mathcal{H}}\xi'(s), \qquad (9)$$

namely the terms from the gravitational potential $\psi(s)$ and its gradient $\psi'(s)$ contribute almost equally to the dipole signal, as is demonstrated in Fig. 3.

We just present the results of the profile from A. J. Hawken et al. (2017) here. Nevertheless, we verified that neither the change of parameters in profile from A. J. Hawken et al. (2017) nor using the universal profile from N. Hamaus et al. (2014) instead of that from A. J. Hawken et al. (2017) would change our conclusions for dipole signal relevant to the gravitational shift.

Fig. 4 shows the impact of void center choice, characterized by ψ_c term on dipole signal. This ψ_c term should be investigated with the use of numerical simulations with mock catalogs by adopting a practical algorithm to determine the center of a void, including other systematic errors.

5 Conclusion

Void-galaxy cross-correlation represents the profile of the galaxy distribution of/around voids, thus these multipoles of void-galaxy cross-correlation are related to large-scale redshift surveys, which usually use galaxies as tracers in observations.

We have presented an analytic model for the void-galaxy cross-correlation function in redshift space including the higher order terms of the peculiar velocity and the gravitational potential through redshift space distortions. By adopting different specific models for a void density profile, we have quantitatively demonstrated the influence of the higher order terms on the multipole components of the void-galaxy cross-correlation. In particular, we demonstrate that the dipole component reflects the gravitational redshift of a void structure for the first time. Our conclusion is qualitatively robust against the change of the model parameters and the void profiles. In principle, our finding presents the possibility of a new approach to direct measurements of the gravitational potential of voids.

Reference

Y. Nan, & K. Yamamoto 2018, arXiv:1805.05708

A. J. Hawken et al. 2017, Astron. Astrophys. 607 A54

N. Hamaus, P. M. Sutter, & B. D. Wandelt 2014, Phys. Rev. Lett. 112 251302

D. Sakuma, A. Terukina, K. Yamamoto, & C. Hikage 2018, Phys. Rev. D 97, 063512

Y.-C. Cai, A. Tayolor, J. A. Peacock, & N. Padilla 2016, Mon. Not. R. Astron. Soc. 462 2465

S. Nadathur & W. Percival 2017, arXiv:1712.07575

N. Hamaus et al. 2017, arXiv:1705.05328

——index

b2

曲がった時空における真空と量子縺れ

上田 和茂 (広島大学大学院 理学研究科)

Abstract

一様加速度運動する観測者は、ミンコフスキー時空の真空を加速度に比例する温度で特徴付けられる熱的励起状態として観測するという理論予言がある。このような現象はウンルー効果と呼ばれており、曲がった時空の場の理論から導かれる基本的な理論予言である。ウンルー効果は、等価原理により加速度を重力に置き換えると、ブラックホールからの熱的放射を予言するホーキング効果とのアナロジーとして解釈することが出来る。

ミンコフスキー真空は、リンドラー時空の状態の量子縺れ状態として記述され、その記述からウンルー効果に伴う熱的性質を導出することが出来る [1]。ウンルー効果に伴う粒子や検出器の熱的励起が、エネルギー放射をするかどうかが問題となっていた。文献 [2] によって、量子場の非局所的な相関が起源となって、ウンルー効果に伴う量子放射が存在することが示された。本発表では、そこで重要な役割を果たす、ミンコフスキー真空の量子縺れについて議論する。

文献 [3] では、スカラー場のみを扱っていたが、より一般的な議論をするためディラック場で同様の解析を行い、ディラック場のモード関数と量子縺れについての解析を行っている。本発表では、リンドラー時空の状態とカスナー時空の状態による 2 次元と 4 次元のスカラー場の解析の結果に加え、ディラック場の解析について報告を行う。

1 Introduction

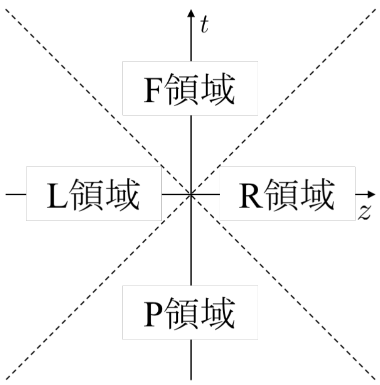

図 1: 領域の名称

ウンルー効果は、一様加速度 a で運動する観測者はミンコフスキー真空を、$T = a/2\pi$ で特徴づけられる熱的励起状態として観測するという曲がった時空における基本的な理論予言である [1]。これは、平坦時空におけるスカラー場を記述するための量子状態及び演算子が、加速系において変化することが原因であり、異なる系におけるモードの対応はボゴリューボフ変換によって関係付けることが出来る。

はじめに導入として、リンドラー時空上の量子状態を用いてウンルー効果を導出する。以下は、ウンルー達により示された、ミンコフスキー真空状態の記述である。

$$|0,\mathrm{M}\rangle \propto \prod_j \Big[\sum_{n_j=0}^{\infty} e^{-\pi n_j \omega/a} |n_j\rangle_{\mathrm{R}} \otimes |n_j\rangle_{\mathrm{L}}\Big] \qquad (1)$$

ここで、j は $j = (\omega, \boldsymbol{k}_\perp)$ によって指定されるモードを表し、$|n_j\rangle_{\mathrm{R,L}}$ は右, 左リンドラー時空における n 励起状態を表している。

簡単のため、2 つの調和振動子からなる量子場のモデルについて考える。この場合、式 (1) は次

のように簡単化される。

$$|0,\mathrm{M}\rangle = N_j \sum_{n_j=0}^{\infty} e^{-\pi n_j \omega_j/a} |n_j\rangle_\mathrm{R} \otimes |n_j\rangle_\mathrm{L} \tag{2}$$

ここで、$N_j = \sqrt{1-e^{-2\pi\omega_j/a}}$ である。R 領域の状態を表す密度演算子は、L 領域の状態についてトレースアウトすることによって得られる。

$$\hat{\rho}_\mathrm{R} = \mathrm{Tr}_\mathrm{L}[|0,\mathrm{M}\rangle\langle 0,\mathrm{M}|] \tag{3}$$

密度演算子を用いて粒子数演算子の期待値を計算すると、即座にボース分布関数が得られる。

$$\mathrm{Tr}_\mathrm{R}[\hat{\rho}_R a^\dagger a] = \frac{1}{e^{2\pi\omega/a}-1} \tag{4}$$

ここで、ボース分布関数の温度に対応する部分を見れば、確かに加速度 $a/2\pi$ に比例する温度分布が得られていることが分かる (ウンルー効果)。この一連の計算の中で重要なのは、式 (2) によるミンコフスキー真空の記述によってウンルー効果を予言できることであり、式 (2) は左右リンドラー時空上の量子場の縺れ状態となっている。このようにウンルー効果は、量子縺れによって熱的性質が誘起される現象であることが分かる。以上のことから、量子縺れによるミンコフスキー真空状態の記述はウンルー効果に重要であるが、式 (1) と式 (2) の右辺で用いられている量子状態はミンコフスキー時空の半分の領域 (R,L 領域) しか覆っていない。そこで、次の 4 つの座標を定義し各座標上で量子場を構成し解析するにより、ミンコフスキー真空状態の記述を拡張することができる [3]。

2 Methods

作用関数が次式で与えられる 4 次元無質量スカラー場について考える。

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \tag{5}$$

このスカラー場を量子化すると、

$$\hat{\phi}(t,\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_z d^2k_\perp}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2k_0}} \times \left(\hat{b}_{k_z\mathbf{k}_\perp} e^{-ik_0t+ik_zz+i\mathbf{k}_\perp\cdot\mathbf{x}_\perp} + \mathrm{h.c.}\right)$$

となる。ここで、$\hat{b}_{k_z\mathbf{k}_\perp}$ は消滅演算子であり、ミンコフスキー真空は全てのモードに対して $\hat{b}_{k_z\mathbf{k}_\perp}|0,\mathrm{M}\rangle = 0$ によって定義されている。他の座標上でも同様にモード展開の表式を求めることが出来る。そして各モードを解析接続することで、量子場の記述を拡張することが出来る。ディラック場を扱う場合は反交換関係を課すことにより、同様の手順で解析を行うことが出来る。

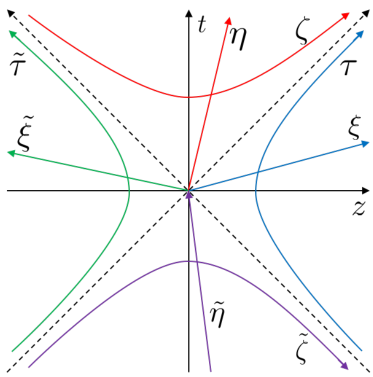

図 2: 各領域を覆う座標

$$\begin{aligned}
\text{R 領域 } (\tau,\xi) \ &: \ t = \frac{1}{a}e^{a\xi}\sinh a\tau, \\
&\quad\ z = \frac{1}{a}e^{a\xi}\cosh a\tau, \\
\text{L 領域 } (\tilde{\tau},\tilde{\xi}) \ &: \ t = \frac{1}{a}e^{a\tilde{\xi}}\sinh a\tilde{\tau}, \\
&\quad\ z = -\frac{1}{a}e^{a\tilde{\xi}}\cosh a\tilde{\tau}, \\
\text{F 領域 } (\eta,\zeta) \ &: \ t = \frac{1}{a}e^{a\eta}\cosh a\zeta, \\
&\quad\ z = \frac{1}{a}e^{a\eta}\sinh a\zeta, \\
\text{P 領域 } (\tilde{\eta},\tilde{\zeta}) \ &: \ t = -\frac{1}{a}e^{-a\tilde{\eta}}\cosh a\tilde{\zeta}, \\
&\quad\ z = \frac{1}{a}e^{-a\tilde{\eta}}\sinh a\tilde{\zeta}.
\end{aligned}$$

3 Results

それぞれの座標上で得られたモード関数を解析接続すると、2 つのモード関数 $v^{\mathrm{I}}_{\omega,\mathbf{k}_\perp}$, $v^{\mathrm{II}}_{\omega,\mathbf{k}_\perp}$ に集約されることが分かった。

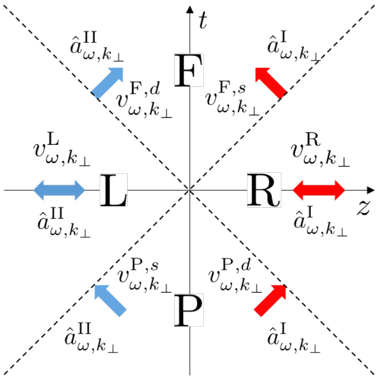

図 3: 4 次元無質量スカラー場のモード関数

$$v^{\mathrm{I}}_{\omega,\mathbf{k}_\perp}(x) = \begin{cases} v^{\mathrm{F,s}}_{\omega,\mathbf{k}_\perp}(= v^{\mathrm{F}}_{-\omega,\mathbf{k}_\perp}) & \mathrm{F} \\ v^{\mathrm{R}}_{\omega,\mathbf{k}_\perp} & \mathrm{R} \\ 0 & \mathrm{L} \\ v^{\mathrm{P,d}}_{\omega,\mathbf{k}_\perp}(= v^{\mathrm{P}}_{\omega,\mathbf{k}_\perp}) & \mathrm{P} \end{cases},$$

$$v^{\mathrm{II}}_{\omega,\mathbf{k}_\perp}(x) = \begin{cases} v^{\mathrm{F,d}}_{\omega,\mathbf{k}_\perp}(= v^{\mathrm{F}}_{\omega,-\mathbf{k}_\perp}) & \mathrm{F} \\ 0 & \mathrm{R} \\ v^{\mathrm{L}}_{\omega,\mathbf{k}_\perp} & \mathrm{L} \\ v^{\mathrm{P,s}}_{\omega,\mathbf{k}_\perp}(= v^{\mathrm{P}}_{-\omega,-\mathbf{k}_\perp}) & \mathrm{P} \end{cases}$$

ここで、添字 F,R,L,P はそのモード関数が定義されている領域を表し、添字 s,d はそれぞれ左, 右進行モードを意味する。以上で得られたモードと演算子の対応関係により、量子化されたスカラー場は

$$\phi(x) = \sum_{\sigma=\mathrm{I,II}} \int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^\infty d^2k_\perp \left(\hat{a}^\sigma_{\omega,\mathbf{k}_\perp} v^\sigma_{\omega,\mathbf{k}_\perp}(x) + \mathrm{h.c.}\right)$$

と与えられ、Minkowski 真空は

$$|0,\mathrm{M}\rangle = \prod_j \left[N_j \sum_{n_j=0}^\infty e^{-\pi n_j \omega/a} |n_j,\mathrm{I}\rangle \otimes |n_j,\mathrm{II}\rangle \right] \tag{6}$$

と表される。ここで、$N_j = \sqrt{1-e^{-2\pi\omega/a}}$、$j = (\omega, \mathbf{k}_\perp)$ である。

式 (6) は Unruh と Wald による記述 [1] を、Minkowski 時空全域を含む形へと拡張したものである。この形式により、ミンコフスキー時空全体の任意の領域のモードの量子縺れを考察することができる。

4 次元の場合の解析と同様に、2 次元無質量スカラー場の各領域におけるモード関数を解析接続すると、4 つのモード関数に集約されることが分かる。以下の図 4 は、2 次元 Minkowski 時空の各領域におけるモード関数とその接続を表している。ここで示されているモード関数と、モード関数に対応する演算子を用いると、2 次元のスカラー場のモード展開は以下の式に帰する。

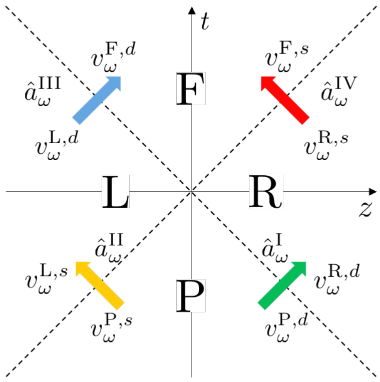

図 4: 2 次元無質量スカラー場のモード関数

$$\phi(x) = \sum_{\sigma=\mathrm{I,II,III,IV}} \int_0^\infty d\omega \left(\hat{a}^\sigma_\omega v^\sigma_\omega(x) + \mathrm{h.c.}\right) \tag{7}$$

このとき、Minkowski 真空状態は

$$|0,\mathrm{M}\rangle = \prod_\omega \left[N_\omega \sum_{n_\omega=0}^\infty e^{-\pi n_\omega \omega/a} |n_\omega,\mathrm{I}\rangle \otimes |n_\omega,\mathrm{III}\rangle \right] \otimes \prod_{\omega'} \left[N_{\omega'} \sum_{n_{\omega'}=0}^\infty e^{-\pi n_{\omega'} \omega'/a} |n_{\omega'},\mathrm{II}\rangle \otimes |n_{\omega'},\mathrm{IV}\rangle \right]$$

と表される。以上のことから、2 次元無質量スカラー場のモードの量子縺れの構造は、4 次元の場合とは異なることがわかる。

4 Discussion

計量が $g_{\mu\nu}$ で与えられる時空におけるディラック方程式は、

$$\left[i\gamma^{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}+\Gamma_{\mu}\right)-m\right]\psi=0 \tag{8}$$

となることが知られており、ここで Γ_{ν} は、以下で定義されるスピン接続である。

$$\Gamma_{\mu}=\frac{1}{4}\gamma_{\nu}\left(\frac{\partial\gamma^{\nu}}{\partial x^{\mu}}+\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\gamma^{\lambda}\right) \tag{9}$$

ここで、4 次元リンドラー時空を

$$t=\rho\sinh\eta,\quad z=\rho\cosh\eta,\quad x=x,\quad y=y$$

と定義すると、リンドラー時空上でのディラック方程式の解として得られるモード関数は、

$$\psi_{\omega\sigma}\equiv f^{\mathrm{R}}_{\omega\sigma}(\rho)e^{-i\boldsymbol{k}_{\perp}\cdot\boldsymbol{x}_{\perp}}e^{-i\omega\eta/a} \tag{10}$$

となる。ここで、スピノルの成分は、

$$f^{\mathrm{R}}_{\omega+}(\rho)=A_{+}\begin{pmatrix}K_{i\frac{\omega}{a}+\frac{1}{2}}(\kappa\rho)+iK_{i\frac{\omega}{a}-\frac{1}{2}}(\kappa\rho)\\0\\iK_{i\frac{\omega}{a}-\frac{1}{2}}(\kappa\rho)-K_{i\frac{\omega}{a}+\frac{1}{2}}(\kappa\rho)\\0\end{pmatrix}$$

及び、

$$f^{\mathrm{R}}_{\omega-}(\rho)=A_{-}\begin{pmatrix}0\\K_{i\frac{\omega}{a}+\frac{1}{2}}(\kappa\rho)+iK_{i\frac{\omega}{a}-\frac{1}{2}}(\kappa\rho)\\0\\K_{i\frac{\omega}{a}+\frac{1}{2}}(\kappa\rho)-iK_{i\frac{\omega}{a}-\frac{1}{2}}(\kappa\rho)\end{pmatrix}$$

で与えられる。ここで、$A_{\pm}$ は規格化定数であり、$K_{\nu}(z)$ は修正ベッセル関数である。また、$\kappa=\sqrt{m^2+\boldsymbol{k}_{\perp}{}^2}$ としている。

また、4 次元カスナー領域を

$$t=\rho\cosh\eta,\quad z=\rho\sinh\eta,\quad x=x,\quad y=y$$

と定義すると、カスナー時空上でのモード関数のスピノルの成分は、

$$f^{\mathrm{K}}_{\omega+}(\rho)=A'_{+}\begin{pmatrix}H^{(2)}_{i\frac{\omega}{a}+\frac{1}{2}}(\kappa\rho)+iH^{(2)}_{i\frac{\omega}{a}-\frac{1}{2}}(\kappa\rho)\\0\\iH^{(2)}_{i\frac{\omega}{a}-\frac{1}{2}}(\kappa\rho)-H^{(2)}_{i\frac{\omega}{a}+\frac{1}{2}}(\kappa\rho)\\0\end{pmatrix}$$

及び、

$$f^{\mathrm{K}}_{\omega-}(\rho)=A'_{-}\begin{pmatrix}0\\H^{(2)}_{i\frac{\omega}{a}+\frac{1}{2}}(\kappa\rho)+iH^{(2)}_{i\frac{\omega}{a}-\frac{1}{2}}(\kappa\rho)\\0\\H^{(2)}_{i\frac{\omega}{a}+\frac{1}{2}}(\kappa\rho)-iH^{(2)}_{i\frac{\omega}{a}-\frac{1}{2}}(\kappa\rho)\end{pmatrix}$$

で与えられる。以上より、解の基本形として得られる特殊関数の種類は、ディラック場の場合もスカラー場の場合も同じである。しかし、解の位相 (虚数 i や ± 1) は、スピノルが固有値方程式を満たすという条件の下決定しているので、単純なスカラー場からの類推のみからはディラック場の解を得ることはできない。例えば、カスナー時空の解をベッセル関数で記述すると、ハンケル関数による解と位相がずれる。

5 Conclusion

リンドラー時空とカスナー時空において、2 次元及び 4 次元の無質量スカラー場と、ディラック場の関数の解析性を調べた。特に、無質量スカラー場の場合では量子場の縺れの構造に違いが生じることが分かった。

Reference

[1] W. G. Unruh, et al, Phys. Rev. D **29**, 1047 (1984)

[2] S. Iso, et al, Phys. Rev. D 96, 045001(2017)

[3] A.Higuchi, et al 2017, PRD 96, 083531(2017)

[4] L. C. B. Crispino, et al 2008, Rev. Mod. Phys. 80, 787 (2008)

[5] David McMahon, et al (2005), arXiv:gr-qc/0601010

——index

b3

——index

b4

超低周波重力波の検出とその制限

久野　晋之介 (熊本大学大学院 自然科学教育部)

Abstract

PTA の観測周波数帯を大きく下回る超低周波重力波に対する新しい検出方法 (Reference[1]) が提唱されている。これまでは、時間に対して直線的に変化する重力波は、パルサーのスピンダウン率の補正として吸収されてしまうので、従来の PTA では検出できないと考えられてきた。しかし、新検出方法によると、そうした重力波の場合、スピンダウン率は重力波の影響を含んでおり、パルサーの位置によって異なる性質を持つ。そこで、そのスピンダウン率の統計的な性質を評価することで超低周波重力波の検出が可能となる。新検出方法では周波数によって重力波の影響が異なる。先行研究 (Reference[1]) では $10^{-13} \sim 10^{-9}$Hz について議論したが、本研究では $\ll 10^{-13}$Hz の低周波の感度を見積もる。

1　Introduction

$10^{-9} \sim 10^{-6}$Hz の低周波重力波はパルサー・タイミング・アレイ (PTA) という手法を用いて検出が可能である。パルサーは安定した周期でパルスを放射しており、パルスの到来時刻を予測できる。しかし、重力波が存在するとパルスの伝播経路が歪められ、パルスの到来時刻が予測とずれる。このずれをシグナルとして観測するのが PTA である。PTA では 10 年周期程度の重力波を観測する。10 年は観測期間に対応し、その周期は軌道半径が milli-pc スケールの連星の公転周期に相当する。

軌道半径が milli-pc の超大質量ブラックホール連星は、連星の進化段階としては後期に当たる。初期段階の超大質量ブラックホール連星の軌道は、星の散乱や周りのガスの摩擦によって軌道角運動量が輸送されるにつれて縮む。軌道半径が数 pc になると、軌道角運動量の輸送は効果的でなくなる。しかし、2 つの超大質量ブラックホールが、重力波放射のみで合体するのはハッブル時間を超える。これは "the final parsec problem" と言われており、初期段階の連星の重力波が重要となってくる。しかし、既存の PTA では $\ll 10^{-9}$Hz の重力波は検出できない。先行研究では $10^{-13} \sim 10^{-9}$Hz の重力波に対する感度の計算を行った。本研究では、新検出方法を用いて $\ll 10^{-13}$Hz の低周波の感度を見積もり、その検出可能性について議論する。

2　Detection principle

パルサーからのパルスは、地球に重力波が到来している場合、本来の到来時刻からずれが生じる。この現象を用いて、重力波の検出を行う手法が PTA である。このずれは timing residual と呼ばれ、次式で与えられる。

$$r_{GW}(t) = \sum_{A=+,\times} F^A(\hat{\Omega}, \hat{p}) \int^t \Delta h_A(t', \hat{\Omega}, \theta) dt' \quad (1)$$

ここで $\hat{\Omega}$、$\hat{p}$ はそれぞれ重力波の伝播方向、パルサーの方向を示すベクトルであり、θ は重力波の偏向角である。$F^A(\hat{\Omega}, \hat{p})$ はアンテナビームパターンと呼ばれるファクターであり、次式で与えられる。

$$F^A(\hat{\Omega}, \hat{p}) = \frac{1}{2} \frac{\hat{p^i}\hat{p^j}}{1 + \hat{\Omega} \cdot \hat{p}} e^A_{ij}(\hat{\Omega}) \quad (2)$$

ここで、$e^A_{ij}(\hat{\Omega})(A = +, \times)$ は重力波偏光テンソルであり、偏光基底ベクトル $\hat{m}$、$\hat{n}$ を用いて次の 2 式で与えられる。

$$e^+_{ij}(\hat{\Omega}) = \hat{m}_i \hat{m}_j - \hat{n}_i \hat{n}_j \quad (3)$$

$$e^\times_{ij}(\hat{\Omega}) = \hat{m}_i \hat{n}_j + \hat{n}_i \hat{m}_j \quad (4)$$

$\Delta h_A(t', \hat{\Omega}, \theta)$ は地球とパルサー間の計量摂動の差であり、次式で与えられる。

$$\Delta h_A(t', \hat{\Omega}, \theta) = h_A(t, \hat{\Omega}, \theta) - h_A(t_p, \hat{\Omega}, \theta) \quad (5)$$

ここで、$t_p = t - \tau = t - L/c(1 + \hat{\Omega}\cdot\hat{p})$ であり、τ はパルサーから地球までのパルスの伝搬時間、L は地球からパルサーまでの距離である。(5) 式の右辺の 1 項目を Earth term、2 項目を Pulser term と呼び、重力波の周波数が $\gtrsim 10^{-13}$Hz の場合、Pulser term はランダムノイズとして振る舞い、その平均は 0 である。その時、(5) 式は次式で与えられる。

$$\Delta h_A(t', \hat{\Omega}, \theta) = \dot{h}_A(\hat{\Omega}, \theta) t \tag{6}$$

(6) 式を (1) 式に代入すると、超低周波重力波の timing residual は次式となる。

$$r_{GW}(t) = \frac{1}{2}\sum_{A=+.\times} F^A(\hat{\Omega}, \hat{p})\dot{h}_A(\hat{\Omega}, \theta) t^2 \tag{7}$$

(7) 式より超低周波重力波の timing residual は時間の 2 乗に比例することが分かる。

パルサーは電磁波を放射することで、角運動量を失い、自転速度は徐々に減衰していく。パルサーのスピンダウンによる timing residual は次式で与えられる。

$$r_p = \frac{1}{2}\frac{\dot{p}}{p}t^2 \tag{8}$$

ここで p はパルスの周期、$\dot{p}$ と p_0 はそれぞれ観測されたスピンダウン率、本来のスピンダウン率である。(7)、(8) 式から分かるようにスピンダウンによる timing residual は重力波による timing residual と同じ時間依存性を持っているため、重力波による影響はパルサーのスピンダウンの補正として吸収されてしまう。そのため、この補正はバイアスファクター $\alpha(\hat{\Omega}, \hat{p}, \theta)$ を用いて次のように書ける。

$$\frac{\dot{p}}{p} = \frac{\dot{p_0}}{p} + \alpha(\hat{\Omega}, \hat{p}, \theta) \tag{9}$$

ただし、$\alpha(\hat{\Omega}, \hat{p}, \theta)$ は次式である。

$$\alpha(\hat{\Omega}, \hat{p}, \theta) = \sum_{A=+.\times} F^A(\hat{\Omega}, \hat{p})\dot{h}_A(\hat{\Omega}, \theta) \tag{10}$$

本研究では、$\lesssim 10^{-13}$Hz の重力波を考える。この時、pulsar term をランダムノイズとみなすことはできない。2 項の差のテイラー展開から (5) 式は次のような式となる。

$$\Delta h_A(t, \hat{\Omega}) = \dot{h}_A t\,(1 - e^{2i\pi f_{GW}\tau}) \simeq \dot{h}_{Af^2} t\,(1 + \hat{\Omega}\cdot\hat{p})^2 \tag{11}$$

ここで、 $\dot{h}_{Af^2} = 2\pi^2 f_{GW}^2 L^2/c^2\dot{h}_A$ であり、このときの $\alpha(\hat{\Omega}, \hat{p}, \theta)$ は次式で与えられる。

$$\alpha(\hat{\Omega}, \hat{p}, \theta) = \frac{1}{2}\sum_{A=+.\times} \hat{p^i}\hat{p^j}\, e^A_{ij}(1 + \hat{\Omega}\cdot\hat{p})\,\dot{h}_{Af^2} \tag{12}$$

原理的に、重力波の影響を $\dot{p}/p$ から取り出すことはできない。そのため、従来の PTA では検出できないと考えられていた。しかし、$\alpha(\hat{\Omega}, \hat{p}, \theta)$ の値は波源の位置、重力波の偏向、パルサーの位置に依存しており、正と負の値を持つ領域が存在する。図 1 で見て取れるように、$\alpha(\hat{\Omega}, \hat{p}, \theta)$ の分布は四重極のパターンである。

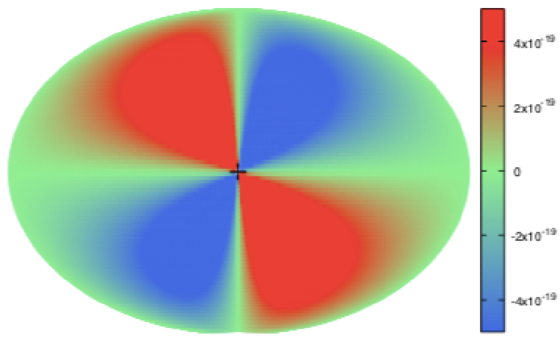

図 1: $\dot{h}_+ = 0\,\mathrm{s}^{-1}$、$\dot{h}_\times = 10^{-18}\,\mathrm{s}^{-1}$ での天球面上のバイアスファクター $\alpha(\hat{\Omega}, \hat{p}, \theta)$。”+” は波源の位置を示す。

パルサーをバイアスファクターの 2 つの領域に分け、スピンダウン率の統計的差を評価する。重力波が存在する場合、 2 つの領域でスピンダウン率の分布が異なる。図 2 は 2 つの領域の $\log_{10}\dot{p}/p$ のヒストグラムである。その 2 つの分布の差を見るために、歪度という指標を用いる。バイアスファクターが正の領域ではその分布の歪度は正、負の領域ではその分布は負になる。こうした分布の歪度の差を指標として用いて、統計誤差以上であれば重力波の検出となる。

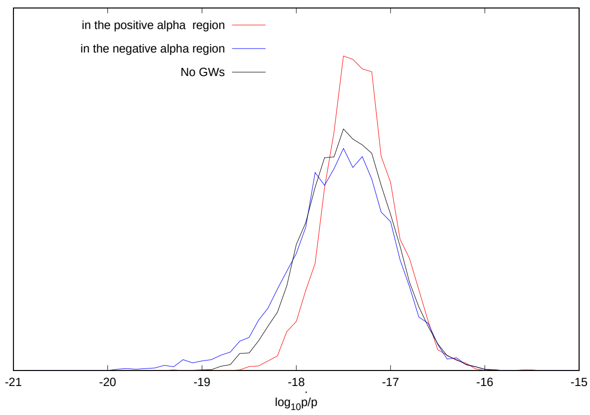

図 2: $\dot{h}_A = 4\times10^{-13}\mathrm{s}^{-1}$ での $\log_{10}\dot{p}/p$ のヒストグラム。黒い線は重力波がない場合の分布で、平均-17.5、分散 0.21 のガウス分布と仮定した。赤、青の線はそれぞれ α が正、負の領域での分布を示す。

3 Simulation

パルサーは基本的に銀河面上に分布するが、本研究のシミュレーションでは、天球面上にランダムで等方的に分布した 10,000 個のミリ秒パルサーを考える。ここで、そのミリ秒パルサーのスピンダウン率 $\log_{10}\dot{p}/p$ の分布は実際に観測された 149 個のミリ秒パルサーのデータから得られた、平均-17.5、分散 0.21 のガウス分布にしたがって与えられると仮定した。$\log_{10}\dot{p}/p$ の値のヒストグラムはそれぞれの領域で得られ、2 つのヒストグラム間の歪度の差が計算される。歪度の差は次式で与えられる。

$$S_{\alpha+(-)} = \frac{1}{N_{+(-)}}\sum_{i}^{N_{+(-)}}\left(\log_{10}\left(\frac{\dot{p}}{p}\right)_i - \mu_{+(-)}\right)^3 \tag{13}$$

ここで、$i = 1,\cdots,N_{+(-)}$ は $\alpha(\hat{\Omega},\hat{p},\theta)$ が正 (負) の領域でのミリ秒パルサーの数であり、$\mu_{+(-)}$ はそれぞれの領域での $\log_{10}\dot{p}/p$ 分布の平均値で次式で与えられる。

$$\mu_{+(-)} = \frac{1}{N_{+(-)}}\sum_{i}^{N_{+(-)}}\log_{10}\left(\frac{\dot{p}}{p}\right)_i \tag{14}$$

L を平均 2 kpc、分散 1 kpc のガウス分布にしたがって 10,000 個のパルサーそれぞれにランダムに与え、$\dot{h}_A$ の大きさが $0, 4\times10^{-13}, 10^{-12}, 5\times10^{-12}\mathrm{s}^{-1}$ の場合のそれぞれで 10,000 回の realization を行う。

4 Discussion and summary

得られた ΔS のヒストグラムが図 2 である。

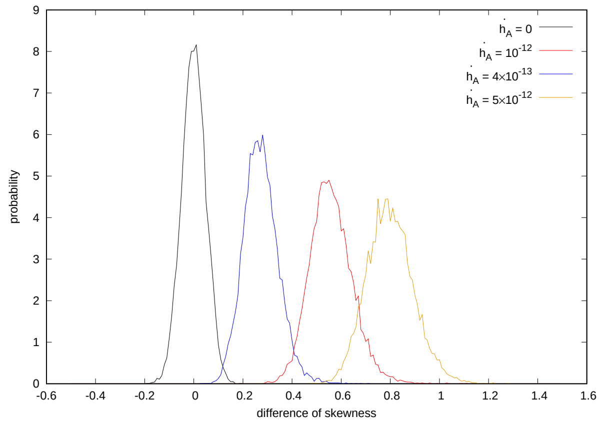

図 3: 10,000 個のミリ秒パルサーの場合の、正と負の α での $\log_{10}\dot{p}/p$ 分布の歪度の差の確率分布。縦軸は単位歪度あたりの確率を示す。黒の線は重力波がない場合であり、青、赤、黄の線は $\dot{h}_A$ がそれぞれ $4\times10^{-13}, 10^{-12}, 5\times10^{-12}\mathrm{s}^{-1}$ の場合に相当する。

本研究では超低周波重力波 ($\ll 10^{-13}$Hz) を考えた。図 3 は 10,000 個のミリ秒パルサーの歪度の差の確率分布を示す。$\dot{h}_A$が $4\times10^{-13}\mathrm{s}^{-1}$ より大きい重力波では歪度の差が統計誤差以上であり、検出可能であることが分かった。波源として超大質量ブラックホール連星を考える。重力波の振幅は (15) 式、一般化されたケプラーの第三法則は (16) 式で表される。ここでは、

$$h_A = \frac{2(GM)^{5/3}(\pi f_{GW})^{2/3}}{c^4 R} \tag{15}$$

$$G(m_1+m_2) = (r_1+r_2)^3(2\pi f_{GW})^2 \tag{16}$$

ただし、R は地球から波源までの距離、M は chirp mass と呼ばれるもので $M = (m_1m_2)^{3/5}/(m_1+m_2)^{1/5}$ で表される。m_1、m_2 は連星を構成するブラックホールの質量であり、r_1、r_2 はそれぞれの重心からの距離である。銀河系中心のブラックホールとして Sgr A*(質量 $4\times10^6 M_\odot$) が知られている。例として、Sgr A* を連星の片方として、α が $\gtrsim 10^{-19}$ で $\dot{p}/p$ への寄与が大きくなることを用いて、各パラメー

ターの制限を考えてみる。$f_{GW} = 10^{-13}$Hz として、連星を形成するもう片方のブラックホールの質量を $m_2 = 10^{10} M_{\odot}$ と仮定すると、軌道半径は ∼20pc、$\dot{h}_A \sim 10^{-28}\mathrm{s}^{-1}$ となる。しかし、本研究の手法で検出できる重力波は $\dot{h} \gtrsim_A 4 \times 10^{-13}\mathrm{s}^{-1}$ であるため銀河系中心のブラックホール連星に対しては現実的な制限を与えることは難しいことが分かった。

Reference

[1]Yonemaru et al. 2018, MNRAS, 478, 1670

[2]"Gravitational waves from an SMBH binary in M87", Yonemaru et al. 2016, PASJ, 68, 106

——index

c1

21-cm 線観測における中性水素バイアスのモデル化

安藤 梨花 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙の加速膨張をもたらす有力な候補としてダークエネルギーが考えられている。ダークエネルギーを特徴づけるパラメータを制限することで、ダークエネルギーの性質に制限を与えることができる。そのためにバリオン音響振動 (BAO) や赤方偏移空間歪み (RSD) を用いる方法がある。次世代の電波望遠鏡の Square Kilometre Array(SKA) は、中性水素から放射される波長 21-cm の電波を観測する。SKA では個々の銀河を分解せずに 21-cm 線の強度を観測する intensity mapping survey によって、遠方宇宙の中性水素の 3 次元分布を得ることができる。本研究では、宇宙論的流体シミュレーションを用いて赤方偏移 1 から 5 における中性水素バイアスのスケール依存性と中性水素における RSD を測定した。

1 Introduction

1990 年代後半に、Ia 型超新星の観測から宇宙の加速膨張が発見されたが、一般相対論の枠組みにおいて通常の物資のみではこれを説明することはできない。そこで加速膨張を説明するものとして、一般相対論の枠組みで負の圧力を持つダークエネルギーを導入する理論と、一般相対論そのものを拡張した修正重力理論などがある。加速膨張の特徴は宇宙の大スケールの物質のゆらぎの大きさやその成長に表れるため、大規模構造の観測からダークエネルギーや修正重力理論に制限を与えることが可能である。
我々は赤方偏移空間における銀河などの天体を観測する。赤方偏移は宇宙膨張による後退速度の他に天体の持つ特異速度の寄与も含まれるため、実空間とは異なる位置で観測されるこの効果のことを RSD と呼ぶ。大スケールでは高密度領域に落ち込む様な運動をするため、2 次元相関関係が視線方向に潰れる。一方小スケールでは、非線形なランダム運動によって 2 次元相関関係が視線方向に引き延ばされる。RSD の観測からゆらぎの成長率への制限が与えられるため、重力理論の検証へと繋がる。 BAO や RSD などの測定はすでに銀河などを大規模構造のトレーサーとして行われてきた。しかし銀河観測では赤方偏移を正確に決定することの困難によって、遠方宇宙の観測が難しかった。そこで新たに中性水素からの 21-cm 線を暗黒物質のトレーサーとする観測が注目を浴びつつある。21-cm 線 intensity mapping survey という手法では、低い角度分解能で広い領域を、高い周波数分解能で遠方の宇宙までの中性水素の 3 次元分布を効率よく観測することができる。SKA1-MID の intensity mapping survey では $0.35 < z < 3.06$ を 50kHz の周波数分解能で、$25,000\mathrm{deg}^2$ の領域を観測する (Bull et al. 2015; Santos et al. 2015)。現在、21-cm 線の観測を用いた宇宙論パラメータの制限予測などが数多く行われている。理論予言は多くの場合ダークマターについてのみ行われるため、中性水素の分布から宇宙論的制限またはその予測を行うためには中性水素の分布とダークマターの分布の関係である HI バイアスを理解する必要がある。Bull et al. (2015) では定数のバイアスのモデルを用いた制限予測を行なった。しかし、より正確な制限と予測を行うためには、HI バイアスのスケール依存性についても調べる必要がある。中性水素の空間分布や時間発展には重力相互作用以外の複雑な物理が寄与しているため、記述が難しく十分な理解がされていない。そこで、宇宙論的流体シミュレーションのデータを用いることで、実空間における中性水素のパワースペクトル HI バイアス、赤方偏移空間における中性水素のパワースペクトルを測定した。本研究では、第 2 章でシミュレーションデータとその取り扱いについて、第 3 章と第 4 章で測定結果について、第 5 章でまとめについて述べます。

2 Method

この章では本研究で用いたシミュレーションデータについての簡単な説明を行う。

2.1 Osaka simulation

本研究では Osaka simulation のデータを用いて中性水素の密度場やパワースペクトルを計算した。Osaka simulation は N-body/SPH コードである GADGET-3(オリジナルは (Springel 2005)) の修正版を用いている。このコードでは星形成と超新星フィードバックを取り扱っており、AGN フィードバックは含まれておらず、一様な紫外線背景放射を採用している。詳細は (Aoyama et al. 2017) と Shimizu et al.(2018 Submitted) を参照。
シミュレーションのボックスサイズは一辺が共動距離で $85h^{-1}$Mpc であり、ガスとダークマターの粒子数の初期値は 2×512^3 である。宇宙論パラメータは WMAP-9 を採用し、ガスとダークマター粒子の質量は各々 $5.79 \times 10^7 h^{-1} M_\odot$ と $2.88 \times 10^8 h^{-1} M_\odot$ である。

3 中性水素バイアス

BAO 測定によるダークエネルギーへの正確な制限には、HI バイアスのスケールと赤方偏移依存性の測定が必要である。そのためにまずは HI バイアスの定義と測定手順について、そのあと測定結果について議論する。

3.1 measurment

本研究ではパワースペクトルを用いて HI バイアスを定義する。実空間におけるパワースペクトルは以下のように波数 k の絶対値の関数として測定される。

$$P_{\rm XY}(k_i) = \frac{1}{N_k} \sum_{j, k_j \in k_i}^{N_k} \Re[\delta_X(k_j) \delta_Y^*(k_j)], \qquad (1)$$

ここで X, Y にはダークマターや HI の密度ゆらぎが入る。波数 k の範囲はボックスサイズとグリッドサイズから決定され、最小値及び最大値はそれぞれ $k_{\rm min} = 2\pi/L_{\rm box}$、$k_{\rm max} = \pi N_{\rm grid}/L_{\rm box}$ である。ここで $L_{\rm box}$ がシミュレーションボックスの一辺の長さ $85h^{-1}$Mpc、$N_{\rm grid}$ が一辺に対するグリッド数の 512 を意味する。HI バイアスはこれらの測定されたパワースペクトルの比を用いて計算される。

$$\hat{b}_{\rm HI}^{\rm cross}(k) \equiv \frac{P_{\rm HI,\,dm}(k)}{P_{\rm dm}(k)}, \qquad (2)$$

ここで $P_{\rm HI,\,dm}$ と $P_{\rm dm}$ は HI–ダークマターの相互相関およびダークマターの自己相関である。HI バイアスはこの他にも

$$\hat{b}_{\rm HI}^{\rm auto}(k) \equiv \sqrt{\frac{P_{\rm HI}(k) - S}{P_{\rm dm}(k)}}, \qquad (3)$$

で定義する方法もある。$P_{\rm HI}$ は HI の自己相関で S はショットノイズに対応する。シミュレーションにおける HI のショットノイズは十分に定義されていないため取り扱いが難しい。相互相関の場合はショットノイズを考慮する必要がないため、本研究では前者である式 (2) の定義をバイアス測定に用いる。

3.2 results

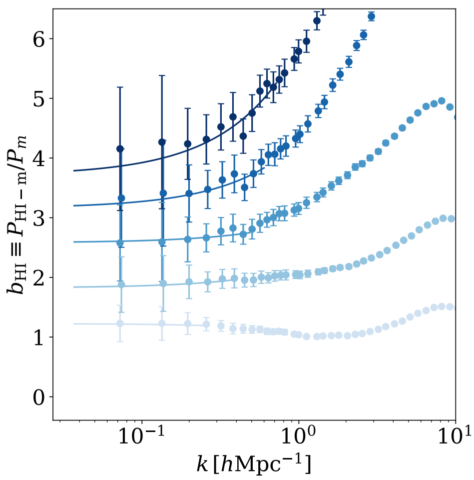

図 1: 式 (2) の定義を用いて測定した HI バイアス。点と線は上から下に向かって赤方偏移 5,4,3,2,1 における値を示している。実線は式 (4) を用いて得られたベストフィットモデルである。

H I バイアスの結果を図 1 に示した。シミュレーションボックスの大きさの限界から、波数 $k < 0.1h\mathrm{Mpc}^{-1}$ より大きなスケールに行くことはできない。
さらに H I バイアスのスケール依存性を定量的に評価し、バイアスの数式化を行うために k に関する一次関数を導入する。

$$b_{\mathrm{HI}}(k) = b_0 + b_1 k \tag{4}$$

ここで b_0, b_1 はフリーパラメータとして、H I バイアスのフィッティングを行う。その結果を図 2 に示した。スケール依存性を表す項の係数である b_1 に注目すると、赤方偏移 $z < 3$ では b_1 は誤差の範囲内で 0 と矛盾せず定数のバイアスで説明できる。一方で $z > 3$ ではスケール依存性が存在することが確認できた。

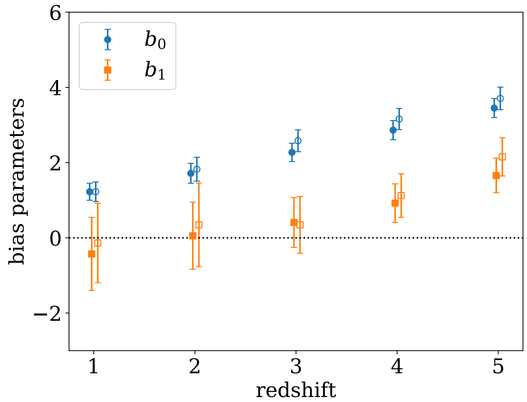

図 2: ベストフィットパラメータ b_0 と b_1 の各赤方偏移での値。白丸 (open) が説明した Osaka simulation のデータを用いて計算した結果。黒丸 (filled) は別のシミュレーション (Illustris simulation) のデータを用いて同様の計算を行なった結果。

4 赤方偏移空間におけるパワースペクトル

銀河観測などを行う時には、赤方偏移から天体までの距離を測定する。赤方偏移には宇宙膨張による後退速度と天体の特異速度の視線方向成分による寄与の 2 つに分けられる。この特異速度の寄与によって、赤方偏移空間での距離は実空間からずれる。赤方偏移空間での天体の座標は

$$(s_1,\, s_2,\, s_3) = \left(\chi_1,\, \chi_2,\, \chi_3 + \frac{v_3}{aH}\right), \tag{5}$$

と表される。s_i と $\chi_i (i = 1, 2, 3)$ は赤方偏移空間と実空間での座標であり、$i = 3$ を視線方向成分とした。v_3 は特異速度、a は膨張のスケールファクター、H はハッブルパラメータである。この効果によって赤方偏移空間における相関関数やパワースペクトルは変形する (Kaiser 1987)。

4.1 赤方偏移空間歪み

赤方偏移空間における非等方パワースペクトルについて述べる。21-cm 線で観測される中性水素もまた銀河と同様に特異速度によるドップラー効果の影響を受ける。速度について線形理論の極限では、カイザーの公式で非等方パワースペクトルが与えられる。

$$P_{\mathrm{HI}}^{(s),\mathrm{Kaiser}}(k,\mu) = b_{\mathrm{HI}}^2 (1 + \beta\mu^2)^2 P_{\mathrm{dm}}^{\mathrm{lin}}(k), \tag{6}$$

μ は視線方向に対する余弦で、b_{HI} は H I バイアス (今は定数とする)、$\beta = f/b$ は線形成長率をバイアスで割った値である。この式では大スケールで高密度領域に落ち込む運動により引き起こされる Kaiser 効果が含まれている。さらに小スケールにおける非線形のランダムな運動に起因する Finger of God 効果を含めると、非等方パワースペクトルは

$$P_{\mathrm{HI}}^{(s)}(k,\mu) = \mathrm{DFoG}[k\mu f\sigma_v]\, P_{\mathrm{HI}}^{(s),\mathrm{Kaiser}}(k,\mu), \tag{7}$$

となる。この DFoG は視線方向のゆらぎを均す項であり、ガウス関数などで表すことができる。

$$\mathrm{DFoG}[x] = \exp(-x^2) \tag{8}$$

この 2 次元非等方パワースペクトルはルジャンドル多項式を用いて展開することができる。

$$P_l^{(s)}(k) = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\mu\, P^{(s)}(k,\mu) \mathcal{L}_l(\mu), \tag{9}$$

ここで $l = 0, 2, 4$ であり、$\mathcal{L}_l$ は l 次のルジャンドル多項式を意味する。

データから測定した $P_l^{(s)}(k)$ についてモデル (式 (7)) を用いて χ^2 フィットを行った。ここでは線形のバイアスパラメータ b_0 と中性水素の速度分散 σ_v をフリーパラメータとしてパラメータへの制限を行なった。その結果が図 3 であり、詳しくは 4.2 節で述べる。フィットには $l=0,2$ のみを、波数は $0.2<k<k_{\max}$ の範囲のデータを用いて行なった。シミュレーションのボックスサイズが十分に大きく無いために大スケール $k<0.2$ では cosmic variance が大きくなる。一方で高次の線形理論が適用できる範囲から $k_{\max}$ を決定した。

4.2 results

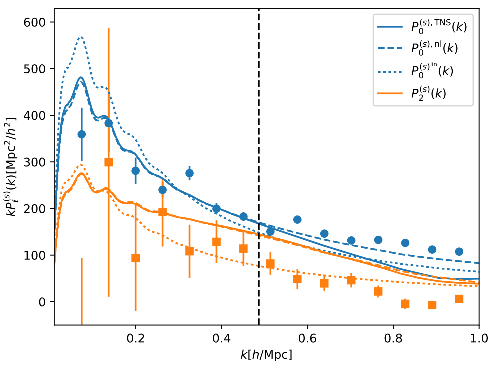

図 3: 非等方パワースペクトルのルジャンドル展開。エラーバー付の点がシミュレーションデータから測定した値で、点線が式 (7) のベストフィットモデルである。青：$l=0$, オレンジ：$l=2$

フィットの結果、表 1 から RSD の測定から推定した HI バイアスの値は図 2 と矛盾しないことがわかった。しかし、モデル (式 (7)) では非線形性が十分に考慮されていないため、推定される速度分散 σ_v の値が小さいことがわかった。今後 21-cm 線観測において更に正確に推定するためには、定数でないスケール依存するバイアスや非線形性をより考慮したモデルが必要となる。

表 1: HI バイアス b_{HI} と速度分散 σ_v

redshift	b_0	σ_v
1	$1.07^{+0.11}_{-0.06}$	$1.42^{+1.36}_{-0.89}$
2	$1.82^{+0.11}_{-0.05}$	$0.00^{+1.50}_{-}$
3	$2.64^{+0.13}_{-0.07}$	$0.00^{+1.20}_{-}$
4	$3.59^{+0.16}_{-0.10}$	$0.00^{+1.01}_{-}$
5	$4.73^{+0.17}_{-0.13}$	$0.00^{+0.79}_{-}$

5 Conclusion

21-cm 線を用いた大規模構造の将来観測と、宇宙論への制限が期待されてる。21-cm 線観測において正確な解析を行うためには、観測量と理論とを正しく結びつける必要がある。本研究では宇宙論的流体シミュレーションのデータを用いて、実空間における中性水素のパワースペクトルを測定し、HI バイアスのスケール・赤方偏移依存性を測定した。さらに観測では赤方偏移空間における天体の位置を測定するため、赤方偏移空間における非等方パワースペクトルの測定と RSD のモデルを用いた HI バイアスと中性水素の速度分散の推定も行なった。今後、非線形性とバイアスのスケール依存性を取り入れた中性水素の非等方パワースペクトルのモデルの構築を行う。これによって 21-cm 線の RSD 観測からゆらぎの線形成長率 f に制限が与えられ、これは重力理論への新たな制限につながる。

Acknowledgement

本研究のためにご指導してくださった皆様に深く感謝いたします

Reference

Bull P., Ferreira P. G., Patel P., Santos M. G., 2015, ApJ, 803, 21

Springel V., 2005, MNRAS, 364, 1105

Aoyama S., Hou K.-C., Shimizu I., Hirashita H., Todoroki K., Choi J.-H., Nagamine K., 2017, MNRAS, 466, 105

Santos M. et al., 2015, Advancing Astrophysics with the Square Kilometre Array (AASKA14), 19

Kaiser N., 1987, MNRAS, 227, 1

——index

c2

Stacking を用いた宇宙再電離期からの 21cm 線の検出可能性

中島 大佑 (熊本大学　自然科学教育部)

Abstract

宇宙晴れ上がりののち、宇宙は天体が存在しない暗黒時代を迎えた。やがて、初代天体が形成されて周囲の水素が電離されていった。この時代のことを宇宙再電離期 (the Epoch of Reionization, EoR) という。宇宙再電離期は極めて遠方の情報であるため、未だにわかっていないことが多い。そこで、宇宙再電離期を探査する手段として、中性水素の 21cm 線を観測することが有効である。しかし、21cm 線は非常に微弱な電波であり、なおかつ観測機器のノイズの存在により、観測は非常に困難である。今回は、銀河の Stacking というノイズのスムージングの方法を用いて 21cm 線の検出可能性について調べた。

1　Introduction

宇宙晴れ上がり以降、天体の存在しない暗黒時代が到来し、宇宙はほぼ中性水素に満たされたいた。しかし、ある時期に初代天体が誕生したことによって、その天体から電離光子が放出され、周囲の中性水素を電離していき、現在はほとんどの水素が電離された状態である。その時代を宇宙再電離期という。

再電離期の終了時期については、SDSS(Sloan Digital Sky Survey) のクエーサー観測から制限ができている。しかし、それ以前の再電離期半ばから初期の情報は現在の観測技術では捉えることができておらず、情報が不足しているが、現在の SKA (Square Kilometre Array) 計画による大型電波望遠鏡の完成により宇宙再電離期の観測が可能になることが期待されている。

宇宙再電離期を観測することによって、初代星や初代銀河の形成や大規模構造がどのように発展していったのかを調べることができる。そのために、宇宙再電離期から直接届く 21cm 線を観測することによって、その時期の情報を得ることができる。

宇宙再電離期観測は、直接の観測量としては 21cm 線輝度温度が用いられる。今回は、複数の天体の視線方向の輝度温度スペクトルを取ることによって観測器のノイズを平滑化する Stacking という方法を用いて、21cm の検出可能性について調べた。

一つの天体を対象とした視線方向の輝度温度のスペクトルは、観測機器の thermal noise が 21cm 線シグナルに対して非常に大きいことから検出が困難である。しかし、多くの天体を stack(スペクトルを足しあげる) して平均を取ることで、ノイズはスムージングされ、シグナルが現れることが予想される。

この研究の観測の対象としては、近年ハッブル望遠鏡 (HST) が捉えた最遠方銀河 (z∼11.1) の GN-z11 に着目して、シミュレーションで同様の銀河を複製して Stacking を行うことによって得られるスペクトルのプロファイルや、Stack 数や銀河の赤外線光度などによって S/N(Signal-to-Noise ratio) がどのように変化するのかを調べた。(Geil et al. 2017)

2　21cm-line physics

中性水素の陽子と電子はそれぞれ 1/2 のスピンを持っている。スピン状態が平行 (triplet) の時はエネルギー準位が高く、反平行 (singlet) の時はエネルギー準位が低い。そして、一つのエネルギー準位から別のエネルギー準位へ遷移する際に放出・吸収される電磁波が 21cm 線である。

triplet 状態と singlet 状態の中性水素の数密度をそれぞれ n_1,n_0 とすると、以下の式でスピン温度が定義される。

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{g_1}{g_0}\exp\left(-\frac{h\nu_{21}}{kT_{\rm s}}\right) \tag{1}$$

ここで、g_1,g_0 は統計的自由度、k はボルツマン定数、h はプランク定数、ν_{21} は 21cm 線の周波数である。そして、このスピン温度と CMB 温度の差から輝度温度が定義される。

$$\begin{aligned}\delta T_{\mathrm{b}} &= \frac{T_s - T_{CMB}}{1+z}(1-e^{-\tau_{\nu 0}}) \\ &\approx 27 x_{\mathrm{HI}}(1+\delta)\left(1-\frac{T_\gamma}{T_{\mathrm{s}}}\right)\left(\frac{1+z}{10}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \left(\frac{0.15}{\Omega_{\mathrm{m}} h^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\Omega_b h^2}{0.023}\right)[\mathrm{mK}] \quad (2)\end{aligned}$$

ここで、$\mathrm{T_{CMB}}$ は CMB 温度、$\tau_{\nu 0}$ は 21cm 線の光学的厚さである。この式から、輝度温度は密度揺らぎ δ、中性率 x_{HI}、スピン温度 T_{s} に依存することがわかる。

先行研究 (Geil et al. 2017) で用いられた DRAGONS(The Dark-ages, Reionization And Galaxy-formation Observables from Numerical Simulations) project は、N 体計算、銀河形成モデル、準数値的再電離計算の 3 つを組み合わせたシミュレーションを用いている。

このシミュレーションでは、ハッブル宇宙望遠鏡 (HST) によって発見された最遠方銀河 (GN-z11) に着目し、シミュレーション上で同じ遠方に存在し、GN-z11 と同等の明るさや恒星質量を持つ銀河の周囲への電離の寄与の時間発展について調べた。

3 Stacking Strategy

この研究 (Geil et al. 2017) での Stacking の対象天体は、z∼11 に存在する銀河である。これらの銀河が、周囲の銀河間物質 (Inter Galactic Medium, IGM) にどのような影響を及ぼし、どのような電離バブルを形成するのかを再現している。これらの銀河を対象として、視線方向の輝度温度スペクトルを取ることによって、ノイズに覆われたシグナルを取り出す。

式 (2) より、輝度温度は中性率に比例することから、中性の領域で輝度温度は高く、電離されている領域では輝度温度は低い。なので、シグナルの形は、バブルの平均半径ほどの幅を持った穴のような形になることが予想される。

thermal noise に関しては、SKA を想定した場合、次の二つの値に依存することがわかっている。

$$\sigma_{\mathrm{N}} \propto \frac{1}{\sqrt{t_{\mathrm{int}} \Delta \nu}} \quad (3)$$

ここで、t_{int} は観測時間で、$\Delta\nu$ は周波数のチャンネル幅である。

4 Results and Discussion

ここで、Signal-to-Noise ratio として、$S/N = \overline{\Delta T}/\sigma_{\Delta T}$ を定義する。本研究では、S/N が 5 を超えると検出可能であると考えている。

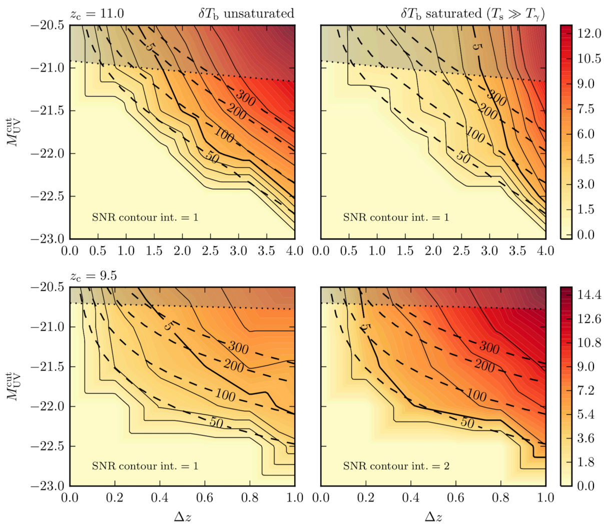

図 1: $z_c = 11, 9.5$ の時の中心銀河の赤外線強度と観測赤方偏移幅に対応する S/N(Geil et al. 2017)

図 1 は、Stacking に用いた銀河の UV luminosity と観測 Redshift width (奥行き方向の幅) に対する S/N の図である。実線の等高線は S/N を表しており、破線の等高線は Stacking に用いる銀河の数を示している。この図から、S/N は Stacking に用いる銀河数に比例して大きくなることがわかる。

さらに、式 (3) を用いると観測時間や周波数チャンネル幅にも関係して S/N が変化することがわかる。

5 Conclusion and Prospect

この結果から、S/N と Stacking する銀河数の関係性はわかった。検出可能なスペクトルを出すためには少なくとも５０個の銀河に対して Stacking を行わなければならない。現在の HST では、z∼11 などの遠方に対してそれほど銀河を発見できていない。

Stacking の大きな問題点は、観測する銀河の量である。現在、銀河の観測は、GN-z11 を発見した HST が観測を行なっている。今後は、WFIRST (the Wide-Field InfraRed Survey Telescope) や JWST(James Webb Space Telescope) などの望遠鏡でさらに多くの銀河、また遠方銀河が観測される事が期待されている。現在、すばる Hyper Suprime-Cam(HSC) による LAE(Lyman Alpha Emitter) 観測が行われている。LAE とは、遠方に存在する Ly-α 光子を放出する銀河であり、既に現時点で LAE 観測による初期成果が得られており、LAE に着目することも有用だと考える。

Reference

Geil G. M. et al. 2017,MNRAS 472,2,p.1324-1335

——index

c3

N 体シミュレーションを用いたボイド進化の解析

簑口 睦美 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

銀河団などの高密度な構造で囲まれた低密度領域であるボイドは、重力理論や宇宙論のプローブとして重要であり、これまでにも観測的検証への応用が多くなされている。しかし、そのほとんどは大域的な一様等方性の仮定や、Icke (1986) による、ボイドが球状に成長するという報告に基づく、極めて一般的な解析を行ったものが多く、個々のボイドの物理量を決定する要因に関しては未だ統一的な理解が得られていない状況にある。

超銀河団スケールの構造であるボイドは、電磁相互作用や、超新星爆発のフィードバックなどの局所的な現象による効果を比較的受けにくいと考えられる。このため、これらの効果を無視すれば、ボイドの物理量を決定する要因としては、大きく重力と統計の二種類であり、より詳細には、自己重力場、背景潮汐場、初期条件、統計的性質、観測的には系統誤差や未知の物理まで、様々考えられる。本研究では、このうち重力場がボイドの進化傾向に及ぼす影響を明らかにするため、N 体シミュレーションを用いて重力場と密度場の発展傾向の相関について調べた。

1 Introduction

現在、我々の宇宙は星や銀河など、豊かな構造に満ちている。1980 年代に、銀河団を超えるスケールの構造である宇宙の大規模構造が発見され、銀河をはじめとする高密度領域だけでなく、銀河の少ないボイド領域にも目が向けられるようになった。特に、ボイドはダークエネルギーが問題となる超銀河団スケールの構造であると同時に、重力以外に相互作用をするような成分（e.g. 電磁気相互作用をするバリオン）による効果が、長距離力である重力の効果よりも比較的小さいと考えられる。このため、ボイドは銀河と比べて純粋に重力的に形成された構造であると考えられ、近年のダークエネルギーやダークマター問題に観測的な示唆を与えることが期待される。実際、これまでにもボイドを用いた宇宙論パラメータへの制限や重力理論の検証が進められている。

一方、このようなボイドを用いた応用的研究の多くでは、密度場の大域的な一様等方性の仮定や、Icke (1986) による、ボイドが球状に成長するという報告に基づく、極めて一般的な解析を行っている。このような解析では、例えば重力以外の異なる要因で決定されているボイド同士を同じ分布で扱っている可能性があり、これは一方にとってはノイズが入っている状態とみなされるため、理論の制限力や観測事実の解釈等に多大な影響を及ぼすと考えられる。このため、個々のボイドの物理量やその進化傾向、それらを決定する要因の調査は重要な意味を持つ。

本研究では、個々のボイドの発展傾向を重力的観点から説明することを目的とし、以下の二つの解析を行った。

1. Icke による孤立系ボイドモデルによる発展傾向と N 体シミュレーション中のボイドの振る舞いの定量的比較

Icke (1986) は、top-hat モデルを用いて、低密度領域は一般に膨張しながら球に近づくという性質を理論的に指摘しているが、N 体シミュレーション中のボイドの全体的な進化傾向は、膨張しつつもむしろわずかに歪む傾向を示す。しかし、これはあくまで全体の傾向であり、個々のボイドに関しては Icke のモデルとの整合性は定かでない。そこで、本研究では粒子 ID を用いて N 体シミュレーション中の個々のボイドを追跡し、Icke による孤立系ボイドモデルと定量的に比較した。

2. N 体シミュレーション中のボイド周囲の潮汐力とボイドの物理量の相関

ボイドが時間発展に伴って歪む傾向は Icke のモデルでは定性的にも説明できない。このような傾向は、周囲の潮汐場によってもたらされる可能性がある。これを確かめるため、ボイド周囲の潮汐場とボイドの進化傾向との相関を調べた。

2 Methods

2.1 Top-hat model

これまで、最も単純なモデルとしてよく考えられてきたのが un-conpensated top-hat モデルである。バックリアクションを無視し、外側の密度が常に一様であるとすると、一様楕円体の発展は準解析的に解ける。ここではその定式化を Yoshisato et al. (1998) に準じて行う。

まず、背景時空の共動座標系 $\boldsymbol{x}$ に対して、CDM を圧力 0 のダストとして、Euler 方程式は

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} + 2H\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} + \nabla_x \Phi = 0 \tag{1}$$

で表せる（これは摂動展開していない厳密な式である）。また、物質・宇宙項優勢の場合には Poisson 方程式は

$$\triangle_x \Phi = \frac{3}{2}H^2\Omega_m \delta(t, \boldsymbol{x}) + 3H^2\Omega_\Lambda \tag{2}$$

と表せる。ここで、$a_i(t)$ を一様楕円体の x_i 方向の軸長として、各時刻 t で常に一様楕円体の形

$$\delta(t, \boldsymbol{x}) = \delta_c(t)\Theta\left[1 - \frac{x_1^2}{a_1^2(t)} - \frac{x_2^2}{a_2^2(t)} - \frac{x_3^2}{a_3^2(t)}\right] \tag{3}$$

で表せることを仮定する。今、一様楕円体を保ちながら時間発展する仮定を置いており、外側の密度発展を解かなければ、一様楕円体のポテンシャルは

$$\Phi_{\rm int}(\boldsymbol{x}) = \frac{3}{8}H^2\Omega_m\delta_c \sum_{i=1}^{3} A_i(\boldsymbol{a})x_i^2 \tag{4}$$

$$\begin{cases} A_i(\boldsymbol{a}) = \int_0^\infty d\lambda \frac{1}{(a_i'^2+\lambda)} \prod_{j=1}^3 \frac{a_j}{\sqrt{a_j'^2+\lambda}} \\ I(\boldsymbol{a}) = \int_0^\infty d\lambda \prod_{j=1}^3 \frac{a_j}{\sqrt{a_j'^2+\lambda}} \end{cases} \tag{5}$$

（ただし、a_i' は、$\sum_{i=1}^3 \frac{x_i}{a_i^2+\lambda} = 1$ を満たすような $\lambda(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ に対し、$a_i' = a_i + \lambda$ である）のように書ける。また、密度構造が一様楕円体を保つと仮定すると、質量保存則も単純に

$$\delta_c = (1 + \delta_{cin})\frac{a_{1in}a_{2in}a_{3in}}{a_1a_2a_3} - 1 \tag{6}$$

のようになる。以上から、とくべき式は

$$\frac{d^2a_i}{dt^2} + 2H\frac{da_i}{dt} + H^2\left(\frac{3}{4}\Omega_m\delta_c A_i + \Omega_\Lambda\right)a_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \tag{7}$$

で尽くされる。本研究ではこれを数値的に解くことによって、Icke が定性的に述べたボイドの進化傾向を改めて定量的に評価した。なお、数値計算は密度揺らぎが十分線形である赤方偏移 100 から始め、初速度は Zel'dovich 近似によって与えた。

2.2 N-body Simulation

Set up

本研究では、以下のセットアップによる N 体シミュレーションを行った。

表 1: シミュレーションセットアップ

N	L (Mpc/h)	Ω_{m0}	Ω_{b0}	$\Omega_{\Lambda 0}$	h
128^3, 512^3	500	0.31	0	0.69	0.70

計算は赤方偏移 100 から行い、赤方偏移 0.21 と 0 の 2 つのスナップショットに関して、各々独立に、ボイド同定ツールキット VIDE（Sutter et al. (2014)）を用いてボイドを検出した。

Void identification

本研究で用いる VIDE は ZOBOV（Neyrinck (2008)）によるアルゴリズムを用いて、以下のようにボイドを同定している。

1. 粒子の二等分面によって、シミュレーションボックスを Voronoi セル（以下単にセル）に分割する。このとき、各セルは粒子をただ一つ含み、セルの体積の逆数を粒子数密度と捉える。

2. Watershed Algorithm と呼ばれる手法により、セルを小領域（zone）にグループ分けする。この手法は、任意のセルに対し、その隣接するセルの中で最も密度の低いものを選んで行き、最

終的に行き着いたセル（極小値をとるようなセル）によってグループ分けするものである。

3. 小領域のうち、それらを隔てる領域の密度（表層のセルの体積）が低い順に、順次小領域を統合（グルーピング）していく。VIDE のデフォルトの設定では、平均密度の 0.2 倍に達するまでこの統合操作を行った後、自分を含むようなより大きいグループが存在しないようなものをボイドとしている。

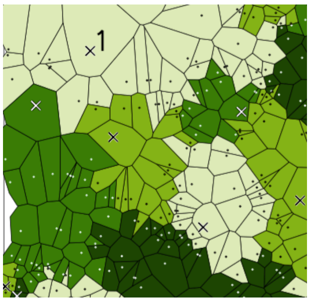

図 1: Voronoi セルに分割されたシミュレーション領域の一部（改 Neyrinck (2008)）。手順 2 によるグループが色の違いで表されている。

Trace rules

本研究では、個々のボイドの時間発展を見る。そのために、各スナップショット中のボイドが「同じ」ボイドであるかどうかを判定する必要がある。これは、ボイドの統合や分裂、生成や消滅などを考えると、必ずしも自明な問題ではないが、ここでは以下のルールに従ってボイドを同定した。

- 粒子 ID を用い、赤方偏移の大きいスナップショット、すなわちより過去のボイドを親として、親ボイドから見て最も多くの粒子を与えた子ボイドを一つ定める
- 子ボイドの構成粒子の 50%以上が由来する親ボイドを一つ定める

これによって、注目する赤方偏移区間中で生成や消滅を行わず、"主流"（粒子数が最も多く受け継がれる）となるようなボイドのみを抽出することになる。

Definitions

ボイドを表す物理量の定義は、未だ確立されたものがないが、本研究では以下の量を用いることにする。

有効半径
ボイドの体積（シミュレーションでは、ボイドを構成する volonoi セルの体積の合計）V を用いて、$4\pi R^3/3 = V$ を満たす R を有効半径とする。

中心密度比
ボイドの中心密度（シミュレーションの場合、ボイドを構成する volonoi セルの密度のうち最も低いもの）を ρ_c として、宇宙全体の平均密度 ρ_b に対する比 ρ_c/ρ_b とする。これは非負の値をとる。

楕円率

$$e \equiv 1 - \frac{\Lambda_1}{\sqrt{\Lambda_2 \Lambda_3}} \quad (\Lambda_1 < \Lambda_3) \tag{8}$$

ここで Λ_i は慣性テンソル

$$I = \sum_{\text{all particle i}} \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -y_i x_I & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -z_i x_i & -z_i y_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

の固有値であり、$\Lambda_1 < \Lambda_2 < \Lambda_3$ を満たすように定める。定義により楕円率は 0 から 1 の値をとる。

3 Results

孤立系モデルと N 体シミュレーション中のボイドの発展傾向を比較したところ、Icke によって述べられている通り、top-hat 型孤立系ボイドモデルでは半径は増大し、楕円率は減少する傾向が確認できた一方、N 体シミュレーション中のボイドには、図 2 に示す通り、半径、楕円率ともに増大するものと減少するものの双方が存在し、全体の分布ではそれらが打ち消しあう形でわずかに半径増大、楕円率減少する傾向を作っていた。また、中心密度比の進化傾向は定性的にモデルと整合的であるが、定量的に比較すると、N 体シミュレーション中のボイドの変化幅が top-hat 型孤立系ボイドモデルに比べて 2 倍程度大きく、楕円率に関しても 4 倍近く大きい。このことから、N 体シミュレーション中のボイドは孤立系モデルから予想されるよりも急激に変化していることがわかった。

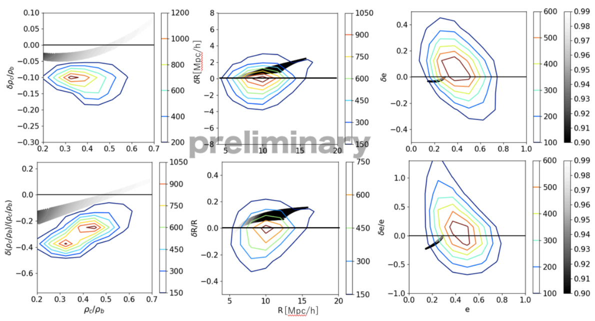

図 2: 背景密度に対するボイドの中心密度（左）、有効半径（中）、楕円率（右）の、赤方偏移 1 での値に対する、現在の値と赤方偏移 1 での値の差（上段）及びその初期値に対する割合（下段）。黒いグラデーションは top-hat 孤立系モデルによる計算結果であり、濃さは初期のボイド中心密度比に対応する。図が煩雑になるのを避けるため R は赤方偏移 1100 で 1Mpc のもののみ載せている。

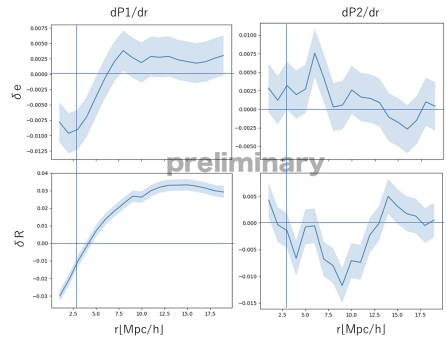

図 3: ボイド中心からの距離に対する、ボイドの物理変化量と周囲の潮汐場の Legendre 成分の動径方向勾配との相関。縦線はボイドの平均半径。影の部分は標準誤差である。今回のサンプルでは 2 次（四重極成分）の潮汐勾配にはボイドの物理量との有意な相関が認められなかったが、0 次の潮汐勾配には楕円率変化量、半径変化量に対し、ともに負の相関が見られた。

上記の結果により、自己重力的描像、少なくとも top-hat モデルによっては記述できない機構によって、ボイドの進化傾向が決定されている可能性が強く示唆される。そこで、次に周囲の潮汐場を調査した。周囲の高密度領域によって、ボイドの半径や楕円率が小さくなる効果が期待出来る。詳細は割愛するが、もしこの予想が正しければ、ボイドの物理変化量と周囲の潮汐場の半径方向の勾配に負の相関があるはずである。図 3 は実際に各ボイドの半径変化量、楕円率変化量に関して、周囲の潮汐場の Legendre 0 次、2 次成分の動径方向の勾配との線形相関係数を、ボイド中心からの距離に従ってプロットしたものである。これを見ると、2 次の成分はボイドの物理量との相関がほとんど見られなかったが、0 次成分は半径変化量、楕円率変化量の双方に対して、ボイドの平均スケールで負の相関をとった。これは、ボイドの楕円率が、四重極的な潮汐力よりもむしろ等方的な勾配（局所的平均密度）によって決定される可能性を示唆しており、興味深い。

4 Summary

本研究では、ボイドの物理量及び進化傾向を決定する主要因を解明する目的で、特にその候補の一つである重力場に着目し、孤立系ボイドモデル及び N 体シミュレーションを用いてボイドの進化傾向の調査および解釈を試みた。その結果、従来の孤立系モデルで説明できなかった楕円率や半径の縮小に、周囲の潮汐場の等方成分が寄与している可能性を見出した。実際には、ボイドの物理量の決定にはそれ以外にも構成粒子の統計的性質や、系統誤差など、様々な要因が複雑に関わっていると考えられ、そのいずれが最も寄与するか（あるいは拮抗や、ボイドごとに異なるか）を明らかにすることが今後の課題である。

Acknowledgement

貴重な研究費から本夏の学校への旅費を支給していただきました、名古屋大学 教授 杉山直様、日頃ご指導・議論していただいています同大学 講師 西澤淳様、教授 竹内努様、また、第 48 回天文天体若手夏の学校にご賛同・ご支援いただきました方々に、厚く御礼申し上げます。

Reference

J. Icke. MNRAS., Vol. 206, pp. 1-3, 1986.
J. Binney and S. Tremaine. Galactic Dynamics. Princeton Univ. Press, 1987.
A. Yoshisato, T. Matsubara, and M. Morikawa. ApJ., Vol. 498, pp. 48-59, 1998.
P. M. Sutter et al. A&C, Vol. 9, p. 1, 2014.
M. C. Neyrinck. MNRAS., Vol. 386, pp. 2101-2109, 2008.

c4

ダークマターハロー内部の位相構造について

杉浦 宏夢 (京都大学大学院 理学研究科)

Abstract

冷たいダークマター (Cold Dark Matter, CDM) による非線型構造形成は観測的・数値的進展のために近年大きな注目を集めている. 初期宇宙に存在する過剰密度領域は自己重力不安定性によって成長し, 銀河・銀河団等の母体であるダークマターハローとして知られる局所的な構造を宇宙の随所に形成する. ハロー形成過程を解析することはその著しい非線型性のために困難であり, 現在では主として N 体シミュレーションを用いて研究されている. ただし球対称性を持つような理想的な場合には半解析的な取り扱いが可能であり, ハロー構造に関する様々な知見を得ることができる. 本ポスターでは球対称ハロー形成に関する先行研究をレビューし, それと N 体シミュレーションとの関係を論じる発表者の研究について議論する.

1 EdS 宇宙における CDM 自己相似解

宇宙の基本的な構成要素としてダークマターを仮定する現在の標準的な宇宙論では, 構造形成は初期宇宙に存在したわずかな密度ゆらぎが重力不安定性により成長する過程として理解される. 特に, 現在の宇宙では構造は非線型成長を遂げており, ダークマターハロー (以下単にハローと呼ぶ) と呼ばれる構造を形成する.

Einstein-de Sitter 宇宙 (EdS モデル, ダークエネルギーが存在しない宇宙モデル) に過剰密度領域が存在すると, その近傍の物質は重力的に束縛されており, 初期に Hubble 則に近い速度で膨張していても, やがて過剰密度領域へと落下する. この過程は (Hubble スケールより十分小さなスケールでは) 球殻の運動方程式

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \tag{1}$$

により記述される. M は球殻の内部の質量であり, これが時間的に定数であるならば, 運動方程式には解析解

$$r = \frac{r_*}{2}(1-\cos\theta), \quad t = \sqrt{\frac{r_*^3}{8GM}}(\theta - \sin\theta)$$

が存在する. この解は初期には Hubble 膨張に近いが, $\theta = \pi$ で動径が最大値 r_* を取り (これを転回点と呼ぶ), その後は崩壊する. ところが実際には球殻は対称中心へと落下する最中に他の球殻と相対配置が入れ替わり (shell-crossing), 内部質量 M が一定であるという仮定が破れる. それ以降は上の解を適用することができないため, shell-crossing 以降の進化という問題は極めて複雑なものになり得る.

(Fillmore & Goldreich 1984) および (Bertschinger 1985) は, 重力に特徴スケールがないため, 上の状況では自己相似的な解が存在することに気づいた. この解は, 時刻 t_* に転回点に到達する球殻の時刻 t での動径座標を

$$r(t, t_*) = r_*(t_*)\lambda(t/t_*)$$

と書くことが可能なものであり. ここに $\lambda(\tau)$ はすべての球殻に共通な関数であり, もとの運動方程式から導かれる常微分方程式を数値的に解くことによって求まる. また時刻 t での転回点半径 $r_*(t)$ は初期密度プロファイル $\delta \propto r^{-3\epsilon}$ から解析的に求まる. ただし, 運動方程式に含まれる質量プロファイルは

$$M(r) \propto \mathcal{M}(r_*\lambda), \quad \mathcal{M}(\xi) \propto_1^\infty \Theta\left[\xi - \frac{\lambda(\tau')}{\tau'\beta}\right]\frac{d\tau'}{\tau'^{1+2/3\epsilon}} \tag{2}$$

($\Theta(s)$ は Heaviside の階段関数) と $\lambda(\tau)$ の関数形全体によって決まっているため, 運動方程式を解く操作は若干複雑で, 適当な初期関数形 $\lambda_n(\tau)$ を仮定してプロファイルを計算し, それを用いて逐次近似解 $\lambda_{n+1}(\tau)$ を構成する, という手続きを取る必要がある. 実際に数値的に求めた解を図 1 に示す.

既に述べたように, 初期密度プロファイル $\delta \propto r^{-3\epsilon}$ に対応してこの自己相似解は単一のパラメータ ϵ を含む. あるいは転回点以内の質量 M_* について

$$s := \frac{d \ln M_*}{d \ln a} = \frac{1}{\epsilon}$$

が成り立つことから, このパラメータを降着率 s と読み直すこともできる.

また, この質量プロファイルは減衰振動の重ね合わせとして実現されるものであるから, 球殻の遠点通過に対応して質量プロファイルの傾きに不連続が現れる. 質量の空間微分は密度と結びついているから, このことは球対称自己相似解には密度が発散するコースティクスが複数点出現することを意味する.

2　ΛCDM モデルへの拡張

(Shi　2016) は前節の自己相似解を ΛCDM モデルの場合へと拡張している. もちろん ΛCDM 宇宙における球殻の運動方程式

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} + \frac{1}{3}\Lambda r^2$$

にはダークエネルギーから定まる特徴距離が存在するため, 厳密にはこの場合自己相似解は存在し得ない. そこで (Shi　2016) は依然として自己相似解からの破れが小さい, つまりある球殻が感じる重力ポテンシャルがその球殻の軌道から定まる質量プロファイルにより与えられると仮定することで, 近似的に (Fillmore & Goldreich　1984), (Bertschinger　1985) の解を拡張している. その結果, この解は降着率 s に加えて密度パラメータ Ω_{m0} にも依存することになる.

3　Warm Dark Matter ハロー

(Shi　2016) とは異なる路線の拡張として, (Mohayaee & Shandarin　2006) はダークマターが速度分散を持つ場合 (warm dark matter, WDM) の球対称ハロー構造について議論している. ただし彼らの研究は WDM 速度分散 σ_v が十分小さく, CDM 解と同じ形の解の「重ね合わせ」としてそれが書けると仮定することでそれを求めるものである. CDM 解では軌道の遠点において密度が発散しているという特徴があるが, この振る舞いは WDM 解の場合速度分散によりぼかされて密度プロファイルが滑らかになると期待される. これを実際に見るために, 彼らは遠点直近で密度プロファイルが遠点からの距離 $\Delta r (< 0)$ に

$$\rho \propto (-\Delta r)^{1/2}$$

と比例すること (これは球殻の Lagrange 座標 q を用いると $\partial r / \partial q = 0$ が遠点を与えることから理解できる) を用いて, それを DM 速度分布 $f(v)$ を用いて重ね合わせたプロファイル

$$\rho_{\mathrm{WDM}} = \int \rho_{\mathrm{CDM}}(\Delta r - \alpha v) f(v) dv$$

を計算している. 彼らは速度分布としてトップハット型, Maxwell-Boltzmann 分布, 指数分布を仮定しており, 図に彼らが求めた密度プロファイルを示す.

4　N 体シミュレーションとの関係

以上の研究はすべてハローが厳密に球対称であると仮定することで解析的な議論を可能にしたものであった. しかしながら, 実際には完全に球対称のハローは存在せず, 現実的な状況において自己相似解が予言する構造はどの程度正しいのか, という疑問が生ずる. 本研究は N 体シミュレーションを用いてこの問題に取り組んだものである.

本研究では EdS モデル N 体シミュレーション (Yann Rasera 氏に提供していただいたもの) で扱う個々の粒子の運動を異なる時刻のスナップショット間で追跡し, ハロー内運動 (特に遠点通過) を拾い上げることでハローの動径位相構造を遠点通過数に基づいて分解した. さらにそれを CDM 自己相似解と比較することで両者の一致の良さを調べた. 結果として, 自己相似解には降着率 s というパラメータが含まれるが, それをフィッティングパラメータとして振ることで, 約半数のハローについては定量的に良い一致を確認した. 典型的なハローの動径位相構造とその自己相似解との比較を図 2 に示す.

ただしこうして求まったベストフィットの s の値は当然期待されるハローの質量降着率

$$\Gamma := \frac{\Delta \ln M_{\rm vir}}{d \ln a}, \quad \Delta X = [X]_{z=0} - [X]_{z=0.5}$$

との相関を示さなかった．この結果についてはさらなる解析が必要である．

5 Conclusion

本発表では, 球対称ハロー形成モデルとして (Fillmore & Goldreich 1984), (Bertschinger 1985) による自己相似解を見た．さらに, 彼らの解を ΛCDM モデルへ, あるいは WDM モデルへと拡張できることを見た．その後, N 体シミュレーションにおいてこのような解の特徴が実現していることを示した発表者の研究について議論した．

Reference

Fillmore & Goldreich, ApJ, 281, 1 (1984)

Bertschinger, ApJS, 58, 39 (1985)

Shi, MNRAS, 459, 3711–3720 (2016)

Mohayaee & Shandarin, MNRAS, 366, 1217–1229 (2006)

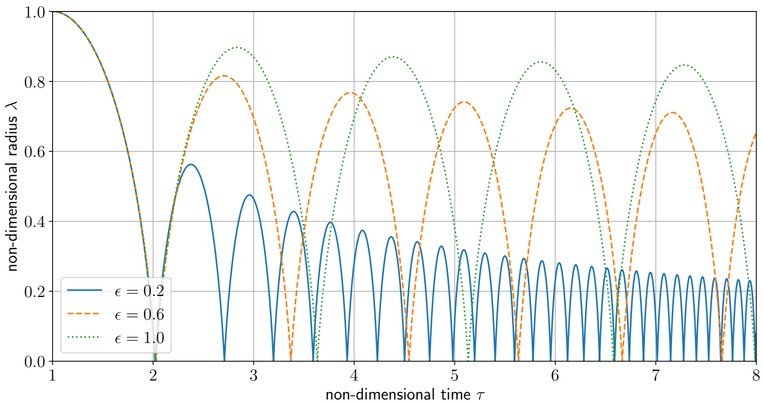

図 1: Fillmore-Goldreich の CDM 自己相似解

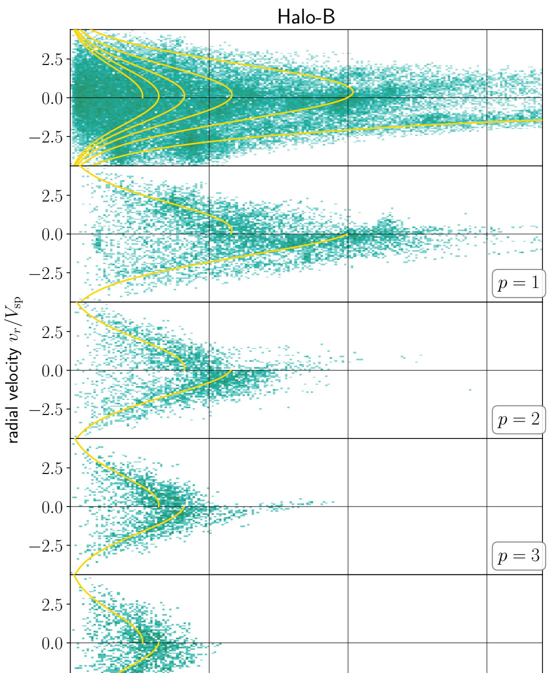

図 2: Fillmore-Goldreich の CDM 自己相似解

——index

c5

γ 線背景放射の銀河団との相互相関解析を用いた赤方偏移特性の探査

橋本 大輝 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

Fermi Large Area Telescope (*Fermi*-LAT) による掃天観測によって、銀河面付近を除くほぼ全天で γ 線背景放射 (extragalactic γ-ray background : EGB) が観測されてきた。同時に EGB の構成要素の中に、γ 線源が不明の成分 (unresolved γ-ray background : UGRB) が全天でほぼ一様に存在することがわかってきた。UGRB の性質や起源の詳細は未だ不明であるが、blazar や star-forming galaxy (SFG)、radio galaxy などの天体を起源とする γ 線が主成分であると考えられている。また、そのほかにもダークマターなどのエキゾチックな物質を起源とする場合が考えられている。このように天体や物質が UGRB の起源であるとすると、この γ 線源はハローに集中的に分布していると考えられる。したがって、ハローの分布と UGRB の相互相関を解析することで UGRB の性質にアプローチできると期待され、近年この相関を探査する研究が発展してきた。しかし、それらの研究では相互相関の赤方偏移特性に着目した解析は行われていなかった。実際には，それぞれの γ 線源の候補天体は，γ 線強度について異なった赤方偏移依存性を持っている。よって，幅広い赤方偏移を持つ銀河団カタログを用いて UGRB の赤方偏移特性を明らかにすることができれば，その起源に迫ることができると期待される。

本研究では，*Fermi*-LAT の観測を基にして得られた UGRB の強度分布と Hyper Suprime-Cam (HSC) の観測データから作成された銀河団分布の相互相関をスタッキング解析と 2 点相互相関解析によって計測した。さらに銀河団の赤方偏移をビニングした上で同様の解析を行い，相関の赤方偏移特性についても評価した。本稿ではそれらの解析手法と結果について報告する。

1 導入

銀河系外背景 γ 線 (extragalactic γ-ray background : EGB) は近年の Fermi Large Area Telescope (*Fermi*-LAT) の詳細な観測 [1] により、宇宙物理学、高エネルギー物理学にとって興味深い研究対象となっている。EGB には unresolved γ-ray background (UGRB) と呼ばれる、起源天体が不明の放射成分が含まれていることがわかっている。UGRB への寄与として blazar や star-forming galaxy (SFG)、radio galaxy 等の天体起源のガンマ線が考えられている [2]。さらに、エキゾチックな物質の寄与として、ダークマターが崩壊あるいは対消滅する際に放出されるガンマ線が含まれている可能性があり、UGRB の性質や起源の探査は宇宙物理学のみならず素粒子物理学においても非常に興味深い。

UGRB 探査のアプローチとして、近年の大規模な銀河カタログや銀河団カタログが作成されたことを受け、UGRB の強度分布とそれらカタログ中のオブジェクトの密度分布との二点角度相互相関を計測し、解析する試みが行われている。

Branchini et al. [3] は初めて銀河団カタログと UGRB の相互相関を探査している。これにより UGRB が銀河団と強い相関 ($\sim 6-7\sigma$) を持っていることが明らかとなっている。また相互相関シグナルが活動銀河核 (AGN) のようなコンパクトな天体起源のガンマ線を主成分とすることを明らかにしている。Cuoco et al. [4] は新しい試みとして、UGRB と様々な銀河カタログとの相互相関の赤方偏移方向 ($0.05 < z < 3$) への断層探査を行なっている。その結果、幅広い赤方偏移で相互相関のシグナルを検知している。この結果は実際に断層的なアプローチが現在のデータで行えることを示し、ダークマターの対消滅や崩壊について新たな探査手法を提示している。

本研究では、HSC の観測データより作成された銀河団カタログ (CAMIRA カタログ; [7]) を用いて、UGRB と銀河団との相互相関を探査する。HSC 銀河

団の赤方偏移は $0.1 \leq z \leq 1.1$ であり、銀河団カタログとしては幅広い赤方偏移を含んでいる。これによりこれまで探査されていなかった銀河団カタログとUGRB との相互相関の赤方偏移方向への断層探査が可能になる。本研究では相互相関をスタッキング解析と 2 点角度相互相関解析を用いて探査する。相関シグナルの赤方偏移依存性を見るために、赤方偏移を $0.1 \leq z \leq 1.1$、$0.1 \leq z \leq 0.6$ と $0.6 \leq z \leq 1.1$ の３つに分けて解析を行う。

本稿は以下のように構成される。第 2 章で HSC 銀河団のカタログと *Fermi*-LAT の観測データから作成した UGRB のマップについて述べる。第 3 章では、スタッキング解析と相互相関解析の結果についてまとめる。また、それらの結果と天体起源のガンマ線強度モデルから予測される相互相関の理論予測を比較する。これらの要約を第 4 章で述べる。

＊補足になりますが、本稿において紙幅の関係から割愛された議論等が多分にあります。詳細をご覧になりたい方は本稿の元となっている Hashimoto et al. [5] をご参照ください。

2　データ

この章では、スタッキング解析と相互相関解析に用いる CAMIRA カタログと UGRB のデータに関する説明を簡単に行う。

2.1　HSC 銀河団カタログ

本研究で用いる CAMIRA カタログは HSC の第 1 回データリリースのデータを用いて作成されたカタログであり、銀河団は赤方偏移 $0.1 \leq z \leq 1.1$ までの幅広い区間にほぼ一様に分布している。解析に用いる銀河団数は 4461 個、質量の下限は $10^{13.5} M_\odot$ 程度、観測領域は $\sim 230\mathrm{deg}^2$ である。図 1 に HSC 銀河団の分布の一例を示す。

2.2　UGRB マップ

本研究では、*Fermi*-LAT の PASS8 の 1-100 GeV のデータを用いる。UGRB マップを構成するために、以下の操作を行う。まず、銀河系の前景放射を取り除くために 4 つの前景放射モデルを仮定し (baseline, Model A, ModelB, ModelC)、その影響を差し引く。さらに resolved point source (RPS) の影響を取り除くために RPS の半径 0.5° の領域をマスクする。最後にショットノイズの影響を取り除くために 10 GeV 以下のエネルギー帯に 0.5° のガウシアンスムージングを、それ以外のエネルギー帯に 0.2° のガウシアンスムージングを適用する。図 2 に HSC の観測領域の一つに対応する領域のガンマ線個数強度分布を一例として挙げる。

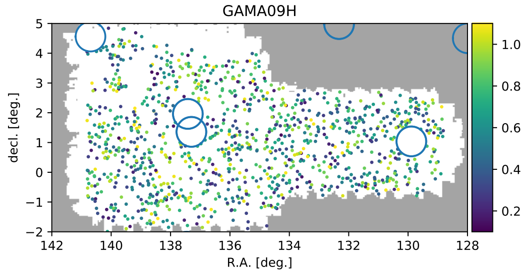

図 1: HSC 銀河団の 1 領域 (GAMA09H) の銀河団分布。それぞれの点が各銀河団の中心の座標 (銀河座標) を、色は赤方偏移を表している。円はガンマ線の RPS の中心から半径 0.5° の、マスクされた領域を示している。灰色の領域は観測データ外領域である。

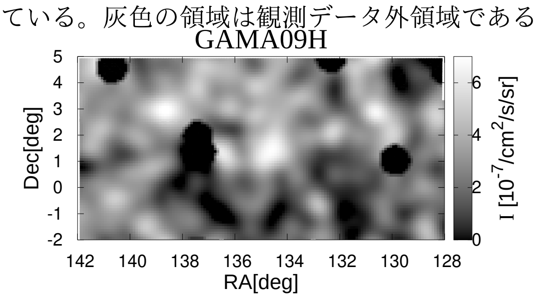

図 2: CAMIRA 銀河団の 1 領域 (GAMA09H) に対応する UGRB の強度分布。色はガンマ線の強度を表す。この図では *Fermi*-LAT の 1-100 GeV のエネルギー帯におけるガンマ線データを用いている。黒丸の領域はガンマ線の RPS の中心から半径 0.5° の、マスクされた領域に対応する。スムージングは全エネルギーで 0.5° のガウシアンを適用している。

3　相関信号の計測、解析

ここでは、UGRB の強度分布と HSC 銀河団の分布との相互相関の計測について、スタッキング解析と相互相関解析の結果をまとめる。

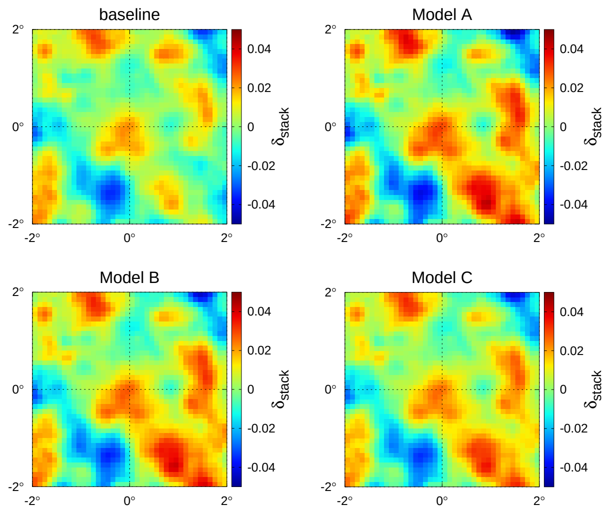

図 3: 銀河系の前景放射モデルごとの HSC 銀河団周辺の UGRB のスタッキングマップ。HSC 銀河団は $(0°, 0°)$ に位置している。カラーは解析に用いた領域の UGRB 強度における平均値周りの揺らぎを表す。

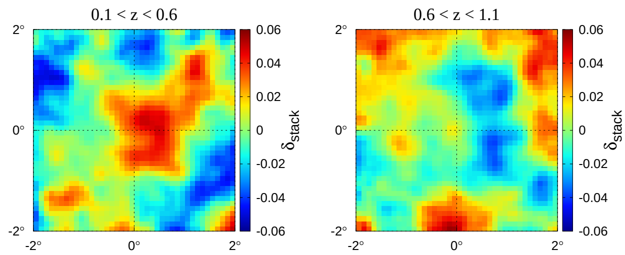

図 4: 低赤方偏移 $(0.1 \leq z \leq 0.6$, 左図) と高赤方偏移 $(0.6 \leq z \leq 1.1$, 右図) の銀河団周辺の UGRB のスタッキングマップ。銀河団の赤方偏移分割以外の操作は図 3 と同じである。

赤方偏移範囲	baseline	Model A	Model B	Model C
$0.1 < z < 1.1$	2.2	2.0	2.0	2.0
$0.1 < z < 0.6$	2.2	2.1	2.1	2.3
$0.6 < z < 1.1$	1.9	1.6	1.6	1.6

表 1: 各赤方偏移ごと、前景放射モデルごとの相互相関シグナルの統計的有為性。低赤方偏移の銀河団は 1942 個、高赤方偏移の銀河団は 2519 個である。

3.1 スタッキング解析

図 3 に HSC 銀河団の中心周りに UGRB マップをスタッキングした結果を示す。図からわかるように、明らかに銀河団の中心でガンマ線の強度が大きくなっている。ただし、このシグナル強度はランダムな位置でスタックした場合の分散とおよそ 1σ で同程度あることも同時に確かめている。また、ここで注意しなければならないことは、このビジュアルマップがあくまでスタッキング解析の結果であって、実際の銀河団周辺の UGRB 強度を表してはいないということである。事実、隣り合う HSC 銀河団の平均的な角度は $\sim 0.22°$ であり、従ってスタッキングマップ内で一つのガンマ線光子が複数回現れる (天球上の同じ領域が複数回足し合わされる)。このことからスタッキングマップは定量的な解析には用いずに、相互相関解析との無矛盾性の確認にのみ用いる。

図 4 に HSC 銀河団を低赤方偏移 $(0.1 \leq z \leq 0.6)$ と高赤方偏移 $(0.6 \leq z \leq 1.1)$ に分割してスタッキングした結果を示す。低赤方偏移の相関に関しては全銀河団を用いた解析より強い相関がより広い角度スケールに渡って存在することがわかる。しかし一方で、高赤方偏移の場合は明らかな正相関は見られない。

3.2 相互相関解析

相互相関を計測するにあたって、本研究では Landy-Szalay の estimator[6] を用いる。また誤差の評価はジャックナイフ法 [8] に従う。図 5 に全 HSC 銀河団、低赤方偏移 $(0.1 \leq z \leq 0.6)$、高赤方偏移 $(0.6 \leq z \leq 1.1)$ の 3 つの場合の相互相関解析の結果を示す。図 5 と図 3 の対応が見て取れる。全銀河団を用いた場合と低赤方偏移の銀河団を用いた場合は銀河団付近でガンマ線の強度の増加が認められるが、高赤方偏移の場合は、特に baseline model を用いた場合、相関は見て取ることはできない。

また、統計的有為性を表 1 に示す。ここからもわかるように高赤方偏移の銀河団を用いた場合とそれ以外の場合では有為性の振る舞いに相違が見られる。さらに簡単な相互相関のモデル予測と観測された相互相関の比較を表 2 に示す。ここではガンマ線放出天体として blazar, SFG, radio galaxy を仮定している。また小スケールにおける HSC 銀河団とガンマ線光子のショットノイズを考慮している。このモデルのより詳細な議論は、Hashimoto et al. [5] で行われている。

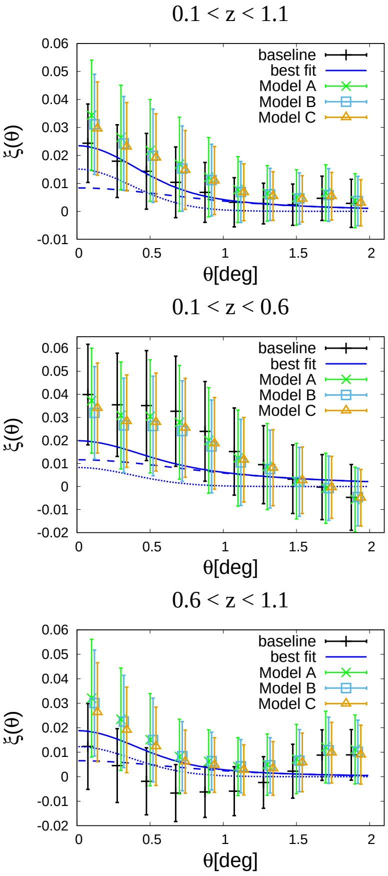

図 5: 全銀河団 (上図)、低赤方偏移銀河団 ($0.1 \leq z \leq 0.6$, 中図)、高赤方偏移銀河団 ($0.6 \leq z \leq 1.1$, 下図) と UGRB との相互相関シグナル。エラーバーはジャックナイフ法を用いた際の 1σ の範囲を示す。またエラーバーのそれぞれの色はそれぞれの銀河系前景放射モデルに対応する。実線は銀河系前景放射モデルとして baseline model を用いた際の相互相関の理論予測を表す。ダッシュ線は blazar, SFG, radio galaxy 由来のガンマ線の相互相関への寄与を、点線はショットノイズの相互相関への寄与を表す。

4 要約

本研究では HSC の初回観測データを用いた銀河団カタログ中の銀河団分布と *Fermi*-LAT の PASS8 のデータより生成した UGRB 強度分布との相互相関を計測し、解析した。相互相関の計測、および解析にあたって、スタッキング解析と相互相関解析を行った。全銀河団 ($0.1 \leq z \leq 1.1$) を用いた両解析から互いに無矛盾な数%程度の正相関のシグナルを検出することができ、統計的有為性は $2.0-2.2\sigma$ であった。

赤方偏移範囲	Baseline	Model A	Model B	Model C
$0.1 < z < 1.1$	0.30	0.29	0.28	0.27
$0.1 < z < 0.6$	2.2	1.9	1.8	2.2
$0.6 < z < 1.1$	2.5	0.79	0.76	0.78

表 2: 観測された相互相関と理論予測による相互相関のフィッティングによるミニマム χ^2 の値。自由度の大きさは 3 である。

また、銀河団を低赤方偏移 ($0.1 \leq z \leq 0.6$) と高赤方偏移 ($0.6 \leq z \leq 1.1$) の 2 つに分割して同様の解析を行った。前者についてはより強い相互相関を計測した ($2.1-2.3\sigma$) が、後者についてはより有為性の低い相関であった ($1.6-1.9\sigma$)。今回のデータセットにおいては、統計誤差が銀河系の前景放射の差し引きに関する系統誤差より大きいことが示された。

さらに UGRB に寄与する主要なガンマ線放射天体を blazar, SFG, radio galaxy と仮定することで、相互相関の理論予測を行い、観測データから計測された相互相関と比較した。その結果、今回得られた相関は上記の 3 天体による寄与で矛盾なく説明できることが示された。

References

[1] Ackermann M. et al., 2015, ApJ, 799, 86

[2] Ajello M. et al., 2015, ApJ, 800, L27

[3] Branchini E., Camera S., Cuoco A., Fornengo N., Regis M., Viel M., Xia J.-Q., 2017, ApJS, 228, 8

[4] Cuoco A., Bilicki M., Xia J.-Q., Branchini E., 2017, ApJS, 232, 10

[5] Hashimoto D., Nishizawa A. J., Shirasaki M., Macias O., Horiuchi S., Tashiro H., Oguri M., 2018, ArXiv e-prints

[6] Landy S. D., Szalay A. S., 1993, ApJ, 412, 64

[7] Oguri M. et al., 2018, PASJ, 70, S20

[8] Scranton R. et al., 2002, ApJ, 579, 48

——index

c6

ベクトル・テンソル理論に基づいた暗黒エネルギー模型に対する観測的制限

中村 進太郎 (東京理科大学大学院 理学研究科)

Abstract

運動方程式が 2 階微分までに保たれる一般的なベクトル・テンソル理論として generalized Proca（GP）理論が構成された．この理論に基づく後期宇宙加速膨張模型には，暗黒エネルギーの状態方程式が -1 よりも小さくなる安定な de・Sitter アトラクターが存在することが明らかになっている．本研究では，マルコフ連鎖モンテカルロ法を複数の独立な観測結果を用いて行い，GP 理論に基づく安定な理論模型に対して制限を与える．この統計解析の結果，背景時空レベルでは Λ-CDM 模型よりもむしろ GP 理論に基づく模型を好む傾向があることを示す．

1 Introduction

一般相対論はこれまで様々な実験・観測によってその正当性が検証されてきた．2016 年の初検出から続く，重力波の直接観測も一般相対論の正当性を示している．しかし，近年の高精度観測によって，現在の宇宙が加速膨張していることが示されてきた．この現象は標準模型で記述されるバリオンのような通常の物質のみを用いて実現することはできない．この後期宇宙加速膨張の起源は暗黒エネルギーと呼ばれており，その正体は未だ解明されていない．暗黒エネルギーの最も単純な候補は，一般相対論に対して負の圧力を持つように宇宙項を取り入れた模型である．しかし，Planck 衛星と Ia 型超新星の最新の観測データの複合解析結果からは，宇宙項と冷えた暗黒物質を基にした Λ-CDM 模型は必ずしも最適な模型ではない可能性が示唆されている．一方で，宇宙初期の加速膨張期であるインフレーションのように，一般相対論にスカラー場のような時間変化する新たな自由度を導入することで後期加速膨張も解決できる可能性がある．このため，新たな自由度を加えて一般相対論を拡張した，より一般的な重力理論の枠組みの構築がこれまでに行われてきた．代表例をあげると，スカラー場と重力場が結合した理論（スカラー・テンソル理論）や，ベクトル場と重力場が結合した理論（ベクトル・テンソル理論）などがある．

スカラー・テンソル理論では，理論的に安定な暗黒エネルギー模型が実現できることが知られているが，一般に実効重力定数が現在付近でニュートンの万有引力定数よりも大きくなり，観測と整合的な密度ゆらぎの成長率を実現することが難しいという点が指摘されている．

ベクトル・テンソル理論に対しては，ローレンツ対称性と $U(1)$ ゲージ対称性を要請した上で Galileon と同様なラグランジアンを構成できないことが知られている．そこで $U(1)$ ゲージ対称性を破る massive なベクトル場（Proca 場）を採用し，Galileon のような相互作用を考えることで，generalized Proca (GP) 理論が構築された [1]．GP 理論では，その運動方程式が任意の時空上で微分に関して 2 次のオーダーに保たれている．さらにスカラー極限において，Horndeski 理論の特殊な場合に帰着する．GP 理論に基づき，かつ理論的に有効な暗黒エネルギー模型はすでに先行研究で議論されている [2]．

本研究では，始めに最近の重力波イベントから明らかになった重力波の伝搬速度に対する制限を考慮した場合，GP 理論にどのような制限がかかるかを示す．その後，複数の独立な観測結果を適用して，GP 理論に基づく有効な暗黒エネルギー模型に対して，観測的制限を与える．本稿では，宇宙背景輻射（CMB），バリオン音響振動（BAO），Ia 型超新星（SN Ia），現在付近でのハッブルパラメータの計 4 種の観測結果を用いて理論模型に制限を与える．この統計解析の結果は文献 [3] の結果を再現している．

2 Generalized Proca theories

2.1 Action

以下の作用のもとで議論していく：

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\sum_{i=2}^{6}\mathcal{L}_i + S_M\,. \tag{1}$$

ここで，g は計量テンソルの行列式，S_M は物質場の作用をあらわす．$\mathcal{L}_i$ は GP 理論のラグランジアンであり，ベクトル場 A^μ を用いて以下で定義される [1]：

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 &= G_2(X,F,Y)\,,\quad \mathcal{L}_3 = G_3(X)\nabla_\mu A^\mu\,,\\
\mathcal{L}_4 &= G_4(X)R + G_{4,X}(X)\left[(\nabla_\mu A^\mu)^2 - \nabla_\rho A_\sigma \nabla^\sigma A^\rho\right],\\
\mathcal{L}_5 &= G_5(X)G_{\mu\nu}\nabla^\mu A^\nu - \frac{1}{6}G_{5,X}(X)[(\nabla_\mu A^\mu)^3\\
&\quad - 3\nabla_\mu A^\mu \nabla_\rho A_\sigma \nabla^\sigma A^\rho + 2\nabla_\rho A_\sigma \nabla^\gamma A^\rho \nabla^\sigma A_\gamma]\\
&\quad - g_5(X)\tilde{F}^{\alpha\mu}\tilde{F}^{\beta}{}_{\mu}\nabla_\alpha A_\beta\,,\\
\mathcal{L}_6 &= G_6(X)L^{\mu\nu\alpha\beta}\nabla_\mu A_\nu \nabla_\alpha A_\beta\\
&\quad + \frac{1}{2}G_{6,X}(X)\tilde{F}^{\alpha\beta}\tilde{F}^{\mu\nu}\nabla_\alpha A_\mu \nabla_\beta A_\nu\,.
\end{aligned}$$

但し，$X \equiv -A_\mu A^\mu/2\,, F_{\mu\nu} \equiv \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ であり，

$$\begin{aligned}
F &\equiv -\frac{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{4}\,,\quad Y = A^\mu A^\nu F_\mu{}^\alpha F_{\nu\alpha}\,,\\
L^{\mu\nu\alpha\beta} &\equiv \frac{1}{4}\mathcal{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\mathcal{E}^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\rho\sigma\gamma\delta}\,,\quad \tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\mathcal{E}^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\,,
\end{aligned}$$

とした．$R, G_{\mu\nu}$ はそれぞれスカラー曲率および Einstein テンソルである．$\mathcal{E}^{\mu\nu\rho\sigma}$ は Levi-Civita テンソルであり，規格化条件 $\mathcal{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\mathcal{E}_{\mu\nu\rho\sigma} = -4!$ に従う．G_2 は X, F, Y に関する任意関数，$G_{3,4,5,6}$ はそれぞれ X に関する任意関数であり，$G_{i,X} \equiv \partial G_i/\partial X$ と表した．

GP 理論は G_4R のような計量とベクトル場の非最小結合によって，一般の時空で運動方程式が微分に関して 2 次のオーダーまでに保たれることが保証されている．また，作用 (1) に対してスカラー極限 $A_\mu \to \nabla_\mu\pi$ (π はあるスカラー) をとると，これは shift-symmetric な Horndeski 理論に帰着する．

2.2 Cosmological background

平坦な FLRW 計量 $ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j$ のもとでの運動方程式について議論する．物質場は完全流体とし，輻射 (エネルギー密度 ρ_r，圧力 $P_r = \rho_r/3$) および非相対論的物質（エネルギー密度 ρ_m，圧力 $P_m = 0$）を伴うものとする．ベクトル場は FLRW 背景時空の対称性から $A^\mu = (\phi(t), 0, 0, 0)$ とし，空間成分は摂動として扱う．このとき，計量およびベクトル場の時間成分が従う運動方程式はそれぞれ次のようになる：

$$\begin{aligned}
&G_2 + G_{2,X}\phi^2 + 3G_{3,X}H\phi^3 + 6(G_4 + G_{4,XX}\phi^4)H^2\\
&- (G_{5,X} + G_{5,XX}\phi^2)H^3\phi^3 = \rho_r + \rho_m\,,
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
&\phi\left\{G_{2,X} + 3G_{3,X}H\phi + 6(G_{4,X} + G_{4,XX}\phi^2)H^2\right.\\
&\left.-(3G_{5,X} + G_{5,XX}\phi^2)H^3\phi\right\} = 0\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

ここで，$H \equiv \dot{a}/a$ はハッブルパラメータである．この 2 式には任意関数 g_5，G_6，および G_2 の F，Y に関する部分が含まれていないため，これらは背景時空のダイナミクスには影響しない．また，$\phi \neq 0$ の場合，式 (3) は ϕ と H の代数方程式になっており，これを解くことで ϕ を H の関数として得ることができる．

2.3 Tensor perturbations

テンソル摂動 h_{ij} を含んだ線素 $ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j$ を考える．ここで，テンソル摂動は 2 つの偏極モード h_+ と $h_\times$ を持ち，$h_{ij} = h_+e_{ij}^+ + h_\times e_{ij}^\times$ と表すことができる．但し，基底 e_{ij}^+ および $e_{ij}^\times$ は波数空間において次の規格化条件を満たしているものとする：$e_{ij}^+(\boldsymbol{k})e_{ij}^+(-\boldsymbol{k})^* = 1$，$e_{ij}^\times(\boldsymbol{k})e_{ij}^\times(-\boldsymbol{k})^* = 1$，$e_{ij}^+(\boldsymbol{k})e_{ij}^\times(-\boldsymbol{k})^* = 0$．このとき，作用 (1) をテンソル摂動の 2 次まで展開すると次のようになる：

$$S_T^{(2)} = \sum_{\lambda=+,\times}\int d^4x\ a^3\ \frac{q_T}{8}\left[\dot{h}_\lambda^2 - \frac{c_T^2}{a^2}(\partial h_\lambda)^2\right], \tag{4}$$

但し，

$$q_T = 2G_4 - 2\phi^2 G_{4,X} + H\phi^3 G_{5,X}\,, \tag{5}$$

$$c_T^2 = \frac{2G_4 + \phi^2\dot{\phi}G_{5,X}}{q_T} \tag{6}$$

$$= 1 + \frac{\phi^2\left[2G_{4,X} + \left(\dot{\phi} - H\phi\right)G_{5,X}\right]}{2G_4 - 2\phi^2 G_{4,X} + H\phi^3 G_{5,X}}\,. \tag{7}$$

$q_T > 0$ および $c_T^2 > 0$ を満たすことで，それぞれテンソル摂動に関するゴーストおよび勾配不安定性を回避することができる．また，c_T^2 は重力波の伝搬速度の 2 乗に対応している．

昨年観測された重力波イベント GW170817 によって，重力波の伝搬速度は高い精度で光速と等しいことが明らかになった．GP 理論において，$c_T^2 = 1(= c^2)$ と仮定すると，$G_4 = \text{constant}$，$G_5 = 0$ の 2 つの条件を要請する必要がある．以降では，これらの条件も考慮する．

3 Concrete models

この節では，GP 理論に基づく理論的に有効な暗黒エネルギー模型を示す．宇宙初期から後期に進むにつれてベクトル場の寄与が大きくなることで後期加速膨張を実現するために，場 ϕ の振幅が H の減少に伴って成長していく状況を考える．そのような状況を実現するために，次の形の解を仮定する：

$$\phi^p \propto H^{-1} \tag{8}$$

但し，p は正の定数である．重力波の伝搬速度についての制限を課したうえで，このような解は次のようなモデルを考えることで実現される．

$$G_2 = b_2 X^{p_2}, \quad G_3 = b_3 X^{p_3}, \quad G_4 = \frac{M_{\rm pl}^2}{2}, \tag{9}$$

ここで，$M_{\rm pl}$ は換算プランク質量，$b_{2,3}$，$p_{2,3}$ は定数である．但し，p_3 については p_2 と p を用いて次の関係式を満たすとする：

$$p_3 = \frac{p + 2p_2 - 1}{2}. \tag{10}$$

$p_2 = p = 1$ の場合は cubic vector Galileon に対応し，このとき解は $\phi \propto H^{-1}$ に従う．

3.1 Background

このモデルにおける運動方程式 (2) は，整理することによって次の形に書きあらわすことができる：

$$3M_{\rm pl}^2 H^2 = \rho_{\rm DE} + \rho_m + \rho_r\,, \tag{11}$$

ここで $\rho_{\rm DE}$ はベクトル場に関連付けられたエネルギー密度である．密度パラメータ $\Omega_i \equiv \rho_i/(3M_{\rm pl}^2 H^2)$ ($i =$ DE$, r, m$) を用いると，暗黒エネルギーの状態方程式 $w_{\rm DE} \equiv \rho_{\rm DE}/P_{\rm DE}$ は以下で与えられる：

$$w_{\rm DE} = -\frac{3(1+s) + s\Omega_r}{3(1+s\Omega_{\rm DE})}\,. \tag{12}$$

但し，$\Omega_m = 1 - \Omega_{\rm DE} - \Omega_r$，$s \equiv p_2/p$ とした．これは密度パラメータの変化 (a) 輻射優勢期: $(\Omega_{\rm DE}, \Omega_r) = (0,1) \to$ (b) 物質優勢期: $(\Omega_{\rm DE}, \Omega_r) = (0,0) \to$ (c) 加速膨張期: $(\Omega_{\rm DE}, \Omega_r) = (1,0)$ に応じて，(a) $w_{\rm DE} = -1 - 4s/3 \to$ (b) $w_{\rm DE} = -1 - s \to$ (c) $w_{\rm DE} = -1$ と変化し，安定な加速膨張解へと収束することを示している．

また，暗黒エネルギーと輻射の密度パラメータ $\Omega_{\rm DE}$ と Ω_r を $\mathcal{N} \equiv \ln a$ で微分することで，以下の自律方程式系を得る：

$$\frac{d\Omega_{\rm DE}}{d\mathcal{N}} = \frac{(1+s)\Omega_{\rm DE}(3 + \Omega_r - 3\Omega_{\rm DE})}{1 + s\Omega_{\rm DE}}\,, \tag{13}$$

$$\frac{d\Omega_r}{d\mathcal{N}} = -\frac{\Omega_r\left[1 - \Omega_r + (3+4s)\Omega_{\rm DE}\right]}{1 + s\Omega_{\rm DE}}\,. \tag{14}$$

これらの自律方程式系を初期条件を与えて解くことで，それに応じて 3 つの密度パラメータ $\Omega_{\rm DE}$, Ω_r, $\Omega_m (= 1 - \Omega_{\rm DE} - \Omega_r)$ の時間発展を知ることができる．ここで，輻射の密度パラメータの現在値 Ω_{r0} を関係式 $\Omega_{r0} h^2 = 4.18343 \times 10^{-5}$ から与えることを仮定する．但し，h は規格化されたハッブル定数（$H_0 = 100\ h$ km s^{-1} Mpc^{-1}）である．このとき，背景時空のダイナミクスは物質の密度パラメータの現在値 Ω_{m0}，Λ-CDM 模型からのズレを表すパラメータ s，そして h の計 3 つのパラメータによって特徴づけることができる．

4 Observational data

我々は複数の独立な観測結果として，CMB，BAO，SN Ia，および現在付近でのハッブルパラメータの観測データを用いて，理論モデルに対して観測的制限を与えたい．そのために，次の統計量を定義する：

$$\chi^2 = \sum_{i,j} \left(x_i^{\rm theo} - x_i^{\rm obs}\right) C_{ij}^{-1} \left(x_j^{\rm theo} - x_j^{\rm obs}\right)\,, \tag{15}$$

但し，$x_i^{\rm theo}$ および $x_i^{\rm obs}$ はそれぞれある物理量の理論値と観測値，そして C_{ij}^{-1} は逆共分散行列を表す．この統計量 χ^2 は尤度関数 L と $L \propto \exp(-\chi^2/2)$ と

いうような関係を持つ．従って，χ^2 の値を最小にするモデルが，観測と合う最適な理論模型である．今回は，複数の独立な観測のデータを用いた統計解析を行うため，それぞれの観測に対応する χ^2 の線形和

$$\chi^2_{\rm back} = \chi^2_{\rm CMB} + \chi^2_{\rm BAO} + \chi^2_{\rm SNIa} + \chi^2_{H} \qquad (16)$$

が最小となるモデルパラメータを数値計算で推定する．

5 Numerical results

マルコフ連鎖モンテカルロ（MCMC）法を用いるために，事前分布を次のように設定した：
$0.1 \leq \Omega_{m0} \leq 0.5$，$0.6 \leq h \leq 0.8$，$-0.3 \leq s \leq 0.8$.

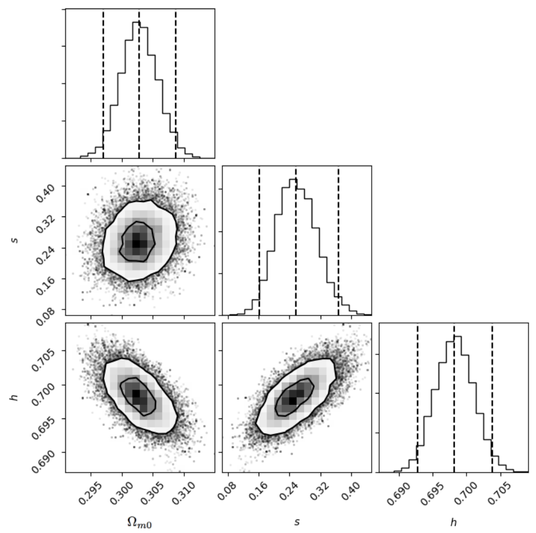

図 1: CMB，BAO，SN Ia およびハッブルパラメータの観測結果から得られた，3 つのパラメータ Ω_{m0}，s，h に対する観測的制限．各列の一番上のパネルが 3 つのパラメータ Ω_{m0}，s，h の 1 次元確率分布であり，パネル内の点線は best-fit（中心）と 2σ 領域（外側 2 本）を表す．そのほかのパネルは，3 つのパラメータのうち 2 つに関する 2 次元の観測的等高線を示している．

図 1. は MCMC 法によって得られた結果であり，各パラメータの 1 次元確率分布と 2 次元の観測的等高線を示したものである．最も $\chi_{\rm back}$ が小さくなるときのパラメータの値は $\Omega_{m0} = 0.3027$，$s = 0.254$，$h = 0.6981$ であり，このとき $\chi^2_{\rm back} \approx 590.4$ である．また，各パラメータの 2σ 区間は次のように与えられた：

$$\Omega_{m0} = 0.3027^{+0.0060}_{-0.0057}\,, \quad s = 0.254^{+0.118}_{-0.097}\,,$$
$$h = 0.6981^{+0.0059}_{-0.0057}\,.$$

この結果から，背景時空レベルでは $s > 0$ の領域が好まれており，Λ-CDM 模型が 2σ レベルでさえ観測的制限から外れるということを示している．これは Λ-CDM 模型で生じる SN Ia のような低い赤方偏移での観測結果と CMB の観測結果との間の食い違いが GP 理論では解消できるためと考えられる．

6 Conclusion

今回の研究では，まず GP 理論では重力波の伝搬速度が光速と一致しているならば，4 次および 5 次の相互作用項に強く制限がかかることを示した．次に，GP 理論の枠組みで現在付近で $w_{\rm DE} < -1$ となる有効な加速膨張模型を具体的に示した．最後に，複数の独立な観測結果を用いて統計解析を行い．背景時空のレベルでは GP 理論に基づく模型が Λ-CDM 模型よりも好まれる傾向にあることを明らかにした．

今回の結果はあくまで背景時空での議論なので，摂動レベルでの統計解析が急務であり，現在進行中である．その際，摂動に関わる観測として赤方偏移空間歪みの観測や積分ザックス・ヴォルフェ効果などを用いて統計解析を行う必要がある．また，GP 理論を拡張した beyond generalized Proca（BGP）理論では，重力波の伝搬速度に関する制限を考慮した場合でも，4 次の相互作用項の自由度を残すことができる．BGP 理論に基づく暗黒エネルギー模型では，Λ-CDM 模型よりも小さな密度ゆらぎの成長率を実現できる模型が存在することは先行研究 [4] で示されている．そのため，BGP 理論に基づき，かつ $c_T^2 = 1$ を満たすような暗黒エネルギー模型に対して観測的制限を与えることも今後の課題である．

Reference

[1] L. Heisenberg, JCAP 1405, 015 (2014).

[2] A. De Felice, L. Heisenberg, R. Kase, S. Mukohyama, S. Tsujikawa, Y. l. Zhang (2017)

[3] A. De Felice, L. Heisenberg and S. Tsujikawa, Phys. Rev. D 95, 123540 (2017).

[4] S. Nakamura, R. Kase and S. Tsujikawa, Phys. Rev. D 95, 104001 (2017).

——index

c7

銀河の IA に対する観測的制限

栗田 智貴 (東京大学カブリ数物連携宇宙研究機構)

Abstract

銀河形成時に存在する大規模構造の潮汐力場は、同じ赤方偏移にいる銀河形状を歪ませる。Intrinsic Alignments（以下 IA）と呼ばれるこの効果は、銀河形成の物理を解明するためにももちろん重要であるが、他方で現在の宇宙論的な観測に様々な形で関わるという意味でも重要である。Weak lensing を用いた cosmic shear の測定は、DM 分布の構築や宇宙論的パラメータの推定を可能にする強力な観測手法の一つであるが、この測定に対して IA は系統誤差の要因となる。また現在観測される銀河の形状が十分初期に IA によって決定されるものであれば、inflation を含めた宇宙初期の情報を抽出する probe にもなり得る。この IA の物理機構は、ガス物理など銀河形成の物理も関与するので極めて非線形なものである。従って IA 全体を予言するモデルを解析的に計算することは不可能であり、むしろ実際の観測に整合する現象論的なモデルを、部分的に適用する必要がある。今回レビューする論文 (1) では、銀河の様々な個性に対する IA の依存性を観測結果から推定している。その解析方法や結果を紹介しながら IA の振る舞いを概観する。

1 Introduction

銀河サーベイで見つかった大量の背景銀河の形状を統計的に解析することで、宇宙広域の歪み場（cosmic shear）を測定できる。この cosmic shear の精密測定は、逆を辿れば我々と背景銀河の間に存在する重力場の情報を完全に含むため、ダークマター分布の再構成や宇宙論パラメータの推定を可能にする強力な手法の一つとなっている。

銀河形状の歪みを引き起こす主な要因には、weak lensing の他に Intrinsic Alignments（以下 IA）と呼ばれるものがある。IA とは大規模構造による潮汐力場がダークマターハローや原始銀河ガス雲と重力相互作用をすることで、同じ赤方偏移の銀河を元々歪ませて形成する効果である。これら 2 つの効果は共に大規模構造に起因するため、特に相互相関を持つ。観測量に対してこれによる系統誤差を与えないためにも、それぞれの効果を正確に知る必要がある。

しかし、IA の物理機構はガス物理など銀河形成の物理も関与するので極めて非線形である。従って IA の全体を予言するモデルを解析的に計算することは不可能であり、実際の観測データに整合する現象論的なモデルを部分的に適用する必要性が生じる。

これを踏まえて Section 2 では銀河の歪みを表す観測量 γ の簡単な定式化を行い、IA のモデルの中で観測から決定されるべき部分を示す。続く Section 3 以降で、今回レビューする論文 (1) の解析方法や結果等を紹介しながら、銀河の様々な個性（光度、ハローの質量、色、赤方偏移、周囲の環境、線型バイアス）に対する IA の依存性を概観する。

2 Shear

この章では観測される銀河の歪み (Shear) を、weak lensing と IA それぞれについて計算する。

2.1 Weak lensing

天体（今回は銀河）から出た光の進路は、伝播途中の非一様な物質分布によって曲げられるため、観測される天体の像は若干歪んで見える。Weak lensing と呼ばれるこの効果は以下の様に定式化される。

測地線方程式に対して metric の弱重力近似 ($\phi \ll 1$) を適用すると、角度成分 ($\vec{\theta} = x^{2,3}$) の方程式の解は ϕ の 1 次までで

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\nabla}_{\vec{\theta}}\psi(\vec{\theta})$$

と整理できる。ここで $\vec{\beta}$ は本来の位置、$\vec{\theta}$ は実際に観測される位置である。また ψ は重力ポテンシャル

ϕ の視線方向の積分であり、これが像の位置のずれを担っている。

実際の天体が有限の大きさを持つことを考慮して、$\vec{\beta}$ と $\vec{\theta}$ の変換に関する Jacobian を計算すると

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial \theta_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \equiv \delta_{ij} - \Psi_{ij}$$

となる。便宜のため、ずれを表す行列 Ψ_{ij} を

$$\Psi = (1-\kappa)\mathbb{I} + \gamma_+\sigma_3 + \gamma_\times\sigma_1$$

の様に分解すると、それぞれの係数 $\kappa, \gamma_+, \gamma_\times$ の幾何的な意味が明瞭になる（図 1）。ここで $\mathbb{I}$ は単位行列、σ はパウリ行列である。

最も基本的な観測量の一つとして銀河の形状が楕円率として得られるが、楕円率とこの shear $\gamma_{+,\times}$ は結びつけることができる。そして γ の元を辿れば ψ、さらには ϕ を知ることができるため、DM 分布の再構築などが可能になる。

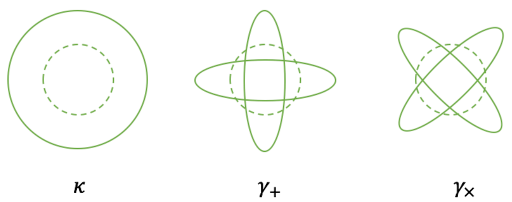

図 1: $\kappa, \gamma_+, \gamma_\times$ の幾何的な意味

2.2 IA

しかしながら前述の通り、銀河は IA によってもともと歪んでいる。従って実際に観測される銀河の歪みは

$$\gamma^{\rm obs} = \gamma^{\rm G} + \gamma^{\rm I}$$

となるため、相関の中には

$$\begin{aligned} \xi^{\rm obs} &\equiv \langle \gamma^{\rm obs}\gamma^{\rm obs}\rangle \\ &= \langle \gamma^{\rm G}\gamma^{\rm G} + \gamma^{\rm G}\gamma^{\rm I} + \gamma^{\rm I}\gamma^{\rm G} + \gamma^{\rm I}\gamma^{\rm I}\rangle \\ &= \xi^{\rm GG} + \xi^{\rm GI} + \xi^{\rm II} \end{aligned}$$

の様に 2 つの効果が混在することがわかる。G は weak lensing、I は IA の寄与を表すものとする。図 2 に $\xi^{\rm GI}, \xi^{\rm II}$ が生じる具体的な描像を示す。

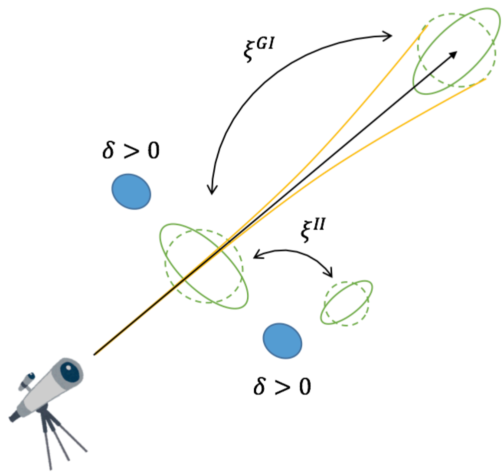

図 2: $\xi^{\rm GI}, \xi^{\rm II}$ の具体例

この $\gamma^{\rm I}$ の形は、large scale では以下の様にモデル化される。(2)

$$\gamma^{\rm I}_{+,\times} = -A_I \frac{C_1}{4\pi G}(\partial_1^2 - \partial_2^2, 2\partial_1\partial_2)\phi_p$$

ϕ_p は原始重力ポテンシャルと呼ばれ、十分初期の重力ポテンシャルである。従ってこれは、銀河形成が始まる時に存在する初期の潮汐力場が、現在観測される銀河の形状を決めてしまうというモデルである。ここで自由度として残っている振幅 A_I が銀河の様々な個性に対する依存性を担っている部分であり、観測結果から決定されるべき項である。

一方 small scale（halo scale）では非線形な効果が強いため、このモデルは適用できない。(1) ではシミュレーションで得たパワースペクトル (3) をもとに、振幅を独立な自由度 a_h として依存性を調べている。

実際の解析で扱う観測量は、基本的な観測量である銀河の数密度 δ_g と銀河の歪み $\gamma^I_{+,\times}$ から作られる相関関数 ξ_{XY} を天球面上に射影した w_{XY} である。例えば

$$\xi_{gg} \equiv \langle \delta_g \delta_g \rangle \to w_{gg}, \xi_{g+} \equiv \langle \delta_g \gamma^I_+ \rangle \to w_{g+}$$

等の組み合わせがある。

以降の章で (1) のレビューを行う。

3 Data and Methods

解析に使用したデータは SDSS-III BOSS DR11 LOWZ sample である。この銀河 sample は $0.16 < z < 0.36$ にある約 17 万個の赤い銀河であり、特に IA が測定された従来の銀河 sample よりも暗い銀河まで扱っている点が特徴である。

まず IA の振幅 A_I, a_h について、銀河の個性に対しての依存性を調べるために全体の sample を以下の様な subsample に分ける。

表 1: Subsample

変数	class
Luminosity	$L_1 \sim L_4$
Color	$C_1 \sim C_5$
Redshift	Z_1, Z_2
Environment	group(BGG, Satellite), field
Halo Mass	$M_{\rm halo}$
Linear Bias	$b_{\rm S}$

解析では、それぞれの class ごとに相関 w_{XY} の推定量 $\hat{w}_{XY}$ を LS-estimator を用いて計算し、$A_I = A_I(L, C, z, {\rm Env}, M_{\rm halo}, b_{\rm S})$ の依存性（a_h も同様）を決定する。

Environment の class 分けは、CiC technique を使用した。各銀河が group に属するか、または孤立している field であるかを判定し、さらに group に属する場合は自身が中心銀河 (BGG を仮定) であるか、または BGG を取り巻く satellite であるかについても区別して class 分けを行う。また各 class の平均の halo mass $M_{\rm halo}$ は galaxy-galaxy lensing を通して測定し、線型バイアス $b_{\rm S}$ は w_{XY} を fit するときのパラメータであるため、これも各 class に対して決定される。

4 Results

解析結果の中で特に重要であったものをいくつか紹介する。まず LOWZ sample 全体での w_{gg}, w_{g+} を図 3 に示す。

これを見ると small, large scale それぞれでよく fit することがわかり、IA モデルの正当性が確認できる。ここで LA（NLA）はそれぞれ線形（非線形）な matter power spectrum を採用したものである。この結果から sample 全体の振幅は

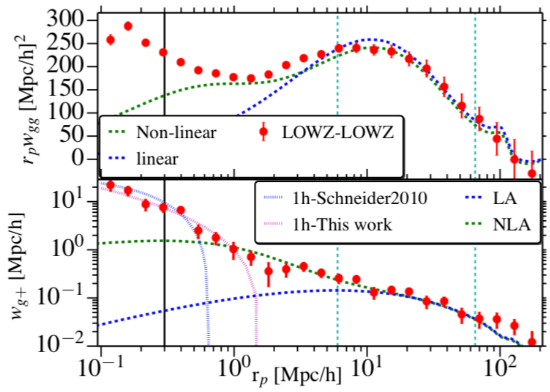

図 3: LOWZ sample 全体の signal

$$A_I = 4.6 \pm 0.5, a_h = 0.084 \pm 0.010$$

と決定された。次に Luminosity 依存性を図 4 に示す。

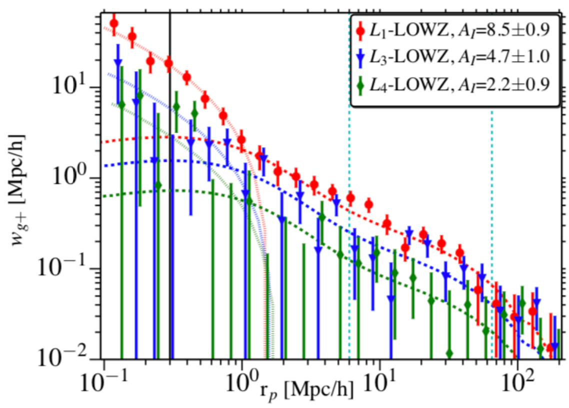

図 4: IA の luminosity 依存性

どの scale で見ても明るい銀河ほど IA は強い。これは先行研究 (4) の結果とも一致しており、振幅の依存性 $A_I(L), a_h(L)$ は以下の様な冪に従う。特に今回解析した銀河 sample は比較的暗い銀河までを含むため、この IA の L 依存性を従来の結果より延長できることも示した。

$$A_I(L) \propto L^{1.30\pm0.27}, a_h(L) \propto L^{2.1\pm0.4} \tag{1}$$

最後に IA の線型バイアス b_{S} に対する依存性を見る（図 5)。各点はそれぞれの class に対応する。

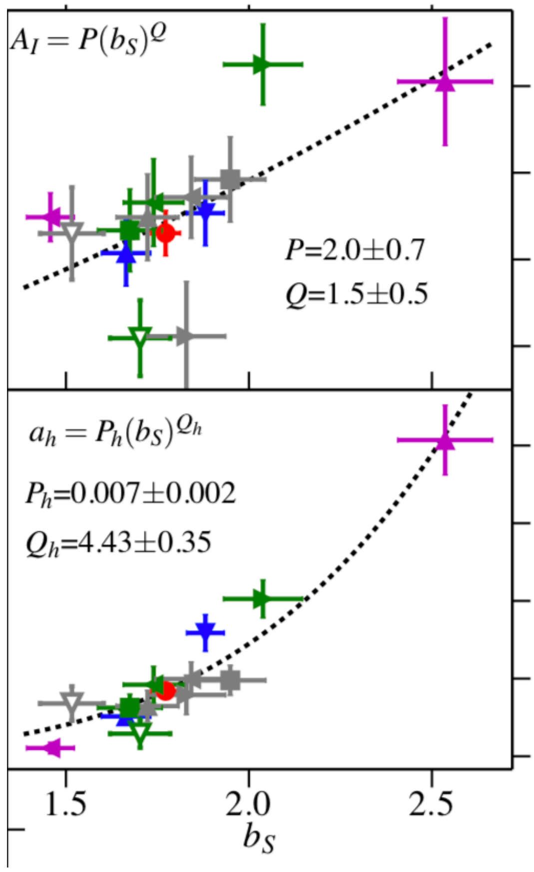

図 5: IA の bias 依存性

特に下図の a_h についての依存性を見ると $a_h \propto b_{\mathrm{S}}^{4.43\pm0.35}$ と依存性が強い。ここで a_h は small scale での IA の強さであるが、一方で b_{S} は large scale での線型バイアスであるため、この関係は非自明なものである。さらに b_{S} が大きいことは銀河がより密集していることを表すが、これによって起こると予想される銀河の合体や特異速度の増大は、一見 IA の signal を減らす様にも見える。観測結果で明らかになったこの a_h と b_{S} の関係は、small scale での潮汐力場による物理機構が IA に対して重要な役割を持つ可能性を示唆するものである。

5 Conclusion

今回レビューした論文 (1) では、銀河の持つ様々な個性に対する IA の依存性を観測的に制限した。解析結果として、前章で示さなかった結果も含めれば、全体として IA は光度と Halo Mass に強く依存し、一方赤方偏移や色への依存性は弱いことが明らかになった。また振幅の Scaling は、large scale では L, M_{halo} が、small scale では b_{S} が良い指標になる。特に L 依存性は暗い銀河まで拡張できることが示されたが、これは将来のサーベイ（LSST,Euclid）で期待されるさらに暗い銀河に対して繋がる結果である。

Reference

[1] S. Singh, R. Mandelbaum, and S. More. Intrinsic alignments of SDSS-III BOSS LOWZ sample galaxies. , Vol. 450, pp. 2195–2216, June 2015.

[2] C. M. Hirata and U. Seljak. Intrinsic alignment-lensing interference as a contaminant of cosmic shear. , Vol. 70, No. 6, p. 063526, September 2004.

[3] M. D. Schneider and S. Bridle. A halo model for intrinsic alignments of galaxy ellipticities. , Vol. 402, pp. 2127–2139, March 2010.

[4] B. Joachimi, R. Mandelbaum, F. B. Abdalla, and S. L. Bridle. Constraints on intrinsic alignment contamination of weak lensing surveys using the MegaZ-LRG sample. , Vol. 527, p. A26, March 2011.

——index

c8

銀河形状による初期三点相関の非等方性の検証

小粥 一寛 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

超弦理論において存在が示唆されているスピン 2 以上の場がインフレーション中に存在する場合には、背景宇宙は等方的であるが初期三点相関に特徴的な波数依存のある非等方性が現れることが知られている。(Arkani-Hamed & Maldacena 2015) この非等方性の特徴の一部が銀河形状の観測により検証可能であることが Schmidt et al. (2015) によって示された。本研究 (Kogai et al. 2018) の 1 つ目では、スピン 2 粒子による重い場の痕跡を銀河形状の観測による検証可能性を調べた。その結果、よりモデルに即した検証を行うと、Schmidt et al. (2015) では大スケールで見られていた痕跡が、小スケールで見られることがわかった。一方、インフレーション中に、背景宇宙の等方性を破るベクトル場が存在する場合には、ベクトル場の揺らぎは減衰することなく観測可能な非等方性を生じる可能性がある。この場合には、初期三点相関に、ベクトル場の方向依存性に由来する大域的等方性を破る寄与が現れる。本研究 (Kogai et al. 2018) の 2 つ目として、初期三点相関に特徴的な波数依存のある非等方性をもつ場合とのモデル大域的等方性を破る場合と区別できるかどうかを検証した。その結果、後者のモデルでは、銀河の intrinsic alignment として、前者では見られなかった B モード及び多重極モーメント l の非対角成分が生成されることがわかった。

1 導入

インフレーションは標準ビッグバン宇宙論における諸問題を解決できるとされている。このインフレーション模型は多数提唱されているが共通することとして、スカラー場であるインフラトンの量子ゆらぎにより曲率ゆらぎが生じ、構造形成を担う密度ゆらぎを生み出すという点が挙げられる。一方で、超弦理論から高次スピンをもつ重い場の存在が予言されており、これらはインフラトンと相互作用することで、曲率ゆらぎに非等方性が生じることが示された。(Arkani-Hamed & Maldacena 2015) この非等方性は squeezed-limit な三点相関関数で表され、その特徴は (特徴 1) スピン依存する冪をもった $(\boldsymbol{k}_{\rm S}\cdot\boldsymbol{k}_{\rm L})^s$ の角度依存性、(特徴 2) 質量とスピンに依存する冪をモード比 $(k_{\rm L}/k_{\rm S})$ と振動 の 2 点が挙げられる。

初期ゆらぎの非等方性の制限に対する観測手法としては、宇宙マイクロ波背景放射や銀河の赤方偏移空間歪みサーベイ等があるが、ここでは銀河形状による非等方性への制限に着目する。理由の一つとして、次世代大規模構造サーベイ (例えば、*Large Synoptic Survey Telescope(LSST)* や *Euclid*、*Wide-Field Infrared Survey Telescope(WFIRST)* など) の稼働が間近に迫り、銀河の形状の撮像によるサンプルが劇的に増え、宇宙論としての応用に期待されるからである。先行研究として Schmidt et al. (2015) では銀河形状の観測から上記で挙げた (特徴 1) をもつ場合の曲率ゆらぎの非等方性の制限に対する観測的検証が行われた。この検証によってスピン 2 の場による初期の非等方性による影響が赤い銀河の intrinsic な形状における角度パワースペクトルに現れることが示された。

そこで本研究では、同様に銀河形状の観測を想定して以下の検証を行った。

- Schmidt et al. (2015) では考慮されていなかった (特徴 2) を取り入れた場合の検証
- (特徴 1) の場合と宇宙の大域的等方性が破れている場合との区別可能性

これらの詳細な手法や結果等は、Kogai et al. (2018) にまとめられているため、以下では要所のみを挙げておく。

2 準備

2.1 初期三点相関関数

今回検証する初期ゆらぎの三点相関関数は、断熱条件を仮定すると物質優勢期では、曲率ゆらぎ ζ とポテンシャル ϕ が $\zeta = (5/3)\phi$ の関係から、スピンをもつ重い場とインフラトンが相互作用する場合に表れる squeezed-limit($k_{\rm L} = k_1 \ll k_2 \sim k_3 = k_{\rm S}$) な三点相関関数は、$\phi$ を用いて

$$B_\phi(\boldsymbol{k}_{\rm S}, \boldsymbol{k}_{\rm L}) = \sum_{s={\rm even}} A_s \left(\frac{k_{\rm L}}{k_{\rm S}}\right)^{\Delta_s} \mathcal{P}_s(\boldsymbol{k}_{\rm S}\cdot\boldsymbol{k}_{\rm L}) \times \cos\left(\nu_s \ln\left(\frac{k_{\rm L}}{k_{\rm S}}\right) + \varphi_s\right) P_\phi(k_{\rm S}) P_\phi(k_{\rm L}) \,, \tag{1}$$

のように表される。P_ϕ は ϕ のパワースペクトル、$\mathcal{P}_s$ はルジャンドル多項式、ν_s は質量とスピンの依存性をもつパラメータ、φ_s は位相である。ここで、$\Delta_2 = 0, \nu_2 = 0$ の場合は先行研究と同じになる。

一方で、大域的等方性を破るような場合における、初期三点相関関数は、

$$\bar{B}_\phi(\boldsymbol{k}_{\rm L}, \boldsymbol{k}_{\rm S}; \hat{\boldsymbol{p}}) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\bar{A}_l + \bar{B}_l\, \hat{\boldsymbol{k}}_{\rm L}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_{\rm S} + \cdots\right] i^{\frac{1-(-1)^l}{2}} \times \mathcal{P}_l(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_{\rm S}) P_\phi(k_{\rm L}) P_\phi(k_{\rm S}) \,, \tag{2}$$

で表されるような場合を考える。ここで、$\hat{\boldsymbol{p}}$ は定ベクトル場である。これは、インフレーション中に宇宙の等方性を破るベクトル場が存在し、初期三点相関関数に、このベクトル場と小スケールの波数に角度依存性をもつ場合を想定する。この初期三点相関関数には、先行研究で検証されたような角度依存性を持つため観測的には似たシグナルが見られる可能性がある。

2.2 観測量

本研究では銀河の形状を用いた観測を想定する。銀河形状関数を 2 次モーメントを使って次のように定義する。

$$g_{ij} = \frac{1}{I^k{}_k}\left(I_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} I^k{}_k\right) . \tag{3}$$

これが物質の密度ゆらぎ $\delta(\boldsymbol{x})$ と Tidal tensor

$$K_{ij}(\boldsymbol{x}) = \left[\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right]\delta(\boldsymbol{x}) \,, \tag{4}$$

を使って、$g_{ij} = F[\delta, K_{ij}]$ の汎関数で表せるとき、バイアス係数 $b_i (i = 1, 2, \cdots)$ を用いて局所で展開すると、

$$g_{ij}(\boldsymbol{x}) = b_1^{\rm I} K_{ij}(\boldsymbol{x}) + b_2^{\rm I} \delta(\boldsymbol{x}) K_{ij}(\boldsymbol{x}) + b_{\rm t}^{\rm I}\left[K_{ik}K^k{}_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}(K_{kl})^2\right](\boldsymbol{x}) + \cdots \,, \tag{5}$$

と展開できる。

次に、密度ゆらぎと銀河形状関数との相関 $\langle\delta(\boldsymbol{x}) g_{ij}(\boldsymbol{y})\rangle$ を考える。このとき g_{ij} の第 2 項、第 3 項は対応するフーリエ空間において実効的に $\langle\delta(\boldsymbol{k}_1)\delta(\boldsymbol{k}_2)\delta(\boldsymbol{k}_3)\rangle$ の三点相関が生じる。ところが、物質の密度ゆらぎ δ とポテンシャル ϕ には、

$$\delta(z, \boldsymbol{k}) = \frac{2}{3}\frac{k^2 T(k) D(z)}{\Omega_{\rm m0} H_0^2}\phi(\boldsymbol{k}) \,, \tag{6}$$

の関係があるため、ポテンシャルの三点相関とみなすことができる。ここで $T(k)$ は輸送関数、$D(z)$ は成長因子 $\Omega_{\rm m0}$ は現在の物質の密度パラメータ、H_0 はハッブル定数を表す。また、$\langle\phi(\boldsymbol{k}_1)\phi(\boldsymbol{k}_2)\phi(\boldsymbol{k}_3)\rangle = (2\pi)^3 B_\phi(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3)\delta_D(\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_3)$ の関係から前節で述べた初期三点相関関数に応じて相関に違いが生まれる。このようにして、銀河形状関数は相関をとることで初期ゆらぎの非等方性の痕跡を探ることが可能となる。ここでは述べないが、銀河の数密度に対しても同様に初期三点相関関数に対する議論が可能であるが、線形において銀河形状の場合がスピン 2 に感受性を持つのに対し、数密度の場合はスピン 0 に感受性がある点が異なる。

3 結果

天球面上に射影した銀河の形状のシグナルを検証する。シグナルの評価は、球面調和関数で展開した係数の相関を計算する角度パワースペクトルを用いた。(導出は Kogai et al. (2018) を参照。) 初期三点

相関関数が式 (1) の場合、銀河の歪みの角度パワースペクトルは、次のような形で得られた。

$$C_l^{\mathrm{EE}} = \frac{2}{\pi}\frac{(l-2)!}{(l+2)!}\int k^2 dk P_{\mathrm{m}}(k)\left[F_l^{\mathrm{I}}(k)+F_l^{\mathrm{G}}(k)\right]^2 . \tag{7}$$

ここで P_m は物質のパワースペクトルで、カーネル F_l はそれぞれ Instrinsic な銀河形状のカーネルとして

$$\begin{aligned} F_l^{\mathrm{I}}(k) = {} & \frac{1}{2}\frac{(l+2)!}{(l-2)!}\int dz \frac{dN_{\mathrm{I}}}{dz}\frac{D(z)}{D(0)}\frac{j_l(x)}{x^2} \\ & \times \Bigg[b_1^{\mathrm{I}} + 3b_{\mathrm{NG}}^{\mathrm{I}} A_2 \left(\frac{k}{k_*}\right)^{\Delta_2} \\ & \quad \mathcal{M}^{-1}(z,k)\cos\left(\nu_2 \ln\left(\frac{k}{k_*}\right)+\Theta_2\right)\Bigg] , \end{aligned} \tag{8}$$

となり、弱い重力レンズによる銀河の歪みのカーネルとして

$$\begin{aligned} F_l^{\mathrm{G}}(k) = {} & \frac{1}{2}\frac{(l+2)!}{(l-2)!}\int_0^{\chi_{\max}} \frac{d\chi}{\chi}\frac{3H_0^2\Omega_{\mathrm{m0}}}{k^2}\frac{(1+z)D(z)}{D(0)} \\ & \times j_l(x)\int_{\chi}^{\chi_{\max}} d\tilde{\chi} H(\tilde{\chi})\frac{dN_{\mathrm{G}}}{dz}\frac{(\tilde{\chi}-\chi)}{\tilde{\chi}} , \end{aligned} \tag{9}$$

として得られる。ここで、dN/dz は銀河の赤方偏移分布、χ は共働距離、k_* は pivot スケールである。このプロットを図 1 に示す。緑線は波数の角度依存性のみをもつ先行研究に対応し、赤線が本研究による結果である。先行研究では、大スケール (小さい l) に初期の非等方性の痕跡が見られる。一方で、$\Delta_2 = 3/2$ の場合には、積分に含まれる k の冪の違いから、角度パワースペクトルにおいて大きな l、すなわち小スケール側に初期ゆらぎの非等方性の痕跡が見られることがわかった。(図 2)

一方、大域的等方性を破っている場合の初期三点相関関数である式 (2) を用いて銀河形状の角度パワースペクトルを計算すると、以下の 2 つの特徴が見られる。

- 球面調和関数の展開係数である a_{lm} の二つの相関 $\langle a_{lm} a^*_{l'm'} \rangle$ において、非対角な多重局モーメント l との相関が見られる。
- 奇パリティである B モードシグナルが見られる。(図 3)

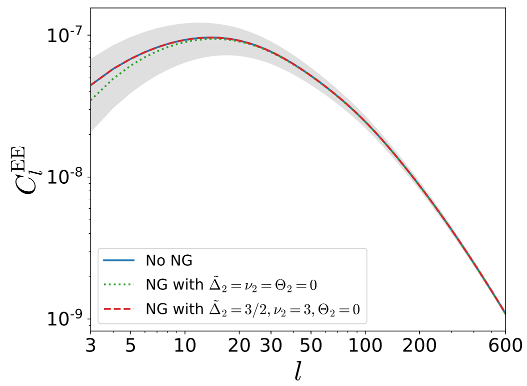

図 1: 銀河形状の角度パワースペクトル。青線は $A_2 = 0$ の場合、緑線は $\Delta_2 = \nu_2 = \Theta_2 = 0$ で $b_{\mathrm{NG}}^{\mathrm{I}} A_2 = 100 b_1^{\mathrm{I}}$ の場合、赤線は $\Delta_2 = 3/2$、$\nu_2 = 3$、$\Theta_2 = 0$ で $b_{\mathrm{NG}}^{\mathrm{I}} A_2 = 8000 b_1^{\mathrm{I}}$ の場合である。灰色は cosmic variance の領域を示す。

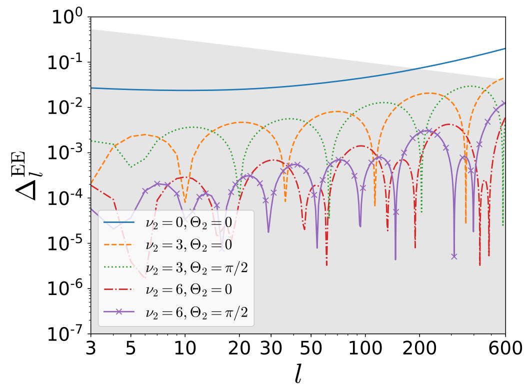

図 2: 銀河形状の角度パワースペクトルの非ガウス性がない場合との比。具体的には $\Delta_l^{\mathrm{EE}} = |C_l^{\mathrm{EE}} - C_{l,\mathrm{Gauss}}^{\mathrm{EE}}|/C_{l,\mathrm{Gauss}}^{\mathrm{EE}}$ であり、灰色は cosmic variance の領域を表す。

これらは、先行研究で示された波数における角度依存性の場合と比較すると、B モードシグナルが見られるという大きな違いがあり、これらは区別が可能であると考えられる。ただし、今回は弱い重力レンズ効果を線形かつ主要な成分のみで評価を行っているため、intrinsic な成分のみが B モードシグナルとして現れている。また、このような角度パワースペクトルでは m による振幅の違いも見られ、同じ l 同士の B モードの角度パワースペクトルでは m が l に近

い値をもつ場合に振幅が大きい様子が見られる。(図 4) ここでは、B モードの結果に着目しているが、E モードのシグナルにも類似した特徴が見られている。

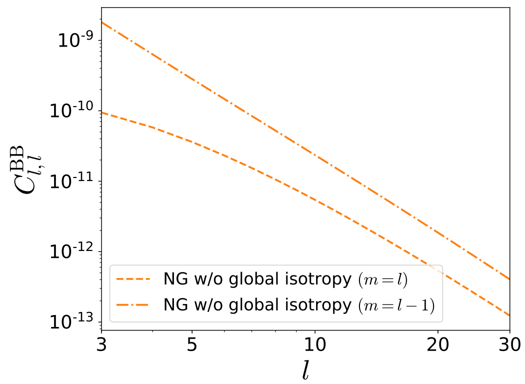

図 3: 銀河形状の B モードの角度パワースペクトル $\langle a_{lm}^{\mathrm{B}} a_{lm}^{\mathrm{B}*} \rangle$。大域的等方性を破る場合のみに表れる。

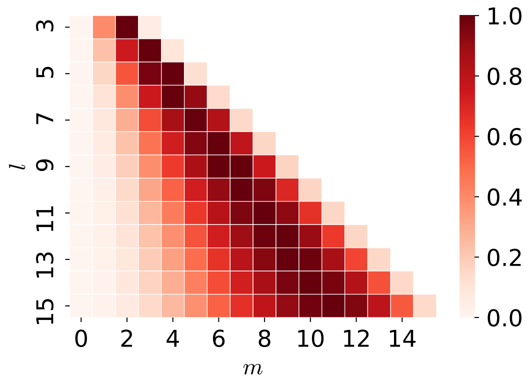

図 4: 銀河形状の B モードの角度パワースペクトルの m 依存性。各 l において、最も大きな振幅で規格化している。

4 結論

スピンをもつ重い場が存在する場合には小スケールに非等方性の特徴が表れることが示された。これにより銀河形状の観測から CMB とは異なるスケールで制限できる可能性がわかった。一方で、小スケールに特徴が見られるという点から非線形成長効果の考慮も必要となるため、これを含めた場合の検証は今後の研究課題である。

初期三点相関において大域的等方性が破れている場合に生じる非等方性と波数の角度依存性による非等方性がある場合では、銀河の intrinsic alignment の角度パワースペクトルに違いが見られる。前者の場合と同じようなシグナルが E モード成分から見られるが、多重局モーメント l で非対角成分との相関が見られるという違いに加え、決定的に異なる点として、B モードの相関が見られることが挙げられる。これによりモデルの観測的な区別が可能であると考えられる。

Reference

Arkani-Hamed, N., & Maldacena, J. 2015, arXiv:1503.08043

Schmidt, F., Chisari, N. E., & Dvorkin, C. 2015, *JCAP* , 10, 032

Kogai, K., Matsubara, T., Nishizawa, A. J., & Urakawa, Y. 2018, arXiv:1804.06284

Yokoyama, S., & Soda, J. 2008, *JCAP* , 8, 005

Schmidt, F., & Jeong, D. 2012, *Phys. Rev. D* , 86, 083527

——index

c9

宇宙マイクロ波背景放射の非等方性を用いた原始磁場の観測的解明

箕田 鉄兵 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙のいたるところに磁場が存在することが確認されている。とりわけ銀河団やボイドなどの大規模構造にも磁場が付随していることは興味深く、初期宇宙で生成された微弱な磁場 (以下、原始磁場と呼ぶ) に起源を持つことが期待されている。原始磁場の存在を観測的に検証することで、初期宇宙の磁場生成機構に関する情報を解明できると考えられる。そこで本研究では、原始磁場の存在可能性を検証するための観測量として宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) に着目した。CMB はほぼ完全な黒体分布かつ空間的にほとんど一様な電波であるが、実際には $\delta T/T \sim 10^{-5}$ 程度の小さな温度揺らぎが存在している。原始磁場が存在し、磁場の強度分布に非一様性があった場合、磁場のローレンツ力が宇宙論的なガスの密度および温度の分布に影響を与えるということが先行研究で指摘されている。すなわち、原始磁場の持っている情報は、ガスの密度や温度の揺らぎに反映されるはずである。また、CMB 光子が観測者に到達する過程で高温度・高密度のガスの中を通過すると、逆コンプトン散乱を受けて見かけの温度が周波数に依存して変化することが知られている。したがって、本研究では原始磁場の強度分布の持つ統計的性質がガスの密度と温度の空間分布及び CMB 温度の非等方性に与える影響を見積もった。今回、これらの計算結果と CMB の観測データによる原始磁場の分布の性質について得られた情報を報告する。

1 Introduction

宇宙のいたるところで磁場の存在が報告されている。これら宇宙における磁場の起源を明らかにすることは宇宙物理学における大きな目標の一つである。とりわけ近年は銀河団やボイドなど大スケールで方向の揃った磁場が存在することが報告されており、これらの磁場の起源として、銀河形成以前の初期宇宙における磁場生成が有力な候補である (Turner & Widrow 1988)。本研究の目的は、観測量である宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) の温度ゆらぎを用いて、原始磁場の強度とスケール依存性に新たな制限を与えることである。そこで、本研究では新たな視点として、銀河間領域の希薄なガスによって引き起こされる熱的スニヤエフ・ゼルドヴィッチ効果 (熱的 SZ 効果) に着目した。また、標準的な宇宙論モデルとして平坦な ΛCDM モデルを仮定し、宇宙論パラメータを Planck 2015 の観測データ (Planck Collaboration et al. 2016) から次のように定める: $H_0 = 67.8\mathrm{km/s/Mpc}, \Omega_\Lambda = 0.692, \Omega_\mathrm{m} = 0.308, \Omega_\mathrm{b} = 0.048.$

2 Methods

2.1 原始磁場のモデル

この項では本研究で扱った原始磁場のモデルについて述べる。本研究では簡単のため、原始磁場のヘリシティーは無視し、磁場の構造は宇宙膨張と共に断熱的に減衰すると仮定した。すなわち、原始磁場の時間進化は、時刻 t におけるスケールファクターを $a(t)$ 及び現在時刻の強度を $|\mathbf{B}_0|$ として $\mathbf{B}(t,\mathbf{x}) = \dfrac{\mathbf{B}_0(\mathbf{x})}{a^2(t)}$ と表せる。また宇宙原理に従って統計的な一様等方性を仮定し、波数空間における磁場の強度 $\mathbf{B}(\mathbf{k})$ を用いてパワースペクトラムを

$$\begin{aligned}\langle B_i^*(\mathbf{k}) B_j(\mathbf{k}')\rangle &= \frac{(2\pi)^3}{2}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\left(\delta_{ij}-\hat{k}_i\hat{k}_j\right)P_B(k), \\ P_B(k) &= \frac{n_B+3}{2}\frac{(2\pi)^2 B_n^2}{k_n^{n_B+3}}k^{n_B}, \qquad (1)\end{aligned}$$

と表した (Landau & Lifshitz 1980)。ここで B_n は $k_n = 2\pi\ \mathrm{Mpc}^{-1}$ のスケールでスムージングした時の

磁場の強度であり、パワースペクトラム $P_B(k)$ とは

$$B_\lambda^2 = \int_0^\infty \frac{k^2\ dk}{2\pi^2}\ \mathrm{e}^{-k^2\lambda^2} P_B(k) \tag{2}$$

のように関係づけられる。

ここで、初期宇宙において光子の衝突によって Alfvén 波が減衰し、それに伴って紫外領域に磁場の存在しないスケールがあるため、実際には式 (2) の積分には上限 $k = k_c$ が存在し、以下で与えられる (Subramanian & Barrow 1997; Jedamzik et al. 1996)。

$$k_c^{-2} = \frac{B_{\lambda_c}^2(t_r)}{4\pi\rho_\gamma(t_r)} \int_0^{t_r} \frac{l_\gamma(t')}{a^2(t')} dt', \tag{3}$$

いま t_r は晴れ上がりの時刻で l_γ は CMB 光子の平均自由行程で $\lambda_c = 2\pi/k_c$ である。

2.2 原始磁場と密度揺らぎ

原始磁場はローレンツ力を通して、宇宙の物質密度揺らぎに以下のように影響を与える (Wasserman 1978)。

$$\frac{\partial^2 \delta_\mathrm{c}}{\partial t^2} + 2H(t)\frac{\partial \delta_\mathrm{c}}{\partial t} - 4\pi G(\rho_\mathrm{c}\delta_\mathrm{c} + \rho_\mathrm{b}\delta_\mathrm{b}) = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 \delta_\mathrm{b}}{\partial t^2} + 2H(t)\frac{\partial \delta_\mathrm{b}}{\partial t} - 4\pi G(\rho_\mathrm{c}\delta_\mathrm{c} + \rho_\mathrm{b}\delta_\mathrm{b}) = S(t), \tag{5}$$

いま $H(t)$ はハッブルパラメータを表し、$\rho_{\mathrm{b,c}}$ と $\delta_{\mathrm{b,c}}$ はそれぞれバリオン (b) 及びコールドダークマター (c) の質量密度と密度揺らぎである。ただし式 (4) と (5) について、密度揺らぎが線形領域であり、圧力が無視できるという仮定を置いている。式 (5) における $S(t)$ はローレンツ力に起因する密度揺らぎのソース項であり、

$$S(t) = \frac{\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{B}(t,\mathbf{x}))\times\mathbf{B}(t,\mathbf{x})}{4\pi\rho_\mathrm{b}(t)}, \tag{6}$$

と表される。ここで $\mathbf{B}(t,\mathbf{x})$ はある位置 $\mathbf{x}$ と時刻 t における磁場の強さである。

2.3 原始磁場とガスの温度進化

原始磁場はその散逸機構によってガスの温度進化にも大きく影響を与える。とりわけ中性粒子と電離した粒子との摩擦によって生じる双極性拡散を通じたガスの加熱は非常に重要である。この効果を考慮すると、ガスの温度進化は以下のようにかけて

$$\begin{aligned} \frac{dT_\mathrm{gas}}{dt} = & - 2H(t)T_\mathrm{gas} + \frac{\dot{\delta}_\mathrm{b}}{1+\delta_\mathrm{b}}T_\mathrm{gas} \\ & + \frac{x_\mathrm{i}}{1+x_\mathrm{i}}\frac{8\rho_\gamma\sigma_\mathrm{T}}{3m_\mathrm{e}c}(T_\gamma - T_\mathrm{gas}) + \frac{\Gamma(t)}{1.5k_\mathrm{B}n_\mathrm{b}} \\ & - \frac{x_\mathrm{i}n_\mathrm{b}}{1.5k_\mathrm{B}}[\Theta x_\mathrm{i} + \Psi(1-x_\mathrm{i}) + \eta x_\mathrm{i} + \zeta(1-x_\mathrm{i})], \end{aligned} \tag{7}$$

x_i, m_e, σ_T, k_B, n_b はそれぞれガスの電離度、電子の (静止) 質量、トムソン散乱の断面積、ボルツマン定数、バリオン数密度を表す。右辺の 1 つ目から 3 つ目の項はそれぞれ宇宙膨張、密度揺らぎの成長、ガスと CMB とのコンプトン散乱を意味し、4 つ目の項が原始磁場の双極性散逸による加熱効果、最後の項は自由電子同士の散乱による制動放射、衝突励起、再結合、電離の際に伴う放射冷却機構を表す。ここで定数 $\Theta, \Psi, \eta, \zeta$ はそれぞれ文献 (Fukugita & Kawasaki 1993) で与えられる値を取り入れた。式 (7) 中の加熱率 $\Gamma(t)$ を書き下すと以下のようになり、磁場の強度を一定とした場合、電離度が小さいほど加熱率は大きくなることが理解できる。

$$\Gamma(t) = \frac{|(\nabla\times\mathbf{B}(t,\mathbf{x}))\times\mathbf{B}(t,\mathbf{x})|^2}{16\pi^2\xi\rho_\mathrm{b}^2(t)}\frac{(1-x_\mathrm{i})}{x_\mathrm{i}}, \tag{8}$$

ここで $\xi = 3.5\times10^{13}\ \mathrm{cm}^3\ \mathrm{g}^{-1}\ \mathrm{s}^{-1}$ は中性粒子と荷電粒子間の衝突率を表す (Shu 1991)。また、本研究では数値計算コード `RECFAST` を参考にして、温度進化を解く際に電離度の時間進化も考慮した (Seager et al. 1999, 2000; Chluba et al. 1996)。この際の電離度の時間進化を記述する上では、計算コストを抑えるため水素原子の準位は (1s, 2s+2p, 自由電子) の 3 つを考慮している。また単純化のために天体からの放射や水素以外の原子の存在は無視している。

2.4 SZ angular power spectrum

以上の項 2.2 および 2.3 で述べたように、本研究では原始磁場が引き起こすガスの密度と温度の時間進化を整合的に解いた。この結果として生じるガス

密度および温度の空間的な揺らぎは、いわゆる熱的 SZ 効果を生じて、CMB の温度揺らぎとして観測されるはずである。この項では、ガスの密度および温度と、観測量である CMB の温度揺らぎとの対応関係を式を用いて定量的に説明する。熱的 SZ 効果は、高温ガス中を通過した CMB の光子がコンプトン散乱を通じてエネルギーを受け取り、見かけの温度が上昇する効果である。(正確には、元の黒体スペクトルが高周波数側に移動するため、ある周波数帯で測定すると光子数が増加する。) この時のスペクトル歪みに起因する光子数の増加分は、以下のコンプトンの y-パラメータという値で表される (Sunyaev & Zeldovich 1970),

$$y(\hat{n}) \equiv \frac{k_{\rm B}\sigma_{\rm T}}{m_{\rm e}c^2}\int d\chi\ a(\chi)n_{\rm e}(\chi,\hat{n})[T_{\rm gas}(\chi,\hat{n}) - T_\gamma]. \tag{9}$$

$\hat{n}$ は観測する視線方向ベクトル、χ は共動距離で $a(\chi)$ は χ に対応するスケール因子である。次に、ある周波数 ν で測定した時の CMB の温度揺らぎ (背景の一様温度からのズレ) と、コンプトンの y-パラメータは以下の式で関係づけられる。

$$\frac{\Delta T}{T}(\nu,\hat{n}) = g(\nu)y(\hat{n}). \tag{10}$$

CMB の温度の非等方性を表す物理量として角度パワースペクトルがある。これは、角度 θ 離れた異なる視線方向について温度揺らぎの相関を表す量であり、熱的 SZ 効果がつくる角度パワースペクトルは式 (11) で表される。

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\ell \quad = \quad & \frac{\ell(\ell+1)}{2\pi}\,\frac{(g(\nu)T_\gamma)^2}{4\pi} \\ & \times \int P_\ell(\cos\theta)\langle y(\hat{n})y(\hat{n}')\rangle\ d^2\hat{n}\ d^2\hat{n}'\ .\end{aligned} \tag{11}$$

ここで、$\ell \sim 2\pi/\theta$ はマルチポールという量で、見かけの温度変化の周波数依存性は $x \equiv \dfrac{h\nu}{k_{\rm B}T}$ として $g(\nu) = -4 + \dfrac{x}{\tanh(x/2)}$ であり、P_ℓ はルジャンドル多項式である。

3 Results

計算の結果、磁場が強い領域では、赤方偏移 $z = 10.0$ の時刻でさえガスの温度は双極性散逸により $\mathcal{O}(10^4)$ K 程度まで加熱されることが明らかになった。また、このようなガスの温度が高い領域では密度が低下していることがわかった。このことは、双極性拡散によるガスの加熱率 (8) が密度の二乗に反比例していることで理解できる。

次に、これらガスの密度揺らぎおよび温度揺らぎが引き起こす CMB 温度の角度パワースペクトルを図 1 に示す。図から明らかに、熱的 SZ 効果の角度パワースペクトルは $\ell \sim 10^6$ のスケールに鋭いピークを持っている。このスケールは原始磁場のカットオフスケール及びガスの物理量の空間的な揺らぎの典型的なスケールと対応していることが確認できた。図 1 の原始磁場のモデルは $B_n = 0.5$ nG, $n_B = -1.0$ であるが、これらのパラメータを変化させた場合、カットオフスケールの変化に対応してピークの位置が変化することがわかった。また、カットオフスケールよりも大スケール (ℓ が小さい領域) での角度パワースペクトルはモデルによらず $\mathcal{D}_\ell \propto \ell$ となることがわかった。これは原始磁場をランダムガウス場として生成したことでポアソンノイズのような分布をつくっているためだと考えられる。一方で、ピークのシグナルの大きさはガスの温度進化の非線形性が強く影響するため、解析的に予測することは難しいが、シグナルの強度は原始磁場の強度に依存しているため、$\ell \sim 10^6$ 程度の小スケールの CMB 温度揺らぎが観測されれば、原始磁場のモデルを制限することが可能である。ただし、現実的には高い角度分解能を実現することや、電波銀河などの前景放射を除去することが必要となってくるだろう。

最後に、本研究の問題点について考察する。本研究ではガスの密度揺らぎの時間進化を線形摂動論に基づいて計算したが、$\mathcal{O}(0.01 - 0.1)$ nG 程度の原始磁場が存在する場合は、$L \sim 10$ kpc 程度のスケールでは晴れ上がり直後に数多くの非線形領域が作り出されることが明らかになった。そのため、線形摂動論を用いた見積もりは不十分であるといえよう。ただし、ガスの密度と温度が負の相関を持っており、熱的 SZ 効果への寄与は低密度・高温度の領域が大き

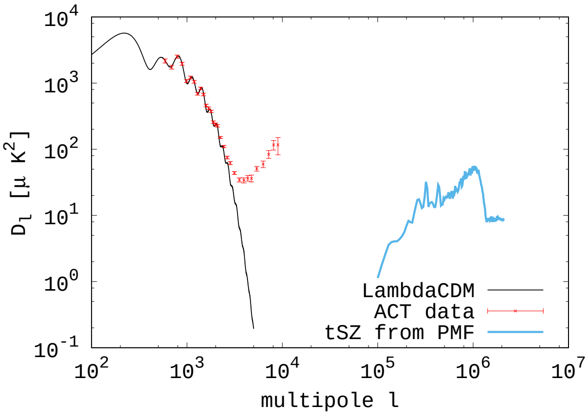

図 1: (青、太実線) 原始磁場が熱的 SZ 効果によって作る CMB 温度の角度パワースペクトル。原始磁場のモデルは $B_n = 0.5$ nG および $n_B = -1.0$ であり、視線方向への積分区間は $10 \lesssim z \lesssim 1000$ である。比較のために、標準宇宙論である ΛCDM モデルを仮定した断熱揺らぎから得られた CMB 角度パワースペクトルを黒い細実線で、アタカマ宇宙論望遠鏡の観測データを誤差棒付きの赤い点で示している。原始磁場の強度を強く制限するためには、現在よりも高い角度分解能を持つ観測が必要であることが示された。

い。したがって熱的 SZ 効果を通じた CMB の温度揺らぎを見積もる際には低密度領域の非線形性を考慮すればよく、本研究では簡単のため密度揺らぎの下限値を $\delta_{\rm b} = -0.9$ と与えることで、密度揺らぎの非線形性をボイド形成として取り入れた。

4 Conclusion

本研究では原始磁場が高赤方偏移 $10 \lesssim z \lesssim 1000$ の銀河間ガスの密度および温度に与える影響を調べた。特に、ローレンツ力による密度揺らぎへの影響と双極性拡散による温度揺らぎに与える影響を考察した。また、これらのガスの物理量の揺らぎが、熱的 SZ 効果を通して引き起こす CMB の温度揺らぎを見積もった。

Acknowledgement

夏の学校の関係者の皆さまに感謝します。

Reference

Chluba, J., Paoletti, D., Finelli, F., & Rubino-Martin, J.-A. (2015). Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 451, Issue 2, p.2244-2250, 451, 2244-2250.

Fukugita, M., & Kawasaki, M. (1993). Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 269, NO. 3/AUG1, P. 563, 1994, 269, 563.

Jedamzik, K., Katalinic, V., & Olinto, A. (1996). Physical Review D, Volume 57, Issue 6, 15 March 1998, Pp.3264-3284, 57, 3264-3284.

Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (1980). Statistical physics. Pt.1, Pt.2. Course of Theoretical Physics, Pergamon International Library of Science, Technology, Engineering and Social Studies, Oxford: Pergamon Press, 1980—c1980, 3rd Rev.and Enlarg. Ed.

Planck Collaboration (2015). Astronomy & Astrophysics, Volume 594, Id.A13, 63 Pp., 594.

Planck Collaboration (2015). Astronomy & Astrophysics, Volume 594, Id.A19, 27 Pp., 594.

Seager, S., Sasselov, D. D., & Scott, D. (1999). The Astrophysical Journal, Volume 523, Issue 1, Pp. L1-L5., 523, L1-L5.

Seager, S., Sasselov, D. D., & Scott, D. (2000). The Astrophysical Journal Supplement Series, Volume 128, Issue 2, Pp. 407-430., 128, 407-430.

Shu, F. H. (1991). The physics of astrophysics. University Science Books.

Subramanian, K., & Barrow, J. D. (1997). Physical Review D, Volume 58, Issue 8, 15 October 1998, Id. 083502, 58(8).

Sunyaev, R. A., & Zeldovich, Y. B. (1970). Astrophysics and Space Science, Volume 7, Issue 1, Pp.3-19, 7, 3-19.

Turner, M. S., & Widrow, L. M. (1988). Physical Review D, 37(10), 2743-2754.

Wasserman, I. (1978). The Astrophysical Journal, 224, 337.

——index

c10

回転する天体による重力波の干渉

森田 拓弥 (神戸大学大学院 理学研究科 M1)

Abstract

Kerr 計量の回転パラメータ a を測定する一つの方法として、レンズ効果と重力波を用いる方法がある。重力波はレンズ効果によって干渉縞を形成することが知られており、レンズ天体の回転によって干渉縞が変化することが期待される。本発表では、回転によって干渉縞の位置が一様にずれることを示した論文 [1] をレビューする。

1 イントロダクション

Einstein の一般相対性理論から導かれるレンズ効果・重力波はともに興味深い天体現象である。
レンズ効果とは、ある天体の作る重力場を通る光が曲がる現象である。像が本来と異なる位置に現れたり、多方向からの光が観測される [2]。重力波は時空の摂動 ($g_{\mu\nu} = g^{(B)}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$) で表される波である [3]。重力波は光と同じくヌルベクトルなので、重力レンズ効果を受けることが知られている。重力波はレンズ効果を受けると干渉縞を形成する。この干渉縞が、回転パラメータ a を測定するのに有用であると考えた。

本発表は論文 [1] に基づき、回転による干渉縞の位置の変化を導く。2 章で波動方程式を解き、重力波の表式を得る。3 章で回転するレンズ天体によるレンズ効果を導き、重力波との相互作用を求める。4 章でまとめと今後の展望について触れる。

2 Fresnel-Kirchhoff の回折公式

この章では重力波の回折公式を導く。

重力波 $\mathcal{E}$ は波動方程式 $\partial_\mu \partial^\mu \mathcal{E} = 0$ を満たす。重力波の時間依存性が $\mathcal{E} \propto \exp(-i\omega t)$ であることを用いてこれを解くと、観測される重力波 $\mathcal{E}_{obs}$ の表式を得る。

$$\mathcal{E}_{obs} = -\frac{1}{4\pi}\oint_{\Sigma_1} [(\mathcal{E}_2)_2^* \vec{\nabla}\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_1(\vec{\nabla}\mathcal{E}_2)^*] \cdot d\vec{S}$$

ここで現れた $\oint_{\Sigma_1} d\vec{S}$ は波が回折する面についての表面積分、$\mathcal{E}_{obs}$ は 2 つの独立解 $\mathcal{E}_1$、$\mathcal{E}_2$ の足し合わせとなる。これらに球面波解 $\propto \exp(iS)/r$ を適用し、

$$\mathcal{E}_{obs} = \frac{\omega A_0}{2\pi i D_{SL} D_L}\int_\Sigma d^2\boldsymbol{\xi} e^{i(S_1+S_2)} \tag{1}$$

の表式を得る。これが Fresnel-Kirchhoff の回折公式である。ただし A_0 は任意定数、S_i はそれぞれ波源からレンズ、レンズから観測者への経路に沿った位相関数であり、dS は積分範囲 Σ を持つレンズ平面での 2 次元座標 $\boldsymbol{\xi}$ で置き換えた。次章では、Kerr 計量における具体的な解を求める。

3 回転する天体によるレンズ効果を受けた重力波

この章では、レンズ効果を受けた重力波が干渉縞を形成することを示し、回転による位置の変化を導く。はじめに考察する系の模式図を図 1 に載せる。

3.1 位相関数と回転

この節では、重力波が伝播する時間を計算し、波の位相関数 $S = \omega \times t$ を求める (ω は角振動数)。そこで $ds^2 = 0$ を 3 次元直交座標で表記した Kerr 計量

$$0 = ds^2 \sim -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1 + \frac{2m}{r}\right)dz^2 + \frac{4amy}{r^3}dzdt$$

について解く。ただし重力ポテンシャルが十分に小さいので m/r の 1 次までを考慮する。r はレンズ中心からの距離、m はレンズ天体の質量、$\vec{a}(= \vec{J}/m)$ はレン

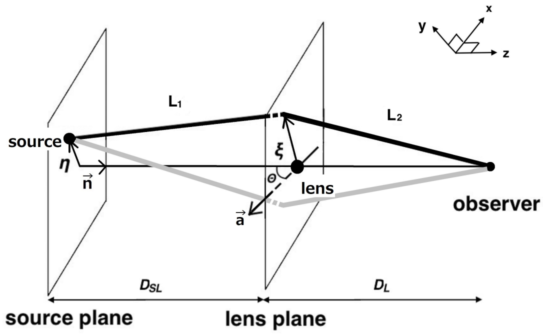

図 1: Kerr 時空におけるレンズ効果の模式図。レンズ天体から観測者方向を基準軸 (z 軸) とし、z 方向単位ベクトルを $\vec{n}$ と呼ぶ。レンズ天体、波源が位置する z 一定の各 xy 平面をそれぞれレンズ平面、波源平面と呼ぶ。波源平面からレンズ平面、レンズ平面から観測者までの距離をそれぞれ D_L、D_{SL} と書く。太線は波の伝播経路を表し、L_1、L_2 は波源からレンズ平面、レンズ平面から観測者までの距離を表す。また太字は 2 次元座標で、$\boldsymbol{\xi}$、$\boldsymbol{\eta}$ が (z=一定の) 各平面での基準線からの位置である。3 次元直交座標軸は $\boldsymbol{\xi}/\!/\ \boldsymbol{\eta}$ の方向を y 軸、yz 平面に垂直な方向を x 軸とする。質量 m は典型的な ξ の値より十分に小さいので重力ポテンシャル m/r は 1 より小さく、重力波がほぼ直線的に伝播し、レンズ平面上の 1 点で回折が起こると見なすことができる。曲がりの大きさが直進方向に対して十分小さいとして、$x=0$、$y=|\boldsymbol{\xi}|$ の条件を適用する。$\vec{a}$ はレンズ天体の (単位質量あたりの) 角運動量で、z 軸とのなす角を Θ とする。

ズ天体の持つ単位質量あたりの角運動量である。その大きさは、光の伝播方向に射影した量 $a=\vec{n}\cdot(\vec{a}\times\vec{r})$ である。万有引力定数 G と光速 c は 1 としている。

dt を dz の関数として積分すると、波源から観測者までを伝播する時間 t_* は

$$t_* = (L_1+L_2) + 4m\ln\left[\frac{L_1+L_2}{\xi}\right] + \frac{4am}{\xi^2}$$

となる [4]。レンズ天体の回転による寄与は第 3 項に現れる。

波源から観測者への直線距離は $\sqrt{D_S^2+|\boldsymbol{\eta}|^2}$ である。したがって、レンズ天体がある場合とない場合との重力波の位相差は

$$\begin{aligned} S =& \omega t_* - \omega\sqrt{D_S^2+|\boldsymbol{\eta}|^2} \\ =& \omega\left[\frac{|D_S\boldsymbol{\xi}-D_L\boldsymbol{\eta}|^2}{2D_{SL}D_LD_S} + 4m\ln\left(\frac{1}{\xi}\right)\right. \\ & \left. +4m\frac{\boldsymbol{\xi}}{\xi^2}\cdot(\vec{n}\times\vec{a})\right] \end{aligned} \tag{2}$$

で与えられる。さらにスケール変換 $\boldsymbol{y}\equiv\frac{\boldsymbol{\xi}}{\xi_0}$, $\boldsymbol{u}\equiv\frac{D_L}{D_S}\frac{\boldsymbol{\eta}}{\xi_0}$ (ξ_0 は規格化定数) を行って

$$\begin{aligned} S &= 4m\omega\left[\frac{1}{2}|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{u}|^2 - \ln y + \frac{\boldsymbol{y}}{y^2}\cdot(\vec{n}\times\frac{\vec{a}}{\xi_0})\right] \\ &\equiv f\cdot T(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}) \end{aligned}$$

と整理される。ただし、$f\equiv 4m\omega$, $\boldsymbol{\alpha}\equiv\vec{n}\times\frac{\vec{a}}{\xi_0}$, $T(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})\equiv\frac{1}{2}|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{u}|^2-\ln y+\frac{\boldsymbol{y}}{y^2}\cdot\boldsymbol{\alpha}$ でそれぞれ定義される。これを用いて (1) 式は

$$\mathcal{E}_{obs} \to \frac{\mathcal{E}_0 f}{2\pi i}\int d^2\boldsymbol{y}\ e^{ifT(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})}$$

と表される。これがレンズ天体がある場合の重力波の表式である。ただし $\mathcal{E}_0\equiv A_0/(D_L+D_{SL})$ はレンズ天体がない場合の重力波である。$|\boldsymbol{\alpha}|\ll 1$ を仮定すると $T(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})$ は

$$T(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}) \sim \frac{1}{2}|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{u}|^2 - \ln|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\alpha}|$$

と近似される。したがって $T(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})$ は座標の並進変換

$$\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y}-\boldsymbol{\alpha},\ \tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}-\boldsymbol{\alpha} \tag{3}$$

を用いて整理される。つまり回転するレンズ天体によるレンズ効果は

$$\begin{cases} T(\tilde{\boldsymbol{y}},\tilde{\boldsymbol{u}}) = \frac{1}{2}|\tilde{\boldsymbol{y}}-\tilde{\boldsymbol{u}}|^2 - \ln\tilde{y} \\ \mathcal{E}_{obs}(\tilde{\boldsymbol{u}}) = \frac{\mathcal{E}_0 f}{2\pi i}\int d^2\tilde{\boldsymbol{y}}e^{ifT(\tilde{\boldsymbol{y}},\tilde{\boldsymbol{u}})} \end{cases} \tag{4}$$

で表される。一方、回転していないレンズ天体によるレンズ効果は

$$\begin{cases} T(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}} \sim \frac{1}{2}|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{u}|^2 - \ln|\boldsymbol{y}| \\ \mathcal{E}_{obs}(\boldsymbol{u})|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}} = \frac{\mathcal{E}_0 f}{2\pi i}\int d^2\boldsymbol{y}\ e^{ifT(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}}} \end{cases} \tag{5}$$

で表される。式 (4)(5) を比較すると、座標以外が全く同じであることがわかる。したがって干渉縞の位置は、回転によって $\boldsymbol{\alpha}$ だけ一様にずれることが結論づけられる。これが本稿で最も重要な帰結である。

3.2 干渉

この節では、得られた重力波 $\mathcal{E}_{obs}$ が干渉することを導く。まず $\tilde{\boldsymbol{u}}$ によって決まる 2 つの $\tilde{\boldsymbol{y}}$ が存在することを示し、各経路での $\mathcal{E}_{obs}$ を求める。

伝播経路に対して波長は十分短いので、Fermat 原理を用いて $\tilde{\boldsymbol{y}}$ と $\tilde{\boldsymbol{u}}$ の関係を評価することができる。重力波は位相の停留点、つまり $T(\tilde{\boldsymbol{y}}, \tilde{\boldsymbol{u}})$ の $\tilde{\boldsymbol{y}}$ 微分が 0 となる 2 つの経路を伝播する。

$$\tilde{\boldsymbol{y}} - \tilde{\boldsymbol{u}} - \frac{\tilde{\boldsymbol{y}}}{|\tilde{\boldsymbol{y}}|^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \tilde{\boldsymbol{y}}_{\pm} = \frac{\tilde{\boldsymbol{u}}}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{\tilde{u}^2}}\right) \tag{6}$$

ただし $\tilde{u} \equiv |\tilde{\boldsymbol{u}}|$ である。このとき観測される重力波は、$\tilde{\boldsymbol{y}}_{\pm}$ に対応する 2 つの重力波の位相差 $f\Delta T(\tilde{u}) \equiv f\,[T(\tilde{\boldsymbol{y}}_{-}) - T(\tilde{\boldsymbol{y}}_{+})]$ を用いて

$$\left|\frac{\mathcal{E}_{obs}}{\mathcal{E}_0}\right|^2 = \frac{\tilde{u}^2 + 2 + 2\sin(f\Delta T(\tilde{u}))}{\tilde{u}\sqrt{\tilde{u}^2+4}} \tag{7}$$

と書ける。分子第 3 項が同一波源から現れた 2 つの重力波による干渉を表す。この結果は、観測される強度が波源の位置 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ に依存して変化することを示している。逆に波源と観測者を入れ替えることで、観測者の位置に依存した干渉縞が現れることが結論づけられる (図 2)。

最後に回転による干渉縞の位置の変化を見積もる。位置のずれの大きさは

$$|\boldsymbol{\alpha}| \to \frac{D_S}{D_{SL}} a \sin\Theta \tag{8}$$

で与えられることがわかる。

3.3 典型例

天の川銀河中心にあるブラックホールをレンズ天体として、位置のずれを見積もる。重力波の波長は $\lambda = 3\times10^8$cm=1kHz であり、レンズ天体までの距離を $D_L = 8$kpc$=2.4\times10^{23}$cm、天の川銀河中心のブラックホールの質量を $m = 2\cdot10^8 M_\odot = 3\times10^{13}$cm とする。このとき回転の寄与は $\alpha = (a/\xi_0)\sin\Theta \leq 6\times10^{-6}$ と十分小さいので、式 (4) 以降の議論が適用できる。波源からレンズまでが十分に長い場合、

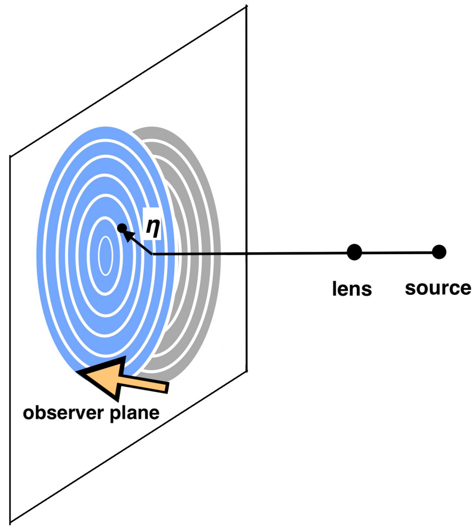

図 2: 観測者平面に現れる干渉縞の模式図。レンズ天体が回転している場合としていない場合を比較しており、干渉縞の位置がずれることを示している

$D_{SL}, D_S \to \infty$ より位置のずれは $a\sin\Theta$ である。したがって、パラメータを $a = 0.1m, \Theta = \pi/2$ と仮定すると、

$$a\sin\Theta \sim 0.2\mathrm{AU} \tag{9}$$

と計算される。この値を検出することができれば、回転パラメータを測定することができる。

4 結論

本発表では、レンズ効果による重力波の干渉縞について議論を行った。その結果、レンズ天体の回転によって干渉縞の位置が一様にずれることがわかった。したがって、このずれから Kerr 計量の回転パラメータを測定できることが示唆された。干渉縞の位置のずれが理論的に導かれたので、ある値を得た場合にどのようなモデル (質量や回転パラメータ、回転軸など) が想定されるかについて議論することが今後の課題である。

謝辞

旅費等のサポートをいただいた神戸大学宇宙論研究室、ご指導いただいた早田先生をはじめ研究室の皆様に感謝します。

参考文献

[1] Christian Baraldo, Akio Hosoya, Takahiro T Nakamura *Gravitationally induced interference of gravitational waves by a rotating massive object* Phys. Rev. D59 (1999) 083001
[2] Scott Dodelson *GRAVITATIONAL LENSING* (CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2017)
[3] Michele Maggiore *Gravitational Waves VOLUME1: THEORY AND EXPERIMENTS* (OXFORD UNIVERSITY PRESS, 2008)
[4] Emmanuele Battista, et al. *Quantum time delay in the gravitational field of a rotating mass* Class.Quant.Grav. 34 (2017) no.16, 165008

——index

c11

超ハッブルスケールで成長する曲率ゆらぎから 2 次的に誘起される重力波

富川　慶太郎 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

2015 年、重力波干渉計 aLIGO によって人類史上初めて重力波が観測され、ついに重力波天文学の時代が到来した。重力波は電磁波とは異なり晴れ上がり以前の宇宙の姿を直接捉えることができるので、初期宇宙を探る上でも重要な役割を果たす。本発表では、宇宙初期に超ハッブルスケールになった曲率ゆらぎが成長することで、2 次的に重力波が生成されることを示す。さらに、2 次の重力波のスペクトルを求めることで、将来の観測計画において検出される可能性があるかを探る。

1 Introduction

宇宙初期にはスカラー型ゆらぎ (密度ゆらぎ) とテンソル型ゆらぎ (重力波) が生成される。線形ゆらぎでは計量の量子ゆらぎが 1 次の重力波となって伝播する。一方、ゆらぎの 2 次ではスカラー型ゆらぎによって 2 次の重力波が誘起される [1][2]。これまでの研究では、2 次の重力波はゆらぎの 2 次のオーダーなので 1 次に比べ小さいと考えられていた。ゆえに、これまでの研究では 1 次の重力波の寄与のみを計算しており、2 次の重力波が観測される可能性については議論されてこなかった。しかし、インフレーションモデルの中には超ハッブルスケールでスカラー型ゆらぎが増幅するモデルが存在する [3]。これは 2 次の重力波が 1 次よりも大きくなり得るモデルが存在することを示唆する。 この場合はこれまで予言されてきた 1 次の重力波よりも先に、2 次の重力波が観測される。本研究では 2 次の重力波が増幅されるインフレーションモデルを取り扱い、パワースペクトルを求めることで 2 次の重力波の観測可能性を予言し、インフレーションモデルを制限する手段として 2 次の重力波が妥当かどうかを検証する。

2 2 次の重力波の運動方程式

近年、人類は重力波観測という全く新しい宇宙の観測手法を実現した。さらに、将来の観測計画として宇宙マイクロ波背景放射の B モード偏光からインフレーション起源の重力波を捉える LiteBIRD 衛星や、宇宙での正確な「時計」として振る舞う電波パルサーを用いたパルサータイミング観測、初期宇宙起源の重力波をレーザー干渉計で直接検出する DECIGO 計画などが進められている。これらはそれぞれ異なる周波数帯の重力波を観測する。重力波のスペクトルを求める各観測の感度と比較することで観測可能性を議論できる。

ここでは重力場と単一のスカラー場からなる作用

$$S = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left[\frac{M_{\rm Pl}^2}{2}R + P(\phi, X)\right] \tag{1}$$

$$X := -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$$

を考える。$P(\phi, X)$ はスカラー場とその運動項からなる任意の関数である。これを ADM metric

$$\mathrm{d}s^2 = -N^2\mathrm{d}^2t + \gamma_{ij}\left(\mathrm{d}x^i + N^i\mathrm{d}t\right)\left(\mathrm{d}x^j + N^j\mathrm{d}t\right) \tag{2}$$

のもとで計算すると、

$$S = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{\gamma}N\left[\frac{M_{\rm Pl}^2}{2}\left({}^{(3)}R + \frac{1}{N^2}\left(E_{ij}E^{ij} - E^2\right)\right) + P\left(\phi(t), X(t, N)\right)\right] \tag{3}$$

となる。ここで

$$E_{ij} := \frac{1}{2}\left(\dot{\gamma}_{ij} - N_{i|j} - N_{j|i}\right) \tag{4}$$

である。ここで、$\delta N, \chi, \zeta, h_{ij}$ を一様等方時空からの摂動量として

$$N = 1 + \delta N, \quad N_i = \partial_i\chi, \quad \gamma_{ij} = a^2e^{2\zeta}\left(e^h\right)_{ij} \tag{5}$$

とする。ただし、$h^i_i = \partial_i h^{ij} = 0$ である。このもとで作用を摂動の三次まで展開して h_{ij} で変分すると 2 次の重力波の運動方程式が得られる。これを重力波のモード $h^{\pm}_{\boldsymbol{k}}$ の基底テンソルを $e^{\pm}_{ij}$ としてフーリエ変換すると

$$h^{\pm\prime\prime}_{\boldsymbol{k}} + 2\mathcal{H}h^{\pm\prime}_{\boldsymbol{k}} + k^2h^{\pm}_{\boldsymbol{k}} = e^{\pm lm}S_{lm}\left(\boldsymbol{k}\right) =: S^{\pm}\left(\boldsymbol{k}\right) \tag{6}$$

となる。ここで

$$S^{\pm}(\boldsymbol{k}) = -\int \frac{\mathrm{d}^3\tilde{\boldsymbol{k}}}{(2\pi)^{3/2}} e^{\pm}_{lm}(\boldsymbol{k},\tilde{\boldsymbol{k}})\tilde{k}^l\tilde{k}^m$$

$$\Bigg[\left(2-\frac{1}{\mathcal{H}^2}\tilde{k}^2\right)\zeta_{\tilde{\boldsymbol{k}}}\zeta_{\boldsymbol{k}-\tilde{\boldsymbol{k}}} - \left(\frac{2}{\mathcal{H}}+\frac{a^2\Sigma}{M_{\mathrm{Pl}}^2\mathcal{H}^3}\right)\zeta'_{\tilde{\boldsymbol{k}}}\zeta_{\boldsymbol{k}-\tilde{\boldsymbol{k}}}$$

$$-\frac{a^2\Sigma}{M_{\mathrm{Pl}}^2\mathcal{H}^3}\frac{\tilde{k}^2}{|\boldsymbol{k}-\tilde{\boldsymbol{k}}|^2}\zeta_{\tilde{\boldsymbol{k}}}\zeta'_{\boldsymbol{k}-\tilde{\boldsymbol{k}}}$$

$$+\left\{-\frac{2}{\mathcal{H}^2}-\left(\frac{6a^2\Sigma}{M_{\mathrm{Pl}}^2\mathcal{H}^2}+\frac{a^4\Sigma^2}{M_{\mathrm{Pl}}^4\mathcal{H}^4}\right)\frac{1}{|\boldsymbol{k}-\tilde{\boldsymbol{k}}|^2}\right\}\zeta'_{\tilde{\boldsymbol{k}}}\zeta'_{\boldsymbol{k}-\tilde{\boldsymbol{k}}}$$

$$+\frac{2}{\mathcal{H}^2}\zeta''_{\tilde{\boldsymbol{k}}}\zeta_{\boldsymbol{k}-\tilde{\boldsymbol{k}}}+\frac{2a^2\Sigma}{M_{\mathrm{Pl}}^2\mathcal{H}^3}\frac{1}{|\boldsymbol{k}-\tilde{\boldsymbol{k}}|^2}\zeta''_{\tilde{\boldsymbol{k}}}\zeta'_{\boldsymbol{k}-\tilde{\boldsymbol{k}}}\Bigg] \tag{7}$$

$$\Sigma := XP_X + 2X^2P_{XX}, \quad P_X := \frac{\partial P}{\partial X} \tag{8}$$

である。この方程式は

$$g''_k + 2\mathcal{H}g'_k + k^2 g_k = \delta\left(\eta-\tilde{\eta}\right) \tag{9}$$

を満たすグリーン関数 g_k を用いて解くことができ統計平均を計算すると

$$\left\langle h^{\pm}_{\boldsymbol{k}}(\eta)h^{\pm}_{\boldsymbol{K}}(\eta)\right\rangle = \int^{\eta}\mathrm{d}\tilde{\eta}_1\int^{\eta}\mathrm{d}\tilde{\eta}_2 g_k(\eta;\tilde{\eta}_1)g_K(\eta;\tilde{\eta}_2) \left\langle S^{\pm}(\boldsymbol{k},\tilde{\eta}_1)S^{\pm}(\boldsymbol{K},\tilde{\eta}_2)\right\rangle \tag{10}$$

となる。これをパワースペクトル $P_h(k,\eta)$ の定義

$$\left\langle h^{\pm}_{\boldsymbol{k}}(\eta)h^{\pm}_{\boldsymbol{K}}(\eta)\right\rangle = \frac{2\pi^2}{k^3}P_h(k,\eta)\delta\left(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{K}\right) \tag{11}$$

に代入して $P_h(k,\eta)$ が求まる。曲率ゆらぎ ζ の時間依存性は線形摂動の方程式から得られ、これを (10) に代入して積分することでパワースペクトルが求まる。

3 今後の予定

現在、(7),(10),(11) 式からパワースペクトルの表式を求めた段階である。(7) 式にはスカラー型ゆらぎの時間微分の項が含まれている。単純なインフレーションモデルでは超ハッブルスケールでスカラー型ゆらぎが時間的に一定になるので微分の項は寄与しない。しかし、今回考えるモデル [3] では超ハッブルスケールでもスカラー型ゆらぎが成長するので微分の項の寄与があり 2 次の重力波が増幅される可能性がある。実際の計算にあたっては (7) 式の 2 乗の統計平均を計算しなければならないので、合計 36 項の統計平均を求めなければならない。そこで微分の寄与が最も顕著な項をまず計算して、2 次の重力波が大きくなり観測される可能性があるかかどうかを検討する。

Reference

[1] Kishore N. Ananda, Chris Clarkson, and David Wands, *Cosmological gravitational wave background from primordial density perturbations*, Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology **75** (2007), no. 12, 1–9.

[2] Daniel Baumann, Paul Steinhardt, Keitaro Takahashi, and Kiyotomo Ichiki, *Gravitational wave spectrum induced by primordial scalar perturbations*, Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology **76** (2007), no. 8, 1–13.

[3] Shin'Ichi Hirano, Tsutomu Kobayashi, and Shuichiro Yokoyama, *Ultra slow-roll G inflation*, Physical Review D **94** (2016), no. 10.

——index

c12

重力波のパラメータ推定

根岸 諒 (新潟大学大学院 自然科学研究科)

Abstract

アインシュタインによって約 100 年前に予言された重力波は 2015 年，世界で初めて検出に成功した．重力波信号は非常に微弱であるため，大きなノイズの中から重力波信号を取り出すことが必要である．そのためには，信号対雑音比（SNR）を最大化する Matched Filter が最も効率的な手法と言われている．Matched Filter では，観測データと重力波波形の相関を取るため，予想される重力波波形データのテンプレートが必要であるが，波形は重力波を出す天体の質量，スピン，軌道など複数のパラメータに依存しており，そのテンプレートは膨大なものとなる．また，観測データに重力波信号が含まれていることが分かったとしても，その天体のパラメータを精度良く推定することは単純ではない．本研究では，重力波観測データから重力波天体のパラメータを推定する方法として，ベイズ推定について紹介する．

1 Introduction

重力波信号 $h(t)$ は非常に微弱であるため，大きなノイズ $n(t)$ の中から重力波信号を取り出すことが必要である．観測される重力波を精度よく予測できる場合は，SNR を最大化する Matched Filter 法が最も効率的な手法と言われている．Matched Filter 法では，観測データ $s(t) = h(t) + n(t)$ と重力波波形の相関を取るが，重力波波形は重力波源の多数のパラメータに依存しているため，膨大な予想波形のテンプレートが必要になる．また，観測データに重力波信号が含まれていることが分かったとしても，その天体のパラメータを精度良く推定することは単純ではない．

普通，統計学は頻度論の考え方であるが，これには非常に多くのデータが必要である．しかし，重力波は今の所 6 回しか観測されておらず，頻度論で扱えるほどのデータ数は確保できていない．そこで，頻度論とは逆の考え方をするベイズ統計を用いることにする．ベイズ統計はパラメータを確率変数，観測データを定数として扱う統計的手法である．パラメータを確率変数にしたことで一度の観測でも重力波源のパラメータ推定が可能となる．

2 Matched Filter

Matched Filter 法での SNR は，$h(t)$ のフーリエ変換 $\tilde{h}(f)$ と検出器の感度を示すノイズ・スペクトル密度 $S_n(f)$ を用いて，以下のように定義される．

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 = 4\int_0^\infty df \frac{|\tilde{h}(f)|^2}{S_n(f)} \tag{1}$$

重力波の波形には，重力波源が連星の場合，位置 (角度 2 つ)，軌道法線方向 (角度 2 つ)，検出時間，位相，2 つの天体の質量，スピン (6 つ) の計 15 個のパラメータが含まれている．観測データの中に重力波が存在するかどうか，また，存在する場合は，その重力波源のパラメータが何であるかを推測するには，ベイズ統計の手法が用いられている．

3 ベイズ統計

ベイズ統計には事前確率と事後確率がある．事前確率はデータ取得前のパラメータの確率，事後確率はデータ入手後のパラメータの確率である．データ取得ごとに情報を更新し，事後確率を事前確率にして新たな事後確率を得ることでより尤もらしい推定値が得られる．パラメータの組を $\theta = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_N)$ としてベイズの定理は

$$p(\theta|x) = \frac{p(x|\theta)p(\theta)}{p(x)} \tag{2}$$

と書かれる．$p(\theta)$ はデータ取得前に推定される，パラメータが θ をとる確率密度で，事前分布 (事前確率) と呼ばれる．$p(x|\theta)$ は，パラメータが θ であるときに観測値 x が得られる確率密度で，データ入手後は θ の尤度と呼ばれる．また，$p(\theta|x)$ は，観測値が x のときに θ である確率密度で，事後分布 (事後確率) と呼ばれる．

4　最尤推定

はじめに，事前確率がフラット，つまり，重力波信号は存在し，パラメータが θ をとる確率は一様であると仮定する．事前確率がフラットであれば尤度を最大にすることで事後確率を最大にすることができる．

$$\text{事後確率} \propto \text{尤度} \times \text{事前確率} \tag{3}$$

尤度関数 Λ は未知の真であるパラメータを θ_t，規格化定数 $\mathscr{N}$ として

$$\Lambda(s|\theta_t) = \mathscr{N} \exp\left\{(h_t|s) - \frac{1}{2}(h_t|h_t)\right\} \tag{4}$$
$$h_t \equiv h(\theta_t)$$

と書かれる．(|) は以下で定義されるスカラー積である．

$$(A|B) \equiv \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} df \frac{\tilde{A}^*(f)\tilde{B}(f)}{\frac{1}{2}S_n(f)} \tag{5}$$

式 (4) の最大は θ 微分がゼロになる θ を求めれば良い．

5　ベイズ推定

フラットでない事前確率 $p^{(0)}(\theta_t)$ の場合，事後確率を最大にするのは最尤推定のように単純ではなくなる．

$$p(\theta|s) = \mathscr{N} p^{(0)}(\theta_t) \exp\left\{(h_t|s) - \frac{1}{2}(h_t|h_t)\right\} \tag{6}$$

それに対して，ベイズ推定ではパラメータを確率変数としたので期待値で表すことができる．パラメータを $i = 1 \sim N$ でラベリングして

$$\hat{\theta}^i_B(s) \equiv \int d\theta\ \theta^i p(\theta|s) \tag{7}$$

誤差行列は

$$\Sigma^{ij}_B = \int d\theta\ [\theta^i - \hat{\theta}^i_B(s)][\theta^j - \hat{\theta}^j_B(s)]p(\theta|s) \tag{8}$$

と書かれる．

6　Discussion

最尤推定は事前確率がフラットの場合に事後確率を最大化した．しかし，事前確率を更新してフラットではなくした場合には，事後確率の最大化は複雑化する．しかし，ベイズ推定ではパラメータを期待値として求めるので，事後確率とパラメータの積の積分を実行するだけで，最大化を考えずに済む．また，観測数が少なくてもパラメータを推定できる点で重力波には非常に適した推定方法である．

しかし，パラメータの期待値 (式 (7)) に含まれる事後確率が式 (6) で見たように，周波数空間での積分で表されるスカラー積で書かれており，さらに，連星の場合で 15 次元ものパラメータ空間での積分をしなければならず計算コストは膨大なものとなる．よって，ベイズ推定は計算コストを考慮して使用するべきである．

Reference

Michele Maggiore 2008, "Gravitational Waves VOLUME 1: THEORY AND EXPERIMENTS", OXFORD UNIVERSITY PRESS

——index

c13

重力波解析における Matched Filter について

松崎 和紘 (新潟大学大学院 自然科学研究科)

Abstract

2015 年，LIGO によりはじめて重力波が直接観測され，重力波天文学の幕開けとなった．重力波の観測は，一般相対性理論の検証などに利用されることが期待されている．しかし，重力波の信号は観測装置のノイズに比べてはるかに小さく，その検出は非常に困難である．このような小さな信号を大きなノイズの中から見つけ出す手法として良く用いられるのが，Matched Filter である．これは，理論的に予想された重力波の波形を用いて，信号対雑音比 (SNR) を最大にするフィルターである．本発表では，Matched Filter の原理を紹介する．

1 Introduction

2015 年，LIGO は人類史上初めて重力波の直接観測に成功した (GW150914)．これはブラックホール連星の合体によって発生した重力波で，その振幅は最大で 10^{-21} 程度であった．これは地球と太陽との距離を水素原子 1 個分変化させる程度の大きさである．このように非常に小さな重力波信号は，それより大きなノイズに埋もれ，普通には見えなくなってしまう．そこで，ここでは検出器の観測データにフィルターをかけることにより，SNR(信号対雑音比) を最大にすることを考える．その結果得られるフィルターが Matched Filter である．

2 Matched Filter の原理

波形が $h(t)$ で表される重力波がやってきたとする．観測される信号 $s(t)$ は一般に重力波信号 $h(t)$ とノイズ $n(t)$ との和である．

$$s(t) = h(t) + n(t) \tag{1}$$

この信号に対し，フィルター関数 $K(t)$ でフィルターをかけたとする．

$$\hat{s} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt\, s(t)K(t) \tag{2}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} df \tilde{s}(f)\tilde{K}^*(f) \tag{3}$$

ここで ˜ はフーリエ変換を表す．

ここでの目標は SNR を最大にする $K(t)$ を見つけることである．今，SNR をアンサンブル平均 $\langle \cdots \rangle$ を用いて，

$$\mathrm{SNR} \equiv \frac{S}{N} \tag{4}$$

$$S \equiv \langle \hat{s} \rangle \tag{5}$$

$$N^2 \equiv \left\langle \hat{s}^2 \right\rangle_{h=0} \tag{6}$$

と定義すると，

$$\frac{S}{N} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} df \tilde{h}(f)\tilde{K}^*(f)}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} df \frac{1}{2} S_n(f)|\tilde{K}(f)|^2\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{7}$$

となる．$S_n(f)$ は noise spectral density と呼ばれ，次のように定義される．

$$\frac{1}{2}S_n(f) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \, \langle n(t+\tau)n(t) \rangle \, e^{2\pi i f \tau} \tag{8}$$

$S_n(f)$ は検出器の感度の特性を表す量である．一般に $S_n(f)$ は時間 t に依存するが，ここでは，ノイズの定常性を仮定して，周波数 f だけの関数としている．

式 (7) は，実関数をベクトルとして扱い，そこにスカラー積を定義することで簡単にすることができる．実関数 $A(t), B(t)$ に対して，スカラー積 $(A|B)$ を次のように定義する．

$$(A|B) \equiv \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{\infty} df \frac{\tilde{A}^*(f)\tilde{B}(f)}{\frac{1}{2}S_n(f)} \tag{9}$$

$$= 4\,\mathrm{Re} \int_{0}^{\infty} df \frac{\tilde{A}^*(f)\tilde{B}(f)}{S_n(f)} \tag{10}$$

このとき，式 (7) は

$$\tilde{u}(f) \equiv \frac{1}{2}S_n(f)\tilde{K}(f) \tag{11}$$

で定義される実関数 $u(t)$ を用いて，

$$\frac{S}{N} = \frac{(u|h)}{(u|u)^{\frac{1}{2}}} \tag{12}$$

と書ける．すなわち，SNR は重力波信号 $h(t)$ と単位ベクトル

$$\frac{u(t)}{(u|u)^{\frac{1}{2}}} \tag{13}$$

とのスカラー積である．したがって，SNR が最大になるのは $u(t)$ と $h(t)$ とが比例関係になるときであり，式 (11) より，

$$\tilde{K}(f) = \mathrm{const}\,\frac{\tilde{h}(f)}{S_n(f)} \tag{14}$$

となる．これが Matched Filter の定義である．この時 SNR は最大値

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 = 4\int_0^\infty df\,\frac{|\tilde{h}(f)|^2}{S_n(f)} \tag{15}$$

をとる．

3 Matched Filter による重力波の検出

Matched Filter を用いて重力波の検出を行うには，理論的に予想された重力波波形のテンプレートが必要である．テンプレートは重力波源までの距離や波源の質量などのパラメーターによって記述される．

式 (14) において $h(t)$ を理論波形 $h_{\mathrm{template}}(t)$ に置き換えたもので，検出器の信号をフィルタリングする．

$$\hat{s}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} df\,\frac{\tilde{s}(f)\tilde{h}^*_{\mathrm{template}}(\theta;f)}{S_n(f)} \tag{16}$$

ここで，θ はテンプレートのパラメーターを表す．いろいろなパラメーターの理論波形に対して式 (16) を用いて SNR を計算し，それが決められた閾値を超えれば，重力波イベントの候補として記録される．また，重力波信号のパラメーターは，SNR を最大にする θ の値として推定される．

偶然に理論波形と相関の良いノイズがあった場合，重力波信号がないにもかかわらず，大きな SNR が得られる．ガウス雑音は SNR があまり大きくならないため，閾値の設定によりほとんど除去することができる．それに対して非ガウス雑音は SNR が大きくなる場合があり，これを除去するために複数の検出器とコインシデンスをとるなどの操作が行われる．

4 Discussion

Matched Filter は SNR が最大になるフィルターであり，コンパクト連星合体による重力波など，波形が理論的によく予測されている場合には，重力波信号を取り出すための最適な方法である．それに対して，超新星爆発などのように重力波の発生機構が複雑な場合，その波形の予測は困難である．そのため，このような重力波に対して Matched Filter は有効ではない．

Matched Filter は非常に有用な解析手法であるが，対応できる重力波は限られているため，他の解析手法と併用されなければならない．

Reference

Michele Maggiore, *Gravitational Waves Volume1: Theory and Experiments*, Oxford University Press, New York, 2008

——index

c14

インフレーションと原始ゆらぎの non-Gaussianities

竹内　啓人 (神戸大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙初期に起こった宇宙の加速度的な膨張期を予言するインフレーション理論は、CMB 観測などの観測事実とよく合うことから強く支持されている。インフレーション理論には様々なモデルが存在し、その特定は宇宙論研究において重要な課題である。インフレーションにおける重要な物理量として、インフレーション中に生成、拡大される揺らぎがある。私はインフレーション揺らぎに関しての論文 [1] について Review を行った。本発表ではその論文に沿って、インフレーションのメカニズムと、インフレーション中のスカラー場や時空のガウス型の揺らぎと観測との一致を紹介した後に非ガウス性について紹介する。特に非ガウス性については、単一のスカラー場によるインフレーションモデルを用いて、インフラトンの三点自己相互作用から現れる非ガウス性を紹介する。また、低エネルギーの有効理論の範囲で対称性から許される項から様々な非ガウス性が得られる事を紹介する。

1　イントロダクション

FLRW 計量の中に名前を連ねる、Georges Henri Lemaitre などが提唱したとされるビッグバン理論は、高温熱的な状態から宇宙が始まったとされる理論である。

しかし、このビッグバン理論には説明しがたい問題点がある。その主なものが地平線問題、平坦性問題などである。

これらの問題は、インフレーションと呼ばれる宇宙初期の加速度膨張を仮定すると解決できる。インフレーションには様々なモデルが存在する。その中でも有力視されているモデルが、インフラトンと呼ばれるスカラー場の真空エネルギーによってインフレーションが引き起こされるものである。その中でも最も簡単なモデルは single scalar field inflation モデルと呼ばれ、単一のインフラトンと呼ばれるスカラー場がインフレーションを引き起こす。

こうしたモデルにおけるインフラトンや時空の揺らぎは、宇宙の大規模構造の種になることが知られており、さらに CMB 温度揺らぎをよく再現する。この事がインフレーション理論が強く支持されている理由である。

こういった、インフレーション中の揺らぎは、近似的にガウス型の揺らぎであるとされている。ガウス型の揺らぎとは、揺らぎの相関が二点間の相関の情報のみで表されるものである。

しかし、近年の観測精度の向上により、非ガウス型の揺らぎを観測できる期待が高まっており、理論側からもその予言をすることが重要視されている。インフラトン揺らぎの相互作用を起源とする非ガウス性 (non-Gaussianity) からは、インフラトンの相互作用を探ることができる。興味深いことに、インフレーション中のエネルギースケールは典型的に 10^{14}GeV にもなると知られており、インフラトン揺らぎの相互作用を知ることはインフレーションモデルの分かるばかりではなく、標準模型を超えた高エネルギー理論の重い場について知る事にもなる。

このことから、インフレーションについて知る事は人間が利用できる中で最も高いエネルギースケールの観測機を得ることにもなり、インフレーション理論に対する期待が高まっている。

2　インフレーションのメカニズム

インフレーション中の時空として、近似的に de Sitter 時空を考えると良い。de Sitter 時空とは、宇宙が加速度的に膨張する時空のことであり、この指数関数的膨張は Einstein-Hilbert 作用に正の定数項 Λ を

加える事で実現される。

$$S=\frac{M_{\rm P}^2}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\,(R-2\Lambda)\,, \tag{1}$$

$M_{\rm P}$: Planck 質量 , R : Ricci scalar.

この作用について背景時空の FLRW 計量からの変分をとって運動方程式を出せば、

$$H^2=\frac{\Lambda}{3}\quad ,H=\frac{\dot a}{a}\quad \begin{cases} a & : \quad \text{scale factor} \\ H & : \quad \text{Hubble parameter}\end{cases} \tag{2}$$

が得られる。これを scale factor a について解けば、

$$a=e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} \tag{3}$$

となり、宇宙の指数関数的な膨張が説明できる。

もっとも単純なインフレーションモデルは、単一のスカラー場がインフレーションを引き起こす、single scalar field inflation モデルと呼ばれるものである。このようなモデルでは、スカラー場のラグランジアン

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi+V(\phi) \tag{4}$$

を見たときに $(\partial^\mu\phi)^2\ll V$ かつ

$$\epsilon\equiv\frac{M_p^2}{2}\left(\frac{V_{,\phi}}{V}\right)^2\ll 1\ ,\ \eta\equiv M_p^2\frac{V_{,\phi\phi}}{V}\ll 1 \tag{5}$$

となっていればインフレーションを引き起こした事が説明できる。このはじめの条件はポテンシャルの傾きが小さいことを指し、二番目の条件はインフレーションが十分長く続く条件となっている。この二つのパラメータは slow-roll parameter と呼ばれる。つまり、この場合ではインフラトンの平坦なポテンシャルが真空エネルギーとなって宇宙の加速度膨張を説明する。またこのとき、運動項を 0 にしてしまうとインフレーションが終わらなくなってしまうので、運動項はポテンシャルに比べて小さいが 0 ではない。

図 1 のように平坦なポテンシャルを持つ scalar 場はインフラトンの候補の一つである。single scalar field inflation モデルは、最も簡単でありながら観測によってその正当性が示唆されている。[2]

3 インフレーション理論の正当性

インフレーション中には様々な揺らぎが存在していて、その中にインフラトンの揺らぎ $\delta\phi$ や計量揺らぎ $\delta g_{\mu\nu}$ が存在する。こういったインフレーション中の揺らぎは CMB 温度揺らぎや宇宙の大規模構造、背景重力波を生み出す。

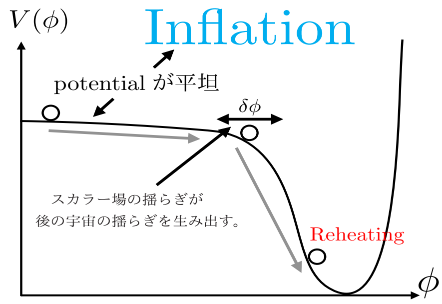

図 1. 平坦なポテンシャルをもつスカラー場はインフレーションを引き起こす事ができる。このインフラトンの揺らぎによって、CMB 温度揺らぎや宇宙の大規模構造が生み出される。このインフラトンの揺らぎからインフレーション中の情報が引き出せる。

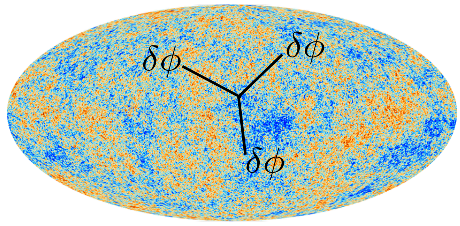

図 2. CMB の温度揺らぎとインフラトン揺らぎ [3]。インフラトンの三点相互作用などから非ガウス性が現れる。

ここで重要になるのが、ガウス型の揺らぎである。ガウス型の揺らぎとは、相関の情報が二点相関関数だけで決まるようなものを指す。インフレーション理論では、揺らぎは近似的にガウス型の揺らぎであるとしており、ガウス型の揺らぎについて知ることでインフレーションの物理が分かる。

こういったガウス型の揺らぎの大きさはパワースペクトルと呼ばれる量で特徴付けられる。このパワースペクトルの波数依存性が CMB のパワースペクトルの観測結果と一致するのである。

しかし、最近の観測精度の向上により、非ガウス性への注目が高まっている。そこで、様々な相互作用から得られる non-Gaussianity を理論側から予測しておくことは重要である。以下では、single scalar field inflation モデルから得られるパワースペクトルと non-Gaussianity について紹介し、有効場の理論を用いることで得られる新たな可能性について触れる。

4　ガウス型の揺らぎ

ガウス型の揺らぎは以下のような二点相関関数だけで特徴付けられる。例えばインフラトン揺らぎ $\delta\phi$ の二点相関関数は以下のように表される。

$$\langle\delta\phi(k)\delta\phi(k')\rangle = (2\pi)^3\delta^3(\vec{k}+\vec{k}')\frac{2\pi^2}{k^3}P(k), \tag{6}$$

$$P(k) = \frac{H^2}{8\pi^2\epsilon M_p^2} \quad ,P(k): \text{power spectrum.}$$

パワースペクトル P と呼ばれる量は揺らぎの大きさを表しており、このわずかな波数依存性によって spectral index n_s によって表される。

$$n_s - 1 = \frac{dP(k)}{d\ln k} = -6\epsilon + 2\eta. \tag{7}$$

また、同様に重力波のパワースペクトル P_γ は

$$P_\gamma^{+,\times} = \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \tag{8}$$

と表される。$+$ と $\times$ はそれぞれ重力波の偏極モードを表している。ここで、インフラトン揺らぎと重力波の大きさによって tensor-to-scalar ratio r を以下のように定義する。

$$r \equiv \frac{P_\gamma}{P_\zeta} \propto \epsilon \tag{9}$$

Planck の観測によって spectral index n_s と scalar-to-tensor ratio r には強力な制限が設けられていて、図 3 のようにポテンシャルに制限を与える。

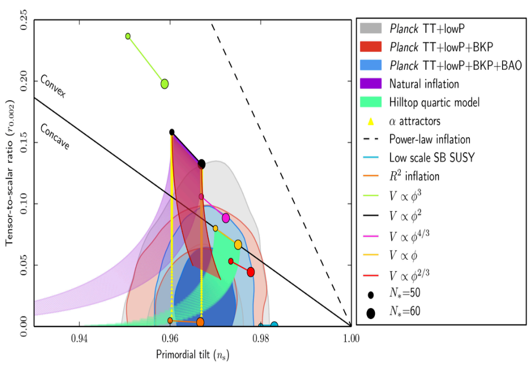

図 3. Planck による、n_s と r に対する制限 [4]

5　非ガウス型の揺らぎ

single scalar field inflation モデルにおいて現れる $\delta\phi$ の三点相互作用 (図 2) から現れる non-Gaussianity は以下のようになる。

$$\langle\zeta_{\vec{k}_1}\zeta_{\vec{k}_2}\zeta_{\vec{k}_3}\rangle = (2\pi)^7\delta^3(\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3)\frac{P_\zeta^2}{\prod_i k_i^2}\mathcal{F}(k_1,k_2,k_3). \tag{10}$$

この式の先頭のデルタ関数から $\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3$ が三角形を作る事がわかる。末尾にある $\mathcal{F}$ がスケール不変な non-Gaussianity の指標となる量である。

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(k_1,k_2,k_3) =& \underbrace{\frac{3(\eta-\epsilon)}{8}}_{size}\underbrace{\frac{(k_1^3+k_2^3+k_3^3)}{3k_1k_2k_3}}_{shape} \\ &+ \frac{3\epsilon}{4}\frac{(k_1k_2^2+k_1^2k_2+k_2k_3^2+k_2^2k_3+k_3k_1^2+k_3^2k_1)}{6k_1k_2k_3} \\ &+ \epsilon\frac{(k_1^2k_2^2+k_2^2k_3^2+k_3^2k_1^2)}{(k_1+k_2+k_3)k_1k_2k_3}.\end{aligned} \tag{11}$$

この $\mathcal{F}$ は二つの部分に分ける事ができる。一つは

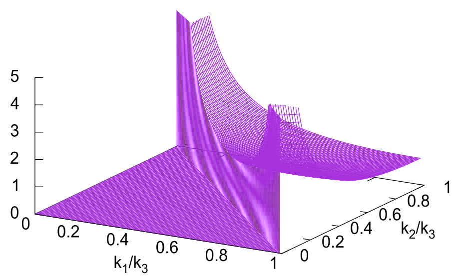

図 4. bispectrum の shape に関してのプロット。これを見ると、どれか一つの波数が他の二つと比べて小さい時に大きいとわかる。これは「潰れた三角形型」の shape と呼ばれる。

bispectrum の波数の比に対する依存性で、shape と呼ばれる。例として、第一項の shape に関して波数比依存性をプロットすると図 4 のようになる。もう一つは bispectrum の size を表す。第一項の size は $\frac{3(\eta-\epsilon)}{8}$ であり、slow-roll infaltion では $\epsilon \approx 10^{-2}$ 程なので、非常に小さい量となる。この量は観測からの制限には矛盾しないが、かなりの精度の向上がないと将来観測されることはない。[5]

6 有効場の理論

上で述べたような相関関数の次数は、ラグランジアンを見たときの揺らぎの次数に対応している。例えば、二点相関関数なら揺らぎの二次の項まで、三点相関関数なら三次の項まで展開する事で求められる。さらに高次の相関に関しては、揺らぎを高次まで展開して行かなければならない。

通常の理論では、繰り込み可能性からの制限からラグランジアンの中に含まれる揺らぎの項の次数には制限がある。しかし、低エネルギー有効理論の範囲では、一般には繰り込み不可能に見える項に意味を持たせる事ができる。そうして現れた揺らぎの高次項は、インフラトンと相互作用している重い場の情報を含む (図 5)。つまり、有効場の理論を使えば、

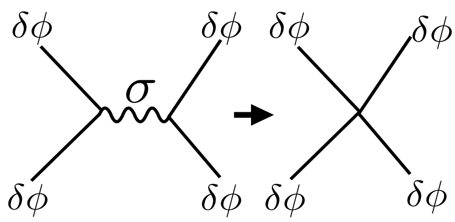

図 5. 高次の相互作用項は重い場との相互作用によって現れる。インフラトンが重い σ 粒子と相互作用している場合、σ 粒子はほとんど見えず、右のような四点の相互作用が現れる。

高次の相関関数が計算でき、様々な相互作用の情報を含む non-Gaussianity を予測する事ができる。例えば、重い場との相互作用によって現れる高次の微分項 $\delta\dot{\phi}^3$ からは、

$$\mathcal{F}_{\delta\dot{\phi}^3} = \frac{H\dot{\phi}_0}{8M_p^2\epsilon}\frac{g^2}{m^2}\frac{3k_1k_2k_3}{(k_1+k_2+k_3)^3} \tag{12}$$

$\phi_0 : \phi$ の background 量 ,

$g : \sigma$ と$\delta\phi$ の相互作用係数 , $m : \sigma$ の質量

と得られる。[6] このように相互作用などから現れる相関関数からは、slow-roll と比べて大きな非ガウス性を得られる事がある。また、shape に関しても図 6 を見るとわかるように、slow-roll の時とは異なる shape が得られる事がわかる。

7 結論

このように、非ガウス型の揺らぎはインフラトン揺らぎが他の場とどのように相互作用していたかを見る一つ方法である。つまり、将来の観測で非ガウス性が見えれば、インフレーションモデルの決定だけでなく、高エネルギー理論の検出器としての期待ができる。

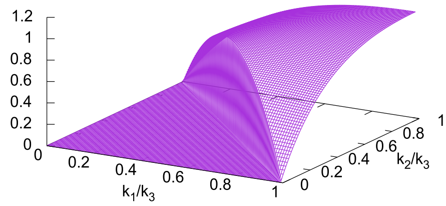

図 6. $\delta\dot{\phi}^3$ の高次の微分項から得られる bispectrum。これを見ると、全ての波数が同じくらいところで大きくなっていることがわかる。これは「正三角形型」の shape と呼ばれる。

Reference

[1]] arXiv:1303.1523v3 [hep-th] 5 Jun 2013, Yi Wang, "Inflation, Cosmic Perturbations and Non-Gaussianities"

[2] arXiv:0907.5424v2 [hep-th] 30 Nov 2012, Daniel Baumann, "TASI Lectures on Inflation"

[3] arXiv:1502.02114v2 [astro-ph.CO] 14 Sep 2017, Planck collaboration, "Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation"

[4] arXiv:1703.09729, Aitor Landete, Fernando Marchesano, Gary Shiu,and Gianluca Zoccarato 2017

[5] arXiv:astro-ph/0210603v5 6 May 2005, Juan Maldacena, "non-Gaussian features of primordial fluctuations in single field inflationary models "

[6] arXiv:hep-th/0605045v4 19 Jan 2008, Clifford Cheunga, Paolo Creminellib, A. Liam Fitzpatricka, Jared Kaplana and Leonardo Senatorea, "The Effective Field Theory of Inflation"

——index

c15

——index

c16

ブラックホール熱力学と Wald のエントロピー公式

佐竹 響 (神戸大学大学院 理学研究科)

Abstract

平衡系の熱力学法則と対応するような 4 つの法則が定常ブラックホール（BH）にも存在し，Einstein 重力では BH の表面積をエントロピーと解釈できることが知られている [1, 2, 3]．Wald はこのエントロピーを一般の作用をもつ理論に対しても拡張できるような公式を提案した [4]．本発表では Einstein 重力理論における定常 BH の熱力学，および Wald エントロピーを説明する．

1 Introduction

重力場の古典理論である一般相対論が Einstein により提案され，BH 時空という興味深い解が Schwarzschild により発見された．それ以来，BH に対する様々な研究がなされ，その一つが BH 熱力学である．BH 熱力学は 1970 年代前半に Hawking らによって議論され [1]，また同じころに Hawking によって，量子効果を考えれば BH が熱的放射をもつことも示された [5]．

定常 BH に対して成り立つ熱力学法則は当然，BH にもエントロピーが存在することを示唆していた．そして BH エントロピーは BH 内部の情報を表すにもかかわらず，その値は表面の情報のみに依存することが示された [2]．この結果，重力理論の情報は系の境界に現れるのではないかというホログラフィー原理が提唱された．これはいまだ完成していない量子重力理論への有力な足掛かりであると信じられている．

本発表ではまず定常 BH の保存量の熱力学的共役量である表面重力，電位，角速度を定義し，BH 熱力学について概説する．そしてその後，Wald による重力理論の詳細によらないエントロピーの公式を説明する．

2 BH の基礎知識

4 次元漸近平坦な定常時空の未来イベントホライズン $\mathcal{H}^+$ は，Killing ベクトル場 ξ の Killing ホライズンである．

定常 BH 時空は質量 M，電荷 Q，角運動量 J により一意に決定される．これらの量から BH の表面積 A が計算される．表面積，電荷，角運動量の熱力学的共役量が表面重力，電位，角速度である．これらの量は以下のように定義される．

定常 BH の表面重力 κ は，$\mathcal{H}^+$ 上のヌル測地線の方程式に現れる量である：

$$\xi^\nu D_\nu \xi^\mu = \kappa \xi^\mu \tag{1}$$

一般に κ は $\mathcal{H}^+$ 上の関数であり，漸近平坦時空の無限遠方で $\xi^2 \to -1$ と ξ を規格化することにより一意に定まる．Frobenius の定理と Killing 方程式から導かれる $\mathcal{H}^+$ 上で成り立つ関係式

$$\xi_\rho D_\mu \xi_\nu = -2\xi_{[\mu} D_{\nu]} \xi_\rho$$

に $D^\mu \xi^\nu = D^{[\mu} \xi^{\nu]}$ をかけて縮約すると，(1) より

$$\xi_\rho (D_\mu \xi_\nu)(D^\mu \xi^\nu)|_{\mathcal{H}^+} = -2\kappa^2 \xi_\rho|_{\mathcal{H}^+}$$

が成り立ち，したがって $\xi = 0$ となる点を除けば

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}(D_\mu \xi_\nu)(D^\mu \xi^\nu)|_{\mathcal{H}^+} \tag{2}$$

が成り立つ．$\xi = 0$ となる点でも連続性を用いて，上式の極限として表面重力 κ を定義する．式 (2) は実際に κ を計算する際に用いられる．

$F_{\mu\nu} := 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}$ を Maxwell 方程式の定常解，ξ^μ を $\mathcal{H}^+$ の外部領域で時間的な $\mathcal{H}^+$ に関する Killing ベクトル場とする．このとき電場ベクトル $E_\mu := F_{\mu\nu}\xi^\nu$ はスカラー関数

$$\Phi := -A_\mu \xi^\mu \tag{3}$$

により $E_\mu = -\partial_\mu \Phi$ と表される．A_μ が無限遠でゼロになるように選べば，Φ も無限遠でゼロになり，こ

のように原点をとったときの $\mathcal{H}^+$ における値 $\Phi_{\rm H}(x)$ を BH の電位と定義する．

イベントホライズンの性質から，時空は時間発展を生成する Killing ベクトル場 $\mathsf{t} = \mathsf{t}^\mu \partial_\mu$ と軸回転を生成する Killing ベクトル場 $\mathsf{m} = \mathsf{m}^\mu \partial_\mu$ をもつ．時空の等長変換群は t と m により生成され，ξ^μ は一般に

$$\xi^\mu = \mathsf{t}^\mu + \Omega_{\rm H} \mathsf{m}^\mu \qquad (\Omega_{\rm H} = \text{const.}) \tag{4}$$

と書けて，$\Omega_{\rm H}$ を BH の角速度と定義する．この式の両辺に t_μ，m_μ をかけて $\mathcal{H}^+$ 上で縮約をとると

$$\Omega_{\rm H} = - \left. \frac{\mathsf{t}^\mu \mathsf{t}_\mu}{\mathsf{t}^\mu \mathsf{m}_\mu} \right|_{\mathcal{H}^+} = - \left. \frac{\mathsf{t}^\mu \mathsf{m}_\mu}{\mathsf{m}^\mu \mathsf{m}_\mu} \right|_{\mathcal{H}^+} \tag{5}$$

を得る．

3 BH の熱力学

平衡系は以下の 4 つのの熱力学法則をみたす：

0th 保存量の熱力学的共役量は熱平衡状態では場所によらず一定である．

1st $\delta E = \delta Q - P\delta V + \mu \delta N$.

2nd 孤立系のエントロピーは時間とともに減少することはない．

3rd 有限回の物理的試行で温度をゼロにすることはできない (Nernst の定理).

4 次元定常 BH もこれと同様の以下の法則を満たす：

0th 定常 BH の表面重力 κ，角速度 $\Omega_{\rm H}$，電位 $\Phi_{\rm H}$ はイベントホライズン上の至る所で一定である．

1st ある定常 BH がほかの定常 BH に変化する際，エネルギーの変化 δM，全角運動量および全電荷の変化 δJ, δQ は次式を満たす：

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi G} \delta A + \Omega_{\rm H} \delta J + \Phi_{\rm H} \delta Q. \tag{6}$$

2nd 古典的な過程では，BH の面積 A は減少することはない．

3rd 有限回の物理的試行で表面重力 κ を 0 にできない．

第 2 法則は BH のエントロピー $S_{\rm BH}$ と外部のエントロピー $S_{\rm mat}$ の総和は非減少であると一般化される．この一般化された第 2 法則と第 3 法則は完全に証明されてはいない．

Kerr-Newman 解の例

4 次元 Einstein-Maxwell 理論の一般的な定常解であるような Kerr-Newman 解

$$\begin{aligned}
ds^2 = &- \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2\theta}{\Sigma} \right) dt^2 \\
&- \frac{2a \sin^2\theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma} dt d\varphi \\
&+ \frac{(r^2+a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta}{\Sigma} \sin^2\theta^2 d\varphi^2 \\
&+ \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2, \\
A_\mu dx^\mu = &- \frac{\bar{Q} r}{\Sigma} (dt - a \sin^2\theta d\varphi), \\
a := &\ \frac{J}{M}, \\
\Delta := &\ r^2 - 2GMr + a^2 + G\bar{Q}^2 \ (\bar{Q} := Q/4\pi), \\
\Sigma := &\ r^2 + a^2 \cos^2\theta
\end{aligned}$$

について，第 0 法則と第 1 法則が実際に成り立つ．この BH の地平面は方程式 $\Delta(r) = 0$ の解 $r = r_\pm = GM \pm \sqrt{(GM^2 - a^2 - \bar{Q}^2}$ の r_+ の位置にある．

式 (2)，(3)，(5) より，表面重力，電位，角速度は次のようになる：

$$\kappa = \frac{r_+ - GM}{r_+^2 + a^2}, \tag{7}$$

$$\Phi_{\rm H} = \frac{\bar{Q} r_+}{r_+^2 + a^2}, \tag{8}$$

$$\Omega_{\rm H} = \frac{a}{r_+^2 + a^2}. \tag{9}$$

$\mathcal{H}^+$ 上で r_+ は一定であるから，これらの値も一定であり，第 0 法則が成り立つことが言えた．

第 1 法則を示す前に，BH の表面積 A を次のように定義する．$\mathcal{H}^+$ 上の空間的超曲面の誘導計量を $q_{ab} dx^a dx^b$ とし，$A := \int\int dS \sqrt{-\det(q_{ab})}$．Kerr-Newman BH の表面積は

$$A = 4\pi (r_+^2 + a^2) \tag{10}$$

である．これと式 (7)，(8)，(9) より，次の式が成り立つ：

$$M = 2\frac{\kappa}{2\pi}\frac{A}{4G} + 2\Omega_H J + \Phi_H \bar{Q}. \tag{11}$$

これは Kerr-Newman 解に対する Smarr の公式と呼ばれる．

式 (10) の両辺を M, J, $\bar{Q}$ の関数とみなして変分をとると，

$$\frac{\delta A}{8\pi G} = \kappa(\delta M - \Omega_{\rm H}\delta J - \Phi_H \delta\bar{Q})$$

が成り立つ．これを Hawking 温度 $T_{\rm H} = \kappa/2\pi$[5], Hawking-Bekenstein エントロピー $S_{\rm BH} = A/4G$[3] を用いて書き換えると

$$\delta M = T_{\rm H}\delta S_{\rm BH} + \Omega_{\rm H}\delta J + \Phi_{\rm H}\delta\bar{Q} \tag{12}$$

となり，第 1 法則が成り立つことが言えた．

4 Wald のエントロピー

Wald はエントロピーを時空の等長変換群に対する Noether チャージとして定義した．

計量 $g_{\mu\nu}$ や物質場をまとめて ϕ と表すことにして，以下の時空 $\mathcal{M}$ における作用積分を考える：

$$S[\phi(x)] = \int_{\mathcal{M}} d^d x \mathcal{L}(x, \phi, \partial_\mu\phi, ...). \tag{13}$$

ϕ の変分をとったときの $\mathcal{L}$ の変分は次の形に書ける：

$$\delta\mathcal{L} = E\delta\phi + \partial_\mu\Theta^\mu(\phi, \delta\phi). \tag{14}$$

Θ はプレシンプレクティックポテンシャルである．運動方程式は $E = 0$ である．プレシンプレクティックカレントは Θ の変分で表される：

$$\Omega^\mu(\phi, \delta_1\phi, \delta_2\phi) = \delta_1[\Theta^\mu(\phi, \delta_2\phi)] - \delta_2[\Theta^\mu(\phi, \delta_1\phi)]. \tag{15}$$

いま，ξ^μ を時空 $\mathcal{M}$ 中の任意のベクトル場として，場の変分をこのベクトル場に沿った Lie 微分とする：$\delta_\xi\phi = \mathscr{L}_\xi\phi$．このとき $\delta_\xi\mathcal{L} = \mathscr{L}_\xi\mathcal{L} = \partial_\mu(\xi^\mu\mathcal{L})$ である．この変分の下での Noether カレントを

$$J^\mu[\xi] = \Theta^\mu(\phi, \mathscr{L}_\xi\phi) - \xi^\mu\mathcal{L} \tag{16}$$

と定義すれば，この発散 $\partial_\mu J^\mu[\xi]$ は場が運動方程式を満たせば 0 になり，保存カレントになる．このとき，Poincaré の補題より，

$$J^\mu[\xi] = \partial_\nu Q^{\mu\nu}[\xi] \tag{17}$$

となる $Q^{\mu\nu}[\xi] = Q^{[\mu\nu]}[\xi]$ が存在する．

Noether カレントの変分は

$$\delta J^\mu[\xi] = \Omega^\mu(\phi, \delta\phi, \mathscr{L}_\xi\phi) - \partial_\nu[2\xi^{[\mu}\Theta^{\nu]}(\phi, \delta\phi)] \tag{18}$$

と書ける．この式と Hamilton の運動方程式を比較すると，パラメター ξ の変換 $\delta_\xi = \mathscr{L}_\xi$ の生成母関数 $H[\xi]$ は

$$\begin{aligned} \delta H[\xi] &= \int_\Sigma (d^{d-1}x)_\mu \Omega^\mu(\phi, \delta\phi, \mathscr{L}_\xi) \\ &= \delta \oint_{\partial\Sigma} (d^{d-2}x)_{\mu\nu} \left[Q^\mu[\xi] + 2\xi^{[\mu}B^{\nu]}\right] \end{aligned} \tag{19}$$

を満たす．ただし，Σ は Cauchy 面であり，B^μ は次式で定義される：

$$\delta \oint_\partial (d^{d-2}x)_{\mu\nu} 2\xi^{[\mu}B^{\nu]} = \oint_\partial (d^{d-2}x)_{\mu\nu} 2\xi^{[\mu}\Theta^{\nu]}(\phi, \delta\phi). \tag{20}$$

式 (19) を積分することによって $H[\xi]$ を得る．特に Cauchy 面の境界が空間無限遠であるとして，ベクトル場 ξ^μ を時間並進を生成する Killing ベクトル $\mathsf{t} = \mathsf{t}^\mu\partial_\mu$，軸回転を生成する Killing ベクトル $\mathsf{m} = \mathsf{m}^\mu\partial_\mu$ を用いれば，正準エネルギー $\mathcal{E} := H[\mathsf{t}]$，正準角運動量 $\mathcal{J} := -H[\mathsf{m}]$ を定義することできる．

漸近平坦な定常ブラックホール時空 $\mathcal{M}$ で，Cauchy 面 Σ の境界が無限遠と分岐面 B のみとなるものを考える．このとき，ホライズン上でヌルであり，分岐面 B 上で 0 となる Killing ベクトルを式 (4) のようにおく．また，表面重力が 1 になるように規格化したものを $\bar{\xi}^\mu = \xi^\mu/\kappa$ とおく．$\bar{\xi}^\mu$ も Killing であるから，$\Omega^\mu(\phi, \delta\phi, \mathscr{L}_\xi\phi) = 0$ が成り立ち，したがって

$$0 = \delta H[\bar{\xi}] = \delta \oint_{\partial\Sigma} (d^{d-2}x)_{\mu\nu} \left[Q^\mu[\bar{\xi}] + 2\bar{\xi}^{[\mu}B^{\nu]}\right]$$

を得る．$\oint_{\partial\Sigma} = \oint_\infty - \oint_B$，$Q^\mu[\xi]$ の線型性，B 上で $\bar{\xi}^\mu = 0$ であることから

$$\oint_B (d^{d-2}x)_{\mu\nu} Q^{\mu\nu}[\bar{\xi}] = \frac{1}{\kappa}(\delta\mathcal{E} - \Omega_{\rm H}\delta\mathcal{J}) \tag{21}$$

を得る．BH のエントロピーを

$$S := 2\pi \oint_B (d^{d-2}x)_{\mu\nu} Q^{\mu\nu}[\bar{\xi}] \tag{22}$$

とおけば，式 (21) より，第 1 法則の形 (6) になる：

$$\delta\mathcal{E} = \frac{\kappa}{2\pi}\delta S + \Omega_{\rm H}\delta\mathcal{J}. \tag{23}$$

5　結論と展望

式 (22) はエントロピーが BH の表面での情報により決定されるということを表している．

今後は，一般の BH のエントロピーに上限があること，そしてその量子論への拡張などを勉強して，これらの観点から量子重力理論へアプローチしていきたいと考えている．

Reference

[1] J. M. Bardeen, B. Carter, & S. W. Hawking 1973, Commun. Math. Phys. 31, 161.

[2] J. D. Bekenstein 1972, Lett.Nuovo Cim. 4, 737-740

[3] S. W. Hawking 1976, Phys. Rev. D 13, 191

[4] R. M. Wald 1993, arXiv:930738v1

[5] S. W. Hawking 1975, Commun. Math. Phys. 43, 199-220

[6] P. K. Townsend 1997, arXiv:9707012

[7] T. Jacobson, G. Kang, R. C. Myers 1994, arXiv:9312023

——index

c17

正則な球対称ブラックホールの量子放射

浅見 拓紀 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

一般相対論を取り入れた曲がった時空での場の量子論を考えると、Black hole は Hawking radiation によりエネルギーを放出し、最終的には蒸発してしまうと考えられている。本講演は、V. P. Frolov and A. Zelnikov, (2017) [1] のレビューである。この論文では、一般の正則な球対称時空上を伝搬する光線の性質を解析手法について議論する。その際、時空の正則性により、BH 中心を通過するような光線の振る舞いも考えることができる。また、共形場理論に基づいて構成した「観測量」を導入することにより、方程式が簡略化されること、および各量と現実の物理量が対応することを見る。最後に、具体的なモデルを与え、時空上の光線の軌道、および先述した観測量を数値的に解くことでその時空の性質について考察する。またその際、metric に赤方偏移因子に相当する関数を加えることで光線の軌道と各観測量に変化が起きることを見る。

1 Introduction

一般相対論は現在まで、重力理論として実験的にも大きな成功を収めてきた。ところが、この理論は特異点の存在の存在によりあるスケールで理論が破綻してしまうという大きな問題がある。この問題を解消するような様々な理論が提唱されているが、いまだ量子重力は完成しておらず、その問題は未解決である。一方、一般相対論を場の量子論にバックグラウンドとして取り入れることはでき、そのような理論から予言されたのが Hawking radiation である。これは、BH 時空上で量子場の真空偏極を考えることによって導かれる効果である。

論文 [1] では、一般の正則な球対称ブラックホール時空上を伝搬する光線の軌道を見ることでその時空の性質を解析する手法について述べられている。さらに、その際動径方向の光線を考えると作用が共形不変性をもち、共形場理論 (CFT) が適用できるようになる。CFT は通常の場の理論と比べて強い対称性を持ち、それによって興味深い性質を持つ。その性質を用いて、光線が満たすべき式を表すことができ、Energy flux 等の物理量を数値的に求めることが可能になる。本講演ではその手法を紹介し、さらに最後には、正則な BH モデルの一つである Hayward model に修正を加えたモデルを用い、その時空の性質について議論し、Hawking radiation との関連を見る。

2 Methods

2.1 Spherical symmetric spacetime

一般に、正則な球対称時空の Metric は

$$ds^2 = \sigma^2(-\alpha^2 f dv^2 + 2\alpha dv dr + r^2 d\Omega^2) \tag{1}$$

と書ける（σ は適当な scale factor）。ただし、時空の正則性から $f(v,r), \alpha(v,r)$ は

$$\begin{aligned} f &= 1 + \frac{1}{2} f_2(v) r^2 + \dots \\ \alpha &= \alpha_0(v) + \frac{1}{2}\alpha_2(v) r^2 + \dots \end{aligned} \tag{2}$$

を満たす。また、以降ではこれに加えて漸近平坦性を仮定することとし、BH は時刻 v が $0 < v < q$ の間だけ存在するような状況を考えるものとする。

ここで、この時空中を動径方向に伝搬する光線を考えると、その軌道は

$$\begin{aligned} dv &= 0 && : \text{ingoing} \\ \frac{dr}{dv} &= \mathcal{Z}(v,r) && : \text{outgoing} \end{aligned} \tag{3}$$

で与えられる。ただし、$\mathcal{Z} := \alpha f/2$ である。このとき、$u_- := v|_{\mathcal{I}^-}$ と $u_+ := u|_{\mathcal{I}^+}$ との間に関係が生じる。それを表す関数 $u_+ = u_+(u_-)$ は α, f によって決まるため、この解析によって時空の性質を見ることができる。

2.2 Beam equations

放射として massless スカラー場を仮定すると、その作用は共形不変になり、CFT で記述される。このとき、光線が満たすべき方程式 (Beam equations) は CFT 上で計算される以下の量を用いることで簡潔に書くことができる。

$$\begin{aligned} P &= [u_-, u_+] \\ W &= \langle u_-, u_+ \rangle \\ \mathcal{E} &= -\frac{1}{24\pi}\{u_-, u_+\} \end{aligned} \tag{4}$$

ここで関数 $y = y(x)$ に対し、次の記法を定義した。

$$\begin{aligned} [y, x] &= \ln |y'| \\ \langle y, x \rangle &= \frac{y''}{y'} \\ \{y, x\} &= \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2 \end{aligned} \tag{5}$$

式 (5) の最後の表式は Schwarzian derivative と呼ばれ、$\mathcal{E}$ は物理的には CFT において Energy flux を表す量である。また、P はエントロピー S と $S = -P/12$ の関係があり、さらに $\beta := e^P$ は BH に入射するエネルギーと BH から出ていくエネルギーとの比になっている。W は光線の密度を特徴づける量である。

ここで、外向きの光線に関する Beam equation

$$\dot{r} := \frac{dr}{dv} = \mathcal{Z}(v, r) \tag{6}$$

に対し、測地線束を考え、各測地線をラベリングするパラメータ z を用いて展開することを考える。$z = 0$ の光線を基準として選び、これに対して $r_0(v) := r(v, z = 0)$ とすると、$r(v, z)$ と $Z(v, z) := \mathcal{Z}(v, r(v, z))$ は

$$\begin{aligned} r(v, z) &= r_0(v) + \sum_{n=1} \frac{z^n}{n!} r_n(v) \\ Z(v, z) &= Z_0(v) + \sum_{n=1} \frac{z^n}{n!} Z_n(v) \end{aligned} \tag{7}$$

と展開できるので、z の各次数で比較すれば式 (6) は

$$\dot{r}_0 = Z_0(v), \qquad \dot{r}_n = Z_n(v) \tag{8}$$

と書ける。右辺の Z_n を $\mathcal{Z}_n$ で表せば、与えられた metric に対して光線の軌道が得られる。

ここで、変数

$$\begin{aligned} p(v) &= [r(v, z), z]|_{z=0} \\ w(v) &= \langle r(v, z), z \rangle|_{z=0} \\ \varepsilon(v) &= \{r(v, z), z\}|_{z=0} \end{aligned} \tag{9}$$

を定義すると、z の四次までの Beam equations は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}r_0}{\mathrm{d}v} &= \mathcal{Z}_0 & \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}v} &= \mathcal{Z}_1 \\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}v} &= \mathcal{Z}_2 e^p & \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}v} &= \mathcal{Z}_3 e^{2p} \end{aligned} \tag{10}$$

2.3 Calculation of observables

実際に観測量 $P, W, \mathcal{E}$ の計算を行う。そのために、図 1 に示したような二本の光線を考える。すると、図

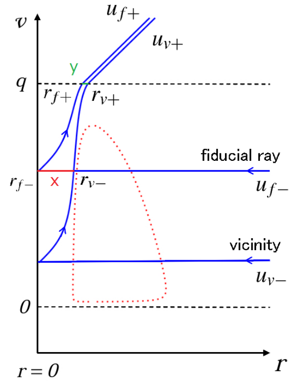

図 1: 基準の光線とその近傍 ([1] 中の図を改変)

1 中の x もしくは y をパラメータ z として選び各観測量が得られる。例えば、$z = x$ とし、境界条件を

$$r_0(u_-) = 0, \quad p^-(u_-) = w^-(u_-) = \varepsilon^-(u_-) = 0 \tag{11}$$

として式 (10) を解くと

$$\begin{aligned} [u_+, u_-] &= p^-(q) + \ln \alpha_0 \\ \langle u_+, u_- \rangle &= -\frac{1}{2}\alpha_0 w^-(q) + \frac{\alpha_0'}{\alpha_0} \\ \{u_+, u_-\} &= \frac{1}{4}\alpha_0^2 \varepsilon^-(q) + \{x, u-\} \end{aligned} \tag{12}$$

となる。ここから、変数 p, w, ε と各観測量との関係も得られる。

3 Models

3.1 Standard model

具体的なモデルを与えて、実際に光線 の軌道、および各観測量を数値的に解く。初めに、Standard model (SM) として以下の metric を考える。

$$f = 1 - \frac{\mu(v) r^2}{r^3 + \mu(v) + 1}, \quad \alpha = 1 \tag{13}$$

これは"Hayward metric"に修正を加えたものになっている。ここで、質量関数 $\mu(v)$ は便宜的に以下のものを選ぶことにする。

$$\mu(v) = \begin{cases} \dfrac{2v(q-\tau)(q-v)^{1/3}}{C(3(q-\tau)v - \tau v + v^2)} & 0 \le v \le q \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{14}$$

$\mu(v)$ は $v = \tau$ で最大値 μ_0 をとる。ただし、C は $q = (C\mu_0)^3 + \tau$ を満たす量で、真空偏極の数 N に対し $C \propto N^{1/3}$ の関係がある。

以上の設定で、各パラメータを $\mu_0 = \tau = 5,\ C = 0.5$ として[1]光線の軌道を数値的に求めたものを図 2 に示す。

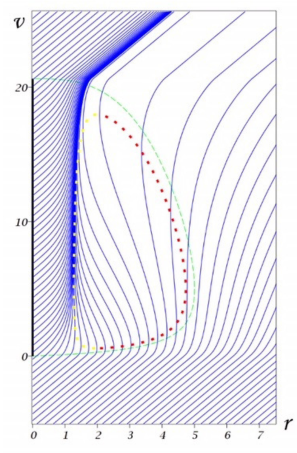

図 2: SM での光線の軌道 ([1] より引用)

図 2 において、$v < 0$ および $v > q$ の領域、つまり時空が平坦な領域では軌道が直線になっていることが分かる。一方、$0 < v < q$ では光線の軌道は曲がり、outer horizon よりも内側の光線はすべて inner horizon 近傍に集中し、BH が蒸発しきると一気に放出される。これを踏まえて、観測量の数値計算結果を見る。図 3 と図 4 にその例として $\mathcal{E} = \mathcal{E}(r_+)$ の計算結果を示す。 まず、図 3 から $\mathcal{E}$ は inner horizon

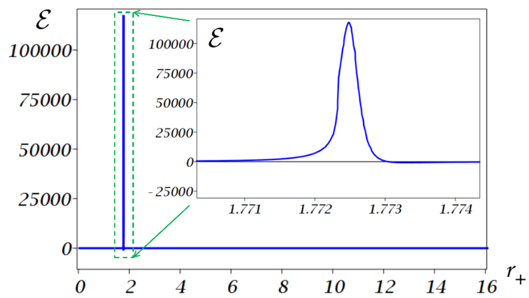

図 3: SM での関数 $\mathcal{E} = \mathcal{E}(r_+)$([1] より引用)

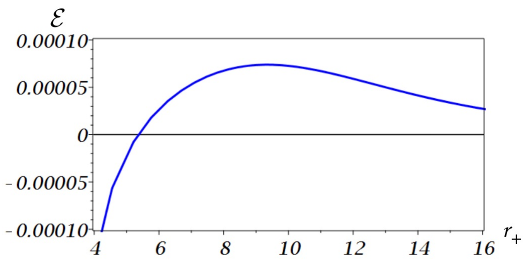

図 4: SM における $\mathcal{E}$ の $r_+ > 4$ での挙動 ([1] より引用)

付近に鋭いピークを持つことが分かる。これは先に述べた inner horizon 付近に集中している光線によるものである。4 には $r_+ > 4$ 付近での $\mathcal{E}$ の挙動を示した。これは、$v = q$ の瞬間に $r_+ \gtrsim \mu$ から放射された粒子の Energy flux を表しており、これが Hawking radiation に対応している。今、$u_+ = q - 2r_+$ であるから、$r_+ \sim \mu$ から出射された粒子は、$\mathcal{I}^+$ において $u_+ \sim q - 2\mu$ で観測されることになる。したがって、Hawking radiation は BH の寿命が q であることから、$-2\mu \lesssim u_+ \lesssim q - 2\mu$ の間に観測される flux に対応する。また、この領域では、$\mathcal{E}$ は大きく変動しており、その値は負にもなっている。これは、inner

[1] 現実的には $C\mu_0 \gg 1$ つまりブラックホールの質量が量子分極に比べて非常に大きい場合を考えるべきだが、定性的な性質を見やすくするためにこの値を選んだ。

horizon と outer horizon との間で生成される粒子による寄与を表しており、BH が消滅した直後に一気に放出される。

以上をまとめると、$\mathcal{I}^+$ の観測者は、$u_+ \sim -2\mu$ で Hawking radiation を観測し、次に $u_+ \sim q - 2\mu$ 程度で二つの horizon の間で生成される粒子の寄与を観測する。最後に inner horizon 付近に集中した光線による鋭いピークが BH が消滅した瞬間に出射された光線に対応する $u_+ = q$ まで観測される。これが観測量 $\mathcal{E}$ の SM における振る舞いである。

3.2 Modified model

SM を修正したモデル (Modified Model, MM) として、f は式 (13) で、α は

$$\alpha(v,r) = \frac{1+r^5}{1+r^5+\mu(v)^3} \tag{15}$$

で与えられるモデルを考える。α は赤方偏移因子として働く関数であるが、特に質量が十分に大きいとき、中心付近では $\alpha \sim \mu(v)^{-3} \ll 1$ となり、固有時を"凍結"させる。MM での光線の軌道と $\mathcal{E}$ を図 5 に示す。ただし、各パラメータは $\mu_0 = \tau = 5,\ C = 0.5$ である。

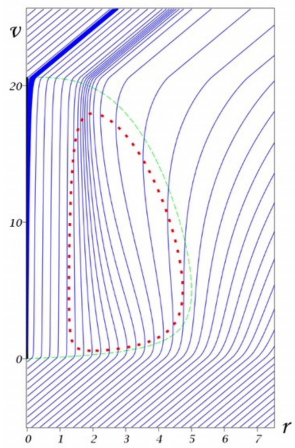

図 5: MM での光線の軌道 ([1] より引用)

図 2-図 4 と比較すると、outer horizon より外側に関してはその挙動はほとんど変わらないが、inner horizon より内側では、その近傍のほかに中心付近に

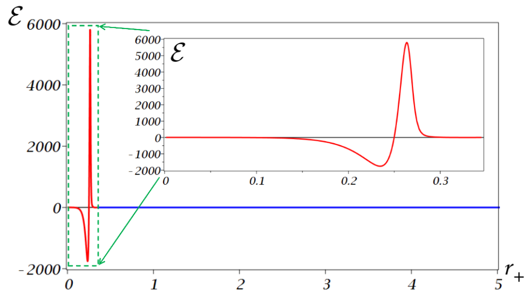

図 6: MM での関数 $\mathcal{E} = \mathcal{E}(r_+)$([1] より引用)

光線が集中し、鋭いピークになっていることが分かる。これは、赤方偏移因子によるもので、α によって中心付近で固有時が凍結することによる効果である。

4 Conclusion

一般的な球対称時空において、光線の軌道によって得られる関数 $u_- = u_-(u_+)$ によって記述される各観測量とそれに対応する変数を用いることで、光線が満たすべき式を簡潔に表すことができることを見た。さらに、具体的な二つのモデルについて各観測量を実際に求めると、 どちらのモデルでも inner horizon 付近に非常に鋭いピークを持つという結果が得られた。これは"mass inflation effect"と呼ばれる現象と関連付けられる。また、この鋭いピークは SM と MM の比較から赤方偏移因子によって大きく抑えられることもわかる。

今回用いた二つのモデルは、どちらも self-consistency を破っている。これは粒子に関する逆反応の効果等を理論に正しく組み込めていないことによるものであると考えられ、これが今後の課題となる。

Reference

[1] V. P. Frolov and A. Zelnikov , Phys. Rev. D 95, 124028 (2017), arXiv:1704.03043 [hep-th]

[2] V. P. Frolov and A. Zelnikov , Phys. Rev. D95, 044042 (2017), arXiv:1612.05319 [hep-th]

——index

c18

——index

c19

ホワイトホールを考慮したブラックホールのライフサイクルのモデル化

小池 貴博 (東京学芸大学大学院 教育学研究科)

Abstract

ブラックホールの情報喪失問題を解決する方法として、これまでに様々なアイデアが考えられている。その中の 1 つにブラックホールは蒸発の最期に Remnant を残し、そこにブラックホール内部の情報が保存されるというものがある。Bianchi らは、その Remnant がホワイトホールだとすると、ブラックホールのライフサイクルをモデル化できると主張する [1]。本稿はそのレビューである。

1 Introduction

天体物理学においてブラックホールは高い関心が示されている対象であるが、その内部がどうなっているのかはまだわかっていない。観測から、ブラックホールのホライゾン外部は一般相対論によって良く記述されるということがわかっている。

ところが、ホライゾン内部は強い重力によって全質量が一点に集まっていると考えられるため、その点において物質の密度や曲率が無限大に発散し、一般相対論が破綻してしまう。

また、量子力学の効果を部分的に取り入れると、ブラックホールはホーキング放射によって、内部の物質に依存しない形でエネルギーを放出し、いずれは消滅すると考えられている。ブラックホールに吸い込まれた情報が失われてしまうこの問題を情報喪失問題と言い、未だ解決には至っていない。

近年、これらの問題を解決するためのシナリオがいくつも注目されている。[1] ではブラックホールがホーキング放射の後、トンネル効果によってホワイトホールに遷移するというブラックホールのライフサイクルをモデル化した。このシナリオよって上述の問題が解決出来ると主張している。

2 Schwarzschild BH 内部の時空

一般的な球対称時空の線素は

$$ds^2 = -u(r)dt^2 + \frac{\alpha(r)^2}{u(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{1}$$

と表される。各メトリックは空間座標 r のみに依存し、$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ は 2 次元単位球面上の線素を表す。

この時空におけるアインシュタイン方程式の真空解を Schwarzschild 解と言い、(1) 式において

$$\alpha = 1 \ \ , \ \ u(r) = 1 - \frac{2GM}{r} \tag{2}$$

としたときに相当する。このときメトリックは $r = 0$、$r = 2GM$ の場所で特異である。

また $r < 2GM$ において、メトリック g_{tt} は正になり、g_{rr} は負となる。すなわち、ブラックホール内部においては時間座標と空間座標の役割が交換される。この状況を [2] にしたがって、

$$t \to R \ \ , \ \ r \to T \ \ , \ \ u(r) \to -U(T) \ \ , \ \ \alpha(r) \to \alpha(T) \tag{3}$$

と表すと、ブラックホール内部を記述するメトリックは以下のように表される。

$$ds^2 = -\frac{\alpha(T)^2}{U(T)}dT^2 + U(T)dR^2 + V(T)d\Omega^2 \tag{4}$$

3 ブラックホールからホワイトホールへの遷移

微分方程式は変数のとり方によっては、偽の特異点が生じ、解が発散してしまうことがある。例えば微分方程式 $y\ddot{y} - 2\dot{y}^2 + y^2 = 0$ の解 $y(t) = 1/\sin t$ は $t = 0$ で発散する。しかし、簡単な定義 $x = 1/y$ によって微分方程式は $\ddot{x} = -x$ と書き換えられ、その解 $x = \sin t$ は $t = 0$ で正則である。[3] ではこのよう

な変数変換を Schwarzschild BH 内部の時空に関して考えている。

球対称時空のメトリック

$$ds^2 = -g_{\tau\tau}d\tau^2 + g_{xx}dx^2 + g_{\theta\theta}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (5)$$

において、3 つの変数 $g_{\tau\tau}$,g_{xx},$g_{\theta\theta}$ を新たな変数 a,b,N を用いて書き換える。この際、2. で議論したように Schwarzschild BH 内部の時空を表すように変数を組み合わせると

$$g_{\tau\tau} = N^2\frac{a}{b} \quad , \quad g_{xx} = \frac{b}{a} \quad , \quad g_{\theta\theta} = a^2 \qquad (6)$$

となり、これらを一般相対論における作用に代入して、

$$S = \frac{v}{4G}\int d\tau\left(N - \frac{\dot{a}\dot{b}}{N}\right) \qquad (7)$$

が得られる。ここで、$v = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx$ である。

(7) 式から運動方程式が得られ、この方程式を満たす解として、

$$a(\tau) = \tau^2 \quad , \quad b(\tau) = 2m - \tau^2 \quad , \quad N^2(\tau) = 4a(\tau) \quad (8)$$

を考えることが出来る。
これにより、ブラックホール内部を記述するメトリックとして、

$$ds^2 = -\frac{4\tau^4}{2m-\tau^2}d\tau^2 + \frac{2m-\tau^2}{\tau^2}dx^2 + \tau^4 d\Omega^2 \quad (9)$$

が得られる。
このとき τ の取りうる範囲は $-\sqrt{2m} < \tau < \sqrt{2m}$ であり、図 1 に示すように解は $\tau = 0$ を通り滑らかに続いている。これらの変数の観点からみると、重力場はブラックホールの中心にある特異点を過ぎて τ の正の値に正則に発展する。すなわち、線素 (10) はブラックホール内部の時空がホワイトホール内部の時空へと遷移する状況を記述している。

4　特異点近傍の量子力学的効果

曲率がプランク値に近づくと、古典的な近似が信頼できなくなる。曲率は量子力学的効果によって制限されると期待される。

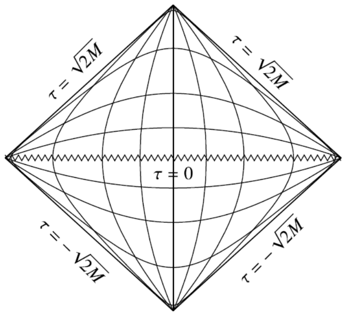

図 1: 内部領域の遷移

単純な仮定として (9) 式における $a(\tau) = \tau^2$ を $\hbar$ に依存する定数 l を用いて

$$a(\tau) = \tau^2 + l \qquad (10)$$

と置き換えると、線素は

$$ds^2 = -\frac{4(\tau^2+l)^2}{2m-\tau^2}d\tau^2 + \frac{2m-\tau^2}{\tau^2+l}dx^2 + (\tau^2+l)^2 d\Omega^2 \qquad (11)$$

と表される。この線素は発散も特異点もなく、曲率不変量

$$K \equiv R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{9l^2 + 96l\tau^2 + 48\tau^4}{(l+\tau^2)^8}m^2 \quad (12)$$

も $\tau = 0$(すなわち $r = 0$) において、有限の最大値

$$K(0) = \frac{9m^2}{l^6} \qquad (13)$$

を持つ。

5　ブラックホール内部の幾何学

ブラックホールはその内部に非常に大きな体積を有するということが議論されている [4]。内部の幾何学的な描像は図 2 に示されているように非常に長いチューブである。時間経過に伴い、チューブの半径は縮小し、一方長さは増加する。

[4] によると、大きな時間 v に対してブラックホール内部の体積は重力崩壊からの時間に依存する形で

$$V \sim 3\sqrt{3}m_0^2 v \qquad (14)$$

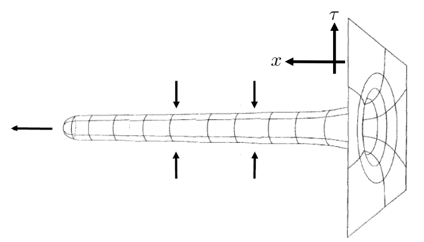

図 2: ブラックホール内部の幾何学

と表される。ここで m_0 はブラックホール形成時の質量である。

質量 m まで蒸発した古いブラックホールは、同じ質量を持つ若いブラックホールと同じ外部の幾何学を有するが、内部は同じではない。古く、十分蒸発したブラックホールは、同じ質量の若いブラックホールよりもはるかに大きな内部を持つ。

6　ホワイトホール

ホワイトホールは一般相対論で議論されるもので、ブラックホール解を時間反転させたアインシュタイン方程式の解である。3. ではブラックホール内部の時空がホワイトホール内部の時空へと滑らかに遷移するメトリックが得られることを示した。これまでにも新しい座標系を用いることで、Schwarzschild 解を $r = 0$ の曲率特異点を越えて滑らかに拡張した解が考えられている。[5] では図 3 の左図のように、元の Schwarzschild 時空におけるブラックホールの内部領域が、曲率特異点を横切り別の Schwarzschild 時空におけるホワイトホールの内部領域へと続いていく時空を考えている。このとき、Hole 内部は図 3 の右図のような Einstein-Rosen bridge と呼ばれる時空の幾何学的特徴を持つ。

これに対し、[1] ではホーキング放射によってブラックホールが縮小し、プランク密度に達すると量子重力の効果による斥力によって時空がバウンスすると考えている。そのため、Hole 内部は図 3 のような幾何学ではなく、図 4 に示しめすような元のブラックホールの内部体積を受け継いだホワイトホールになると考えることが出来る。ホワイトホールはブラックホールを時間反転したものであるから、時間経過とともに内部体積は小さくなっていく。またブラックホールはイベントホライゾンをもつため、内部の情報はその内側でトラップされているが、ホワイトホールはイベントホライゾンを持たないため、このプロセスの後、内部の情報が外部に放出されていくという物理的な描像を与える。

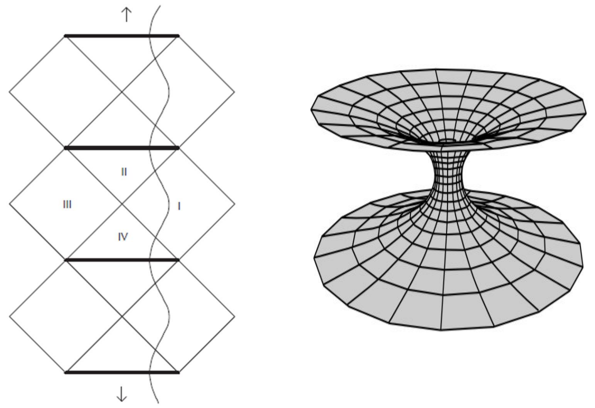

図 3: 別の宇宙への遷移

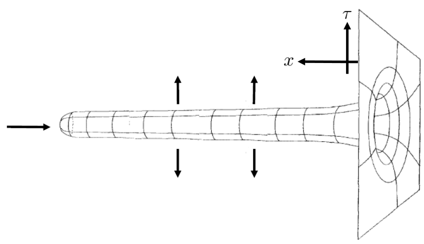

図 4: ホワイトホール内部の幾何学

7　Conclusion

一般相対論の枠組みの中で、ブラックホール内部の時空を記述するメトリックから、ブラックホールがホワイトホールへと遷移し、内部に蓄えた情報を外部に放出して消滅するというブラックホールのライフサイクルを考えることができる。またホワイトホールはアインシュタイン方程式の良く知られた解であることからも、これまでエキゾチックなものと見なされてきた Remnant の具体的なモデルを提供し、情報喪失問題を解決する。

Reference

[1]Bianchi et al. 2018, “White Hole as Remnants:A Surprising Scenario for the End of a Black Hole” arXiv:1802.04264

[2]Kenmoku et al. 1998, “de Broglie-Bohm interpretation for the wave function of quantum black holes” Phy. Rev. D57

[3]D’Ambrosio & C. Rovelli 2018, “How Information Crosses Schwarzschild’s Central Singularity” arXiv:1803.05015

[4]Christodoulou & C. Rovelli 2015, “How big is a black hole?” Phys Rev, D 91, 064046

[5]Peeters et al. 1994, “Extended geometry of black holes” Class. Quant. Grav. 12 173-180

——index

c20

スカラー場による裸の特異点とそのブラックホール時空について

佐土原　和隆 (東京学芸大学大学院 教育学研究科)

Abstract

ブラックホールが，質量，電荷，角運動量以外の情報を持たないことは，無毛定理として知られている．スカラーの「毛」を持たないため，スカラー場のある時空としては，ブラックホールではなく裸の特異点が存在する JNWW 解がよく知られている [Janis, Newman & Winicour (1968)]．これに対し Cadoni らは，スカラー場のある (3+1) 次元静的球対称な時空において，ブラックホール解を生成するために必要なポテンシャルを求めた [Cadoni & Franzin (2015)]．これは，ポテンシャルに応じて，ホライゾンの有無を変化させられることを表す．本発表では，我々が D 次元に拡張した手法と，それを用いて構成した (2+1) 次元のブラックホール解について発表をする．

1 Introduction

一般相対論におけるブラックホールの一般的な性質の一つは，時空特異点が存在することである．特異点では時空が破綻しており，その点の物理を記述することができない．この特異点を回避するために，これまで多くの研究がなされてきたが，未だに解決には至っていない．

その原因は，ホライゾン内部の情報が外に出てこないからである．つまり，この問題を解決するには，ホライゾン内部の構造から影響を受けつつ，無限遠まで到達する物理量を観測し，間接的に内部構造を決定する必要がある．しかし，一般相対論では，ブラックホールは質量，電荷，角運動量以外に情報を持たないため，ブラックホールの内部構造が観測から明らかになることはない．

一方，質量を持たないスカラー場が存在する時空では，ホライゾンに隠されていない特異点の存在が知られている．これを裸の特異点という．(3+1) 次元時空における裸の特異点を表す解は JNWW 解として知られている [Janis, Newman & Winicour (1968)]．Cadoni らは，この時空上で裸の特異点ではなく，ブラックホール解を生成するために必要なポテンシャルを求めた [Cadoni & Franzin (2015)]．つまり，この時空では，ポテンシャルを変化させれば，ブラックホールのホライゾンの有無を変化させられることになる．この手法で得られた解では，ブラックホール時空と裸の特異点時空との差異が小さいため，ブラックホールの内部構造を無限遠から観測できる可能性を示唆している．

我々は，この手法を D 次元時空で使えるものに拡張した．さらに，その具体例として，(2+1) 次元のスカラー場を持つ時空について，ブラックホール解となるのに必要なポテンシャルを求め，その特徴を調べた．

2 Einstein-scalar gravity in D dimensions

まず，Cadoni らの (3+1) 次元時空での手法を D 次元時空に拡張した．

今回考える時空は，以下の作用で表される．

$$S = \int d^D x \sqrt{-g}(R - \alpha(\partial\phi)^2 - \beta V(\phi)). \tag{1}$$

線素には，静的球対称を表す以下の形を仮定する．以下では $D = N + 2$ としている．

$$ds^2 = -U(r)dt^2 + U^{-1}(r)dr^2 + R^2(r)d\Omega_N{}^2. \tag{2}$$

この仮定の下で，アインシュタイン方程式を書き下

すと，

$$Y' + Y^2 = -\frac{\alpha}{N}\phi'^2, \tag{3}$$

$$(u\phi)' = \frac{\beta}{2\alpha}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathrm{e}^{N\int Y}, \tag{4}$$

$$u'' - (N{+}2)(uY)' = -2(N-1)\mathrm{e}^{(N-2)\int Y}, \tag{5}$$

$$u'' = N(N-1)\mathrm{e}^{(N-2)\int Y} - \beta\frac{N+2}{N}V\mathrm{e}^{N\int Y}, \tag{6}$$

となる．ここで，$\mathrm{e}^{\int Y} = R$, $UR^N = u$ である．

これにより，$V = 0$ での R^2 を一度求めれば，それを用いて U, V の値が以下の式から求められる．$(N > 2)$

$$U = R^2\left[-\int dr\frac{2N(N-1)\int drR^{N-2} + C_1}{NR^{2+N}} + C_2\right], \tag{7}$$

$$V = \frac{N}{\beta(N+2)}\left(-\frac{u''}{R^N} + \frac{N(N-1)}{R^2}\right). \tag{8}$$

これらは積分定数に依って，様々な値をとる．

3 Black holes sourced by a scalar field in (3+1) dimensions

Cadoni らは，JNWW 解にポテンシャルを与え，ブラックホール解を構成した [Cadoni & Franzin (2015)]．前章の方程式に $N = 2$ を代入して得れる方程式を用いる．まず $V = 0$ を仮定し，方程式を解くことで JNWW 解を求める．

$$U = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{2w-1}, \tag{9}$$

$$R^2 = r^2\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{2(1-w)}, \tag{10}$$

$$\phi = -\gamma\log\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) + \phi_0, \tag{11}$$

$$w - w^2 = \gamma^2. \tag{12}$$

$w - w^2 = \gamma^2$ は w の範囲 $0 \le w \le 1$ を与えるが、対称性から $1/2 \le w \le 1$ まで制限することができる．

さらに，(21) 式を用いれば，ブラックホール解を構成するようなポテンシャルを考えることができる．$N = 2$ の (7)(8) 式に，(21) 式を代入すると，$\Lambda = 0$ で JNWW 解に一致する条件を置くことで，

$$U = X^{2w-1}[1 - \Lambda\{r^2 + (4w-3)r_0 r + {r_0}^2(2w-1)(4w-3)\}] + \Lambda r^2 X^{2(1-w)}, \tag{13}$$

が分かり，さらにポテンシャルについても，

$$V(\phi) = 2\Lambda\left[-w(1-4w)\sinh\frac{(2w-2)\phi}{\gamma} + 8\gamma^2\sinh\frac{(2w-1)\phi}{\gamma} + (1-w)(3-4w)\sinh\frac{2w\phi}{\gamma}\right], \tag{14}$$

が得られる．ここで，

$$X = 1 - \frac{r_0}{r}, \tag{15}$$

$$\Lambda = \frac{C_1 + (4w-1)r_0}{{r_0}^3(2w-1)(4w-3)(4w-1)}, \tag{16}$$

である．($w \neq \frac{3}{4}, \frac{1}{2}$) これは，

$${r_0}^2 \ge \frac{1}{(2w-1)(4w-1)\Lambda}. \tag{17}$$

を満たすときにのみ，ブラックホール時空になることが分かる．

4 BTZ-like black holes sourced by a scalar field

この手法を用いて，具体的な議論をする．ここでは，一般相対論での (2+1) 次元ブラックホール解である BTZ ブラックホールにポテンシャルを与えることを考える．静的 BTZ ブラックホールは以下の線素で表されるブラックホールである (Bañados, Teitelboim & Zanelli (1992))．

$$ds^2 = -N^2dt^2 + N^{-2}dr^2 + r^2d\theta^2, \tag{18}$$

$$N^2(r) = -M - \Lambda r^2. \tag{19}$$

次は，$N = 1$ として解く．$V = 0$ とした解での R, ϕ を固定して，(5)，(6) 式から U, V を求める．また，$\beta V = -2\Lambda$ の値が定数のとき，静的 BTZ ブ

ラックホール解に一致することを仮定すると，解は以下の様に表される．

$$U = r^{1-w}[1 + \Lambda(1 - r^{3w-1})], \tag{20}$$
$$R = r^{w}, \tag{21}$$
$$\Lambda = -\left(\frac{2M}{3w-1} + 1\right). \tag{22}$$

この時，スカラー場は，

$$\phi = \gamma \log(r) + \phi_0, \tag{23}$$
$$V = \Lambda w(3w-1)e^{\frac{-2(1-w)}{\gamma}\phi}, \tag{24}$$

となる．ここで，$\alpha\gamma^2 = w - w^2$，$\frac{1}{2} \leq w \leq 1$ である．

このブラックホール解は，w の値を変化させることにより，様々なポテンシャル下のブラックホールを表す．$\frac{1}{2} \leq w \leq 1$ においての性質を以下に示す．

表 1: ブラックホール時空の性質

ホライゾン	全ての w で存在
曲率特異点	$w = 1$ 以外の全ての w で存在
安定軌道	全ての w で存在しない

5 Conclusion & Discussion

我々は，Cadoni らの手法を D 次元に拡張し，その具体例として BTZ ブラックホール時空にポテンシャルを与えた．ポテンシャルを与えても，BTZ ブラックホールのホライゾンは存在し続け，裸の特異点にはできないことが分かった．

今回対象にした BTZ ブラックホール時空は，$V = 0$ が仮定に入っていない．(2+1) 次元時空でも $V = 0$ であれば，時空は裸の特異点になる．そのため，今後は $V = 0$ を範囲に含むような，(2+1) 次元でのより一般的な解を構成したい．さらに，今回得られた任意の次元での手法を用いて，高次元時空でのブラックホール解の構成をしたい．

今回の手法で得られる解は，裸の特異点とブラックホール解との差異が小さいことが期待できる．そのため，そこで得られた裸の特異点を用いて，特異点の有無による時空の差を調べたい．

Reference

M. Cadoni, & E. Franzin, Phys. Rev. D91, 104011(2015).

A. I. Janis, E. T. Newman & J. Winicour, Phys. Rev. Lett. 20, 878(1968).

M. Bañados, C. Teitelboim & J. Zanelli, Phys. Rev. Lett. 69, 1849(1992).

R. Yamazaki & D. Ida, Phys. Rev. D64, 024009(2001).

——index

c21

Multifractional theories の宇宙論的応用に向けて

高木 かんな (東京学芸大学大学院 教育学研究科)

Abstract

Multiscale theorise とは，fractal という幾何学的性質を持った時空 (multiscale 時空) を記述する理論である (Calcagni 2017)．multiscale 時空は，スケールの変化に伴って有効次元も変化するという性質を持つ．本研究の目的は，この性質を用いて宇宙初期の有効次元の変化について調べることである．その実現に向けて，本発表では multiscale theories の概要を説明し，それを用いたパワースペクトルの理論値を紹介する．加えて，multiscale theories の宇宙論的応用について考えていきたい．

1 Introduction

ビッグバン宇宙論での諸問題を解決する理論として，インフレーションが提唱されている．インフレーションとは，ビッグバンより前に起こったとされる，宇宙の指数関数的膨張である．現在，インフレーションのモデルは数多く提唱されているが，決定的なものはなく，初期宇宙は未だに解明されていない．

近年，量子重力の観点から宇宙初期は実質（１＋１）次元だった可能性が示唆されている．従って,（１＋１）次元だった宇宙は，インフレーションを経て（３＋１）次元に成長したと考えることができる．このような次元の変化を実現するために，本研究では multiscale theories に注目した．multiscale theories とは，スケールが変わると次元も変わるような幾何学の理論であり，この理論をもとに描かれた時空を multiscale 時空という．この時空を用いることで，インフレーション中に，次元が変化する様子を表せることが期待できる． (Calcagni et al. 2016)．

本発表では，まず multiscale theories で使用されている用語の整理をする．次に multiscale theories で使われる微分の中で代表的なものを 3 種類紹介し，それぞれの理論の特徴を見ていく．さらに，multi-fractional theories で計算したパワースペクトルを紹介する．最後にインフレーションやブラックホールなど宇宙論的あるいは相対論的応用について考えていきたい．

2 Multiscale classification

幾何学理論において，“ fractal” や “ Multiscale”，“ Multifractional”，“ Multifractal ” などの用語は混同して使われている．そこで本発表では (Calcagni 2017) の定義を使用し，これらの用語の分類を説明する．

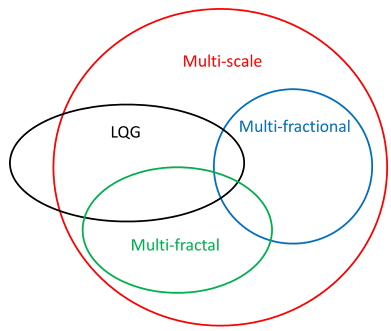

図 1: Multiscale の分類

Multiscale theories とはスケールの変化によって，有効次元が変化する時空を描く幾何学理論である．有効次元の一つにハウスドルフ次元 (d_H) がある．この次元は，(体積) ～ (長さ)^{d_H}という式で表される．Multiscale theories での geometric coodinates を使って測度を置き換えると，スケールによって d_Hの値が変化する．詳しくはポスター（重宇 c22）で説明する．

有効次元が変化することを dimensional flow と呼ぶ．dimensional flow には 3 つの特徴 [A1],[A2],[A3] がある．[A1]d_Hと d_S, d_Wのうち，少なくとも 2 つの有効次元が変化する.（ただし d_Hはハウスドルフ次元, d_Sはスペクトル次元, d_Wはウォーク次元であ

る.）[A2]UV から IR まで次元の変化は連続的である．[A3]dimensional flow は局所的に生じる．ここで [A1],[A2],[A3] をまとめて [A] とする．[A] の副産物として，[B]dimensional flow が生じている間は，有効次元は非整数にもなる，という特徴をもつ．

Multifractional とは，multiscale の特別な場合であり，ラプラス・ベルトラミ演算子を因数分解できるという特徴をもつ．

$$\mathcal{K}_x = \sum_\mu \mathcal{K}(x^\mu) \tag{1}$$

Multifractal には，weakly multifractal と strongly multifractal の 2 種類がある．Weakly multifractal とは，[A] と [B] に加えて，[C] の特徴を持つ．

$$[C] : d_W = 2\frac{d_H}{d_S}, \qquad d_S \leq d_H \tag{2}$$

Strongly multifractal は [A] と [B]，[C] に加えて [D] 整数微分ができる場所がどこにもない，という特徴をもつ．つまり，strongly multifractal では非整数微分を用いる．

3 Theory with ordinary derivatives

Multiscale は fractal という滑らかでない時空を表す幾何学のため，微分を変更する必要がある．用いる微分によって，いくつかの理論が構成されているが，ここでは代表的なものを紹介する．

まずはトイモデルから紹介する．微分は通常のものを使い、測度に重みをつけることで multiscale のトイモデルをつくることができる (Calcagni 2017)．ここで作用は

$$S = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^D x v\sqrt{-g}[R - \omega\partial_\mu v\partial^\mu v - U] + S_m \tag{3}$$

とおく．これにより，アインシュタイン方程式の (00) 成分から導かれるフリードマン方程式は

$$\begin{aligned}&\left(\frac{D}{2}-1\right)H^2 + H\frac{\dot{v}}{v}\\ &\quad = \frac{\kappa^2}{D-1}\rho + \frac{1}{2}\frac{\omega}{D-1}\dot{v}^2 + \frac{U(v)}{2(D-1)} - \frac{K}{a^2}\end{aligned} \tag{4}$$

となる．

4 Theory with weighted derivatives

次のように定義される微分を，重み微分という．

$$\mathcal{K} = \mathcal{D}_\mu\mathcal{D}^\mu = \frac{1}{\sqrt{v}}\partial_\mu(\sqrt{v}\cdot) \tag{5}$$

ここで作用を

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2\kappa^2}\int d^D x e^{\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta_*}\right)}\sqrt{-g}\\ &\quad\times\ (\overline{R} - \Omega\partial_\mu\Phi\overline{\partial}^\mu\Phi - e^{-\Phi}U) + S_m \qquad (6)\\ \Omega &:= \frac{9\omega}{4\beta^2}e^{\frac{2}{\beta}\Phi} + (D-1)\left(\frac{1}{2\beta_*} - \frac{1}{\beta}\right)\end{aligned}$$

とおく．これにより，アインシュタイン方程式の (00) 成分から導かれるフリードマン方程式は

$$\begin{aligned}\left(\frac{D}{2}-1\right)H^2 &= \frac{\kappa^2}{D-1}\overline{\rho} + \frac{6\Omega}{(D-1)(D-2)}\frac{\dot{v}^2}{v^2}\\ &\quad + \frac{U(v)}{2(D-1)v_*^\beta t} - \frac{K}{a^2}\end{aligned} \tag{7}$$

となる．(7) 式とアインシュタイン方程式の (*ij*) 成分のトレースをとった式を組み合わせ，積分することでスケール因子が得られる．

$$\begin{aligned}a(t) &= \left(1+\sqrt{\left|\frac{t_*}{t}\right|}\right)^{\frac{3}{8}}\\ &\quad \exp\left\{\frac{9}{8}\left[H_0\left|\frac{t}{t_*}\right| + \sqrt{\left|\frac{t}{t_*}\right|} - \left|\frac{t}{t_*}\right|\ln\left(1+\sqrt{\left|\frac{t_*}{t}\right|}\right)\right]\right\}\end{aligned} \tag{8}$$

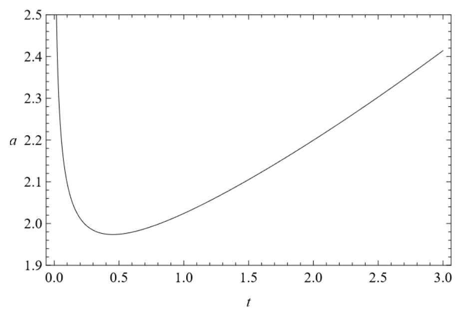

図 2: 重み微分でのスケール因子 (Calcagni 2013)

$|t-t_*| \ll 1$ のとき $a(t) \sim (\frac{t}{t_*})^{-\frac{3}{16}}$ となり，$|t-t_*| \gg 1$ のとき $a(t) \sim e^{H_0 t}$ となる．スケール因子の時間発

展は図 2 のようになる．ここで，スケール因子が極小値となる時間は t_{bounce} とする．これより，$t=0$ から t_{bounce} では宇宙は収縮し、t_{bounce} 以降で宇宙は膨張するようなシナリオが描かれる．

5　Theory with q-derivatives

次のように定義される微分を，q 微分という．

$$\mathcal{K} = \Box_q = \eta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial q^\mu}\frac{\partial}{\partial q^\nu} \tag{9}$$

ただし，geometric coodinates は

$$q^i(x) = x^i + \frac{l_*}{\alpha_0}\left|\frac{x^i}{l_*}\right|^\alpha F_\omega(\ln|x^i|) \tag{10}$$

$$\begin{aligned} F_\omega(\ln|x^i|) = 1 + A\cos\left(\omega\ln\left|\frac{x^i}{l_\infty}\right|\right) \\ + B\sin\left(\omega\ln\left|\frac{x^i}{l_\infty}\right|\right) \end{aligned} \tag{11}$$

である．ここで作用を

$$S = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^D xv\sqrt{-g}[{}^qR - 2\Lambda] + S_m \tag{12}$$

とおく．これにより，アインシュタイン方程式の (00) 成分から導かれるフリードマン方程式は

$$\left(\frac{D}{2}-1\right)\frac{H^2}{v^2} = \frac{\kappa^2}{D-1}\rho + \frac{\Lambda}{D-1} - \frac{K}{a^2} \tag{13}$$

となる．重み微分と同様にスケール因子を導出すると，次の式になる．

$$a(t) = \exp\left[\sqrt{\frac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)}}q(t)\right] \tag{14}$$

6　Power spectrum

(10) 式より運動量空間での geometric coodinate は

$$p(k^i, E_*) \;:=\; \frac{1}{q\left(\frac{1}{k^i}, \frac{1}{E_*}\right)} \tag{15}$$

$$= \frac{k^i}{1+\frac{1}{\alpha}\left|\frac{E_*}{k^i}\right|^{\alpha-1}F_\omega(-\ln|k^i|)} \tag{16}$$

となる．運動量空間での Mukhanov-Sasaki 方程式は

$$u_k'' + (\tilde{k}^2 - m_{eff}^2)u_k = 0 \tag{17}$$

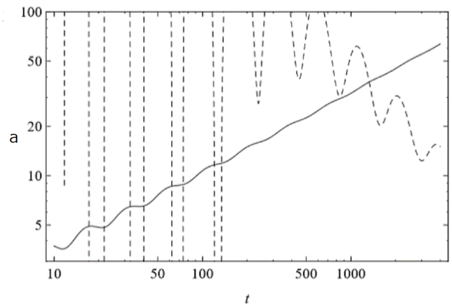

図 3:　実線：スケール因子，破線：ハッブル定数 (Calcagni 2013)

である．ただし ’ は共形時間の微分であり，$m_{eff}^2 \sim (aH/v)^2 + \cdots$ である．ここで共動波数は，

$$\tilde{k} := \sqrt{\Sigma_i p^2(k^i)} \tag{18}$$

である．これより，パワースペクトルは

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \mathcal{A}_{s,t}\left(\frac{\tilde{k}}{\tilde{k}_0}\right)^n \\ &\sim \mathcal{A}_{s,t}\left(\frac{k}{k_0}\frac{\alpha+\left|\frac{k}{k_*}\right|^{1-\alpha}}{\alpha+\left|\frac{k_0}{k_*}\right|^{1-\alpha}}\right) \\ &\times\left[1 + An\cos\left(\omega\ln\frac{k_\infty}{k}\right) + Bn\sin\left(\omega\ln\frac{k_\infty}{k}\right)\right. \\ &\left. - An\cos\left(\omega\ln\frac{k_\infty}{k_0}\right) - Bn\cos\left(\omega\ln\frac{k_\infty}{k_0}\right)\right] \end{aligned} \tag{19}$$

となる．この結果を図 4 に示す．

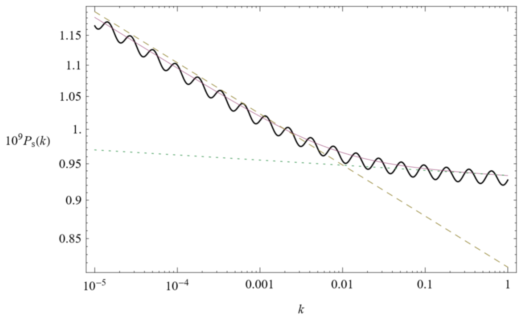

図 4: 太線（黒）: multifractional theories でのパワースペクトル，細線（マゼンダ）: multifractional theories での log oscillations なしのパワースペクトル，破線（茶）: 一般的なパワースペクトル，点線（緑）: 小さいスケールでのパワースペクトル (Calcagni et al. 2016)

図 4 から分かるように，multifractional theories でのパワースペクトルは log oscillations が効いてくることで振動する．

7 Conclusion and Discussion

Multiscale 幾何学で使用されている multiscale と multifractional，multifratal という用語の定義について整理した．また一般的な微分によるトイモデルや重み微分，q 微分による理論の性質や，multifractional thories でのパワースペクトルが分かった．

これらの理解をもとに，今後は重力波における計算によって，初期宇宙が実質 (1+1) 次元だった痕跡を見つけたい．また，今回時間にのみ依存していた重み v を，空間に依存する重みにすることで，ブラックホール周りの実質的な次元について調べたい．

Reference

Calcagni, JHEP 1703 (2017) 138

Calcagni, Kuroyanagi, & Tsujikawa, JCAP 08, 039 (2016)

Calcagni 2013, JCAP 12 (2013) 041

——index

c22

Multifractional theories と時空次元の実質的な変化

佐野 有里紗（東京学芸大学大学院）

Abstract

現在の宇宙は (3 + 1) 次元時空だと考えられている。しかし、宇宙初期の実質的な次元は、(1 + 1) 次元時空だという可能性が量子重力理論から示唆されてきた。この可能性を考慮し、実質的に (1 + 1) 次元時空であった宇宙がインフレーション期に (3 + 1) 次元時空になったという非等方モデルが提唱されている。それ以外にも時空の有効次元が等方的に変化する multifractional 時空を利用するインフレーションモデルもある。multifractional 時空は、q 微分などを用いることによって、スケール変化に伴って次元も変化する時空であり、その時空を記述する理論を multifractional theories と呼んでいる。

本発表では、multifractional theories の導入と概要についてレビューを行う。また、その宇宙論的応用については、ポスター (重宇 c21) で説明している。

1 Introduction

宇宙初期は非常に小さく、重力が非常に強いため、量子論と重力理論の両方を取り入れなければならない。それを量子重力理論と呼ぶ。その量子重力理論において、次元は動的かつスケール依存性があることが示唆されている。それにより、小スケールや高エネルギー状態での実質的な次元が落ちると考えられている (Carlip 2017)。これは、不確定性関係から大きさの最小値を決めていることや、空間座標それぞれに従属関係があるため自由度が落ちることに起因していると考えられる。このように実質的な次元が変化することを dimensional flow と呼んでいる。この dimensional flow の様子というのは理論によって異なる。例えば、causal dynamical triangulations(CDT) では spectral dimension(d_S) と呼ばれる有効次元が、$d_S \sim \frac{3}{2}$ となる (Ambjorn et al. 2005)。

dimensional flow が起こる、インフレーションモデルとして、非等方な膨張を考えるモデルがある。例えば、x にだけ $b(t) = \sqrt{1 + \frac{\beta}{e^{2Ht}}}$ ($\beta : \beta \ll 1$ の定数) というパラメータを加えるというモデルである。このパラメータによって、インフレーションが始まる程の小さいスケール ($t_i \sim t_{pl} \sim 10^{-44}$秒) では、空間の大きさに対して β が十分大きいので、実質的に空間 1 次元に見える。一方、終わる頃 ($t_f \sim t_{GUT} \sim 10^{-36}$ 秒) には β が相対的に小さく ($b(t) \to 1$) なり空間 3 次元に見える。このようなモデルの線素を

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(b^2(t)dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (1)$$

と表す。ただし、$a(t) = e^{Ht}$ であり、スケールファクターと呼ぶ。このモデルと次元が変化しないモデルの量子揺らぎを比較すると、

$$|\phi(\tilde{\eta})|^2 \to \frac{H^2}{2k^3} + \frac{\beta H^4}{8k^5}\Big(1 + \frac{5k_x^2}{k^2}\Big) \quad (2)$$

$$|\psi_k(\eta)|^2 \to \frac{H^2}{2k^3} \quad (3)$$

となることを明らかにした (Sano,Takagi,Kobayashi,in preparation)。

これは非等方に次元を変えるモデルだが、現在の宇宙は等方的であることから、今回は等方的に次元を変えることができる multifractional theories について考えていく (Calcagni 2017)。

2 Dimensions

有効次元には様々な定義の仕方がある。その中でも今回は multifractional theories に関係のある離散的な時空、特に fractal な時空での有効次元についてまとめる。

2.1 Hausdorff dimension

hausdorff dimension はその空間の体積（空間 1 次元では長さ、2 次元では面積、3 次元では体積、…だが、便宜上体積と呼ぶ）によって定義される空間次元である。ある空間の典型的な長さを ℓ とし、その体積を $\mathcal{V}(\ell)$ とすると、hausdorff dimension は

$$d_H(\ell) \equiv \frac{d \ln \mathcal{V}(\ell)}{d \ln \ell} \tag{4}$$

と定義される。また、これより

$$\mathcal{V} \propto \ell^{d_H} \tag{5}$$

という関係式が導ける。これから具体的に次元をいくつか計算していく。例としてまずはユークリッド空間での正方形を考える。正方形を 4 つ組み合わせると 1 辺が 2 倍になった相似の正方形を作ることができる。(5) より、

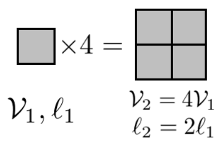

図 1: 正方形の場合

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{V}_2}{\mathcal{V}_1} &= \left(\frac{\ell_2}{\ell_1}\right)^{d_H} \\ \frac{4\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}_1} &= \left(\frac{2\ell_1}{\ell_1}\right)^{d_H} \\ d_H &= 2 \end{aligned} \tag{6}$$

となり、確かにユークリッド空間の正方形は空間 2 次元である。

次に、fractal 空間の例としてシェルピンスキーのギャスケットを考える。今度は 3 つのギャスケットを組み合わせると長さが 2 倍になった相似のギャスケットを作ることができるので、

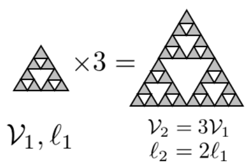

図 2: シェルピンスキーのギャスケット

$$\begin{aligned} \frac{3\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}_1} &= \left(\frac{2\ell_1}{\ell_1}\right)^{d_H} \\ d_H &\simeq 1.585... \end{aligned} \tag{7}$$

となる。したがって、このような fractal な空間の次元は非整数になることもある。

2.2 Spectral dimension

spectral dimension はある時空で random walk させたときの再帰確率から導ける次元である。再帰確率を $\mathcal{P}(\ell)$ とすると、spectral dimension は、

$$d_S(\ell) \equiv -\frac{d \ln \mathcal{P}(\ell)}{d \ln \ell} \tag{8}$$

と定義されるので、

$$\mathcal{P} \sim \ell^{-d_S} \tag{9}$$

という関係式が導ける。

2.3 Walk dimension

walk dimension は random walk させたときの平均二乗変位によって導ける次元である。ステップ数 n の平均二乗変位を $\langle \mathbf{r}^2(n) \rangle$ とすると、

$$\langle \mathbf{r}^2(n) \rangle \propto n^{-\frac{d_W}{2}} \tag{10}$$

という関係式が得られる。

また fractal 空間において、この 3 種類の次元は、

$$d_W = \frac{2d_H}{d_S} \tag{11}$$

という関係式を満たす。

3 Multifractional theories

Calcagni のアイデアから、multifractional theories で dimensional flow を説明していく (Calcagni 2017)。dimensional flow を実現させるために、

$$d^D x \to d^D q = \prod_{\mu}^{D} dq^{\mu} \tag{12}$$

のように measure を取り替える。ただし、D は位相次元であり、導入した座標は、

$$q(\ell) = \ell + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell_n}{\alpha} \mathrm{sgn}(\ell) \left| \frac{\ell}{\ell_n} \right|^{\alpha} F_n(\ell) \tag{13}$$

$$\sim \ell + \frac{1}{\alpha} \ell^{\alpha} \tag{14}$$

であり、

$$F_n(\ell) = 1 + A \cos\left(n \ln \left| \frac{\ell}{\ell_\infty} \right| \right) + B \sin\left(n \ln \left| \frac{\ell}{\ell_\infty} \right| \right) \tag{15}$$

とした。ここで、ℓ_∞ は planck scale での典型的な長さを表す。また、α は fractional 指数と呼ばれ、$0 < \alpha \leq 1$ であり、$\alpha = 1$ は fractal 時空でない場合を表す。新しく導入した measure を用いて体積を記述すると

$$\mathcal{V}(\ell) \sim \ell^{d_H} \sim \prod_{\mu}^{D} q^{\mu}(\ell) \tag{16}$$

となる。

(12) のように measure を取り替えたことで dimensional flow がどのように実現するかを示す。まず、$\mathrm{IR}(\ell \gg 1)$ の時を考える。(14) より第一項が効いてくるので $q \sim \ell$ となる。それにより、(16) から hausdorff dimension は

$$d_H \simeq D \tag{17}$$

となり、位相次元と一致する。

次に、$\mathrm{UV}(\ell \ll 1)$ の時を考える。(14) より第二項が効いてくるので $q \sim \ell^{\alpha}$ となる。それにより、(16) から hausdorff dimension は

$$d_H \simeq \alpha D \tag{18}$$

となり、位相次元よりも小さくなり、dimensional flow が実現する。

4 Conclusion

今回は、量子重力理論から示唆されている宇宙初期での dimensional flow を実現できる、multifractional theories についてのレビューを行った。そこでは、小スケールにおいてその有効次元が落ちるメカニズムが存在していて、例えば、$D = 4, \alpha = \frac{1}{2}$ の時の小スケールにおける hausdorff dimension は $d_H \simeq 2$ となることがわかった。これは、量子重力理論で示唆されている宇宙初期の有効次元が $(1+1)\mathrm{dim}$ であったことが記述できている。

今後は、この multifractional theories を用いて、インフレーション期における量子揺らぎを計算したい。また、その結果を用いて非等方インフレーションモデルとの比較や観測にどのような影響を及ぼすかについて考えていきたい。

Reference

G.Calcagni, JHEP 1703 (2017) 138.

S.Carlip，Quantum Grav. 34 (2017) 193001.

J.Ambjorn *et al.*, Phys. Rev. Lett. 95 (2005) 171301.

M.Rinaldi，Quantum Grav. 29 (2012) 085010.

G.Calcagni *et al.*, JCAP 08 (2016) 039.

——index

c23

——index

c24

K-mouflage タイプのスカラー場が与える星の内部への影響

那須　千晃 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

これまでの観測により、現在の宇宙が加速膨張していることが判明している。この加速膨張を説明するために、ダークエネルギーと呼ばれる未知の物質を導入する試みがある。しかし現時点では、このような物質が実在することを示す観測事実は存在しない。そこで、ダークエネルギーを導入せずに一般相対論を修正することで宇宙の加速膨張を説明するという試み（修正重力理論）が注目されている。これに含まれるものとして、一般相対論にスカラー場を加えるスカラー・テンソル理論が盛んに研究されている。
スカラー・テンソル理論においては、重力のほかにスカラー場によって引き起こされる力 (Fifth Force) がはたらくため一般相対論からの差異が生じる。このような差異は太陽系といった局所領域では発見されておらず、スカラー・テンソル理論はスクリーニング機構と呼ばれる Fifth Force を局所的に遮蔽する機構を備えている必要がある。
いくつかの機構がこれまでに研究されており、本講演ではスカラー場の一階微分によって局所領域において一般相対論の振る舞いを取り戻す K-Mouflage Gravity に着目した発表を行う。この理論は、太陽と同程度の質量を持つ星を考えたとき、星からおよそ 3500AU 離れたところまでは Fifth Force が抑制され、一般相対論と一致することがわかっている。ところが、K-Mouflage Gravity 理論において中性子星のような高密度領域での振る舞いは明らかでない。そこで、本講演では星の内部におけるスカラー場の運動方程式を数値的に解き、観測・実験と比較することで K-Mouflage Gravity 理論に含まれる未知のパラメータに対する新しい制限をかけられるかについて報告する。

1　Introduction

一般相対論にスカラー場を加えたスカラー・テンソル理論は、局所領域では一般相対論のように振る舞い、局所領域の外側では加速膨張を説明できるスクリーニング機構を備えている必要がある。
このような機構がはたらく境界は注目している重力場の強弱に関係している。例えば太陽系のような弱重力場では、スクリーニング機構がはたらく境界は太陽系をすっぽり覆ってしまうところにある。したがって、太陽系では Fifth Force が抑えられてしまい修正重力理論は一般相対論のように振舞う。ところが、中性子星のような強重力場では境界がどう変化するか明らかになっていない。もし境界が星の内部に定まれば、星にかかる重力は一般相対論での重力だけでなく Fifth Force が加わってしまう。
さらに、$c=1$、$\hbar=1$ の単位系では、スカラー場は質量と同じ次元を持つ。スカラー場を加えた修正重力理論では重力そのものが変化するため、一般相対論で説明するときに比べてより重力が強くなり星の半径や質量が変化すると考えられる。

2　K-mouflage Gravity

いくつかのスクリーニング機構がこれまでに研究されており、スカラー場の一階微分に着目した、スクリーニング機構がはたらく K-mouflage Gravity に着目する。それは、以下のような作用で表される理論である。

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{M_{Pl}^2}{2}R+\mathcal{L}_\phi(\phi)\right] \\ &\quad + \int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\rm m}(\psi_{\rm m}^{(i)},\tilde{g}_{\mu\nu}) \\ &= \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{M_{Pl}^2}{2}R+\mathcal{M}^4K\left(\chi\right)\right] \\ &\quad + \int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\rm m}(\psi_{\rm m}^{(i)},\tilde{g}_{\mu\nu}) \end{aligned} \tag{1}$$

ただし、

$$\chi=\frac{X}{\mathcal{M}^4},\quad X=-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2,\quad \tilde{g}_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}A^2(\phi) \tag{2}$$

である。このときの $g_{\mu\nu}$ を Einstein frame 計量と呼び、$\tilde{g}_{\mu\nu}$ を Jordan frame 計量と呼ぶ。Einstein frame でのエネルギー運動量テンソルを

$$T_{\mu\nu}=-2\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta\tilde{g}\mu\nu}\int d^4x\sqrt{-\tilde{g}}\mathcal{L}_{\mathrm{m}}(\psi_{\mathrm{m}}^{(i)},\tilde{g}_{\mu\nu})\frac{\partial\tilde{g}^{\mu\nu}}{\partial g^{\mu\nu}} \tag{3}$$

と定義し、Jordan frame でのエネルギー運動量テンソルを

$$\tilde{T}_{\mu\nu}=-2\frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}}\frac{\delta}{\delta\tilde{g}^{\mu\nu}}\int d^4x\sqrt{-\tilde{g}}\mathcal{L}_{\mathrm{m}}(\psi_{\mathrm{m}}^{(i)},\tilde{g}_{\mu\nu}) \tag{4}$$

と定義する。

Einstein frame でのアインシュタイン方程式は

$$M_{Pl}^2G_{\mu\nu}-g_{\mu\nu}\mathcal{M}^4K(\chi)-\frac{dK}{d\chi}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi=T_{\mu\nu}. \tag{5}$$

スカラー場の方程式は

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\partial^\mu\phi K'(\chi)\right)=-\frac{\beta}{M_{Pl}}g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}. \tag{6}$$

ただし、

$$\frac{d\ln A}{d\phi}=\frac{\beta}{M_{Pl}} \tag{7}$$

とする。

例えば太陽を考えたとき、この理論はニュートン極限のもとでスクリーニング機構のはたらく領域 r_k が

$$r_k=\left(\frac{\beta M_\odot}{4\pi M_{Pl}\mathcal{M}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

となる。観測からパラメータの値を決めることができ、太陽からおよそ 0.01pc 離れたところまでは Fifth Force

$$\boldsymbol{F}_\phi=-\frac{\beta}{M_{Pl}}\nabla_i\phi \tag{9}$$

が抑制され、この理論は一般相対論のように振舞うことがわかっている。

3 星の内部解

球対称静的な時空

$$ds^2=-e^{\nu(r)}dt^2+e^{\lambda(r)}dr^2+r^2d\Omega^2 \tag{10}$$

のもとで、完全流体

$$\tilde{T}_{\mu\nu}=diag(\tilde{\rho},\tilde{P},\tilde{P},\tilde{P}) \tag{11}$$

を考える。また、スカラー場の関数 $K(\chi)$ が

$$K(\chi)=-1+\chi+K_0\chi^3,\qquad K_0=const, \tag{12}$$

であるモデルを考える。このとき、scalar 場の方程式は以下のように修正される。同様に、修正されたアインシュタイン方程式の tt 成分は

$$\begin{aligned}&M_{Pl}^2\frac{e^\nu}{r^2}[r(1-e^{-\lambda})]' \\ &\quad+\mathcal{M}^4e^\nu(-1+\chi+K_0\chi^3)=A^4e^\nu\tilde{\rho}\end{aligned} \tag{13}$$

と書き換えられ、アインシュタイン方程式の rr 成分は

$$\begin{aligned}&M_{Pl}^2\left[\frac{\nu'}{r}-\frac{e^\lambda}{r^2}(1-e^{-\lambda})\right] \\ &\quad-\mathcal{M}^4e^\lambda(-1+\chi+K_0\chi^3) \\ &\quad-(1+3K_0\chi^2)\phi'^2=A^4e^\lambda\tilde{P}\end{aligned} \tag{14}$$

と修正される。また、エネルギー保存則の式は

$$\tilde{P}'+\frac{\nu'}{2}(\tilde{\rho}+\tilde{P})+\frac{\beta}{M_{Pl}}\nabla_r\phi(\tilde{P}+\tilde{\rho})=0 \tag{15}$$

と修正される。スカラー場の方程式は

$$\begin{aligned}&\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{2}\frac{d}{dr}(\nu\lambda)\right)\frac{d\phi}{dr}(1+3K_0\chi^2) \\ &+\frac{d^2\phi}{dr^2}(1+3K_0\chi^2)+3K_0\chi^4\frac{d^2\phi}{dr^2}=\frac{\beta}{M_{Pl}}A^2(\tilde{\rho}+3\tilde{P}).\end{aligned} \tag{16}$$

以上の方程式を、適当な状態方程式をおいて数値的に解くことで、星の内部解、および星の質量や大きさを求めることができる。

4 Discussion and Conclusion

本研究ではスクリーニング機構を持つスカラー・テンソル理論で相対論的星の解を求める。時間依存しないスカラー場を仮定したときの解を求めたが、より観測事実に即すような解を求めるためには、時間依存しているスカラー場を仮定する必要がある。

Acknowledgement

指導してくださったスタッフや先輩方に心から感謝いたします。また、ご支援くださった皆様に感謝申し上げます。

Reference

[1] E. Babichev, C. Deffayet and R. Ziour, Int. J. Mod. Phys. D **18**, 2147 (2009)

[2] A. Barreira, P. Brax, S. Clesse, B. Li and P. Valageas, Phys. Rev. D **91**, no. 12, 123522 (2015)

[3] P. Brax and P. Valageas, arXiv:1806.09414 [astro-ph.CO].

——index

c25

Positivity bound in modified gravity

平野　進一 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙項問題の回避や後期加速膨張の起源の 1 つとして、重力理論の修正を考える研究が盛んになされている。そのような重力理論では、微分結合を含むような "繰り込み不可能な " 相互作用が、宇宙論的に面白い予言を示したり、小スケールでの重力修正による効果を抑えるスクリーニング機構を働かせる。場の理論の描像ではこのような理論は、低エネルギーの有効場理論として 扱われる。修正重力理論は、高エネルギー領域における理論との整合性を問わない場合が多く、それらは現象論的な側面に重きが置かれがちである。本公演では、高エネルギー側の理論において慣習的に仮定されるいくつかの条件から、有効場理論としての修正重力理論に条件を課せることをレビューし [1,2]、あまたある修正重力理論の場の理論的な整合性を議論する。

1　Introduction

近年観測された宇宙の加速膨張を説明する、最も簡単な候補とされる宇宙項は、その起源を宇宙の真空期待値と捉えると観測との大きな矛盾を招く。この問題を解決する手法として、宇宙論的なスケールにおいて重力理論を修正する試みがなされている。これを「修正重力理論」と呼ぶ。特に、その修正の典型的なモデルとして、重力場の計量にスカラー場を加えた理論であるスカラーテンソル理論が知られている。その理論が現在の宇宙を記述するためには、宇宙論的なスケールにおいて加速膨張を説明し、太陽系スケールのような小スケールでは一般相対論から予言される理論予言を回復するスクリーニング機構を備えていることが最低限必要である。このスクリーニング機構は、大まかにスカラー場のポテンシャル項を用いるものと微分項を用いたものがある。後者は、「Vainshtein 機構」[3] と呼ばれ、最近盛んに研究されている高階微分理論 (例えば、Galileon[4]) に多く見られる性質であり、この機構の観測的な検証も多く議論されている。

一方で、場の量子論の立場に立つと、このような理論には結合定数が負の繰り込み不可能な演算子 (irrelevant operator) が含まれる。このような場合、場の理論における一つの見方として、有効場理論 (EFT) と捉える手法が挙げられる。例えば、重い場と軽い場が結合している系を考える。重い場の質量より十分低いエネルギースケールのダイナミクスのみに興味がある者は、重い場を integrate out した系を考えればいい。Integrate out した作用には、irrelevant operator が無数に現れるものの、それらは重い場の質量のべきで抑えられ、結果的に無視できる。素粒子標準模型の範囲では、QED の光子や Fermi 理論、Goldstone boson のダイナミクスなどがそれに当たる。修正重力理論にもこの立場を導入すれば、問題は解決される。例えば、massive gravity[5] はこれに基づいて理論を構成している。低エネルギー側の EFT の立場は明らかとなったが、高エネルギー側はどうなのだろうか。標準模型の範囲や超弦理論の枠内ではフルの理論がわかっているため、その状況は調べることができる。しかし、修正重力理論に代表されるようなモデルでは、高エネルギー側 (UV) の理論は未知である。

UV が未知であるからといって、これ以上理論的な整合性が要求できないわけではない。考えている系の状況や宇宙論的なシナリオにも依るところがあるが、**UV の理論が満たすべき仮定をすることで決定する EFT の整合性が存在する [1]**。これは"Positivity bound"と呼ばれ、標準模型の範囲での議論が基となり、massive Galileon や massive gravity ような修正重力理論モデルに対して、理論的な制限を与える [1,2]。

本集録では、2 章で UV の理論に課すべき要請を紹介し、3 章において positivity bound を導出する。4 章において、具体例として massive Galileon の場合

を紹介して、strong coupling や Vainshtein screening との関係をみる。5 章で以上の議論をまとめる。**細かな式の導出・説明は省くため、ポスター発表の際に聞いてほしい。**

2 Assumptions in UV theory

この章は、[1] に基づいている。慣例として、場の理論における UV complete theory に対して以下のことが成り立つことを要求している:

1. Lorentz symmetry
2. Locality: $\int dke^{ikx}\mathcal{A}(k)$ exists.
3. Causality: $[\mathcal{O}(x), \mathcal{O}(y)] = 0$ if $(x-y)^2$ is space-like.
4. Unitarity: $S^\dagger S = 1$.

$\mathcal{A}$ は散乱振幅, $\mathcal{O}(x)$ は任意の演算子, S は散乱行列である。超弦理論はもちろん、多くの高エネルギー理論はこの仮定を満たしている。これらの仮定のもと、EFT と UV theory に間にどのような整合性が成り立つのか議論していく。

3 Positivity bound

Massive scalar ϕ (質量 m) の 2-to-2 scattering を考え、そこから positivity bound を得る [2]。散乱過程は、Lorentz symm. と locality から CPT 定理が成り立っているので crossing である。最初に UV theory に課した仮定が EFT に影響するのかを述べておくと、EFT の散乱振幅を求める際に複素平面を経由するが、その面上では UV 側の寄与も入ってしまう。その結果、UV theory に課した仮定がもろに EFT 側に影響し、整合性の条件として positivity bound が得られる。

散乱振幅 $\mathcal{A}$ をマンデルスタム変数で表そう。s は重心系エネルギー。t は運動量移行で散乱角と $\cos\theta = 1 + \frac{2t}{s-4m^2}$ の関係にある。u はこれらに共役な量で $u = -s - t + 4m^2$ の関係にある。$\mathcal{A}$ は、部分波展開を用いると

$$\mathcal{A}(s,t) = 16\pi\sqrt{\frac{s}{s-4m^2}}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos\theta)a_l(s) \tag{1}$$

となる。Legendre polynomial の性質を用いれば、

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\mathrm{Im}[\mathcal{A}(s,t)]\Big|_{t=0} > 0,\ (\text{for } n \geq 0,\ s \geq 4m^2) \tag{2}$$

となる。Unitarity と causality を理論が有する場合に、散乱振幅は極とブランチカットを除いて、複素 s 平面上で解析的であるべきだと考えられている [6]。さらにこれが拡張され、fixed t での s 平面上における解析性が示されている (例えば、[7]):

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\mathrm{Im}[\mathcal{A}(s,t)] > 0,\ (\text{for } n \geq 0,\ s \geq 4m^2,\ 0 \leq t < 4m^2) \tag{3}$$

fixed t ($0 \leq t < 4m^2$) での散乱振幅の解析性から導かれる帰結を議論する。コーシーの積分定理より、$\mathcal{A}$ が解析的ならば、

$$\mathcal{A}(s,t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma ds'\ \frac{\mathcal{A}(s',t)}{s'-s} \tag{4}$$

と書ける。γ は clockwise contour で、$s' = m^2,\ u(s',t) = m^2$ に pole が、s', u に対してそれぞれ brunch cut をもつ。このことから、

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(s,t) = &\frac{\lambda}{m^2-s} + \frac{\lambda}{m^2-u}\\ &+ \frac{1}{\pi}\int_{4m^2}^{\infty} d\mu \left\{\frac{\mathrm{Im}[\mathcal{A}(\mu,t)]}{\mu - s} + \frac{\mathrm{Im}[\mathcal{A}(\mu,t)]}{\mu - u}\right\}\\ &+ \int_{R\to\infty} ds'\ \frac{\mathcal{A}(s',t)}{s'-s}\end{aligned} \tag{5}$$

$R \to \infty$ は上下半円の寄与を表し、branch cut 積分を得る際に、Schwarz reflection principle $\mathcal{A}(s^*, t) = \mathcal{A}^*(s,t)$ を用いている。$R \to \infty$ の寄与が一般に有限でないことを示しており、subtraction($\sim$ 微分) が２つ必要になる。s と u に対する crossing symmetry から、$\lambda = \mathrm{Res}_{u=m^2}\mathcal{A}(s,t) = -\mathrm{Res}_{s=m^2}\mathcal{A}(s,t)$ となり、scalar の場合は t に依存しない。

極は散乱振幅の解析性とは無関係であるため差っ引き、t の寄与の項をまとめ、扱いやすい変数を用い

れば、

$$\mathcal{B}(s,t) = b(t) + \frac{2v^2}{\pi}\int_{4m^2}^{\infty} d\mu\ \frac{\mathrm{Im}[\mathcal{A}(\mu,t)]}{(\bar{\mu}+\bar{t}/2)[(\bar{\mu}+\bar{t}/2)^2 - v^2]} \tag{6}$$

となる。ここで、$\bar{x} := x - 4m^2/3$ $(x = s,u,t)$, $v = \bar{s} + \bar{t}/2$ である。

次の量を定義する:

$$\begin{aligned} B^{(2N,M)}(t) &= \frac{1}{M!}\partial_v^{2N}\partial_t^{M}\mathcal{B}(v,t)\big|_{v=0} \text{ (for } N \geq 1) \\ &= \sum_{k=0}^{M}\frac{(-1)^k}{k!2^k} I^{(2N+k,M-k)}, \end{aligned} \tag{7}$$

$$I^{(q,p)}(t) = \frac{q!}{p!}\frac{2}{\pi}\int_{4m^2}^{\infty} d\mu\ \frac{\partial_t^p \mathrm{Im}[\mathcal{A}(\mu,t)]}{(\bar{\mu}+\bar{t}/2)^{q+1}} > 0. \tag{8}$$

I は unitarity (3) を使用して positivity が示されている。t 微分がない場合、

$$B^{(2N,0)}(t) = \sum_{k=0}^{0}\frac{(-1)^k}{k!2^k} I^{(2N+k,0-k)} = I^{(2N,0)}(t) > 0 \tag{9}$$

が成り立つ。特に、$t = 0$ の場合には $B^{(2N,0)}(0)$ が次の量の展開係数に対応している:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} ds'\ \frac{\mathcal{A}(s,0)}{(s'-s_p)^3} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B(s,0)}{\partial s^2}\bigg|_{s=s_p} \\ &= \sum_{N=1}^{\infty}\frac{s_p^{2N-2}}{2(2N-2)} B^{(2N,0)}(0) \\ &> 0 \ (0 \leq s_p < 4m^2). \end{aligned} \tag{10}$$

$\mathcal{C}$ は極を省いた counter 積分。この positivity bound が [] で導出され、inflation や modified gravity のモデルへの適用の走りとなった。t 微分ありの場合、式 (7) の右辺は $(-1)^k$ によって符号が反転しながら和をとっているので、少し複雑になる。次の量が positive になる:

$$\begin{aligned} &Y^{(2N,M)} := \sum_{r=0}^{M/2} c_r B^{(2N+2r,M-2r)} \\ &+ \frac{1}{\mathcal{M}^2}\sum_{k\ni\mathrm{even}}^{(M-1)/2}[2(N+k)+1]\beta_k Y^{(2(N+k),M-2k-1)} \\ &\geq I^{(2N,M)} > 0. \end{aligned} \tag{11}$$

$\mathcal{M}^2$ は I 中の被積分関数の分母の最小の $\bar{\mu}+\bar{t}/2$ である。UV 側の仮定から、$Y^{(2N,M)}$ の positivity が要求される。

ブランチカット積分が中間状態 (ループ) を含むことから、positivity bound の議論には EFT のすべての散乱の寄与が含まれる。EFT の cutoff scale を Λ_{th} とする。更に、EFT の各相互作用が"weak coupling" であることを仮定するならば、$4m^2 \leq \mu < \Lambda_{\mathrm{th}}^2$ にて生じるループの寄与はツリーレベルより高次の寄与となり無視することができる。したがって、

$$Y_{\mathrm{tree}}^{(2N,M)}(t,\Lambda_{\mathrm{th}}) > 0. \tag{12}$$

というのがツリーレベルまでを考慮した positivity bound である。ここで cut-off scale Λ_{th} を持ち出したために、EFT と mass scale からそれに対する新たな制限もつけることができる。

理論を特定せずに Y から決まるものを導出しておく。次の質量に依存しない croosing 不変な量を定義する:

$$x = -(\bar{s}\bar{t} + \bar{t}\bar{u} + \bar{u}\bar{s}) \ \left(= v^2 + \frac{3}{4}\bar{t}\right), \tag{13}$$

$$y = -\bar{s}\bar{t}\bar{u} \ \left(= \bar{t}v + \frac{3}{4}\bar{t}^3\right) \tag{14}$$

これらの変数を用いて B は、解析性から

$$B(s,t) = \sum_{n,m}\frac{a_{n,m}}{\Lambda^{4n+6m}}\bar{x}^n\bar{y}^m \tag{15}$$

と展開できる。これと $B^{(2N,M)}$ との対応は、

$$B^{(2N,M)} = (2N)!\sum_q \frac{d_q}{\Lambda^{4N+2M}} a_{N-M+3q,M-2q} \tag{16}$$

となる。d_q は、M, N によって決まる定数。Λ は、摂動論的ユニタリー性の破れるスケールとして導入した。$Y^{(2N,M)}$ の具体的な表式は式 (11) であったので、エネルギーの 8 乗のオーダーまで見てやると、

$$\begin{aligned} Y^{(2,0)} &= 2!\frac{d_0}{\Lambda^4}a_{1,0} > 0, \\ Y^{(2,1)} &= 2!\frac{d_0}{\Lambda^6}a_{0,1} + \frac{3}{2\Lambda_{\mathrm{th}}^2}2!\frac{d_0}{\Lambda^4}a_{1,0} > 0, \\ Y^{(4,0)} &= c_0 B^{(4,0)} = 4!\frac{d_0}{\Lambda^8}a_{2,0} > 0. \end{aligned}$$

ここから、展開係数 $a_{n,m}$ に対する関係式が得られる:

$$a_{1,0} > 0,\ a_{0,1} > -\frac{3\Lambda^2}{2\Lambda_{\rm th}^2}a_{1,0},\ a_{2,0} > 0. \tag{17}$$

ここから 2 つのシナリオが考えられる。$a_{0,1} > 0$ の場合は、特に珍しいことはない。$a_{0,1} < 0$ の場合、理論の cut-off である $\Lambda_{\rm th}$ を特徴づける不等式として、

$$\Lambda_{\rm th} < \frac{3a_{1,0}}{2|a_{0,1}|}\Lambda^2 \tag{18}$$

が得られる。つまり、Λ に行く前に EFT の cut-off scale がきて、heavy mode を含めた UV complete theory にシフトする必要があると言っている。

4 Eamples

具体例を見てみよう。Massive Galileon [8] Lagrangian は、

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_{\rm Gal} - \frac{1}{2}m^2\pi^2 \\ &= -\frac{1}{2}(\partial\pi)^2 - \frac{1}{2}m^2\pi^2 + \frac{g_3}{3!\Lambda^3}\pi[(\Box\pi)^2 - (\pi^\mu{}_\nu)^2] \\ &\quad + \frac{g_4}{4!\Lambda^6}\pi[(\Box\pi)^3 - 3\Box\phi(\pi^\mu{}_\nu)^2 + 2(\pi^\mu{}_\nu)^3] \\ &\quad + \frac{g_5}{5!\Lambda^9}\pi[(\Box\pi)^4 + \cdots].\end{aligned} \tag{19}$$

ここで、$\pi^\mu{}_\nu = \partial^\mu\partial_\nu\pi$。最低次の相互作用は、$g_3$ と g_4 の項で、g_5 の項はループになってしまう。散乱振幅を計算して得られる a 係数は、

$$\begin{aligned}a_{00} &= \frac{m^6}{\Lambda^6}\left(\frac{16g_4}{27} - \frac{295g_3^2}{144}\right), \\ a_{01} &= \frac{1}{\Lambda^6}\left(-\frac{g_4}{4} + \frac{3g_3^2}{16}\right), \\ a_{10} &= \frac{m^2}{\Lambda^6}\left(-\frac{g_4}{4} + \frac{3g_3^2}{8}\right).\end{aligned} \tag{20}$$

一方で、positivity bound は、

$$Y^{(2,0)} > 0 \ \leftrightarrow\ a_{10} + a_{01}\bar{t} > 0, \tag{21}$$

$$Y^{(2,1)} > 0 \ \leftrightarrow\ a_{01} + \frac{3}{2\Lambda_{\rm th}^2}(a_{10} + a_{01}\bar{t}) > 0. \tag{22}$$

上記の値を代入すると、g_4/g_3^2 の値によって上記の positivity bound (21),(22) が満たされるか分かれる。$g_4/g_3^2 \leq 7/8$ のときに満たされ、特に $3/4 < g_4/g_3^2 \leq 7/8$ の場合は $\Lambda_{\rm th}$ に対して $\Lambda_{\rm th}^2 < 6m^2(7/8 - g_4/g_3^2)/(g_4/g_3^2 - 3/4)$ という上限がつく。strong coupling scale の整合 [9] から $g_4/g_3^2 < 3/4$ が、Vainshtein 機構が働く要請 [4] から $g_4 \leq 0,\ g_3 > -\sqrt{g_4}$ が結合定数に課される。したがって、標準的な UV theory を持ち、宇宙論的にダークエネルギーとして振る舞える massive Galileon は $g_4/g_3^2 < 3/4$ を満たす。

5 Summary

UV 側の理論で標準的に課される 4 つの仮定: Lorentz symm., locality, causality, unitarity を満たすような EFT が満たすべき整合条件 “positivity bound” を導出し、具体例として主に massive Galileon を詳しく見た。結果、結合定数の組に対して整合条件を positivity bound からつけることができ、strong coupling scale の整合、Vainshtein 機構を有するような場合には、条件がさらに強まることを確認した。

Acknowledgement

夏の学校開催にご助力いただいた方々に、心より感謝申し上げます。著者は、JSPS 科研費 17J04865 の助成を受けています。

Reference

[1] A. Adams, et al., JHEP **0610** (2006) 014, [hep-th/0602178].

[2] C. de Rham, et al., Phys. Rev. D **96** (2017) no.8, 081702, [arXiv:1702.06134 [hep-th]].

[3] A. I. Vainshtein, Phys. Lett. **39B** (1972) 393.

[4] A. Nicolis, et al., Phys. Rev. D **79** (2009) 064036, [arXiv:0811.2197 [hep-th]].

[5] C. de Rham, et al., Phys. Rev. Lett. **106** (2011) 231101, [arXiv:1011.1232 [hep-th]].

[6] S. Mandelstam, Phys. Rev. **112** (1958) 1344.

[7] A. Martin, Nuovo Cim. A **42** (1965) 930.

[8] C. de Rham, et al., JHEP **1709** (2017) 072, [arXiv:1702.08577 [hep-th]].

——index

c26

一般化された境界条件を用いた反ドジッター時空の不安定性解析

片桐 拓弥 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

反ドジッター時空 (AdS) は、境界においてエネルギーの散逸を失くす境界条件のもとで摂動を与えると不安定になりうることが知られている。不安定性の機構は複数知られており、それらの多くの先行研究は Dirichlet 境界条件を用いた。しかし、AdS の境界にはより一般的な境界条件を課すことができる (Ishibashi&Wald(2004)[1]) ため、先行研究の多くが限定的な結論である。AdS_3 において、一般化された境界条件のもとで質量を持つスカラー場の運動を考えると、ある範囲の質量を持つスカラー場は特定の境界条件において成長モードを持つことが、Ferreira&Dappiaggi&Herdeiro(2018)[2] によって明らかとなった。この不安定性は、既に知られた不安定性と異なる性質を持つものである。本研究では、[2] とは異なる方法で同様の不安定性の存在を明らかにした。

1 Introduction

AdS は、負の宇宙項を持つ Einstein 方程式の解であり、最大対称空間である。$\mathrm{AdS}_{d+1}/\mathrm{CFT}_d$ 対応の観点から、d 次元強結合ゲージ理論の理解へ繋がる点で AdS_{d+1} における重力の振る舞いが注目されている。また、一般相対論の観点から、不安定性をはじめとした AdS の振る舞いの解析は重力の新たな理解へ繋がると期待される。

AdS には、空間的無限遠に時間的な境界が存在する。この境界においてエネルギーの散逸を失くすような境界条件を課すことで、摂動を与えた AdS は不安定となりうることが知られている (Superradiant Instability、Turbulent Instability[3])。特に、Turbulent Instability は重力の乱流的な振る舞いを示し、重力の持つ新たな側面を明らかにした。

これらの先行研究で用いられた境界条件の多くは Dirichlet 境界条件であり、得られた結論は限定的なものである。そして近年、より一般的な境界条件を用いた研究が行われている。このような境界条件の一般化は、より広い視点からの AdS の理解を可能にし、統一的な見通しを与える。

本研究では、[2] が示したある範囲の質量を持つスカラー場がもたらす AdS_3 の不安定性と境界条件の関連を、[2] とは異なる方法で示した。

2 Poincare patch of AdS_3

AdS_3 は、次の拘束条件

$$-{X_0}^2 - {X_1}^2 + {Z_2}^2 + {X_3}^2 = -\ell^2 \tag{1}$$

を満たす

$$ds^2 = -d{X_0}^2 - d{X_1}^2 + d{X_2}^2 + d{X_3}^2 \tag{2}$$

の双曲空間として定義される。ただし、$\ell \equiv \sqrt{-\frac{1}{\Lambda}}$ は AdS 半径である。そして、(2) 式の時空で次のような座標系をとる。

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{\ell}{z}t \\ X_1 &= \frac{\ell}{z}x \\ X_2 &= \ell(\frac{1-z^2}{2z} + \frac{-t^2+x^2}{2z}) \\ X_3 &= \ell(\frac{1+z^2}{2z} - \frac{-t^2+x^2}{2z}) \end{aligned} \tag{3}$$

(3) で与える座標をポアンカレ座標と呼ぶ。ただし、$t \in (-\infty, \infty), z \in (0, \infty), x \in [0, 2\pi)$ である。そして、ポアンカレ座標は次の時空を覆う。

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{z^2}(-dt^2 + dz^2 + dx^2) \tag{4}$$

ポアンカレ座標が覆う領域をポアンカレパッチと呼び、空間的無限遠である $z = 0$ に時間的な境界が存在する。

3 Massive scalar field on AdS_3

AdS_3 において、重力と非最小結合する質量 m_0 のスカラー場 $\Phi(t,z,x)$ の運動を考える。

$$(\Box - \frac{m_0^2}{\ell^2} - \xi R)\Phi(t,z,x) = 0 \tag{5}$$

ただし、ξ, R は重力とスカラー場の結合定数、スカラー曲率である。そして、Fourier モード $\phi_{\omega k}(z)$ を考えると

$$(-\frac{d^2}{dz^2} + \frac{\mu^2+\frac{3}{4}}{z^2})\phi_{\omega k}(z) = (\omega^2 - k^2)\phi_{\omega k}(z) \tag{6}$$

となる。ここで、有効質量 $\mu^2 = m_0^2 + \xi\ell^2 R$、$\omega > 0$ とする。また、AdS_3 においてスカラー場のエネルギーが正定値をとるために、$\mu^2 \geq -1$ とする (Breitenlohner-Freedman bound)。更に、$\nu^2 - \frac{1}{4} = \mu^2 + \frac{3}{4}$、$\lambda = \omega^2 - k^2$ とすると、

$$\hat{L}\phi_{\omega k}(z) = (-\frac{d^2}{dz^2} + \frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{z^2})\phi_{\omega k}(z) = \lambda\phi_{\omega k}(z) \tag{7}$$

となる。$\hat{L}$ はヒルベルト空間の演算子であり、この固有値方程式を解くことでスカラー場の運動を理解できる。また、その固有関数は $L^2(0,\infty)$ に属する。

本研究では、後に定義する一般化された境界条件を課すことが出来る $\nu \in (0,1)$ の範囲に注目する。この場合、ある種の境界条件のもとで $\lambda < 0$ の固有値のみが存在することが [1] によって明らかになっている。

3.1 Prinsipal solutions

$\nu \in (0,1)$ では、$z^{1/2}J_\nu(zs), z^{1/2}J_{-\nu}(zs)$ の二つの線型独立な解が存在する。ここで、$\lambda = s^2$ であり J_ν はベッセル関数を表す。したがって、$z \in [0,\infty]$ の固有関数はこれらの線型結合で表すことができる。

固有関数を、$z \in (0,\infty)$ における基本解系 $\{\psi(z), \theta(z)\}$ の線型結合で表すことを考える。そして、本研究で考える問題において、基本解系に対して次の定理が成立する。

定理

a$\in (0,\infty)$ において、

$$\psi(a) = 0 \quad \psi^{'}(a) = -1$$
$$\theta(a) = 1 \quad \theta^{'}(a) = 0$$

を満たす基本解系 $\{\psi(z), \theta(z)\}$ が存在する。

ただし、$' \equiv \frac{d}{dz}$ とする。この定理から、次の基本解系が存在することが保証される。

$$\psi(z) = -\frac{\pi a^{1/2} z^{1/2}}{2\sin\nu\pi}[J_\nu(zs)J_{-\nu}(as) - J_{-\nu}(zs)J_\nu(as)] \tag{8a}$$

$$\theta(z) = -\frac{\pi s a^{1/2} z^{1/2}}{2\sin\nu\pi}[J_\nu(zs)J^{'}_{-\nu}(as) - J_{-\nu}(zs)J^{'}_\nu(as)] + \frac{\psi(z)}{2a} \tag{8b}$$

$z \in [0,a], z \in [a,\infty]$ の範囲における解は、(8) 式の線型結合で書くことができる。そして、$z = a$ でそれぞれの解を接続することで、$z \in [0,\infty]$ における固有値 λ を得る。

(1)$z \in [0,a]$

$z \in [0,a]$ の解 $\phi_1(z)$ を、次のように表す。

$$\phi_1(z) \propto \theta(z) + m_1\psi(z) \tag{9}$$

ただし、$m_1 \in \mathbb{C}$ である。
スカラー場の運動と境界条件の関連を得るために、$z = 0$ において次の Robin 境界条件 [4] を課す。

$$\lim_{z\to 0}[\cos(\alpha)\mathcal{W}\{\phi_1, s^{-\nu}z^{1/2}J_\nu(zs)\} + \sin(\alpha)\mathcal{W}\{\phi_1, s^{\nu}z^{1/2}J_{-\nu}(zs)\}] = 0 \tag{10}$$

ただし、$\mathcal{W}$ はロンスキアン、$\alpha \in [0,\pi)$ である。Robin 境界条件は、Dirichlet 境界条件と Neumann 境界条件を包括するため、(7) 式を解く上で最も一般化された境界条件である。この境界条件は、$z \to 0$ で $z^{1/2}J_\nu(zs), z^{1/2}J_{-\nu}(zs)$ が $L^2(0,a)$ に属する $\nu \in (0,1)$ の範囲で有効である。そして、α の値を定めることが、課す境界条件を選択することに対応する。また、この境界条件は $z = 0$ におけるスカラー場のエ

ネルギーフラックスを失くすため、AdS の境界においてエネルギーの散逸は存在しない。

そして、(9) 式に Robin 境界条件を課すことで、m_1 を得る。

$$m_1 = -s\frac{\cot(\alpha)J'_{\nu}(as) - s^{2\nu}J'_{-\nu}(as)}{\cot(\alpha)J_\nu(as) - s^{2\nu}J_{-\nu}(as)} - \frac{1}{2a} \quad (11)$$

(2)$z \in [a, \infty]$

$z \in [a, \infty]$ の解 $\phi_2(z)$ を、次のように表す。

$$\phi_2(z) \propto \theta(z) + m_2\psi(z) \quad (12)$$

ただし、$m_2 \in \mathbb{C}$ である。

$\nu \in (0,\ 1\ )$ の場合、$z \to \infty$ で $L^2(a, \infty)$ に属する解は、

$$z^{1/2}H^{(1)}_\nu(zs) \quad (13)$$

である。ただし、$H^{(1)}_\nu$ は第 1 種ハンケル関数である。そして、(12) 式が $z \to \infty$ で (13) 式に漸近するための条件として、次の関係が得られる。

$$m_2 = -s\frac{H^{(1)'}_\nu(as)}{H^{(1)}_\nu(as)} - \frac{1}{2a} \quad (14)$$

3.2 Eigenvalue

$z = a$ において、(9) 式と (12) 式を接続することで次の関係を得る。

$$\frac{\cot(\alpha) - s^{2\nu}e^{-i\nu\pi}}{H^{(1)}_\nu(as)\{\cot(\alpha)J_\nu(as) - s^{2\nu}J{-}\nu(as)\}} = 0 \quad (15)$$

本研究において興味があるのは、$\lambda = s^2 < 0$ の場合である。したがって、$s \in \mathbb{C}$ である。そして、$\rho \in \mathbb{R}$ を用いて $s = i\rho$ とすると、次の関係が得られる。

$$\rho = \cot^{1/2\nu}(\alpha) \quad (16)$$

最後に (16) 式から、(7) 式の固有値 λ を次のように得る。

$$\lambda = -\cot^{1/\nu}(\alpha) \quad (17)$$

ただし、$\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ である。

4 Results

(17) 式を ω について解くと、

$$\omega = \sqrt{k^2 - \cot^{1/\nu}(\alpha)} \quad (18)$$

を得る。(18) 式から、k と α の値によって ω が純虚数を取りうることがわかる。次の図 1 は、境界条件と ω の虚部の関係を表している。

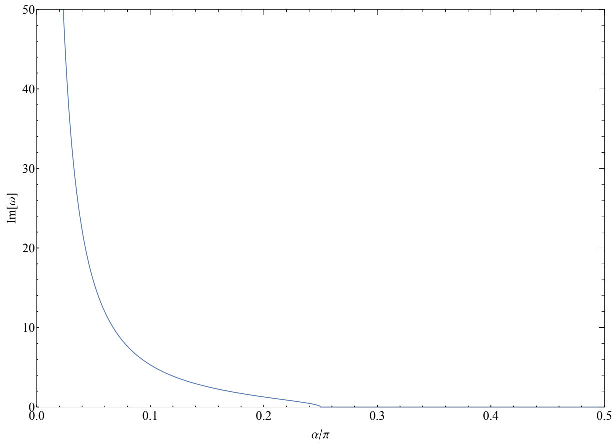

図 1: 境界条件と成長 mode の関係 ($k = 1$,$\nu = 1/3$)

この事実は、境界条件に依存した AdS_3 の不安定性の存在を示す。

5 Conclusion

本研究では、$\mu^2 \in (-1, 0)$ の範囲の有効質量を持つスカラー場は、ある種の境界条件において AdS_3 に不安定性をもたらすことを明らかにした。これは、[2] の示した結論と一致する。また、既に知られた AdS の不安定性である Turbulent Instability は非線形摂動によるものであるが、本研究は線形摂動の範囲である点で性質が異なる。更に、この一般化された境界条件のもとで漸近的 AdS_3 のブラックホール解である BTZ 時空における Superradiant Instability を解析した結果、ブラックホールに正のエネルギーを流入させる機構の存在が [2] によって明らかにされている。しかし、この不安定性の詳細な理解は得られていない。不安定性をもたらす機構と、その後に行き着く時空の解析が今後の課題である。

Acknowledgement

第 48 回天文・天体物理若手夏の学校の運営にご賛同頂き、ご支援下さった機関及び個人の方々に感謝いたします。また、議論や研究指導、研究生活における様々な場面でお世話になっている方々に感謝申し上げます。

Reference

[1] A. Ishibashi and R. M. Wald, Class. Quant. Grav. **21**, 2981 (2004)

[2] C. Dappiaggi, H. R. C. Ferreira and C. A. R. Herdeiro, Phys. Lett. B **778**, 146 (2018)

[3] P. Bizon and A. Rostworowski, Phys. Rev. Lett. **107**, 031102 (2011)

[4] C. Dappiaggi and H. R. C. Ferreira, Phys. Rev. D **94**, no. 12, 125016 (2016)

[5] E.C.Titchmarsh, Oxford University Press,(1962),

——index

c27

Holographic entanglement negativity conjecture for adjacent intervals in AdS_3/CFT_2

辻村 潤 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

Quantum entanglement を測る代表的なものには entanglement entropy(EE) があり, 2006 年に笠-高柳によって CFT の EE が AdS 時空で対応する極小局面の面積によって計算できるという予想が発表された (S. Ryu & T. Takayanagi 2006). Entanglement を測る量は EE に限らず entanglement negativity(EN) もその一つであるが, CFT の negativity を, 対応する AdS 時空でどのように計算できるかは完全に理解されておらず, (P. Jain et al. 2017) では CFT の large central charge limit での隣接した 2 つの区間の EN を, 対応する AdS 時空での計算方法の予想がなされており, 真空の非有界な系, 有限な系, 有限温度の非有界な系について CFT の結果を再現している. またこれによって計算された EN は対応する mutual information と一致する.

1 Introduction

Quantum entanglement を測る代表的なもの量として entanglement entropy(EE) が知られており, 2006 年に笠-高柳によって CFT の EE が AdS 時空で対応する極小局面の面積によって計算できるという予想が発表された (S. Ryu & T. Takayanagi 2006). Entanglement を測る量は EE に限らないし, EE は熱的な entropy の寄与も含むので他の量と同様に entanglement を単純に定量化するわけではない.

Entanglement negativity(EN), 特に logarithmic entanglement negativity は entanglement mesure の一つでこれは distillable entanglement の上限を与える量で, 熱的な寄与を含まない. CFT の EN を, 対応する AdS 時空でどのように計算できるかという問いは自然であり未だ完全に理解されていない. この review では隣接した 2 つの区間についての考察を行う.

A_1, A_2 を部分系, $A = A_1 \cup A_2$ として, $A_1, A_2, B = A^c$ の 3 つに分割された系を考える.A の Hilbert 空間を $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, さらに $\mathcal{H}_a$ の基底を $e_i^{(a)}$ とする. A の density matrix を ρ_A とし, その partial transpose $\rho_A^{T_2}$ を次のように定義する.

$$\left\langle e_i^{(1)} e_j^{(2)} \middle| \rho_A^{T_2} \middle| e_k^{(1)} e_l^{(2)} \right\rangle = \left\langle e_i^{(1)} e_l^{(2)} \middle| \rho_A \middle| e_k^{(1)} e_j^{(2)} \right\rangle \quad (1)$$

すると Logarithmic negativity $\mathcal{E}$ は次のように定義される.

$$\mathcal{E} = \log \left[\mathrm{tr} \left| \rho^{T_2} \right| \right] \quad (2)$$

ここで $\mathrm{tr} \left| \rho^{T_2} \right|$ は ρ^{T_2} の固有値の絶対値の和である.

2 EN in CFT_2

図 1 で表されるような 1 次元系について考える. QFT では $\mathrm{tr}\,(\rho)$ は replica trick によって計算され (P. Calabrese & J. Cardy 2004), 特に絶対零度の 1+1 次元系の場合, $A_1 = [u_1, v_1], A_2 = [u_2, v_2]$ の density matrix ρ_A は twist operator $\mathcal{T}_n, \tilde{\mathcal{T}}_n$ の 4 点関数として表現できる (J.L. Cardy et al. 2007).

$$\mathrm{tr}\,(\rho_A) = \lim_{n \to 1} \langle \mathcal{T}_n(u_1) \tilde{\mathcal{T}}_n(v_1) \mathcal{T}_n(u_2) \tilde{\mathcal{T}}_n(v_2) \rangle \quad (3)$$

同様にして $\mathrm{tr} \left| \rho^{T_2} \right|$ も replica trick によって計算することができる (P. Calabrese et al. 2012). まず n_e

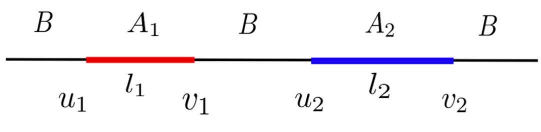

図 1: 2 つの区間 (P. Jain et al. 2017)

を偶数として

$$\mathrm{tr}\left|\rho^{T_2}\right| = \lim_{n_e\to 1}\mathrm{tr}\left[\left(\rho^{T_2}\right)^{n_e}\right] \tag{4}$$

であるから

$$\mathrm{tr}\left|\rho^{T_2}\right| = \lim_{n_e\to 1}\langle\mathcal{T}_{n_e}(u_1)\tilde{\mathcal{T}}_{n_e}(v_1)\tilde{\mathcal{T}}_{n_e}(u_2)\mathcal{T}_{n_e}(v_2)\rangle \tag{5}$$

を計算すれば良い.

この様な量の計算は CFT_2 の場合非常に簡単にできる. CFT_2 は非常に対称性が良い理論なので Ward-Takahashi identity から 2 点関数, 3 点関数は含まれる演算子の scaling dimension のみでほとんど決まってしまい以下の様に表せる.

$$\langle\mathcal{O}_1(u)\mathcal{O}_2(v)\rangle \propto |u-v|^{-\Delta_1-\Delta_2} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{O}_1(u)\mathcal{O}_2(v)\mathcal{O}_3(w)\rangle &\propto |u-v|^{\Delta_3-\Delta_1-\Delta_2}\\ &\times|v-w|^{\Delta_1-\Delta_2-\Delta_3}|w-u|^{\Delta_2-\Delta_3-\Delta_1}\end{aligned} \tag{7}$$

ここで Δ_i は $\mathcal{O}_i$ の scaling dimension である.

以下では図 2 の系, すなわち eq.(5) で $v_1=u_2$ とした 3 点関数の場合を考えることにすると以下の量を考えればよい.

$$\mathrm{tr}\left|\rho^{T_2}\right| = \langle\mathcal{T}_{n_e}(-l_1)\tilde{\mathcal{T}^2}_{n_e}(0)\mathcal{T}_{n_e}(l_2)\rangle \tag{8}$$

ここで, $l_1=v_1-u_1, l_2=v_2-u_2$ とした. $\mathcal{T}_{n_e},\tilde{\mathcal{T}}_{n_e}$ の scaling dimension は CFT_2 の解析からわかり, $\tilde{\mathcal{T}}^2_{n_e}$ については pure state についての解析から知ることができて,

$$\Delta_{\mathcal{T}_n} = \Delta_{\tilde{\mathcal{T}}_n} = \frac{c}{24}\left(n-\frac{1}{n}\right) \tag{9}$$

$$\Delta_{\mathcal{T}^2_{n_e}} = \Delta_{\tilde{\mathcal{T}^2}_{n_e}} = \frac{c}{12}\left(\frac{n_e}{2}-\frac{2}{n_e}\right) \tag{10}$$

である. ここで c は central charge で場の種類による定数である.

以上から EN は以下のように表せる.

$$\mathcal{E} = \frac{c}{4}\log\frac{l_1 l_2}{(l_1+l_2)a} + const. \tag{11}$$

ここで a はその逆数が運動量の cut off であるような定数である. また $const.$ 項は twist operator や場などの詳細に依存する.

以上は絶対零度の非有界な系での隣接した区間の EN の導出であった. この他にも絶対零度の有界な系でのものや有限温度での非有界な系でのものも CFT_2 の良い性質のため eq.(11) に帰着できて結果は以下の通りである (P. Jain et al. 2017).

・絶対零度, 系の大きさが L の場合

$$\mathcal{E} = \frac{c}{4}\log\left[\frac{L}{\pi a}\frac{\sin\frac{\pi l_1}{L}\sin\frac{\pi l_2}{L}}{\sin\frac{\pi(l_1+l_2)}{L}}\right] + const. \tag{12}$$

・系の逆温度が β の時

$$\mathcal{E} = \frac{c}{4}\log\left[\frac{\beta}{\pi a}\frac{\sinh\frac{\pi l_1}{\beta}\sinh\frac{\pi l_2}{\beta}}{\sinh\frac{\pi(l_1+l_2)}{\beta}}\right] + const. \tag{13}$$

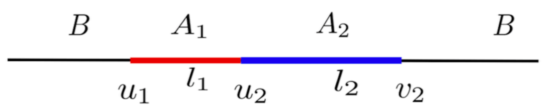

図 2: 繋がった 2 つの区間 (P. Jain et al. 2017)

3 HEN for adjacent interval

図 2 の系の large c limit での Holographic entanglement negativity(HEN) を導入する. まず eq.(9), (10) から

$$\Delta_{\mathcal{T}^2_{n_e}} = 2\Delta_{\mathcal{T}_{\frac{n_e}{2}}} \tag{14}$$

であることに注意すると eq.(6) を使って eq.(7) が次のように変形できることに注意する.

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{T}_{n_e}(u)\tilde{\mathcal{T}}^2_{n_e}(v)\mathcal{T}_{n_e}(w)\rangle &\propto \langle\mathcal{T}_{n_e}(u)\tilde{\mathcal{T}}_{n_e}(w)\rangle\\ &\times\frac{\langle\mathcal{T}_{\frac{n_e}{2}}(u)\tilde{\mathcal{T}}_{\frac{n_e}{2}}(v)\rangle\langle\mathcal{T}_{\frac{n_e}{2}}(v)\tilde{\mathcal{T}}_{\frac{n_e}{2}}(w)\rangle}{\langle\mathcal{T}_{\frac{n_e}{2}}(u)\tilde{\mathcal{T}}_{\frac{n_e}{2}}(w)\rangle}\end{aligned} \tag{15}$$

ここで (S. Ryu & T. Takayanagi 2006) によると large c limit では

$$\langle\mathcal{T}_n(u)\tilde{\mathcal{T}}_n(v)\rangle \sim \exp\left(-\frac{\Delta_{\mathcal{T}_n}}{R}\mathcal{L}_{uv}\right) \tag{16}$$

ただし R は AdS 時空の半径で, $\mathcal{L}_{uv}$ は区間 $[u,v]$ に対応する測地線の長さである. すると eq.(15) は

$$\langle \mathcal{T}_{n_e}(u)\tilde{\mathcal{T}}^2_{n_e}(v)\mathcal{T}_{n_e}(w)\rangle \sim \exp\left[\frac{-\Delta_{\mathcal{T}_{n_e}}\mathcal{L}_{uw}-\Delta_{\mathcal{T}_{\frac{n_e}{2}}}\left(\mathcal{L}_{uv}+\mathcal{L}_{vw}-\mathcal{L}_{uw}\right)}{R}\right] \tag{17}$$

となり, HEN は次のように表現できると予想できる.

$$\mathcal{E}=\frac{3}{16G^{(3)}}\left(\mathcal{L}_{uv}+\mathcal{L}_{vw}-\mathcal{L}_{uw}\right) \tag{18}$$

ただし $G^{(3)}$ を 3 次元の重力定数として (J.D. Brown & M. Henneaux 1986) の次の関係を用いた.

$$c=\frac{3R}{2G^{(3)}} \tag{19}$$

特に笠-高柳によると eq.(18) は holographic entanglement entropy を用いると mutual information $\mathcal{I}(A_1,A_2)$ と次の関係にある.

$$\mathcal{E}=\frac{3}{4}\left(S_{A_1}+S_{A_2}-S_{A_1\cup A_2}\right)=\frac{3}{4}\mathcal{I}(A_1,A_2) \tag{20}$$

また eq.(20) は一般に $\mathrm{AdS}_{d+1}/\mathrm{CFT}_d$ で成り立つと予想できる.

In the vacuum

Eq.(18) を実際の系に適用する. まず絶対零度で非有界な系の中の隣接した区間について考える. このとき AdS_3 の計量は次のように与えられる.

$$ds^2=-\frac{r^2}{R^2}dt^2+\frac{R^2}{r^2}dr^2+\frac{r^2}{R^2}dx^2 \tag{21}$$

すると CFT_2 での区間 $[u,v]$ に対応する測地線の長さは UV cut off a^{-1} を用いて

$$\mathcal{L}_{uv}=2R\log\left[\frac{v-u}{a}\right] \tag{22}$$

となるから図 2 の系に対して

$$\mathcal{E}=\frac{3}{8G^{(3)}}\log\left[\frac{l_1l_2}{(l_1+l_2)a}\right] \tag{23}$$

となって実際に eq.(11) の large c limit と一致する.

Finite sized system or finite temperature

次に絶対零度で系の大きさが有限の場合と有限温度で系の大きさが非有界の場合について eq.(17) を適用する.

まず絶対零度で空間方向の長さが L の有界な系の場合, AdS_3 の計量は次のように与えられる.

$$ds^2=R^2\left(-\cosh^2\rho\ dt^2+d\rho^2+\sinh^2\rho\ d\phi^2\right) \tag{24}$$

このとき ϕ は周期 2π である. すると対応する測地線の長さは

$$\mathcal{L}_{uv}=2R\log\left[\frac{L}{\pi a}\sin\frac{\pi(v-u)}{L}\right] \tag{25}$$

となるから EN は

$$\mathcal{E}=\frac{3}{8G^{(3)}}\log\left[\frac{L}{\pi a}\frac{\sin\frac{\pi l_1}{L}\sin\frac{\pi l_2}{L}}{\sin\frac{\pi(l_1+l_2)}{L}}\right] \tag{26}$$

となる.

一方で逆温度 β で非有界な系の場合, AdS_3 の計量は次のように与えられる.

$$ds^2=-\frac{(r^2-r_h^2)}{R^2}d\tau^2+\frac{R^2}{(r^2-r_h^2)}dr^2+\frac{r^2}{R^2}d\phi^2 \tag{27}$$

対応する測地線は

$$\mathcal{L}_{uv}=2R\log\left[\frac{\beta}{\pi a}\sin\frac{\pi(v-u)}{\beta}\right] \tag{28}$$

となるから EN は

$$\mathcal{E}=\frac{3}{8G^{(3)}}\log\left[\frac{\beta}{\pi a}\frac{\sin\frac{\pi l_1}{\beta}\sin\frac{\pi l_2}{\beta}}{\sin\frac{\pi(l_1+l_2)}{\beta}}\right] \tag{29}$$

となる.

Eq.(26), (29) は eq.(19) を用いれば確かに large c limit で eq.(12), (13) に一致している.

4 Conclusion

隣接した 2 つの区間の CFT_2 での EN を AdS_3 で計算する公式が eq.(18) であると予想した. これは実際, 絶対零度で非有界な系, 絶対零度で有界な系, 有限温度で非有界な系の 3 つの状況において CFT_2 の結果を再現することができた. 特にこの結果は対応する mutual information に比例することがわかった. 従ってこの結果は $\mathrm{AdS}_{d+1}/\mathrm{CFT}_d$ でも隣接した領域についてはこれを一般化した式が成立すると予想ができる.

以上の結果は隣接した 2 つの区間についての結果であり, 2 次元の場合でも離れた区間についての場合や, 高次元の場合の一般的な領域についての holographic な公式は全く不明である.

Reference

S. Ryu & T. Takayanagi 2006, Phys. Rev. Lett. 96 (2006) 181602, arXiv:hep-th/0603001 [hep-th].

P. Jain, V. Malvimat, S. Mondal, & G. Sengupta 2017, arXiv:1707.08293 [hep-th].

P. Calabrese & J. Cardy 2004, arXiv:hep-th/0405152

J.L. Cardy, O.A. Castro-Alvaredo, B. Doyon 2007, arXiv:0706.3384 [hep-th]

P. Calabrese, J. Cardy, & E. Tonni 2012, arXiv:1206.3092 [cond-mat.stat-mech]

J.D. Brown & M. Henneaux 1986, Commun. Math. Phys. 104, 207

——index

c28

Proca star

遠藤 洋太 (大阪市立大学大学院 理学研究科)

Abstract

一般によく知られているベクトル場は Maxwell 場であるが、Maxwell 場は質量をもたない。ベクトル場に質量を仮定して、質量を持つベクトル場を考える。そのようなベクトル場は Proca 場と呼ばれ、その Proca 場から構成される重力理論を考える。このような条件の下で運動方程式 (Einstein Proca 方程式) を導出し時空構造を調べていく。

文献 [Richard Brito et al. (2016)] では時空を球対称、軸対称とそれぞれ仮定することで Einstein Proca 方程式を数値的に解き、スカラーボゾン場の場合と比較しながら、星とみなせる集合体が形成される条件を示している。また、その時空の安定性を得られた時空の metric に摂動的な効果を加えることで数値的に論じている。

本発表では、Einstein Proca 方程式の球対称の場合の数値解を Mathematica を用いて導出し、その解が持つ意味を解析する。さらにこのモデルはダークマターやブラックホールの候補としても考えてられており、そのことについても簡単に述べる。

1 Introduction

最新の宇宙論では宇宙の 26 %が dark matter で出来ておりその詳細はよく分かってない。現在 dark matter の候補となるモデルはいくつも存在する。1 つのアプローチとして Proca 場 (massive vector 場) に注目する。この場は macro な視点では重力的に Bose-Einstein 凝縮を起こす。重力にバウンドされた boson の構造は dark matter と関係がある。dark matter 候補として (scalor) Bose-Einstein 凝縮を調べることは Newtonian 近似から示される。相対論の範囲ではそのような粒子は引力を持つ soliton 解 (場が局在するような解 : scalar bosonic stars) となる。この object は宇宙論での black hole 的な object から TeV レベルの重力のシナリオまで応用できる。

2 Einstein Proca equation

始めに、Proca 場とは、質量を持つ vector 場のことである。今回は複素の Proca 場が重力と相互作用する場合の理論について考えていく。この理論を考察する上での必要となる物理量、方程式を定義する。

まず、作用として

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}\bar{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mu_0^2 A_\mu \bar{A}^\mu\right) \tag{1}$$

とする理論を考える。このとき、運動方程式は、

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= 8\pi G T_{\mu\nu} \\ \nabla_\alpha F^{\alpha\beta} &= \mu_0^2 A^\beta \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = &-F_{\alpha(\mu}\bar{F}_{\nu)}{}^{\alpha} - \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}\bar{F}^{\alpha\beta}g_{\mu\nu} \\ &+ \mu_0^2\left(A_{(\mu}\bar{A}_{\nu)} - \frac{1}{2}A_\lambda \bar{A}^\lambda g_{\mu\nu}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

これが今回考える Einstein Proca 方程式である。

またこの Lagrangian は global U(1) 変換 $A_\mu \to e^{-i\alpha}A_\mu$ に対する対称性を持っているので、Noether current が存在して

$$j^\alpha = \frac{i}{2}\left[\bar{F}^{\alpha\beta}A_\beta - F^{\alpha\beta}A_\beta\right] \tag{4}$$

この current から Noether charge を構成すると

$$Q = \int_{\text{spacelikeslice}} d^3x\sqrt{-g}j^0 \tag{5}$$

以上が解析的な物理量、方程式の導出である。

3 Numerical solution

Einstein Proca 方程式は非線形偏微分方程式であるので一般に解くのは容易ではない。そこで球対称時空を仮定してこの方程式を数値的に解いていくこととする。

3.1 ansatz

球対称時空：

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\sigma^2(r)\left(1-\frac{2m(r)}{r}\right)dt^2 \\ &+\left(1-\frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}dr^2+r^2d\Omega_2 \end{aligned} \tag{6}$$

vector potential ansatz：

$$A_\mu = \begin{pmatrix} f(r)e^{-i\omega t} \\ ig(r)e^{-i\omega t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

ただし、ω は定数、$f(r), g(r), m(r), \sigma(r)$ はすべて実スカラー関数である。この仮定の下で Einstein Proca 方程式は

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dr}\left\{\frac{r^2(f'(r)-\omega g(r))}{\sigma(r)}\right\} = \frac{\mu_0^2 r^2 f(r)}{\sigma(r)N(r)} \\ &\omega g(r) - f'(r) = \frac{\mu_0^2\sigma^2(r)N(r)g(r)}{\omega} \\ &m'(r) = 4\pi G r^2\left[\frac{(g(r)\omega - f'(r))^2}{2\sigma^2(r)}\right. \\ &\qquad\left.+\frac{\mu_0^2}{2}\left(\frac{f^2(r)}{N(r)\sigma^2(r)}+N(r)g^2(r)\right)\right] \\ &\frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} = 4\pi G r\mu_0^2\left(g^2(r)+\frac{f^2(r)}{N^2(r)\sigma^2(r)}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

と書くことができる。この常微分方程式から導かれる $r=0$、$r\to\infty$ での漸近的な挙動はそれぞれ
$r=0$：

$$\begin{aligned} f(r) &= f_0 + \frac{f_0}{6}\left(\mu_0^2-\frac{\omega^2}{\sigma_0^2}\right)r^2+\mathcal{O}(r^4) \\ g(r) &= -\frac{f_0\omega}{3\sigma_0^2}r+\mathcal{O}(r^3) \\ m(r) &= \frac{4\pi G f_0^2\mu_0^2}{6\sigma_0^2}r^3+\mathcal{O}(r^5) \\ \sigma(r) &= \sigma_0+\frac{4\pi G f_0^2\mu_0^2}{2\sigma_0^2}r^2+\mathcal{O}(r^4) \end{aligned} \tag{9}$$

$r\to\infty$：

$$\begin{aligned} f(r) &= c_0\frac{e^{-r\sqrt{\mu_0^2-\omega^2}}}{r}+\cdots \\ g(r) &= c_0\frac{\omega}{\sqrt{\mu_0^2-\omega^2}}\frac{e^{-r\sqrt{\mu_0^2-\omega^2}}}{r}+\cdots \\ m(r) &= M+\cdots \\ \ln\sigma(r) &= -4\pi G\frac{c_0^2\mu_0^2}{2(\mu_0^2-\omega^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{e^{-2r\sqrt{\mu_0^2-\omega^2}}}{r}+\cdots \end{aligned} \tag{10}$$

この表式から初期条件 $f(0)$、$\sigma(0)$、振動数 ω を与えることで実スカラー関数のすべてが決定できることがわかる。

3.2 numerical solution

(8) 式を数値的に解いていくことを考える。$\omega/\mu_0\to\omega$、$r\mu_0\to r$ とすることで関数の形は変えることなく μ_0 を変数の中に押し込めることができるため、ここでは $\mu_0=1$ として扱う。同様の手順により $4\pi G=1$ とする。上述の通り、$f(0)$、$\sigma(0)$、ω を固定することで数値解が 1 つ決定できる。

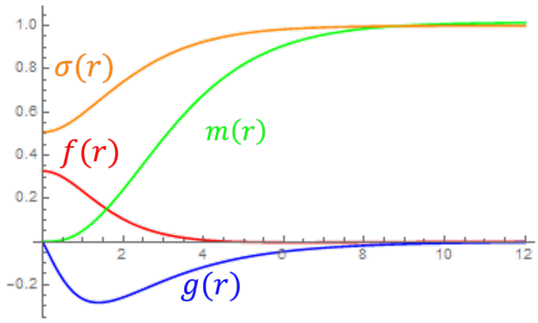

fig 1: 数値解一例：$\omega=0.912$、$f(0)=0.327$、$\sigma(0)=0.507$

fig.1 は、数値解の一例である。この作業を繰り返し行い、ADM mass$M=m(\infty)$ と Noether charge Q を振動数を変数にプロットすると、fig.2 となる。

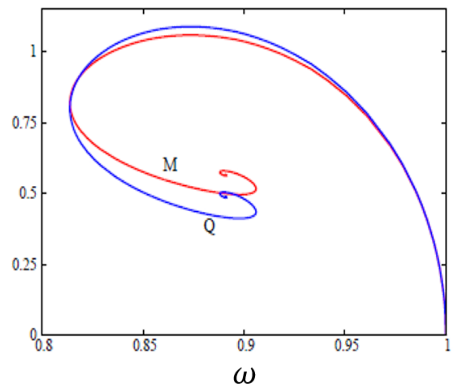

fig 2: $M_{\rm ADM}$、Q と ω の相関

ここで、M は Proca 場が局在しているときのエネルギーに相当し、Q は Proca 場が離散的に存在している場合のエネルギーに相当する。つまり、$M > Q$ の領域では、Proca 場が局在している解は存在しない。$M < Q$ の領域では、Proca 場が局在するような解になっている。つまり、$M < Q$ の領域では、Proca 場の塊 (星) のようなものができているといえるだろう。

4 PS の安定性

前節で、$M < Q$ のとき星のような塊が存在することがわかった。しかし、この塊が少しの振動で壊れてしまう、つまり、不安定な塊では星にはなれない。この節では、metric と vector potential に摂動を加えることで、その安定性を確認する。
球対称摂動：

$$ds^2 = -\sigma^2(r)N(r)[1-\epsilon h_0(r)e^{-i\Omega t}]dt^2 + \frac{dr^2[1+\epsilon h_1(r)e^{-i\Omega t}]}{N(r)} + r^2 d\Omega_2 \tag{11}$$

vector potential：

$$A_\mu = \begin{pmatrix} f(r) + e^{-i\Omega t}\dfrac{\epsilon f_1(r) + i\epsilon f_2(r)}{r} \\ ig(r) + e^{-i\Omega t}\dfrac{\epsilon g_1(r) + i\epsilon g_2(r)}{r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\omega t} \tag{12}$$

ただし、$h_0(r)$、$h_1(r)$、$f_1(r)$、$f_2(r)$、$g_1(r)$、$g_2(r)$ はすべて実スカラー関数で ϵ は small parameter、Ω は定数。ここでは摂動の詳細な計算しないが Ω と $h_0(0)$ の shooting method まで帰着できる。これにより Proca star として安定な解が求められる [fig.3]。

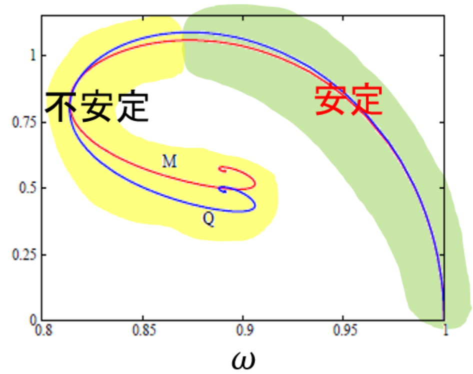

fig 3: Proca star の安定性

fig.3 から Proca 場が安定に局在するような解の存在が示された。

5 Future Work

今後の課題としては大きく分けて 2 つある。ここで求めた Proca star をマクロなもの (星) とみなす考え方とミクロなもの (素粒子的な何か) としての考え方である。以下では前者を section.5.1 で、後者を secion.5.2 で扱う。

5.1 Realsitic Proca star

この Proca star が存在すると仮定すると、Proca 場の質量そのものはどの程度になるのか見積もる、Proca star の質量はおよそ

$$M_{\rm PS} \leq \frac{M_{pl}^2}{\mu_0} \tag{13}$$

である。ただし、$M_{\rm PS}$ は Proca star の質量、M_{pl} はプランク質量である。この Proca star が太陽質量程度の星だと仮定すると、Proca 場の質量は

$$\mu_0 \leq 10^{-10}[\mathrm{eV}] \tag{14}$$

これは電子ニュートリノの質量が 10^0[eV] なのでそれよりも 10 桁以上小さい粒子となる。このような軽

い粒子の起源はどこにあるのか調べる必要があるだろう。
また Proca star の安定性のところで不安定な解が存在することを示したが、この不安定解は、質量を放出することで安定な Proca star に戻るか、black hole に崩壊するかの 2 択となる。今後の課題としてどちらの描像になるかを整理するのが 1 つの目標となる。black hole に崩壊する描像が正しく得られるとするならば十分質量の小さい black hole(太陽質量程度) も作れるのではないかと予想出来る。

5.2 dark matter としての Proca star

質量 m の複素 scalar 場に対して potential $V(\phi) = m^4 \log\left(1 + \frac{|\phi|^2}{m^2}\right)$ を考える。この potential は $\frac{|\phi|^2}{m^2} \ll 1$ で leading term が質量項とみなせる potential である。このスカラー場は時間発展とともに局在するような解 (Q-ball) を持ち、この Q-ball は dark matter の候補として考えられている [S. Kasuya & M Kawasaki (1999)]。
今回の議論では potential による局在ではなく重力によって局在する Proca 場の Q-ball に相当するような状態を解として導出したが、この理論をフリードマン宇宙に適用し、時間発展で Proca 場が局在するような解が得られるのか、得られた場合その局在する Proca 場 (上記 Q-ball に相当する場の塊) を dark matter とみなすと、現在の dark matter のエネルギー比から Proca 場の質量を見積もろうと模索中である。

Reference

Richard Brito et al Phys.Lett. B752 (2016) 291-295

S. Kasuya and M Kawasaki hep-ph/9909509 (1999)

——index

c29

時空の離散化に向けた非線形微分方程式の差分化について

上田　周 (東京学芸大学大学院 教育学研究科)

Abstract

時空の離散化の一つとして, 多様体において定義された微分を差分に取り換えることが考えられる。時空が離散的であることは量子重力理論においても示唆されているが, いまだ確かなことはわかっていない。そこで, 重力を量子化する足掛りとするために, まず古典的に離散化された時空を考える。本研究では, 差分の性質に触れ, 微分方程式から差分方程式への適当な変換方法を説明する。また, 重力理論への離散化の応用の前段階として非線形微分方程式である測地線方程式の離散化を行った。

1　はじめに

離散的な時空では, 微分が定義できないため差分が用いられる。差分幾何学はすでに多く研究されており, 次の 2 つのことが期待されている。ひとつは連続系よりも離散系の方がより根源的で豊富な数学的構造をもつであろうこと, もうひとつは, コンピュータでの数値計算等の理論の構築である。差分での離散化の先に従属変数を離散化する超離散とよばれるものがある (広田,&高橋 2003)。これらの操作により離散化された時空では, もとの差分方程式の持つ性質の大部分を引き継ぐことが知られている。その中でもブラックホール解の生成に用いられる Ernst 方程式の持つ可積分という性質を保持する離散化を考える。可積分系とは, 浅い水の波の様子を記述する KdV 方程式, いわゆるソリトン解のような厳密解が求められるような非線形の微分, 差分方程式の集合のことである。特に, 可積分な差分方程式を離散可積分系と呼び, 渋滞学などの分野で利用されている。また, 離散可積分系は, 曲線や曲面など幾何学との相性が良く離散可積分幾何学として盛んに研究されている。そこで私は, 離散可積分系の重力理論への応用, 特に時空の離散化を考えた。一般相対性理論では, 時空を多様体として考えているが, 量子重力理論では時空が離散的であるということが示唆されている。しかし, 量子重力理論は未完成であり, どのような離散化が適当であるかということもいまだわかっていない。非多様体上では微分が定義できないため, 微分の代わりに差分を用いる。そこで, 量子重力理論への足掛りとして古典的な領域においての時空の離散化を考える。また, 一般相対性理論のような連続系の理論に離散系の側面から新たな視点を与えられることが期待される。本研究では, 時空の離散化の前段階として, 非線形微分方程式の可積分性を保持するような差分化を行い, そこから, 離散系の性質を考察する。

2　差分

微分方程式を差分方程式に書き換えることで, 独立変数が離散的な値をとるようにすることを離散化と呼ぶ。差分は次のように表される。
前進差分

$$\Delta_{+t} f(t) = \frac{f(t+\delta) - f(t)}{\delta} \tag{1}$$

中心差分

$$\Delta_{t} f(t) = \frac{f(t+\frac{\delta}{2}) - f(t-\frac{\delta}{2})}{\delta} \tag{2}$$

後退差分

$$\Delta_{-t} f(t) = \frac{f(t) - f(t-\delta)}{\delta} \tag{3}$$

ここで,δ は差分間隔である。前進差分, 後退差分はそれぞれ中心差分を用いて書き直すことができる。

3　差分による構造の壊れ

差分のとり方は上で述べたもの以外にも様々なものが考えられている。しかし, 差分のとり方によって, 元の微分方程式の構造が壊れることがある。

具体的にロジスティック方程式で見る。ロジスティック方程式は

$$\frac{du}{dt} = \alpha u(1-u), \alpha > 0 \tag{4}$$

であり, グラフは図 1 のようになる。

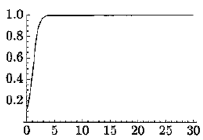

図 1: 解のグラフ:$\alpha = 0, u_o = 0.1$(若山 2010)

ロジスティック方程式の差分化を次の 3 通りの例で考える。

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = a u_n (1 - u_n) \tag{5}$$

$$\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} = a u_n (1 - u_n) \tag{6}$$

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = a u_n (1 - u_{n+1}) \tag{7}$$

ここで, 差分間隔を $h > 0$ とし,$t = nh, (n \in Z)$ とおき,$u(nh) = u_n$ とした。

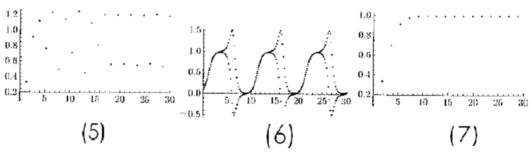

図 2: 数値計算結果:$\alpha = 2, u_0 = 0.1$ 横軸 $t = nh$,(5)$h = 1.3$,(6)$h = 0.1$,(7)$h = 1.8$(若山 2010)

図で見られるように式 (5),(6) の差分では, 元の微分方程式の解の性質を保存していないことがわかる。それに対して式 (7) では式 (4) の解の挙動をよく示すことがわかる。式 (7) の差分方程式を離散ロジスティック方程式と呼ぶ。

4 解の構造を保存する離散化

4.1 ロジスティック方程式の離散化

解の構造を保持した離散化をロジスティック方程式から離散ロジスティック方程式への変換でみる。ロジスティック方程式

$$\frac{du}{dt} = \alpha u(1-u) \tag{8}$$

の両辺を u^2 で割り,$f = \frac{1}{u} - 1$ の変数変換を行うことで線形微分方程式が得られ, 一般解が求まる。

$$\frac{df}{dt} = -\alpha f, f = Ce^{-\alpha t} \tag{9}$$

ここで,C は積分定数である。このとき, 変数変換によって線形微分方程式になるという構造を失わないように離散化を行う。

$$\frac{v_n - v_{n-1}}{h} = -\alpha, v_n = C(1+\alpha h)^{-n} \tag{10}$$

ロジスティック方程式と同様の変数変換 $v_n = \frac{1}{u_n} - 1$ を行い,$n \to n+1$ とすることで

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \alpha u_n (1 - u_{n+1}), u_n = \frac{1}{1 + C(1+\alpha h)^{-n}} \tag{11}$$

が得られる。構成法より $h \to 0$ でロジスティック方程式とその解に帰着する。

4.2 2 次元戸田格子方程式 (2DTL)

続いてこのような手順で, ソリトン方程式である 2 次元戸田格子方程式を例に, 可積分系の離散化について取り扱う。2 次元戸田格子方程式は

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y} = e^{u_{n-1} - u_n} - e^{u_n - u_{n+1}}, n \in Z \tag{12}$$

で表される微分差分方程式である。

次の従属変換

$$u_n = log \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}, e^{u_n - u_{n+1}} = \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2} \tag{13}$$

を行うと $\lambda(x, y)$ を任意関数として

$$\frac{1}{2} D_x D_y \tau_n \tau_n = \tau_{n+1}\tau_{n-1} - \lambda(x, y)\tau_n^2, n \in Z \tag{14}$$

を得る。ここで,D_x, D_y は広田微分と呼ばれ,

$$\begin{aligned} & D_x^m D_y^n f \cdot g \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^m - \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y'}\right)^n \\ &\times f(x, y) g(x', y') \mid_{x=x', y=y'} \end{aligned} \tag{15}$$

で定義される。

(14) 式は双線形方程式である。従属変数 τ_n は τ 関数と呼ばれ,τ 関数の行列式構造が可積分系の根幹をなす構造になっている。(14) 式は $\lambda = 1$ のとき Casorati 行列式で表される解

$$\tau_n = \begin{vmatrix} f_n^{(1)} & f_{n+1}^{(1)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)} \\ f_n^{(2)} & f_{n+1}^{(2)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_n^{(N)} & f_{n+1}^{(N)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)} \end{vmatrix} \tag{16}$$

をもつ。ただし,$f_n^{(k)}(k = 1, ..., N)$ は次の線形関係式を満たす関数

$$\frac{\partial f_n^{(k)}}{\partial x} = f_{n+1}^{(k)}, \frac{\partial f_n^{(k)}}{\partial y} = -f_{n-1}^{(k)} \tag{17}$$

である。これより,2 次元戸田格子方程式には次のような解の構造があることがわかる。

線形微分差分方程式 $\rightarrow$ τ 関数 $\rightarrow$ 双線形微分方程式 $\rightarrow$ 従属変数変換 $\rightarrow$ 2DTL 方程式

そこで, この構造を保つように離散化を行う。

つまり,

線形差分方程式 $\rightarrow$ τ 関数 $\rightarrow$ 双線形差分方程式 $\rightarrow$ 従属変数変換 $\rightarrow$ 離散 2DTL 方程式

の手順をとればよい。

まず,τ 関数の離散化を行う。線形関係式 (17) は,

$$\Delta_{-l}^{(a)} f_n^{(k)}(l, m) = f_{n+1}^{(k)}(l, m), \tag{18}$$

$$\Delta_{-m}^{(b)} f_n^{(k)}(l, m) = -f_{n-1}^{(k)}(l, m) \tag{19}$$

と離散化される。ここで,$\Delta_{-l}^{(a)}, \Delta_{-m}^{(b)}$ は添え字の変数に関する後退差分であり, 上付き添え字は差分間隔である。これより, 離散化された τ 関数は

$$\tau_n(l, m) = \begin{vmatrix} f_n^{(1)}(l, m) & f_{n+1}^{(1)}(l, m) & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)}(l, m) \\ f_n^{(2)}(l, m) & f_{n+1}^{(2)}(l, m) & \cdots & f_{n+N-1}^{(2)}(l, m) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_n^{(N)}(l, m) & f_{n+1}^{(N)}(l, m) & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)}(l, m) \end{vmatrix} \tag{20}$$

となり,*Plücker* 関係式と呼ばれる恒等式を用いることで, 双線形差分方程式

$$(1 + ab)\tau_n(l + a, m + b)\tau_n(l, m) - \tau_n(l + a, m)\tau_n(l, m + b) \tag{21}$$

$$= ab\tau_{n+1}(l + a, m)\tau_{n-1}(l, m + b) \tag{22}$$

を構成する。これが離散 2DTL 方程式の双線形差分方程式である。ここで $a, b \rightarrow 0$ とすると, これは 2DTL 方程式と Casorati 行列式解に一致する。これより, 解の構造を保持する離散化になっていることがわかる。最後に, 双線形差分方程式に適当な従属変数変換を行うことで, 非線形差分方程式が導かれる。1 つの例として次のようなものがある。

$$\begin{aligned} \Delta_{+l}^{(a)} \Delta_{+m}^{(b)} R_n(l, m) =& F_{n+1}(l + a, m) + F_{n-1}(l, m + b) \\ &- F_n(l + a, m) - F_n(l, m + b) \end{aligned} \quad , \tag{23}$$

ここでは次の従属変数変換を行った。

$$R_n(l, m) = log \frac{\tau_{n+1}(l + a, m)\tau_{n-1}(l, m + b)}{\tau_n(l + a, m)\tau_n(l, m + b)} \tag{24}$$

$$F_n(l, m) = \frac{1}{ab} log(1 + abe^{R_n(l,m)}). \tag{25}$$

5 BHT MG における測地線の離散化

離散化の重力理論への適用を考える。可積分性を示す方程式として,mKdV 方程式が知られている。また,mKdV 方程式は楕円積分を用いた解をもつ。そこで, 我々は, 実験的なモデルとして楕円積分を用いて解析的な解が得られている BHT Massive gravity 理論 (BHT MG) での測地線方程式の離散化を考える。BHT MG は 2+1 次元時空での, ゴーストフリーな Massive gravity 理論であり, 線素は

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2 d\phi^2, f(r) = -\Lambda r^2 + br - \mu \tag{26}$$

で与えられる。ここで,b は gravitational hair parameter,μ は mass parameter である。動径 r 方向と角度 ϕ 方向の測地線の式より,

$$\frac{d^2 r}{d\phi^2} = \frac{1}{2L^2} \left[6\Lambda r^5 - 5br^4 + 4(E^2 + \mu + \Lambda L^2)r^3 - 3br^3 + 2\mu L^2 r\right] \tag{27}$$

この式を前節までの議論と同様に, 非線形微分方程式 $\rightarrow$ 双線形微分方程式 $\rightarrow$ 双線形差分方程式 $\rightarrow$ 非線形差分方程式の手順で離散化を行う。従属変数変換 $r(\phi) = \frac{g(\phi)}{f(\phi)}$ (f, g は ϕ の任意関数) を行うと次の双線形微分方程式

$$D_\phi^2 g \cdot f + \beta_1 \frac{g^4}{f^2} - \gamma_1 \frac{g^3}{f} + \epsilon_1 g^2 - \xi_1 gf = 0 \tag{28}$$

$$D_\phi^2 f \cdot f - \alpha \frac{g^4}{f^2} - \beta_2 \frac{g^3}{f} + \gamma_2 g^2 - \epsilon_2 gf + \xi_2 f^2 = 0 \tag{29}$$

が得られる。ここで簡単のため

$$\alpha = -\frac{3\Lambda}{L^2}, \beta = \beta_1 + \beta_2 = \frac{5b}{2L^2}, \tag{30}$$

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{2(E^2 + \mu + \Lambda L^2)}{L^2}, \tag{31}$$

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 = \frac{3b}{2}, \xi = \xi_1 + \xi_2 = \mu \tag{32}$$

とおいた。次に微分を差分に置き換え双線形差分方程式を導出する。その際, 次のゲージ変換

$$f(\phi) \to f(\phi)h(\phi), g(\phi) \to g(\phi)h(\phi) \tag{33}$$

について不変であることを要請する。(h は ϕ の任意関数) これより, 次の双線形差分方程式

$$\begin{aligned}
&\Delta_\phi^2 g(\phi)\cdot f(\phi) + \beta_1 \frac{g(\phi+\delta)g(\phi-\delta)g^2(\phi)}{f^2(\phi)} \\
&- \gamma_1 \frac{g(\phi+\delta)g(\phi-\delta)g(\phi)}{f(\phi)} + \epsilon_1 g(\phi+\delta)g(\phi-\delta) \\
&- \frac{\xi_1}{2}(g(\phi+\delta)f(\phi-\delta) + g(\phi-\delta)f(\phi+\delta)) = 0
\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta_\phi^2 f(\phi)\cdot f(\phi) - \alpha \frac{g(\phi+\delta)g(\phi-\delta)g^2(\phi)}{f^2(\phi)} \\
&- \beta_2 \frac{g(\phi+\delta)g(\phi-\delta)g(\phi)}{f(\phi)} + \gamma_2 g(\phi+\delta)g(\phi-\delta) \\
&- \frac{\epsilon_2}{2}(g(\phi+\delta)f(\phi-\delta) + g(\phi+\delta)f(\phi-\delta)) \\
&+ \xi_2 f(\phi+\delta)f(\phi-\delta) = 0
\end{aligned} \tag{35}$$

が得られる。従属変数の逆変換を行い,

$$\begin{aligned}
&\Delta_\phi^2 g(\phi)\cdot f(\phi) = \Delta_\phi^2 r(\phi)f(\phi)\cdot f(\phi) \\
&= (\Delta_\phi^2 r(\phi)\cdot r(\phi))f(\phi+\delta)f(\phi-\delta) + r(\phi)(\Delta_\phi^2 f(\phi)\cdot f(\phi))
\end{aligned} \tag{36}$$

の関係を用いて,$\Delta_\phi^2 f(\phi)\cdot f(\phi)$ を消去することで,

$$\begin{aligned}
&\Delta_\phi^2 r(\phi) + r(\phi)\left[\alpha r(\phi+\delta)r(\phi-\delta)r^2(\phi) + \beta_2 r(\phi+\delta)r(\phi-\delta)r(\phi)\right. \\
&\left.-\gamma_2 r(\phi+\delta)r(\phi-\delta) - \frac{\epsilon_2}{2}(r(\phi+\delta) + r(\phi+\delta)) - \xi_2\right] \\
&+ \beta_1 r(\phi+\delta)r(\phi-\delta)r^2(\phi) - \gamma_1 r(\phi+\delta)r(\phi-\delta)r(\phi) + \epsilon_1 r(\phi+\delta)r(\phi-\delta) \\
&- \frac{\xi_1}{2}(r(\phi+\delta) + r(\phi-\delta)) = 0
\end{aligned} \tag{37}$$

求めたい非線形差分方程式が得られた。

ここで,n を整数として,$\phi = n\delta, r(\phi) = r_n$ として, マッピング形式

$$r_{n+1} = \frac{(2+\xi_2\delta^2)r_n - r_{n-1}\left[1 - \frac{\xi_1\delta^2}{2} + \frac{\epsilon_2\delta^2}{2}r_n\right]}{\left[1 - \frac{\xi_1\delta^2}{2} + \frac{\epsilon_2\delta^2}{2}r_n\right] - r_{n-1}\delta^2\left[-\alpha r_n^3 - \beta r_n^2 + \gamma r_n - \epsilon_1\right]} \tag{38}$$

この形は,QRT 系と呼ばれる可積分な 2 階差分方程式に変換することができることから, 得た非線形差分方程式は保存量を持ち可積分であることが言える。

6 結果と今後の展望

離散化の重力理論への応用の一つである BHT MG での測地線方程式の離散化を行った。その際に, 元の微分方程式の持つ可積分性を保持して離散化することができた。しかし, 離散系における性質を見抜くには至らなかったため今後の課題である。今後の展望としては, 得られた差分方程式をプロットすることで, 連続な時空における測地線の振舞いとの比較を行う。また、Ernst 方程式の離散化にも挑戦していきたい。本発研究では, 独立変数の離散化を行ったが, 従属変数を離散化する超離散化なども考え時空の離散化を行いたい。

Reference

広田,&高橋' 差分と超離散'2003, 共立出版

若山' 可視化の技術と現代幾何'2010, 岩波書店

井ノ口 ' 曲線とソリトン'2010, 朝倉書店

Hackmann,&Lämmerzahl,Phys.Rev.D78(2008)024035

——index

c30

負の屈折率を持つ Metamaterial の物理的基礎と重力系への応用可能性について

渡邊　慧 (東京学芸大学大学院 教育学研究科)

Abstract

Metamaterial とは自然界に存在する物質が持つことのない性質を持つ人工的な物質の総称であり、その性質のひとつに負の屈折率がある。光や音の波に対して負の屈折率を持つ Metamaterial に関してはすでに盛んに研究が行われており、実際に負の屈折を示す実験も成功している。対照的に水の波に対して負の屈折率を持つ Metamaterial の研究はあまり進んでいない。そこで我々は、光や音の波に対して負の屈折率を実現する理論を応用し、水の波に対して負の屈折率を持つ Metamaterial の作製を試みた。本発表では、Metamaterial の物理的基礎を説明するとともに、我々が作製している、負の屈折率の直観的理解の補助となる実験モデルについてふれたい。

1　はじめに

Metamaterial とは自然界に存在する物質が持つことのない性質を持つ人工的な物質の総称であり、その性質のひとつに負の屈折率がある。1968 年に Veselago によって負の屈折率を持つ物質が存在可能であることが理論的に示されたが、当時は実際にそういった物質が発見されなかったため、負の屈折率についての議論は行われなくなっていた。しかし、1999 年に Pendry が金属を用いた人工的な物質によって負の屈折率が実現可能であると発表し、2000 年には Smith らが世界初の負の屈折率を持つ Metamaterial の作製に成功した。初めに作られた Metamaterial は電磁波に対して負の屈折率を持つもの（Electro magnetic Metamaterial）であったが、現在では音波に対して負の屈折率を持つ Acoustic Metamaterial や、力に対して自然界にはないような反応をする Mechanical Metamaterial など、様々な Metamaterial が作製され研究されている。

Metamaterial の重力系への応用の一つとして、2010 年に Smolyaninov は、負の屈折率を持つ Electro magnetic Metamaterial のうち Hyperbolic Metamaterial（HMM, 双曲線メタマテリアル）を用いると Metric Signature Transition（MST, メトリック符号変化）をモデル化できるという論文を発表した [1]。宇宙は虚時間から実時間に切り替わったときに発生するという Hawking らのアイデアに対し、Smolyaninov は HMM による MST のモデル化によって、虚時間から実時間への時間の切り替わりの際に粒子が生成される可能性があることを示した。これに関しては、同研究室の楠見の発表で詳しく説明する。

Metamaterial の重力系への応用は他にも考えることができ、クローキングがその一つである。クローキングとは、Metamaterial を対象物の前に置き、光に対する屈折率を調整することによって対象物を見えなくするいわば透明マントを実現するような技術のことである。屈折率は時空の曲がり具合を表すメトリックによって計算することができる。すなわちこれは、電磁気的な場と相対論的な場を結び付ける考えであり、光の軌道が屈折率の違いによって曲がることと、場が歪んでいることによって曲がることを確かに対応付けることができる。

このように、Metamaterial の研究は重力系への応用可能性があり、研究を進めていくことは物理学のさらなる発展につながると期待できる。

本研究では、Metamaterial の特徴的な性質の直観的理解の補助とするために、水の波に対して負の屈折率を示す Metamaterial の作製を試みた。

2　負の屈折率

2.1　光に対する負の屈折率

光の屈折率 n は定義より

$$n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \tag{1}$$

と表せる。ここで ε_r と μ_r はそれぞれ比誘電率と比透磁率である。この式を見ると屈折率は必ず正になることがわかる。しかし、式を

$$n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} = \sqrt{\varepsilon_r}\sqrt{\mu_r} \tag{2}$$

と書き換えると、比誘電率と比透磁率がともに負であれば負の屈折率が実現することがわかる。

光速 c の定義

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \tag{3}$$

より、屈折率は波の伝播速度の逆数であると考えることができる。

負の屈折率を持つ物質に光が入った際の光の経路は図 1 のようになる。

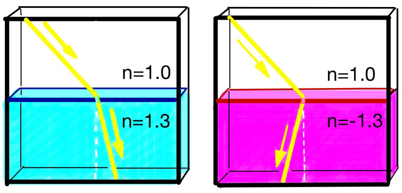

図 1: 光の経路　左図:正の屈折率　右図:負の屈折率

2.1.1　光に対する有効的な比透磁率と比誘電率

Pendry は共振という現象をもとに、金属のリングを共振器として配列することで負の比透磁率を実現できると考えた。このリングを SRR と呼ぶ。この SRR は、LC 回路と等価の仕組みであり、その中での電圧降下は

$$L\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{c}\int I(t)dt + RI(t) = -\frac{d\phi}{dt} \tag{4}$$

で表わされる。現実的な回路を考えるとエネルギーの損失を加味する必要があるため抵抗の項も加えている。

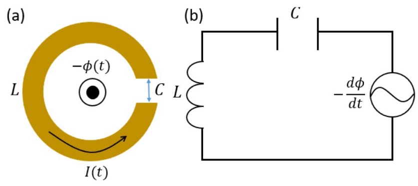

図 2: (a)SRR (b)LC 回路

ここで、磁束を $\phi(t) = \mu_0 H_0 S e^{-i\omega t}$ 磁場の変化に伴って振動する電流を $I(t) = I_0 e^{-i\omega t}$ とし計算すると、SRR で構成された物質の有効的な比透磁率 μ_r は

$$\mu_r = 1 - \frac{f\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega} \tag{5}$$

となる。ここで $f = \frac{nS^2}{LV}, \omega_0 = \frac{1}{LC}$ とする。有効的な比透磁率は $\omega_0 < \omega < \frac{\omega_0}{\sqrt{1-f}}$ を満たす ω において負となる。

また、有効的な負の比誘電率は金属を用いることで実現できる。

2001 年には Smith を含む研究チームが図 3 に示すような Metamaterial に入射した電磁波が負に屈折することを実証した [2]。

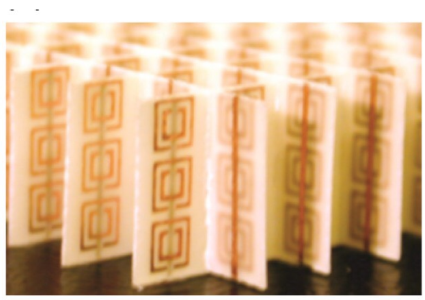

図 3: SRR を配列した Metamaterial

2.2　音の波に対する負の屈折率

音の波の伝播速度 v_s は

$$v_s = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \tag{6}$$

であり、ここで ρ と B はそれぞれ質量密度と体積弾性率である。体積弾性率とは外部からの一様な圧縮

に対する抵抗である。音の波に対する屈折率は

$$n_s = \sqrt{\frac{\rho_{eff}}{B_{eff}}} = \frac{\sqrt{\rho_{eff}}}{\sqrt{B_{eff}}} \tag{7}$$

と表わせる。よって、質量密度と体積弾性率がそれぞれ負であれば、音の波に対する負の屈折率を実現することができる。質量密度と体積弾性率は従来の媒質中では常に正であり、変更するのは困難である。しかし、図 4 のようなヘルムホルツ共振器と膜を組み合わせた音響 Metamaterial を用いれば、特定の周波数の音に対して有効的に質量密度と体積弾性率を負にすることが可能である [3]。

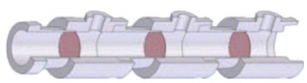

図 4: ヘルムホルツ共振器と膜を組み合わせた音響 Metamaterial

2.3 水の波に対する負の屈折率

水の波の伝播速度を表す方程式は、水深が深い時の波（深水波）と水深が浅い時の波（浅水波）の二つに分けられる。本研究は音の波と対応させるため、横波であるとみなすことができる浅水波について考える。

浅水波の伝播速度は

$$v_w = \sqrt{gh} \tag{8}$$

である。ここで g と h はそれぞれ重力加速度と水深である。これより、浅水波の屈折率は

$$n_w = \frac{1}{\sqrt{g_{eff} h_{eff}}} = \frac{1}{\sqrt{g_{eff}}\sqrt{h_{eff}}} \tag{9}$$

となり、有効的な重力加速度と水深がどちらも負であれば、負の屈折率を実現することができる。

2.3.1 水の波に対する有効的な重力加速度

水の波に対する、有効的な重力加速度を負にする Metamaterial に関してはすでに研究されている [4]。

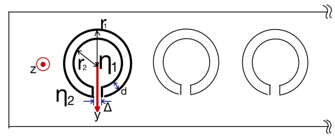

図 5: 装置の略図

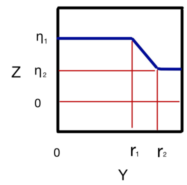

図 6: 位置と水位の関係

有効的な重力加速度は、

$$g_{eff} = g_0 \frac{\eta_b}{\eta_a} \tag{10}$$

で表され、ここで η_a と η_b はそれぞれ

$$\begin{aligned} \eta_a &= f_s \eta_1 + (1 - f_s)\eta_2 \\ \eta_b &= \eta_2 \end{aligned}$$

である。f_s は充填率であり水路内を占めるシリンダーの面積を示している。η_1 と η_2 はそれぞれ水路におけるシリンダー内部と外部の垂直方向における水位の平均変位である。シリンダー内の水の増加体積は

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} S = -v_0 u_0 \Delta \tag{11}$$

スリット部分の水のかたまりが押される力は

$$d\Delta \frac{\partial v_0}{\partial t} S = g_0 \Delta(\eta_1 - \eta_2) + \gamma d \Delta \frac{\partial \eta_1}{\partial t} \tag{12}$$

である。ここではスリット外向きを正として v_0 をスリット部分の水面の水平速度、$u_0 = \frac{\tanh(k_0 h_0)}{k_0}$ は減少深さ、S はシリンダーの面積である。式 (11), (12) より

$$S \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial t^2} + \frac{g_0 u_0 \Delta}{d} \eta_1 + \gamma u_0 \Delta \frac{\partial \eta_1}{\partial t} = \frac{g_0 u_0 \Delta}{d} \eta_2 \tag{13}$$

が導ける。ここで共振角振動数 ω_r と減衰 γ_ω をそれぞれ

$$\omega_r = \sqrt{\frac{g_0 u_0 \Delta}{Sd}}$$
$$\gamma_\omega = \frac{\gamma \Delta u_0}{S}$$

とすると、水路内を伝播する波の変位は

$$\begin{aligned} \eta_2 &= \eta_{20} e^{-i\omega t} \\ \eta_1 &= \eta_{20} \frac{1}{1 - \frac{\omega(\omega + i\gamma_\omega)}{{\omega_r}^2}} e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

となる。波の分散関係 $\omega = vk$ を用いると、

$$\eta_1 = \eta_{20} \frac{1}{1 - \frac{k_0(k_0+i\gamma_k)}{{k_r}^2}} e^{-i\omega t} \tag{14}$$

となる。ここで、$k_r = \sqrt{\frac{\Delta}{Sd}}, \gamma_k = \frac{\gamma\Delta\sqrt{u_0}}{S\sqrt{g_0}}$ である。よって、有効的な重力加速度は

$$g_{eff} = g_0/[1 + \frac{f_s k_0^2}{k_r^2 - k_0(k_0 + i\gamma_k)}] \tag{15}$$

で表すことができ、$k_r < k_0 < \frac{k_r}{\sqrt{1-f_s}}$ の範囲の波数の波が構造内に入ったときに有効的に負の重力加速度が実現する。

2.3.2　水の波に対する有効的な深さ

水の波に対する有効的な深さを負にする研究はまだ進めることができていない。しかし、音の波との対応を見ると、水の波に対する有効的な深さは音の波に対する有効的な質量密度と対応していると考えることができる。この関係を利用して今後は有効的な深さを負にする構造を考えていきたい。

3　実験装置の作製と実験

水の波に対する負の屈折率を実現する Metamaterial の作製を試みた。実験装置の作製の動機は負の屈折率を可視化し直観的理解の補助とするためである。

実験装置の作製には 3D プリンターを用いた。3D プリンターを用いた理由は、安価でミリ単位の構造を持つ Metamaterial を短時間で作製できるためである。実際に作製したものを図 7 に示す。この Metamaterial は水の波に対する有効的な重力加速度を負にするものである。特定の波数を持つ波に対して有効的な重力加速度が負となり、有効的な深さは正のままであるから屈折率は虚数となり波はエバネッセント波となる。

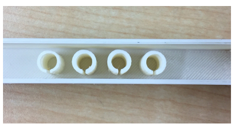

図 7: 実際に作製した Metamaterial

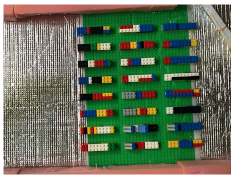

図 8: LEGO ブロックを用いて作製した Metamaterial

また、[5] をもとに、LEGO ブロックを用いて負の屈折率を実現する図のような実験装置を製作した。LEGO ブロックを用いる利点として、装置の構築が素早く行え、かつ高い再構築性があることが挙げられる。この特徴は演示実験を行うにあたり極めて重要なものである。研究の目標の一つである、Metamaterial を用いた教材の開発において、安価であること、実験装置が素早く構築できることは重要な項目である。その点において 3D プリンターや LEGO ブロックを用いた実験装置の作製は非常に有用なものである。

4　今後の発展

水の波に対する有効的な重力加速度については研究が進んでいるが、有効的な深さに対する研究はまだ研究が進んでいない。今後はどのような構造を持つ物であれば有効的な深さを実現することができるか研究を進めていく。

さらに、Metamaterial の持つ特殊な性質を考慮することによって、MST やクローキングのほかにも Sprit Ring Resonate 重力系において解明されていない問題に対して解決策を見出すことができるのではないかと考える。

5　Bibliography

[1]Smolyaninov,Phys.Rev.Lett. 105(2010)067402

[2]Shelby*et al.*,Science292(2001)77

[3]Lee*et al.*,Nano Convergence(2017)10.1186/s40580-017-0097-y

[4]Hu,Chan,Ho and Zi,Phys.Rev.Lett.106(2011)174501

[5]Christen and Abajo,Phys.Rev.Lett.108(2012)124301

——index

c31

Variable Hyperbolic Metamterial による符号変化問題のモデル化

楠見　蛍 (東京学芸大学大学院 教育学研究科)

Abstract

膨張している現在の宇宙から過去へさかのぼると、宇宙は密度が無限に大きく、大きさを持たない特異点から始まったことになる。その特異点を回避するために、Hartle と Hawking は「虚時間」 という数学的概念を導入した。虚時間から実時間 に変化するとき、時空構造は (4+0)Euclidean 空間から (3+1)Minkowski 時空へと変化するが、そこでどのような現象が起きるか明らかにはなっていない。そこで、Smolyaninov と Narimanov は宇宙初期に起こったと考えられる時間符号変化を Metamaterial で低次元モデル化できると考えた。そして、宇宙初期の時間符号変化が、Metamaterial でのモデル化と対応するならば、虚時間から実時間に切り替わった瞬間、粒子が生成されることを示唆した。そこで我々は、Metamaterial での誘電率符号変化の計算を宇宙初期での次元に拡張し、粒子生成の有無を調べるために (4+0)Euclidean 空間から (3+1)Minkowski 時空への状態密度の増減を計算した。

1　はじめに

Metamaterial とは自然界の物質にはない性質を示す人工媒体である。Pendry は、1mm 程度の小さな構造体を配列することで、比誘電率 (ϵ) と比透磁率 (μ) を操作し、マイクロ波に対して有効的に負の屈折率を実現する Metamaterial の存在を理論的に示した (Pendry et al. 1999)。そして 2001 年、Shelby により、実験的にも証明された (Shelby et al. 2001)。現在、Metamaterial は様々な分野で応用されているが、そのひとつに宇宙に関するトイモデルがある。

膨張している現在の宇宙から過去へさかのぼると、宇宙は密度が無限に大きく、大きさを持たない特異点から始まったことになってしまう。これを特異点問題という。その特異点問題を回避するために、Hartle と Hawking は「虚時間」という数学的概念を導入した (Hartle & Hawking 1983)。虚時間から実時間に変化するとき、時空構造は (4+0)Euclidean 空間から (3+1)Minkowski 時空へと変化するが、そこでどのような現象が起きるか明らかにはなっていない。

Smolyaninov と Narimanov はこの時間符号変化を Metamaterial でモデル化できると考えた (Smolyaninov & Narimanov 2010)。彼らは、Variable Hyperbolic Metamaterial (VHMM) という比誘電率の符号変化を引き起こす 1 軸性 (誘電率が 1 方向のみ異なるような)Metamaterial を用いて、(3+0)Euclidean 空間から (2+1)Minkowski 時空への低次元時間符号変化をモデル化した。比誘電率の符号変化の際、VHMM 中の波数分散関係が楕円型から一葉双曲線型に変化することで、VHMM がとりうる状態密度が増え、エントロピーが増大した。したがって、そのモデルが現実の宇宙における符号変化に対応するなら、符号変化の際には粒子が生成されると考えられる。

本研究では、この VHMM を用いて宇宙初期の時間符号変化に伴う物理現象への応用を考えた。宇宙初期の時間符号変化が、VHMM でのモデル化と対応するならば、虚時間から実時間に切り替わった瞬間、粒子が生成されたことになる。そこで我々は、VHMM での誘電率符号変化の計算を宇宙初期での次元に拡張し、粒子生成の有無を調べるために (4+0)Euclidean 空間から (3+1)Minkowski 時空への状態密度の増減を計算した。宇宙初期での現象は、実験的に同じ条件で再現されることは極めて困難だが、本研究のようなモデル実験は宇宙初期の解明の一助となるだろう。

2　時間の符号変化

Hartle と Hawking は、図 1(a) のような特異点を回避するために、数学的手法として虚時間を導入し、宇宙が実時間では有限な大きさから始まったと仮定

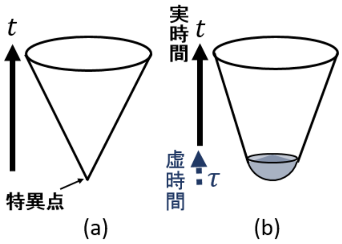

図 1: 実時間の発生 (a) 特異点から始まる宇宙 (b) 虚時間を導入して特異点を回避した宇宙

した（図 1(b)）。これは、Minkowski 時空の実時間を虚時間に置き換え ($\tau = it$)、Euclidean 空間を考えることに相当する。これを時間符号変化とよぶ。その結果、時空構造を表す計量はそれぞれ以下のようになる。

(3+1)Minkowski 時空 : $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ (1)

(4+0)Euclidean 空間 : $ds^2 = d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ (2)

宇宙初期に、$(+,+,+,+)$ の (4+0)Euclidean 空間から $(+,+,+,-)$ の (3+1)Minkowski 時空へ切り替わる。この時間符号変化を VHMM でモデル化する。

3 Variable Hyperbolic Metamaterial

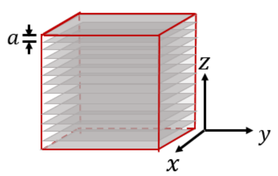

図 2: VHMM の概略図

Smolyaninov らが考えた VHMM は図 2 のように、石英をベースとし、その中に間隔 a でガリウム (Ga) 製の薄い層を重ねた人工媒体である。通過する光の波長よりも十分小さい構成単位 (間隔 a) の構造体を Metamaterial が持っている場合、その構造体の集合は一つの媒質とみなせる。これを有効媒質理論といい、その中の Maxwell-Garnet 近似を用いると、有効的な比誘電率は以下のようになる。

$$\epsilon_1 (= \epsilon_x = \epsilon_y) = n\epsilon_m + (1-n)\epsilon_d \tag{3}$$

$$\epsilon_2 (= \epsilon_z) = \frac{\epsilon_m \epsilon_d}{(1-n)\epsilon_m + n\epsilon_d} \tag{4}$$

ここで、n は金属部分の体積充填率、ϵ_m はガリウムの誘電率、$\epsilon_d (> 0)$ は石英の誘電率である。また、ガリウムは相転移時に誘電率が変化する。式 (3) から、ガリウムの固体から液体への相転移によって、ϵ_1 は正から負へ値が変わることが分かる。この誘電率の符号変化は、VHMM 中の波動方程式に影響を及ぼし、その波動方程式を介して時間符号変化へと対応づけられる。

4 VHMM による時間符号変化の再現

VHMM の波動方程式は $\epsilon_1 > 0$ の場合、

$$\frac{\omega^2}{c^2}\phi_{\omega,k} = \frac{k_z^2}{\epsilon_1}\phi_{\omega,k} + \frac{k_x^2 + k_y^2}{\epsilon_2}\phi_{\omega,k} \tag{5}$$

となり、また $\epsilon_1 < 0$ の場合、

$$\frac{\omega^2}{c^2}\phi_{\omega,k} = -\frac{k_z^2}{|\epsilon_1|}\phi_{\omega,k} + \frac{k_x^2 + k_y^2}{\epsilon_2}\phi_{\omega,k} \tag{6}$$

となる。ただし、1 軸性媒体では、光線は常光線と異常光線に分かれて進むが、常光線の屈折率は伝搬方向によらずに一定であり、異常光線の屈折率はそれぞれ伝搬方向に依存する。今回は分散性を見るために、異常光線のみの波動方程式を考える。

ここで、場の量子論での波動方程式である massless の Klein-Gorden 方程式をモードで表すと (3+1) 次元 Minkowski 時空では、

$$(-k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)\phi_k = 0 \tag{7}$$

であり、同様に (2+2) 次元時空の Klein-Gordon 方程式は以下のようである。

$$(-k_0^2 - k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)\phi_k = 0 \tag{8}$$

したがって、この VHMM 中の誘電率の符号変化 (式 (5),(6)) は $(+,+,+,-)$ の (3+1) 次元 Minkowski 時空から、$(+,+,-,-)$ の (2+2) 次元時空へ変化したことに相当する。ただし、実験室系に流れる時間

自体は人為的に操作をすることが不可能であるため、Smolyaninov らは、$(+,+,+)$ の (3+0) 次元 Euclidean 空間から $(+,+,-)$ の (2+1) 次元 Minkowski 時空に変化したと解釈した。

5　ミクロカノニカルアンサンブルでの状態密度の計算

Smolyaninov は誘電率の符号変化によって、分散関係が変化し、状態密度が増えることで粒子が生成されると考えられた。確かに、式 (5) から $\epsilon_1 > 0$ の時は波数分散関係が楕円型であり（図 3(a))、式 (6) から $\epsilon_1 < 0$ の時は一葉双曲線型であることが分かり (図 3(b))、誘電率の符号変化によって、VHMM がもち得る状態密度は増大すると推測される。それを確かめるために、具体的にミクロカノニカルアンサンブルで状態密度を計算した。ただし、一葉双曲線型の波数分散関係は、理想的には無限の波数モードを持つが、VHMM は構造上の限界より構造ユニットよりも波長が大きくなければならないため、カットオフ（$K_M \sim \frac{1}{a}$) が入る。このカットオフは損失によっても変わるが、今回は無損失と仮定する。そのカットオフ K_M によって、一葉双曲線型波数分散関係も有限の波数モードを持つ。

それを踏まえた上で 3 次元空間、 1 粒子系で楕円型

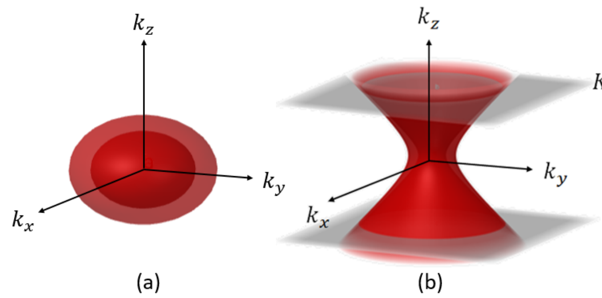

図 3: VHMM の分散関係 (a) 楕円型分散 ($\epsilon_1 > 0$) (b) 一葉双曲線型分散 ($\epsilon_1 < 0$)

分散と一葉双曲線型分散の状態密度を計算すると、それぞれ以下のようになる。

$$\frac{dW_{E(3)}}{d\omega} = \frac{V^3}{h^3}\frac{4\pi}{3c^3}\left[\omega^3\left(\epsilon_2\frac{d\sqrt{\epsilon_1}}{d\omega}+\sqrt{\epsilon_1}\frac{d\epsilon_2}{d\omega}\right)+3\epsilon_2\sqrt{\epsilon_1}\omega^2\right]\sim\frac{\omega^3}{c^3} \tag{9}$$

$$\frac{dW_{H(3)}}{d\omega}\sim\frac{V^3}{h^3}\frac{2\pi}{3}K_M^3\left|\frac{\epsilon_2}{|\epsilon_1|^2}\frac{d|\epsilon_1|}{d\omega}-\frac{1}{|\epsilon_1|}\frac{d\epsilon_2}{d\omega}\right|\sim K_M^3 \tag{10}$$

ここで、W_E は楕円型分散の状態数、W_H は一葉双曲線型分散の状態数、V は位相空間の体積である。$K_M \gg \frac{\omega}{c}$ より (Jacob et al. 2010)、$\frac{dW_{H(3)}}{d\omega} > \frac{dW_{E(3)}}{d\omega}$ となり、VHMM では誘電率の符号変化により状態密度が増加することが分かる。

本研究では、これを宇宙初期の時間符号変化に応用させるために、$(+,+,+,+)$(4+0) 次元 Euclidean 空間から $(+,+,+,-)$（3+1）次元 Minkowski 時空への変化に対応する、仮想的な VHMM での誘電率の符号変化を考え、状態密度の増減を調べた。4 次元空間、N(>2) 粒系での仮想的な VHMM での楕円型分散と一葉双曲線型分散は、

$$\frac{dW_{E(4N)}}{d\omega} = \frac{V^{4N}}{h^{4N}}\frac{1}{2N}\frac{\pi^{2N}}{\Gamma(2N)c^{4N}}\left[\omega^{4N}\left(\sqrt{\epsilon_2}^{3N}\frac{d\sqrt{\epsilon_1}^N}{d\omega}+\sqrt{\epsilon_1}^N\frac{d\sqrt{\epsilon_2}^{3N}}{d\omega}\right)+4N\sqrt{\epsilon_2}^{3N}\sqrt{\epsilon_1}^N\omega^{4N-1}\right]\sim\frac{\omega^{4N}}{c^{4N}} \tag{11}$$

$$\frac{dW_{H(4N)}}{d\omega}\sim\frac{V^{4N}}{h^{4N}}\frac{\pi^{2N}}{4\Gamma(\frac{N+2}{2})\Gamma(\frac{3N+2}{2})}K_M^{4N}\left|\frac{\epsilon_2^{2N}}{|\epsilon_1|^{4N}}\frac{d|\epsilon_1|^{2N}}{d\omega}-\frac{1}{|\epsilon_1|^{2N}}\frac{d\epsilon_2^{2N}}{d\omega}\right|\sim K_M^{4N} \tag{12}$$

となった。3 次元空間と同様、$K_M \gg \frac{\omega}{c}$ より、$\frac{dW_{H(4N)}}{d\omega} > \frac{dW_{E(4N)}}{d\omega}$ となり、4 次元空間に拡張しても状態密度が増加すると期待できることが分かった。

6　まとめと今後の展望

本研究では、VHMM での時間符号変化モデルを仮想的に 4 次元空間に拡張すれば、誘電率の符号変化が起こる際に、状態密度が増えることが分かった。したがって、宇宙初期の時間符号変化によっても粒子が生成された可能性があると考えられる。これは、宇宙がビッグバンから始まったとする標準的な宇宙

モデルとは異なった、粒子生成のプロセスの可能性を示す、新しい宇宙モデルだと言える。

しかし、今回はガリウムの相転移や VHMM の性質を元に計算しているため、今後は実際に宇宙論にて観測されているデータと照らし合わせることで、その妥当性をさらに検証していきたい。

Acknowledgement

本発表にあたって、ご指導いただきました小林先生、一緒に研究を進めてくださった渡邊先輩、太田君、発表に関してのアドバイスをくださった先輩方、また小林研究室の皆様ありがとうございました。

Reference

J.B.Pendry, A.J.Holden,D.J.Robbins, et al. 1999, IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 47, 2075

R.Shelby, D.R.Smith, S.C.Nemat-Nasser et al. 2001, Appl. Phys. Lett. 78, 489

J.B.Hartle, S.W.Hawking 1983, Phys. Rev. D28, 2960

Igor I.Smolyaninov, Evgenii E.Narimanov 2010, Phys. Rev. Lett. 105, 067402

Zubin Jacob, J Y.Kim, G V.Naik et al. 2010, Appl. Phys. B 100, 215-218

——index

c1

分子雲中におけるフィラメント形成と星形成開始条件の解明

安部 大晟 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

近年の観測から星形成は分子雲中のフィラメント状 (線状) の高密度領域で行われることが明らかになっている (André 2010)。よって星形成の理解には、分子雲中でのフィラメント形成を解明する必要がある。Inoue et al.(2018) では高解像度な磁気流体シミュレーションを用いることで、分子雲が衝撃波に圧縮されるという普遍的な現象からフィラメントが形成されるメカニズムを特定した。フィラメントは臨界線密度を超えると重力不安定によって崩壊し, 星形成を始めることが知られている。フィラメントの平衡状態を計算して臨界線密度を見積もった仕事として Tomisaka(2014) が知られている。Inoue et al.(2018) ではシミュレーションから, Tomisaka(2014) の臨界線密度がフィラメント崩壊の初期条件を決めると示唆している。しかしながら、Tomisaka(2014) で調べられた平衡状態は、Inoue et al.(2018) によるシミュレーションで示された、分子雲が衝撃波によって圧縮されるという動的な状況とは異なっている。加えて Inoue et al.(2018) では 1 つの初期条件のもとでしか計算されていない。よって本研究では Inoue et al.(2018) の高解像度シミュレーションを様々なパラメータで実行することで Tomisaka(2014) の臨界線密度の見積もりの正当性を検証するための計算をするつもりである。本講演では Tomisaka(2014) の平衡解と Inoue et al.(2018) での計算結果について論じ、 今後のフィラメントからの星形成研究の展望を示す。

1 Introduction

星は宇宙を構成する基本要素であり、星形成は銀河進化に繋がることから宇宙全体の理解において極めて重要である。近年の Herschel 望遠鏡の分子雲の観測から星形成は分子雲中のフィラメント (線状の高密度領域) で行われることが明らかになり (André 2010)、フィラメントの重力崩壊が星形成の開始条件を決定しているということが示唆された。よって分子雲からの、フィラメントを介した星形成過程を解明する必要がある。

フィラメントはどのようにして形成されるのか。それは分子雲と衝撃波の相互作用であると Inoue & Fukui (2013) の数値シミュレーションによって示唆されが、Inoue & Fukui (2013) では解像度不足のために星の形成まで観測できなかった。

Inoue et al. (2018) では、分子雲の衝撃波圧縮によるフィラメント形成から星形成までを高解像度の数値シミュレーションを用いて調べ星形成の初期条件、つまり臨界線密度を求める。

2 Methods

2.1 Numerical Setup

この研究では現実的な分子雲のダイナミクスを研究するために自己重力を含めた三次元の磁気流体力学 (MHD) シミュレーションを行う。使用するコードは Matsumoto (2007) によって開発された SFUMATO コードである。SFUMATO コードは、自己重力を多重格子法で解き、MHD 方程式を近似リーマン解法を用いた有限体積法で解くものである。さらに利点として適合格子法 (Adaptive Mesh Refinement;AMR) の使用が挙げられる。これは詳細を見たい領域を高解像度化し、それ以外を低解像度化することで、格子数の節約をしつつ観測したい箇所を局所的に高解像度で観測することができる方法である。つまり観測したいフィラメント部分の格子を細分化して高解像度の観測を実現することができる。SFUMATO コードでは、星形成が起こり得る領域に対しては sink particle が導入される。sink particle とは周りのガスを降着させる仮想粒子であり、その形成判定は周辺ガスの重力的な安定状態を時々刻々監視することで行われ

ている。これによって、実際に重力崩壊が起きた場所や時刻の同定が容易になり、かつ重力崩壊後も時間発展を追い、崩壊による sink particle への質量降着率のような星形成に関わる重要な物理量が計算可能となる。

2.2 Initial Condition

この研究では、半径 1.5 pc の球状分子雲とそれより圧倒的に大きい分子雲 (=超音速流) との衝突のシミュレーションがされており、このシミュレーションを観測することでフィラメントの臨界線密度の計算もされている。音速が 0.3 km s^{-1} で、相対速度 10 km s^{-1} で衝突させるので衝撃波が生成される。磁場は y 軸正方向に観測に合わせた値として 20 μG とする。

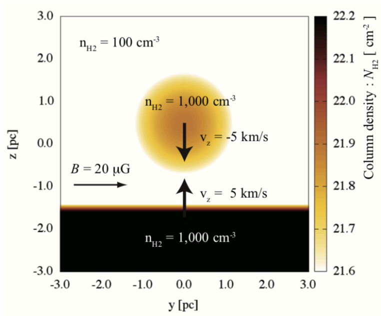

図 1: Inoue et al.(2018) の初期条件。縦、横軸はともに空間座標。色は柱密度を表している。中心にある半径 1.5 pc の球が分子雲で、その下方から超音速流を衝突させ、分子雲と衝撃波の相互作用を記述する。

3 Results

3.1 Filament Formation Phase

ここではフィラメントがどのようにして形成されるのかについて解説する。分子雲と超音速流の衝突の後、分子雲は乱流により密度の高い領域 (クランプ) を作る。このクランプの時間進化を追うことでフィラメントの形成を説明することができる。以下にシミュレーションのスナップショット (図 2) とフィラメント形成メカニズムを解説したイラスト (図 3) を添付する。

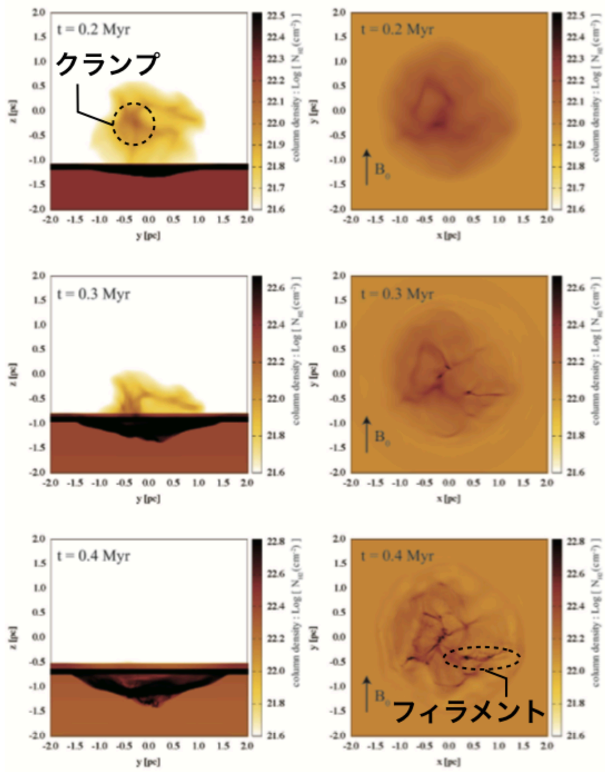

図 2: フィラメント形成までのシミュレーションのスナップショット (上からそれぞれ 0.2Myr 後、0.3Myr 後、0.4Myr 後)。左の列は yz 平面、右の列は xy 平面

まず初期条件から 0.2Myr 後は、超音速の乱流によって分子雲ガスが圧縮される。その結果クランプが形成される。

初期条件から 0.3Myr 後は、超音速流と分子雲の衝突によって生成される衝撃波と分子雲中にできたクランプが衝突する。このとき衝撃波の速度は密度の高い領域で減速されるので、クランプに押される形で衝撃波面は折れ曲がる。また分子雲中の中性ガスは電子や陽子と高い頻度で衝突することからその振る舞いはプラズマと同じと考えて良いため、磁気凍結を起こす。よって磁場も同様にクランプに押される形で折れ曲がる。衝撃波面が変形したことで、(図 3) の中心の拡大図のように「斜め衝撃波」が形成される。斜め衝撃波では接線方向の速度 (運動量) は保存される。したがって (図 3) の白矢印ようにある一

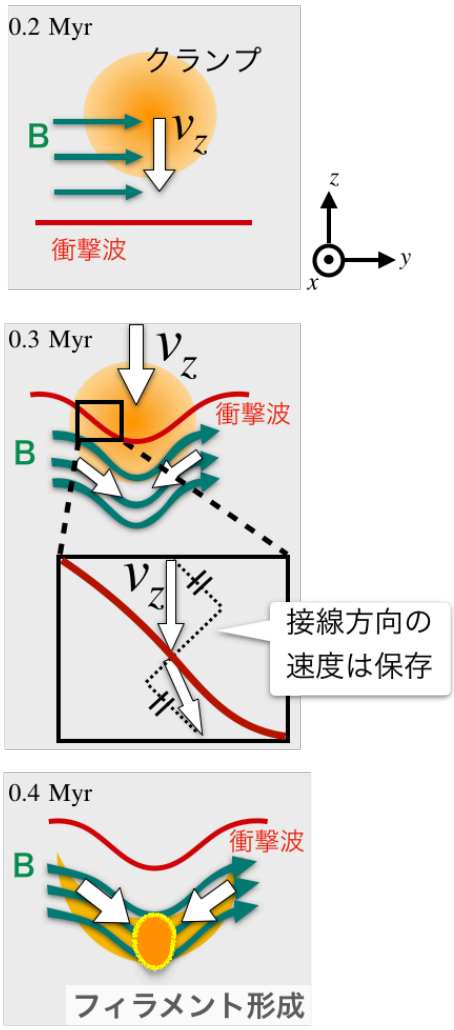

図 3: フィラメント形成のメカニズムを解説したイラスト (上からそれぞれ 0.2Myr 後、0.3Myr 後、0.4Myr 後)。ここでは乱流によって形成された分子雲中の高密度領域であるクランプに着目している。

点に集中するガスの流れ (以下、concentrated flow) ができる。このとき分子雲中のガスは磁気凍結から磁力線を横切れないためガスの流れが集中する点でガスを溜め込む。加えて (図 3) の紙面に垂直方向 (x 方向) には圧縮を受けないので、線状に高密度領域を作る。

このようにして、初期条件から 0.4Myr 後にはフィラメントが形成される。

3.2 Filament Collapse Phase

ここではフィラメントの重力崩壊から星形成までについて述べる。フィラメントが一度形成されると、衝撃波圧縮によって誘起されたガスの流れ (= concentrated flow) によってフィラメントは質量を蓄えていく。フィラメントはある線密度を超えると、その構造をガス圧と磁気圧で支えきれなくなり、重力不安定を起こす。そして星形成を開始する。このときのフィラメントの線密度は臨界線密度と呼ばれ、星形成開始条件を決める。星形成開始条件から星の初期質量、つまり星の運命が決まるため臨界線密度は重要な物理量である。この研究のシミュレーション結果では $t = 0.45$Myr のとき重力崩壊が始まっている。よってフィラメントの臨界線密度 $\lambda_{\rm simu}$ は以下の (図 4) ようにフィラメントの形状を仮定すると計算できる。よってこのシミュレーションで得られる臨界線密度 $\lambda_{\rm simu}$ は

$$\lambda_{\rm simu} \simeq 80\ {\rm M_\odot pc^{-1}}. \qquad (1)$$

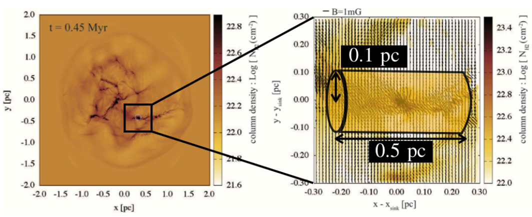

図 4: 初期条件から 0.45 Myr の、横軸に x、縦軸に y を選んだときのスナップショット（左）とその中で最高密度領域の拡大図（右）。左図を見るとフィラメントは x 軸におおよそ平行に形成されている。右図について、フィラメントの幅は 0.1pc とし、長軸を 0.5pc とると臨界線密度が計算できる。

4 Discussion

関連する研究として、フィラメントの平衡状態の臨界線密度を見積もっている Tomisaka(2014) がある。ここでは、Tomisaka(2014) の臨界線密度の表式を用いて臨界線密度を計算し、このシミュレーションで得られる臨界線密度 $\lambda_{\rm simu}$ と比較する。

Tomisaka(2014) では、臨界線密度 $\lambda_{\rm max}$ はフィラメントを貫く磁束密度に比例すると主張している。その臨界線密度の表式は

$$\lambda_{\rm max} \simeq 0.24\frac{\Phi_{\rm cl}}{G^{1/2}} + 1.66\frac{c_s^2}{G}. \tag{2}$$

このとき $\Phi_{\rm cl} \equiv B_{\rm fil}w$ で、w はフィラメントの幅である ($w = 0.1$ pc)。フィラメントを貫く磁束密度 $B_{\rm fil}$ は磁場が衝撃波面に平行な場合の等温 MHD における Shock Jump Condition を用いて衝撃波の上流の量から計算できる。よって

$$\begin{aligned} B_{\rm fil} &\simeq B_1 = rB_0 \\ &= \left[2M_{\rm A}^2 + (\beta+1)^2/4^{1/2} - (\beta+1)/2\right] B_0 \\ &\simeq \sqrt{2}M_{\rm A}B_0 \\ &\simeq 300\mu G \left(\frac{n_0}{10^3\ {\rm cm}^{-3}}\right)^{1/2} \left(\frac{v_{\rm sh}}{10\ {\rm km\ s}^{-1}}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

ここで添字の 0 と 1 はそれぞれ衝撃波の上流と下流の量を表している。r は圧縮率。$\beta \equiv 8\pi c_s^2\rho_0/B_0^2$ は上流のプラズマベータである。さらに $M_{\rm A} \gg \beta$ を用いている。Inoue et al. 2018 のシミュレーションでのパラメータを (2) に代入すると、

$$\begin{aligned} \lambda_{\rm max} \simeq\ & 67{\rm M_\odot pc^{-1}}\left({\rm B_{fil}/300\mu G}\right)({\rm w/0.1pc}) \\ & +35{\rm M_\odot pc^{-1}}\left({\rm c_s/0.3km\ s^{-1}}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

ここで (1) と (4) を比較すると臨界線密度がおおよそ同じくらいになっていることが分かる。よって、Inoue et al. (2018) ではシミュレーションから、 Tomisaka (2014) の臨界線密度がフィラメント崩壊の初期条件を決めると示唆している。

5 Summary & Future Work

星形成の新しいパラダイムとしてフィラメントからの星形成があることが観測的に示唆されている。そして、その具体的な描像は衝撃波と分子雲の相互作用であることがわかってきた。この研究では分子雲の衝撃波圧縮によるフィラメント形成から星形成までを数値シミュレーションを用いて調べ星形成の初期条件、つまりフィラメントの臨界線密度を求めた。そして関連する研究である Tomisaka(2014) が見積もった臨界線密度と比較し、おおよそ一致することがわかった。

私は今後 Inoue et al. (2018) の高解像度シミュレーションを様々なパラメータで実行することで、本当に臨界線密度に達したときに重力崩壊が始まるのかどうか、そして Tomisaka (2014) の臨界線密度の見積もりの正当性を検証するための計算をするつもりである。

Acknowledgement

本講演を行うにあたり、指導教官である井上准教授をはじめ理論宇宙物理学研究室の皆様には多くの助言をいただき大変お世話になりました。またこのような研究発表の機会を設けてくださった夏の学校事務局の皆様に感謝申し上げます。

Reference

André, Ph. et al. 2010 arXiv:1005.2618

Inoue, T. et al. 2018,PASJ, 70S, 53I

Inoue, T., & Fukui, Y. 2013,APJ, 774, 31

Larson, R. B. 1981 MNRAS, 194, 809L

Matsumoto, T. 2007, PASJ, 59, 905

Tomisaka, K. 2014, ApJ, 785, 24

——index

c15

エンスタタイトコンドライト集積による地球大気形成

櫻庭　遥 (東京工業大学大学院 地球惑星科学系)

Abstract

地球表層に存在する揮発性元素は、大気や海洋を形成するため、地球や生命の起源を探る上で非常に重要である。地球大気は主に後期天体集積による衝突脱ガスによってもたらされた揮発性元素によって形成されたと考えられている。ただし、衝突天体の組成は現時点で正確には明らかになっていない。本研究では、特にコンドライト組成に比べて地球表層の C/H 比および N/H 比が小さいことに着目し、後期天体集積期にこれを再現する条件を探る。原始惑星への天体衝突における衝突脱ガスと大気剥ぎ取りについて、大気組成進化を考慮した大気進化計算を行った。初期地球表層では海洋と炭素循環の存在を仮定し、H_2O と CO_2 の海洋・炭酸塩への分配を考慮した。衝突天体組成についてはその揮発性元素含有量をパラメータとし、計算結果と現在の地球表層の揮発性元素組成を比較した。衝突脱ガスと大気剥ぎ取りによる大気進化では十分時間が経つと供給と損失がつりあう定常状態に近づくことが分かった。その定常量は衝突天体組成に依存し、揮発性元素含有割合が小さいほど少量の大気量に収束した。また、衝突と同時に炭素が炭酸塩に、水素が海洋に固定されることで、地球表層に獲得される C/H 比と N/H 比は衝突天体組成の値から減少した。幅広いパラメータ・サーベイの結果、地球表層の C/H/N 量および存在比から見積もられる後期集積天体組成はエンスタタイトコンドライト組成であることを明らかにした。

1 Introduction

水素 (H) や炭素 (C)、窒素 (N) などの揮発性元素は、大気・海洋という生命を育む環境を形成する点で、地球や生命の起源と密接な関連がある。現在の地球表層環境は海水量・大気組成の絶妙なバランスの上に維持されているが、これらの形成条件は未解明である (e.g., Catling & Kasting 2017)。本研究では、地球およびその表層環境の起源を探るため、地球表層の揮発性元素組成に着目した。

地球表層の揮発性元素は主に惑星形成最終段階の小天体の衝突によってもたらされたと考えられているため、小天体から飛来したコンドライト隕石はその起源について重要な手がかりとなる。図 1 は地球表層 (大気 + 海洋 + 地殻) とコンドライト中の揮発性元素組成の比較を示している。コンドライトにはここで示されているエンスタタイトコンドライトや炭素質コンドライトなど様々な種類があるが、いずれの種類のコンドライトと比べても地球表層では炭素と窒素が枯渇している。

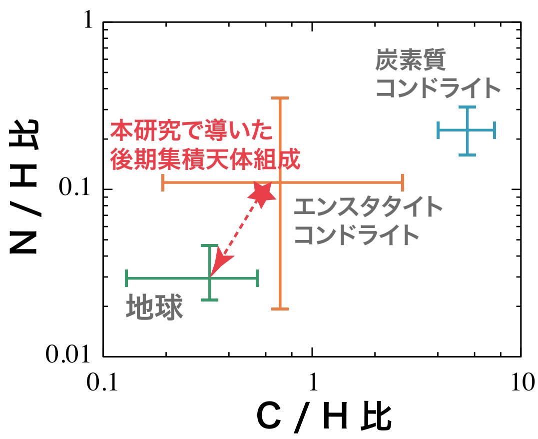

図 1: 地球表層 (大気 + 海洋 + 地殻) とコンドライト中の揮発性元素組成における C/H 比および N/H 比の比較 (data are from Abe et al.　2000; Pepin 2015)

本研究では、小天体衝突による大気形成過程に着目する。月面クレーターの年代分析から、地球型惑星は巨大衝突後の集積最終段階において無数の小天体衝突を経験したことが知られている。衝突した小天体に含まれていた揮発性元素が脱ガスし、大気を形成した。同時に衝突で噴き上がった衝突蒸気雲によっ

て大気の一部が宇宙空間へ失われる (e.g., de Niem et al. 2012)。巨大衝突後の一連の小天体衝突は後期天体集積と呼ばれ、主に直径数 km から数十 km の小天体が地球質量の約 1%ほど衝突したと考えられている (e.g., Bottke et al. 2010)。

初期地球の海洋形成時期および炭素循環がいつはじまったのかについては未だ議論が続いており正確には明らかになっていない。しかし、もし後期天体集積時に海洋や炭素循環が存在したならば、衝突天体から脱ガスした揮発性元素は大気だけではなく海洋や炭酸塩へも分配されたはずである。本研究ではこのような惑星表層の元素分配が大気形成に与える影響を明らかにすることで、地球表層の炭素・窒素枯渇の原因と後期集積天体が満たすべき条件を探る。

2 Models

本研究では、後期天体集積における大気形成モデルを構築し、惑星表層の元素分配が大気組成進化に与える影響を調べた。小天体によって供給される揮発性元素の衝突脱ガスと、衝突で吹き上げられる衝突蒸気雲による大気剥ぎ取りを考えた大気進化を計算した (図 2)。大気を構成する揮発性成分には水蒸気 (H_2O), 二酸化炭素 (CO_2), 窒素 (N_2) の 3 成分を仮定し、各成分の大気・表層リザーバー (大気・海洋・地殻) 間の分配を考慮した C/H 比・N/H 比の時間進化を調べた。

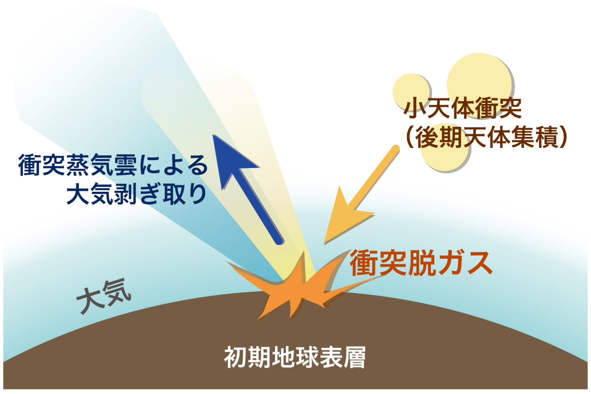

図 2: 衝突脱ガスと大気剥ぎ取りによる大気形成モデル概念図

計算では衝突量と大気量変化の関係を示した大気進化方程式 (1) を解いた (Sakuraba et al. in press., arXiv#: 1805.07094)。

$$\frac{\mathrm{d}(m_\mathrm{i} N_\mathrm{i})}{\mathrm{d}\Sigma_\mathrm{imp}} = (1-\zeta)x_\mathrm{i} - \eta\frac{(m_\mathrm{i} N_\mathrm{i})}{m_\mathrm{A}} \quad (1)$$

右辺第 1 項は大気の供給、第 2 項は損失に相当する。ここで Σ_imp は衝突累計質量、i は各大気成分を意味し、m, N, x はそれぞれの分子量と大気中分子数、衝突天体中含有割合を表す。

式 (1) 中の η は大気はぎとり効率、ζ は衝突天体蒸気はぎとり効率を表しており、大気剥ぎ取りモデル (Svetsov 2000, 2007; Shuvalov 2009) を適用した。大気剥ぎ取りは衝突天体のサイズと速度に依存するため、両分布を考慮した統計的平均操作を行った。

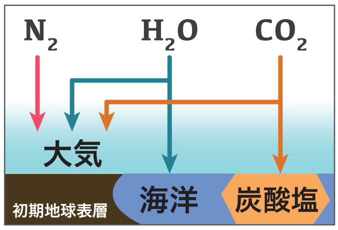

図 3: 大気進化モデル中の地球表層における元素分配のイメージ図. N_2 は大気に, H_2O は大気と海洋に, CO_2 は大気と炭酸塩にそれぞれ分配されると仮定した.

惑星表層におけるリザーバー間の元素分配については、H_2O の海洋への分配および CO_2 の炭酸塩への分配を仮定し (図 3)、各成分分圧に飽和水蒸気圧 ($P_{H_2O} < 0.017$bar) および炭素循環が安定して駆動するような分圧上限 ($P_{CO_2} < 10$bar, Kasting (1993)) を設けることによって考慮した。大気の温度については等温大気を仮定し、現在の表面温度である 288 K を仮定した。一方 N_2 は反応性が低く惑星内部には取り込まれにくいためすべて大気に分配されると仮定した。元素分配によって H_2O が海洋に、CO_2 が炭酸塩に蓄積することで、衝突天体中の揮発性元素組成とは異なる組成の大気が形成される。結果として各成分の衝突による剥ぎ取り量にも偏りが生じ、大気中の C/H 比や N/H 比も変化すると考えられる。衝突脱ガスについては衝突天体の CO_2, H_2O, N_2 各

成分の含有割合をパラメータとし、様々な組成の小天体衝突によって形成される大気組成を調べることで、衝突天体組成への制約を試みた。

3 Results & Discussion

本研究では、後期天体集積による大気形成において衝突脱ガス時の惑星表層での元素分配を考慮した大気組成進化を調べた。計算の結果、後期天体集積時の水素・炭素の海洋・炭酸塩へ分配されることによって、地球表層の C/H 比および N/H 比は減少し、炭素・窒素枯渇を生じさせることが分かった。また、現在の地球表層の揮発性元素組成から衝突時の元素分配による大気組成進化を遡ることで、エンスタタイトコンドライト組成の後期集積天体を仮定すると現在の地球表層に見られる炭素・窒素枯渇を説明できることが分かった。

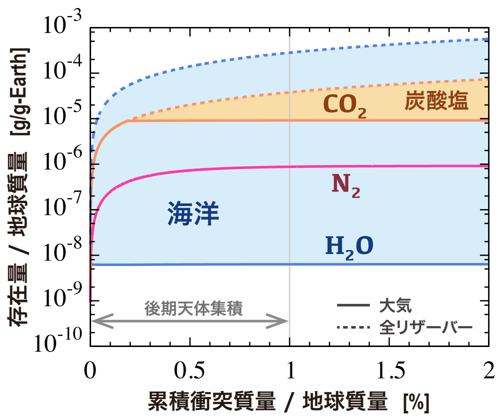

図 4: 衝突脱ガスと大気剥ぎ取りによる地球大気中の揮発性元素量進化 (橙：二酸化炭素 (CO_2), 青：水蒸気または水 (H_2O), 赤：窒素 (N_2), 実線：大気中の存在量, 点線：表層の全リザーバー中の存在量). 衝突天体中の揮発性元素含有量は (CO_2: 0.7%, H_2O: 3%, N_2: 0.03%) と仮定した.

図 4 は地球大気組成の時間進化 (CO_2, H_2O, N_2 の各存在量進化) を示している。本研究から推測される衝突天体組成として各成分の含有割合を (CO_2: 0.7%, H_2O: 3%, N_2: 0.03%) と設定した場合の計算結果である。横軸の衝突質量は時間発展に相当する。衝突が進むにつれて H_2O は海洋へ、CO_2 は炭酸塩へ取り込まれるため、その分は剥ぎ取られることなく惑星に蓄積される。衝突天体によって供給された H_2O はそのほとんどが海洋へ蓄積され、大気剥ぎ取りの影響をほとんど受けないのに対し、大気のみに分配される N_2 や一部しか炭酸塩へ取り込まれない CO_2 は大気剥ぎ取りによって選択的に宇宙空間へ剥ぎ取られたと推測される。

次に後期天体集積中の惑星表層の N/H 比と C/H 比の時間進化を図 5 に示す。衝突天体組成は図 4 と同じ設定での計算結果である。後期天体集積による天体衝突量は地球質量の約 1%と見積もられており (Bottke et al. 2010)、その時点までに N/H 比は約 7 割, C/H 比は約 4 割減少した。これは、衝突天体によって供給された水素の大部分と炭素の一部が海洋や炭酸塩として地球表層に固定されることで衝突による大気剥ぎ取りの影響を受けず地球表層に留まったためだと考えられる。大気のみに分配される窒素と、一部が炭酸塩に取り込まれてもなお大気の主成分を占める二酸化炭素は、水蒸気に比べて大気中の存在割合が多く、大気剥ぎ取りの影響を強く受ける。その結果として C/H 比および N/H 比が減少したと推測される。以上の結果から、後期天体集積時の表層リザーバー間の元素分配が地球表層に見られる炭素・窒素枯渇の原因の一つだと考えられる。

また、衝突天体組成に対し幅広いパラメータ・サーベイを行ったところ揮発性成分含有割合が (CO_2: 0.7%, H_2O: 3%, N_2: 0.03%) の小天体が衝突した場合、後期天体集積後の最終的な C/H 比および N/H 比、N_2 量が現在の地球と一致した。図 1 の星印とそこからの矢印は衝突天体組成と元素分配による化学組成進化を表している。今回求めた組成は太陽系小天体の中ではエンスタタイトコンドライトに分類されるため、この結果から後期集積天体はエンスタタイトコンドライト組成であったことが示唆される。

太陽系小天体の組成は、構成成分の凝結温度の違いによってその形成場所の情報を反映していると考えられる。岩石惑星軌道付近の太陽系内側領域には揮発性元素含有量が比較的少ない天体が、小惑星帯以遠の太陽系外側領域には揮発性元素に富んだ天体が多く分布する (e.g., Morbidelli 2012)。この傾向を利用することで、衝突天体組成の見積もりからその

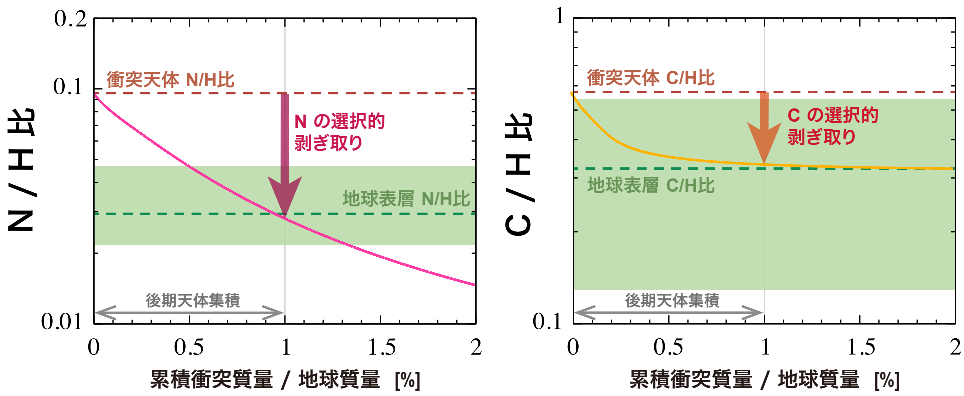

図 5: 地球表層の C/H 比および N/H 比進化. 図 4 と同様の計算において大気+海洋+炭酸塩に蓄積された揮発性元素 (C, H, N) の存在比の時間進化を示す.

形成場所や集積過程を含む惑星形成シナリオに対する手がかりが得られると期待される。

現在の地球表層に存在する希ガスはその大部分が大気に含まれているが、その存在量もコンドライト組成に比べて枯渇している (e.g., Pepin 2015)。希ガスも窒素と同様反応性が低く惑星内部には取り込まれにくいため、後期天体集積によってもたらされた希ガスは大気に分配され、大気剥ぎ取りの影響を強く受けたと考えられる。したがって、本研究で着目した表層における元素分配を伴う大気剥ぎ取りは、希ガス存在量にも影響を与えたと考えられる。

4 Conclusion

衝突脱ガスと大気剥ぎ取りを伴う後期天体集積において、衝突時に海洋や炭素循環がすでに存在したと仮定すると、地球表層の N/H 比および C/H 比は時間とともに減少し、炭素・窒素枯渇を引き起こすことが分かった。これは衝突天体によって供給された水素が海洋へ、炭素が炭酸塩へ固定されることによって大気剥ぎ取りの効果が妨げられたことに起因する。さらにこの大気組成進化を遡り幅広いパラメータ・サーベイを行った結果から、我々は後期集積天体はエンスタタイトコンドライトと類似した組成であったと推測する。

Acknowledgement

本稿は地球生命研究所 (ELSI) の黒川宏之研究員・玄田英典准教授との共同研究に基づいています。以上の共同研究者に加え、数多くのご助言をいただいた指導教員の奥住聡准教授に心より感謝申し上げます。

Reference

Abe, Y., et al. 2000, University of Arizona Press, 413-433.

Bergin, E., et al. 2015, National Academy of Sciences 112, 29, 8965-8970.

Bottke, W.F., Nesvorny, D., Vokrouhlicky, D., Morbidelli, A. 2010, The Astronomical Journal 139, 994.

Catling, D.C., Kasting, J.F. 2017, Cambridge University Press.

Kasting, J. F. 1993, Science 259, 920-926.

Morbidelli, A., et al. 2012, Annual Review of Earth and Planetary Sciences 40.

de Niem, D., et al. 2012, Icarus 221, 495-507.

Pepin, R. O. 1991, Icarus, 92, 2-79.

Sakuraba, H., Kurokawa, H., and Genda, H. 2018, Icarus in press.

Shuvalov, V. 2009, Meteor. Planet. Sci., 44, Nr 8, 1095-1105.

Svetsov, V. V. 2000, Solar Syst. Res., 34(5), 398-410.

Svetsov, V. V. 2007, Solar Syst. Res., 41, 28-41.

——index

c16

COSMOS 領域における原始銀河団コアの探索

安藤 誠 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

原始銀河団は現在の銀河団の祖先と考えられている領域で、主に $z > 2$ における銀河の密度超過として発見されてきた。銀河の形成・進化に対する環境の影響を知る上では、原始銀河団の中で特に密度の高い中心部（コア）を探す必要がある。本研究では多波長の観測データが存在する COSMOS 領域の銀河カタログを用いて、重い銀河のペアをトレーサーとし、原始銀河団のコアとみなせるような重いダークマターハロー (DH) を探索した。その結果原始銀河団コアの候補として、およそ 200 組の銀河グループが見つかった。これらの周りでは銀河の密度超過が見られ、また clustering 解析から DH の質量が $M_{\rm DH} = 2.5 \times 10^{13}\ M_\odot$ であると見積ることができた。将来的には、今回発見したコア候補の周囲にサブミリ銀河のような特徴的な天体が存在するかを調べること、分光追観測によってコア候補が本物であるかを確認することなどを予定している。

1 Introduction

銀河団は宇宙最大規模のダークマターハロー (DH) を土台として、銀河が高密度で存在する領域である。その特有な環境ゆえに、銀河進化と銀河の周囲の環境との間の依存性、すなわち環境効果を調べる上でも銀河団は重要な研究対象である。多くの銀河団は $z < 1$ のような比較的近傍の宇宙で発見されてきたが、近年の観測技術の向上や手法の開発を背景に、より遠方の宇宙においても銀河団の探査が精力的に行なわれている。特に $z > 2$ のような遠方にある銀河の高密度領域のうち、将来的に DH の質量が現在の銀河団 DH 質量の典型値である $M_{\rm DH} \sim 10^{14}\ M_\odot$ 程度にまで成長することが予想されるようなものは原始銀河団と呼ばれ、銀河団そのもののやメンバー銀河の進化を調べるための対象として関心を集めている (Overzier 2016)。

原始銀河団は代表的には以下のような手法で探査が行なわれている。

1. LBGs や LAEs などの大規模なサーベイに基づいて、~ 10 cMpc 程度にわたる銀河の密度超過領域を探す。

2. QSOs や SMGs などの特徴的に重いと考えられる銀河を目印に密度超過を探す。

これらは多くの原始銀河団候補領域を発見するという成果を上げている一方で、原始銀河団と環境の研究という観点では問題も残る。(1) については、非常に大局的な銀河の密度超過を探すことになるので、環境効果が顕著に現れると考えられる中心部が同定できないことや、そのような大きな構造が銀河団に進化するかどうかの判定を（しばしば未検証の）シミュレーションに依存していることが挙げられる。(2) についても、目印となる天体の寿命が短いので、限られた原始銀河団しか探せない可能性が高い。

原始銀河団の中心部の研究については、$z > 2$ おいて非常に高い密度超過を持つ天体が見つかっている（Wang et al.2016; Miller et al. 2018; Oteo et al. 2018）。こうした原始銀河団の「コア」は数百 pkpc 程度の非常に小さな領域に多数の銀河が集中していることや、極めて高い星形成率 ($\sim 1000 M_\odot\ yr^{-1}$) を持つなどの特徴があり、環境効果を調べる上でも興味深い対象である。一方で、このような極端な天体は稀にしか見つからず、見つかったとしても一般的な環境とは呼びにくい。

そこで、原始銀河団のコアを系統的な手段で多く見出すことが重要になる。そこで本研究では、$z \sim 2$ において、当時の最も重い virial halo を原始銀河団コアと定義し、これを探すために銀河のペアに着目して解析を行った。

本研究では flat な ΛCDM 宇宙論を仮定し、$\Omega_{\rm M} = 0.3, \Omega_{\Lambda} = 0.7$ を採用する。また距離に言及する際に共同距離であるか物理距離であるかを明示して、cMpc, pMpc のように表記する。

2 Data & Samples

本研究では、COSMOS 領域における 2015 年版の銀河カタログ (Laigle et al. 2016) を用いた。このカタログでは Ks-band によって選択された 50 万個を超える銀河について、可視光から近赤外線にわたる多波長観測によって得られた、星質量や測光的 redshift などの情報が含まれている。観測領域の広さは、近赤外線サーベイである UltraVISTA の観測が存在する領域が ~ 1.58 deg^2 であり、その中には 3σ 限界等級が $K_s = 24.0$ の Deep 領域と $K_s = 24.7$ の Ultra Deep 領域が含まれている。なお Deep 領域について、$2.75 < z < 3.5$ における銀河の 90% mass limit は $\log(M_*/M_\odot) = 10.1$ である。このうち本研究では、$1.5 \leq z \leq 3.0$ にある 167815 個の銀河をサンプルとして選んだ。

3 原始銀河団コアの探査

3.1 原始銀河団コア

本研究では原始銀河団のコアを、$z \sim 2$ において最も重いビリアル化した DH と定義した。このような DH は $z \sim 0$ まで進化すると $M_{\rm DH} \geq 10^{14}\ M_\odot$ の質量を獲得することが予想される。$z \sim 0$ である質量を持つ DH の過去の質量は extended Press-Schecher モデル (Hamana et al. 2006) によって解析的に推定でき、いま考えている DH の場合、$z \sim 2.5$ において典型的に $M_{\rm DH} \sim 3 \times 10^{13}\ M_\odot$ を持つことが予想される。また球対称崩壊モデルによると、このような DH のビリアル半径は $r_{\rm vir} \sim 0.3$ pMpc である。また、Behroozi et al. (2013) によると $M_{\rm DH} \sim 10^{13}\ M_\odot$ のような DH は、$M_* \geq 10^{11}\ M_\odot$ のような重い銀河のホストハローである。そこで本研究では、0.3 pMpc の半径の中に $M_* \geq 10^{11}\ M_\odot$ を満たす銀河が 2 個以上存在する領域を原始銀河団のコア候補として探索した。

3.2 Analysis

原始銀河団のコアとみなせるような銀河のグループを探すために、以下のような手続きを行った。なおサンプルとして用いた $1.5 \leq z \leq 3.0$ かつ $M_* \geq 10^{11}\ M_\odot$ を満たす銀河の総数は 1727 個であった。

1. ある銀河に着目し、その銀河を中心として半径 $\Delta\theta = 0.3 \times 2$ pMpc、奥行き $\Delta z = 0.12 \times 2$ の円筒内にある銀河（「隣接銀河」と呼ぶ）を数える。

2. 隣接銀河数が多い銀河から順に、中心銀河及びその隣接銀河をまとめて原始銀河団コア候補とみなす。複数のコア候補に属する可能性がある銀河については、よりメンバー数の多いものの方に属するものとする。

3. まとめたメンバー銀河の位置・redshift の平均を原始銀河団コア候補の位置・redshift とする。

ここで奥行き $\Delta z = 0.12$ はカタログ銀河が持つ redshift の誤差を考慮して設定したものである。

4 Results

見つかった原始銀河団コア候補を図 1 に示す。これらには表 1 に示すようなメンバー数を持つものが含まれる。

表 1: 原始銀河団コア候補の数

メンバー数	2	3	4	5	6	計
候補数	150	30	14	5	4	203

5 Discussion

5.1 Surface number density

今回探索した原始銀河団コア候補の周囲における銀河の密度超過を知るために，周囲にある銀河の分布を調べた。まず各コア候補の座標を中心とし，奥行き $\Delta z = 0.12$ を持つ円環柱の中に存在する，$10.0 \leq \log(M_*/M_\odot) < 11.0$ を満たす銀河の数を数えた。次

に半径ごとの数分布を全てのコア候補について足し合わせることで，今回見つけた候補の平均的な密度分布を得た。同様の解析を $\log(M_*/M_\odot) \geq 11.0$ を満たす銀河及びランダム点周りでも行った。前者は「重い銀河のグループ」が単体の重い銀河と比べて銀河の密度超過のよいトレーサーとなるかを調べるのに用い，後者は COSMOS 領域の平均的な銀河数密度を評価することに用いる。

結果は図 2 示されている。原始銀河団コア候補周りの銀河の密度は単体の重い銀河や COSMOS 平均と比べて大きくなっている。コア領域と見なしうる半径 1 – 2 cMpc において、COSMOS 平均に対する原始銀河団コア周りでの密度超過はおよそ 0.5 である。

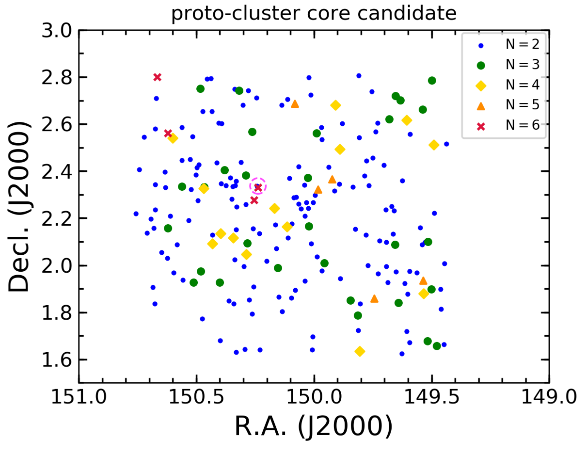

図 1: COSMOS 領域における原始銀河団コア候補。小丸，大丸，ダイヤモンド，三角形，バツ印によってそれぞれ 2, 3, 4, 5, 6 個のメンバー銀河を含むコア候補が示されている。このうちマゼンタの破線円で囲まれたものは Wang+16 において分光同定されたコアである。

5.2 Clustering Analysis

今回見つけた原始銀河団コア候補の集合度合いを調べるために 2 点角度相関関数 $\omega(\theta)$ を計算した。$\omega(\theta)$ は、Landy & Szalay (1993) の推定式を用いると、以下のように表される。

$$\omega(\theta) = \frac{DD(\theta) - 2DR(\theta) + RR(\theta)}{RR(\theta)}$$

ただし $DD(\theta), DR(\theta), RR(\theta)$ はそれぞれ、角度 θ だけ隔てたデータ点-データ点、データ点-ランダム点、ランダム点-ランダム点のペアの数である。図 3 に本研究で求めた銀河団コア候補及び重い銀河の角度相関関数がプロットされている。これらを $\omega(\theta) = A_\omega \theta^{-0.8} + IC$ の関数形（IC は観測領域で決まる定数）で fit を行うことにより、$A_\omega^{\rm core} = 10.9^{+4.3}_{-4.3}, A_\omega^{\rm gal} = 2.8^{+0.5}_{-0.5}$ を得た。2 点角度相関関数は、その天体のホスト DH の質量の推定に用いることができる (e.g. Kusakabe+18, Okamura+18)。これをもとに推定したホスト DH の質量は、$M_{\rm DH}^{\rm core} = 2.5^{+1.7}_{-1.1} \times 10^{13}\ M_\odot, M_{\rm DH}^{\rm gal} = 4.6^{+1.5}_{-1.3} \times 10^{12}\ M_\odot$ であった。これは銀河のペアを探すことでより重い DH を探すことができることを示しており、またその質量は今回目標としていた DH に近い値であることがわかった。

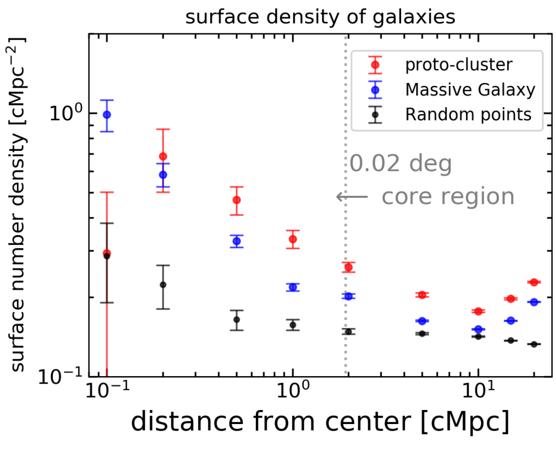

図 2: 原始銀河団コア候補周りの銀河の密度超過。赤，青，黒の各点はそれぞれ原始銀河団コア候補，重い銀河，ランダム点周りの面密度を表す。

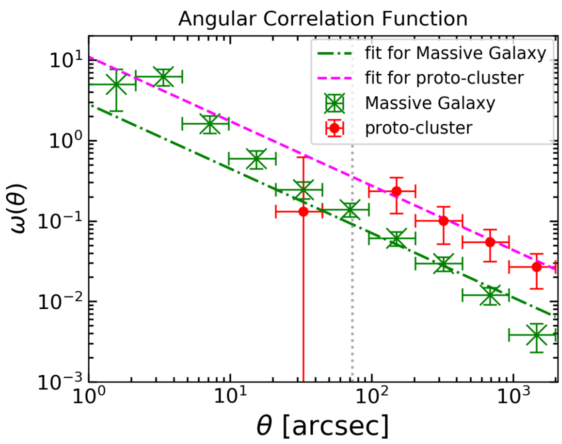

図 3: 原始銀河団コア候補及び単体の重い銀河の 2 点角度相関関数。赤，緑，の各点はそれぞれ原始銀河団コア候補，重い銀河での $\omega(\theta)$ を表す。またそれぞれをモデルで fit したものがそれぞれ破線及び一点鎖線で表されている。

6 Future work

これまでに見つけた原始銀河団コア候補領域について、そのメンバー銀河に対する環境効果の様子を調べるために、将来的には以下のようなことを行う予定である。

- 原始銀河団コア候補周辺に中性水素ガスが存在するかを調べる。
- サブミリ銀河のようなダストを多く持つ（したがって星形成が盛んな）銀河が原始銀河団コア候補に存在するかを調べる。
- 原始銀河団コア候補の分光追観測
- COSMOS 以外の領域における原始銀河団コア候補の探索

7 Conclusion

COSMOS 領域の銀河カタログを用いて、$1.5 \geq z \leq 3$ にある $M_* \leq 10^{11}\ M_\odot$ を満たす銀河のグループを探すことで原始銀河団のコア候補の探査を行い、約 200 個の候補を見つけた。コア候補周りの銀河の密度超過は 0.5 程度であった。また、コア候補に対する clustering 解析により、コア候補が属する DH の平均的質量はおよそ $M_{\rm DH} \sim 2 \times 10^{13}\ M_\odot$ であることがわかった。

Acknowledgement

本研究におきましては、指導教員である嶋作一大先生から多くのアドバイスをいただき、また研究に関する細やかな議論をたくさんさせていただきました。また、研究室のメンバーの方々には解析の初歩から丁寧に教えていただき、研究のアイデアをいただきました。研究を支えてくださっている皆様に感謝申し上げます。

Reference

Behroozi, P. S., Wechsler, R. H., & Conroy, C. 2013, ApJ, 770, 57

Hamana, T., Yamada, T., Ouchi, M., Iwata, I., & Kodama, T. 2006, MNRAS, 369, 1929

Kusakabe, H., Shimasaku, K., Ouchi, M., et al. 2018, PASJ, 70, 4

Laigle, C., McCracken, H. J., Ilbert, O., et al. 2016, ApJ, 224, 24

Landy, S. D., & Szalay, A. S. 1993, ApJ, 412, 64

Miller, T. B., Chapman, S. C., Aravena, M., et al. 2018, Nature, 556, 469

Okamura, T., Shimasaku, K., & Kawamata, R. 2018, ApJ, 854, 22

Oteo, I., Ivison, R. J., Dunne, L., et al. 2018, ApJ, 856, 72

Overzier, R. A. 2016, A&A Rev., 24, 14

Wang, T., Elbaz, D., Daddi, E., et al. 2016, ApJ, 828, 56