重力レンズ効果と intrinsic alignment

立石 廉晟 (東京大学カブリ数物連携宇宙研究機構)

Abstract

宇宙空間の質量分布に非一様性があると重力レンズ効果と呼ばれる現象が起こる。重力レンズ効果とは、ある光源銀河から発せられた光が間にある銀河団などの重力場により曲げられ、光源銀河の像が歪んでしまう現象である。つまり逆に考えると、銀河像の歪み具合を調べることによって宇宙の質量分布を調べることができる。しかし重力レンズ効果とは別に、大規模構造が作る潮汐力場によって銀河自体の形が歪んでしまう効果も存在する。この効果は intrinsic alignment と呼ばれ、重力レンズ効果の解析を行う際に系統誤差として作用してしまう。そのため、宇宙の質量分布を調べる際には intrinsic alignment を除去して重力レンズ効果の解析を行う必要がある。そこで、本発表では重力レンズ効果及び intrinsic alignment の原理やその効果を概説する。

1 Introduction

宇宙の大規模構造を解明することは宇宙物理学の目標の一つであり、現在の標準的なシナリオは、宇宙初期に生成された原始密度ゆらぎが重力不安定性で成長し、まず小さく軽い天体が形成され、それらが合体して次第に大きく重い天体を形成するという冷たいダークマターモデル (CDM モデル) が採用されている。そして、宇宙の構造を観測的に知る有力な方法の 1 つは銀河の空間的な分布を広範囲に調べることである。銀河は基本的に宇宙の質量密度が高いところに形成されるため、銀河の空間分布は密度ゆらぎの空間分布を反映する。そこで銀河分布を観測してその統計的な性質を調べることにより、宇宙論に関する情報を得ることができる。

銀河団の質量分布を推定する方法の 1 つとして、重力レンズ効果が挙げられる。その中でも弱い重力レンズ効果はあらゆる銀河に効果を及ぼすため、広い範囲の質量分布を測定することが可能である。しかしその効果は弱く、意味のある情報として取り出すには多数の銀河について統計平均をとる必要がある。その際には様々な要因が誤差として作用してしまうため、今後はその誤差を小さくしより精密な解析を行う必要がある。そこで本発表では、重力レンズ効果について説明するとともに、系統誤差の 1 つである intrinsic alignment についても述べ、今後の展望について解説する。

2 Gravitational Lensing Effect

重力レンズ効果は一般相対性理論によって予言されていた現象で、光源銀河と観測者との間に銀河団など (レンズ天体) が存在するとき、レンズ天体の重力場によって光源銀河から発せられた光が曲げられてしまう現象である。これによって観測される銀河像の明るさが変化したり、複数の像が見えたり、形が歪んだりなどの効果が現れる。

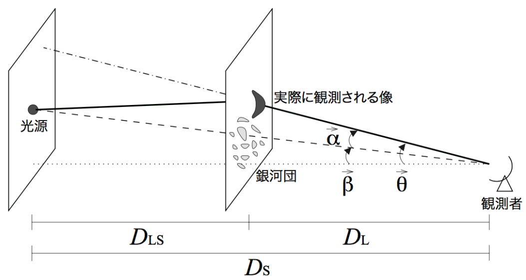

図 1: 重力レンズ効果の概念図

図 1 のように、天球上における像までの角度ベクトルを $\vec{\theta}$、光源までの角度ベクトルを $\vec{\beta}$ をすると、重力レンズ方程式は

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\alpha}(\vec{\theta}) \tag{1}$$

で与えられ、$\vec{\alpha}$ は重力レンズ曲がり角ベクトルと呼ばれる。このとき、角度ベクトル $\vec{\theta}$、$\vec{\beta}$、$\vec{\alpha}$ は 1 より

十分小さいので、これらは天球上における 2 次元平面ベクトルと近似することができる。曲がり角 $\vec{\alpha}(\vec{\theta})$ は、レンズ天体の質量分布による 2 次元重力レンズポテンシャル ψ を用いて

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \nabla\psi(\vec{\theta}) \tag{2}$$

$$= \frac{4G}{c^2}\frac{D_L D_{LS}}{D_S}\int d^2\vec{\theta}'\frac{\vec{\theta}-\vec{\theta}'}{|\vec{\theta}-\vec{\theta}'|^2}\Sigma(D_L\vec{\theta}') \tag{3}$$

と表せる。Σ は銀河団の質量密度分布を視線方向に投影した 2 次元質量密度 $\Sigma(\vec{\theta}) = \int dz\ \rho(D_L\vec{\theta}, z)$ である。また、D_L、D_S、D_{LS} は観測者とレンズ天体、観測者と光源、レンズ天体と光源の間の角径距離をそれぞれ表す。

ここで、基準点 $(\vec{\beta}\ ,\ \vec{\theta})$ まわりの微小偏差ベクトル $(\vec{\beta}+\delta\vec{\beta}\ ,\ \vec{\theta}+\delta\vec{\theta})$ の重力レンズマッピングを考えると、テイラー展開によって

$$\delta\beta_i = \mathcal{A}_{ij}\delta\theta_j \tag{4}$$

が得られる。$\mathcal{A}$ はヤコビアン行列と呼ばれ、

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1-\kappa-\gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1-\kappa+\gamma_1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

と定義される。式 (4) は、$\delta\vec{\beta}$ を光源銀河の表面を動くベクトル群であるとすると、ヤコビアン行列 $\mathcal{A}_{ij}$ によるマッピングを通して、$\delta\vec{\theta}$ が作るベクトル群は観測者が実際にその天体を見たときの形状を与えることを表している。ここで、κ、γ_1、γ_2 は

$$\kappa \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial{\theta_1}^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial{\theta_2}^2}\right) \tag{6}$$

$$\gamma_1 \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial{\theta_1}^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial{\theta_2}^2}\right) \tag{7}$$

$$\gamma_2 \equiv \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta_1\partial\theta_2} \tag{8}$$

のように定義され、これらのパラメータの物理的な意味は図 2 のようになる。

κ (convergence： 図左上) は、光源の形は変えず、その面積を $\frac{1}{1-\kappa}$ 倍だけ大きくする効果を持つ。γ (shear： 図右上と左下) は、光源の面積は変えずに形を楕円形に歪める効果を持ち、誘発される楕円率の大きさは $\frac{a+b}{a-b} = \gamma(=\sqrt{{\gamma_1}^2+{\gamma_2}^2})$ となる (a、b はそれぞれ楕円の長軸と短軸の長さ)。γ_1 は座標軸方向に形を歪める効果を、γ_2 は座標軸から 45° 傾いた方向に形を歪める効果を持ち、shear の成分は $\gamma_1 = \gamma\cos 2\phi$、$\gamma_2 = \gamma\sin 2\phi$ で与えられる。

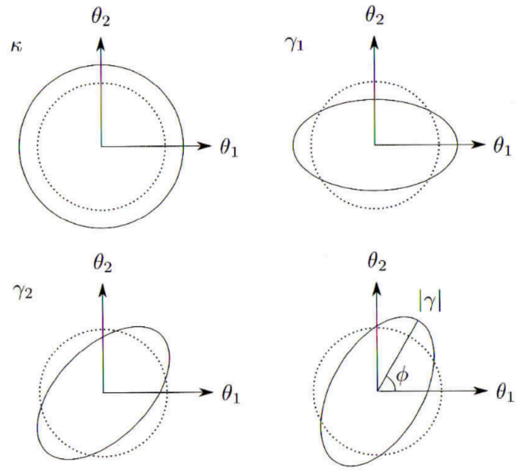

図 2: κ、γ の物理的意味

重力レンズ効果には大まかに分けて、強い重力レンズ効果と弱い重力レンズ効果の 2 種類があり、以下ではそれぞれについて性質や銀河像に与える影響などを見ていく。

2.1 Strong Gravitational Lensing

強い重力レンズ効果は背景銀河とレンズ天体がほとんど同じ視線方向に存在するときに現れる効果で、比較的稀な現象である。この効果を受けると、天体像が 2 つ以上の像に分離して見えたり、像がアーク状に大きく歪んだりする。これらの情報に基づき重力レンズ方程式の逆問題を解くことで、中心領域の質量分布を復元することができる。

図 3: 多重像

図 4: アーク状の歪み

2.2 Weak Gravitational Lensing

弱い重力レンズ効果は銀河団中心部から離れたところでも観測できるが、個々の銀河像からはその効果ははっきりとはわからず、多数の背景銀河の形状を統計解析することで初めて得られる。しかし逆に言えば、あらゆる光源天体は多少なりとも弱い重力レンズ効果を受けているため、強い重力レンズ効果に比べて広い範囲の質量分布を推定することが可能である。

弱い重力レンズ効果には 2 種類の観測量があり、1 つは増光バイアス効果と呼ばれるものである。これは、レンズがないときと比べて、重力レンズ効果によって背景銀河の個数密度は相対的にどう変化するかを表す量である。もう 1 つはシアー効果と呼ばれるものである。弱い重力レンズによっても銀河像の形は歪められるが、個々の像を見ただけでは銀河固有の楕円率に埋もれてしまってその効果を引き出すことができない。しかし、図 2 右下のように、楕円率の成分は長軸の方向角に依存して正負の値を取りうるため、異なる背景銀河間では固有楕円率の方位角に相関がないと仮定すれば、多数の銀河像の楕円率の統計平均を取ることで固有の楕円率が打ち消しあい、系統的な銀河団による重力レンズ効果を引き出すことができる。

図 5 は弱い重力レンズ効果の観測結果を表しており、上パネルの四角記号は銀河団中心から見て円周の接線方向に沿った背景銀河の楕円率成分の結果を示し、有意な重力レンズシアーが検出されている。実線は、測定結果をもっとも良く再現する NFW モデルの予言である。下パネルは重力レンズ効果では生じない楕円率成分 (円周の接線方向から 45° 回転した方向の成分) の測定結果を表している。

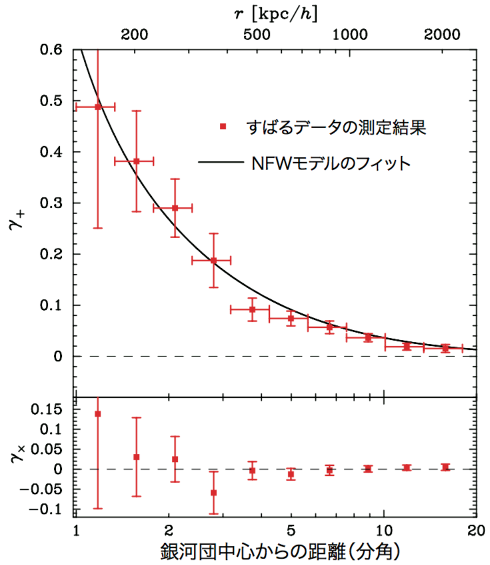

図 5: A1689 銀河団のすばる望遠鏡データによる背景銀河像への弱い重力レンズ・シアー効果の動径プロファイルの測定結果 (Broadhurst et al. 2005, ApJL, 619, 143)

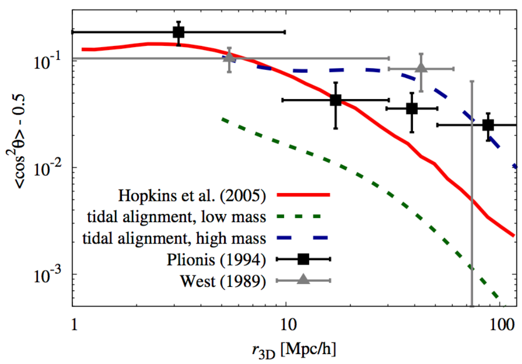

図 6: 銀河クラスターの向きの潮汐力場による影響の予測と観測結果 (B. Joachimi et al., arXiv:1504.05456)

3 Intrinsic Alignment

2.2 節でも述べたように、重力レンズ効果の解析を行う際は十分離れた銀河間には相関がないということを前提としているが、実際は銀河の形状は大規模構造による潮汐力場の影響を受けているので、銀河が互いに相関を持つ可能性がある。この効果は intrinsic alignment と呼ばれ、重力レンズ効果の解析の際には系統誤差として作用してしまう。

図 6 の横軸は銀河クラスターペアの 3 次元的な距離であり、縦軸の θ は銀河クラスターのペアを結ぶ線と一方の銀河クラスターの主軸とを天球上に射影したときになす角を表す。銀河の向きが完全にランダムであるならば $\langle \cos^2\theta \rangle$ は 0.5 となる。赤い実線はシミュレーションの結果で、点線は潮汐力場 alignment

の理論予測、プロットは観測結果を表している。この図から、距離が離れれば銀河の向きはランダムに近づいていくものの、ある程度の距離までは銀河の向きはランダムとはいえず、互いに相関を持っていることがわかる。そのため、実際に重力レンズ効果の解析を行う際には、intrinsic alignment の効果を除いて計算する必要がある。

4 Conclusion

測定に近似を必要とする X 線観測による質量測定とは異なり、重力レンズ効果を用いれば重力源の質量を光学的観測により直接測定することができる。この重力レンズ効果によって測定された質量と X 線測定によって見積もられた質量を比較すると両者には差があり、この差はダークマターの質量によるものと考えられている。つまり、重量レンズ効果を利用することでダークマターの質量測定が可能になるのである。このように、宇宙の質量分布を調べるのに重力レンズ効果は非常に有用であるが、実際に利用する際には課題がまだ多く残っている。3 章で述べた intrinsic alignment もその一つであり、重力レンズ効果を精密に解析するためには intrinsic alignment の効果を除く必要がある。

そのため、今後は intrinsic alignment についての理解を深め、それを測定することにより重力レンズ効果の精密な解析を可能にするとともに、大波長スケールの潮汐力場を制限する新たな手段になりうることを議論していく。

Reference

B. Joachimi et al., arXiv:1504.05456

A. Kiessling et al., arXiv:1504.05546

K. Akitsu, M. Takada, Y. Li, Phys. Rev. D95, 083522

SKA の観測による BAO を用いたダークエネルギーの制限

安藤 梨花 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

現在の宇宙が加速膨張していることが観測から確認されているが、その原因はまだ解明されていない。加速膨張をもたらす有力な候補としてダークエネルギーが考えられており、数多くのモデルが存在する。ダークエネルギーのモデルを制限するためには、ダークエネルギーを特徴付けるパラメータに制限を与える必要がある。宇宙の膨張史はダークエネルギーの状態方程式パラメータの値に依存するので、宇宙の膨張率の時間変化から、ダークエネルギーのモデルに制限を与えることができる。宇宙の standard ruler であるバリオン音響振動 (BAO) を用いて宇宙の膨張率を測ることができる。2020 年から初期科学運用が始まる大規模電波干渉計の Square Kilometre Array (SKA) では中性水素の超微細構造のエネルギー差に由来する電磁波である 21-cm 線の観測によって、BAO の情報を得ることができる。SKA で BAO を測る方法として intensity mapping survey と galaxy redshift survey の二つがある。

Bull et al. (2015a) では Fisher 解析を用いて、SKA の観測データを用いた場合のダークエネルギーのパラメータへの制限の予測を行なっている。本発表では、SKA の観測によりダークエネルギーのパラメータを制限するメカニズムについて説明し、先行研究の一部を再現した結果について報告した。

1 Introduction

1990 年代後半に Saul Perlmutter や Brian P. Schmidt らの Ia 型超新星の観測により宇宙の加速膨張が発見された。宇宙の加速膨張を引き起こす存在としてダークエネルギーが考えられている。宇宙が加速膨張するためには、膨張の加速度を表す方程式

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho\,(1+3w)\,, \tag{1}$$

が正にならなければならないので、$w < -1/3$ であることが要求される。w は状態方程式 $p = w\rho$ のパラメータである。ダークエネルギーには数多くのモデルが存在するので、ダークエネルギーの状態方程式パラメータの値を制限することでダークエネルギーのモデルを制限することができる。ダークエネルギーのパラメータを求めるためには宇宙の膨張の歴史を知る必要がある。その手段としてバリオン音響振動 (BAO) がある (Eisenstein & Hu 1998),(Eisenstein et al. 2005)。BAO は晴れ上がり前の光子・バリオン混合流体の振動の名残であり、宇宙の密度揺らぎに刻み込まれ、パワースペクトルや相関関数に特徴的なパターンとして顕在する。BAO の振動スケールはすでに宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) の観測から精密に測定されている。BAO は宇宙の standard ruler であるで、BAO の見かけの大きさと実際の大きさから距離がわかる。

2020 年に初期科学運用が始まる Square kilometre Array(SKA) で中性水素 (HI) の超微細構造のエネルギー差に由来する電磁波である 21-cm 線の観測を行う。HI の分布は物質の密度ゆらぎの分布を知る手段となるので、HI の分布から BAO を測ることができるようになる。SKA で BAO を測る方法には galaxy redshift survey と intensity mapping survey の 2 つがある。galaxy redshift survey は銀河に含まれる HI からの 21-cm を観測する。intensity mapping survey は銀河だけではなく HI が存在する領域からの 21-cm 線を観測する。そこで本研究では Bull et al. (2015a) に従って SKA の観測によってダークエネルギーのパラメータがどのくらい制限できるか予測を行った。

第 2 章では予測の方法の説明、第 3 章では結果の報告と議論、第 4 章ではまとめと今後の課題について述べる。

2 Methods

この節ではSKA におけるダークエネルギーのパラメータの制限の予測の方法について先行研究の Bull et al. (2015a) に従って具体的に紹介する。

2.1 dark energy

一般化のためにダークエネルギーの状態方程式パラメータが時間変化する場合を考える。ダークエネルギーの密度パラメータは

$$\frac{\rho_{\rm DE}}{\rho_{\rm c,0}} = \Omega_{\rm DE,0}\, \exp\left[3\int_a^1 (1+w_{\rm DE}(a))\frac{da}{a}\right], \quad (2)$$

で与えられる。ダークエネルギーの状態方程式パラメータ w を

$$w = w_0 + (1-a)w_a, \quad (3)$$

とパラメータ化する。フリードマン方程式は

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = H_0^2\left(\frac{\Omega_{\rm m,0}}{a^3} + \frac{\Omega_{\rm r,0}}{a^4} - \frac{\Omega_{\rm K,0}}{a^2} + \frac{\Omega_{\rm DE,0}\, e^{-(1-a)w_a}}{a^{3(1+w_0+w_a)}}\right), \quad (4)$$

となり、宇宙の膨張にはダークエネルギーの状態方程式パラメータが関係することがわかる。アインシュタインが導入した宇宙項 Λ の場合には $w=-1$ であり、フリードマン方程式は

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = H_0^2\left(\frac{\Omega_{\rm m,0}}{a^3} + \frac{\Omega_{\rm r,0}}{a^4} - \frac{\Omega_{\rm K,0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda,0}\right), \quad (5)$$

となる。

2.2 SKA

SKA では中性水素 (HI) の 21-cm 線の観測によって BAO を測る。21-cm は吸収や他の輝線による汚染が少ないので物質の分布のよいトレーサーとなる。

SKA による BAO の探査の方法には galaxy redshift survey と intensity mapping survey がある。galaxy redshift survey は幅広い redshift に存在する大量の銀河の正確な redshift の測定を行う方法である。intensity mapping survey は HI クラウドや銀河などの 21-cm 源からの強度を低い解像度で見る方法であり、大領域の観測を行うことができる。本研究では galaxy redshift survey についての予測のみを行う。galaxy redshift surve に関して、南アフリカ共和国に建設予定の SKA 第 1 期 (SKA1-MID) においては約 $z\sim 0.5$ までの観測を行うことが期待されている。本研究では簡単のために $z = 0.05, 0.25, 0.45$ で観測した場合の制限の予測のみを行う。この場合の数密度 $n(z)$ と銀河バイアス $b(z)$ の値は表 1 の値となり、Bull et al. (2015a) ,Santos et al. (2015) の値から引用した。

z_c	$n(z)[{\rm Mpc}^{-3}\,h^3]$	$b(z)$
0.05	9.71×10^{-2}	0.678
0.25	5.69×10^{-3}	0.802
0.45	4.52×10^{-4}	0.975

表 1: SKA1 の galaxy redshift survey での数密度とバイアス。SKA1 の galaxy redshift survey では 5000[deg]^2 の領域を観測する。bin は $\Delta z = 0.1$ である。[Bull et al. (2015a)]

観測されるパワースペクトルは赤方偏移空間歪みの影響を受ける。それらを考慮したパワースペクトルのシンプルなモデルは (Kaiser 1987, Seo & Eisenstein 2007) より

$$P_{\rm tot}(\boldsymbol{k},z) = (b(z)+f(z)\mu^2)^2 \times e^{-\frac{1}{2}k^2\sigma_{\rm NL}(z,\mu)}\, P(k,z) \quad (6)$$

$$\sigma_{\rm NL}(z,\mu) = \sigma_{\rm NL}\, D(z)\,(1+f(z)\mu^2[2+f(z)])^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

で与えられる。$P(k,z)$ は等方的な物質のパワースペクトルで、$P_{\rm tot}(\boldsymbol{k},z)$ は赤方偏移空間歪みを考慮したパワースペクトルである。k_z 軸を視線方向にとると、$\mu\equiv k_z/k = \cos\theta$ であり、μ は非等方性をもたらす。exp で表される項は速度分散 $\sigma_{\rm NL}$ で特徴付けられるカットオフスケール以下の視線方向の構造、つまり赤方偏移の情報を流してしまう効果を持つ。$\sigma_{\rm NL}$ の値は Bull et al. (2015b) より 7[Mpc] を採用した。$D(z)$ は線形成長因子、$f(z)$ は線形成長率であり

$f = d\ln D/d\ln a$である。この2つの値はMatsubara & Szalay (2003) より

$$\frac{d\ln D}{d\ln a} = f, \tag{8}$$

$$\frac{df}{d\ln a} = -f^2 - \left(1 - \frac{\Omega_\mathrm{m}}{2} - \frac{1+3w}{2}\,\Omega_\mathrm{DE}\right) f + \frac{3}{2}\Omega_\mathrm{m}, \tag{9}$$

で与えられる。ただし $\Omega_\mathrm{r} = 0$ とした。Ω_m と Ω_DE は

$$\Omega_\mathrm{m} = \frac{H_0^2}{H^2}\frac{\Omega_{\mathrm{m},0}}{a^3} \tag{10}$$

$$\Omega_\mathrm{DE} = \frac{H_0^2}{H^2}\Omega_{\mathrm{DE},0}\exp\left[3\int_a^1 (1+w_\mathrm{DE}(a))\frac{da}{a}\right] \tag{11}$$

の形で得られる。ハッブルパラメータ H は式 (4) を用いる。

2.3 Fisher analysis

観測によるパラメータの制限の予測はFisher解析という手法を用いて行う。Fisher解析では期待される観測領域と信号とノイズを用いて、観測から得られるであろうパラメータの確率密度分布関数を多変量ガウス分布だと近似してパラメータの制限の予測を行う。Fisher情報行列は

$$F_{ij} = \frac{1}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,V_\mathrm{eff}(\boldsymbol{k})\,\left[\frac{\partial}{\partial\theta_i}\log C^T \cdot \frac{\partial}{\partial\theta_j}\log C^T\right], \tag{12}$$

である。C^T は測定される全体の信号となっており、シグナル (S) とノイズ (N) の和 $C^T = C^S + C^N$ である。galaxy redshift survey の場合は $C^T = P_\mathrm{tot}(\boldsymbol{k}, z) + 1/n(z)$ となり、$1/n(z)$ はショットノイズである。$V_\mathrm{eff}(\boldsymbol{k})$ は物理的な体積 V_phys の範囲を含む観測の有効体積であり、

$$V_\mathrm{eff}(\boldsymbol{k}) = V_\mathrm{phys}\left(\frac{C^S}{C^T}\right)^2 = V_\mathrm{phys}\left(\frac{P_\mathrm{tot}}{P_\mathrm{tot}+1/n(z)}\right)^2, \tag{13}$$

となる (Seo & Eisenstein 2007)。これらの式を代入するとFisher行列は

$$F_{ij} = \frac{2\pi}{2}\int\int_{-1}^{1}\frac{k^2\,dk\,d\mu}{(2\pi)^3}V_\mathrm{phys}\left(\frac{C^\mathrm{S}}{C^\mathrm{T}}\right)^2 \times\left[\frac{\partial C^\mathrm{T}}{\partial\theta_i}\frac{1}{C^\mathrm{T}}\cdot\frac{\partial C^\mathrm{T}}{\partial\theta_j}\frac{1}{C^\mathrm{T}}\right], \tag{14}$$

と書き換えられ、μ は $\cos\theta$ である。

θ_i は8つのパラメータが対応し、基準となる値は Planck Collaboration (2014) から

$$h = 0.67,\quad \Omega_\mathrm{c}h^2 = 0.112,\quad \Omega_K = 0,\quad \Omega_b = 0.0226,$$
$$w_0 = -1,\quad w_a = 0,\quad n_s = 0.962,\quad \sigma_8 = 0.834, \tag{15}$$

を用いた。Fisher行列の逆行列はパラメータの分布をガウス分布と近似した場合の共分散行列となっている。

$$\mathrm{Cov}(\theta_i, \theta_j) = F_{ij}^{-1}. \tag{16}$$

この共分散行列からガウス分布の確率密度分布関数

$$f(w_0, w_a) = N\,\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \times\left(\frac{(w_0 - w_{0,\mathrm{fid}})^2}{\sigma_{w_0}^2} + \frac{w_a^2}{\sigma_{w_a}^2} - 2\rho\frac{(w_0 - w_{0,\mathrm{fid}})\,w_a}{\sigma_{w_0}\,\sigma_{w_a}}\right)\right], \tag{17}$$

が求まる。fidは基準の値を意味する。

3 Results and Discussion

$z = 0.05, 0.25, 0.45$ での Fisher 行列は $F = F_{z=0.05} + F_{z=0.25} + F_{z=0.45}$ となる。Fisher解析により得られた w_0, w_a の分散の値は

$$\sigma_{w_0}^2 = 0.0321,\ \sigma_{w_a} = 0.247,\ \sigma_{w_0 w_a} = -0.550, \tag{18}$$

となった。この値から信頼領域は図1のようになった。またredshiftごとの制限とそれらを合わせた場合の制限は図2となった。$z = 0.45$ では観測領域が大きいためFisher情報量は増えるが、数密度が小さくなるためショットノイズが大きくなり、その分だけFisher情報量は減る。先行研究のBull et al. (2015a) の Figure.4 と図1を比較すると、制限度合いが異なっていた。違いをもたらす原因として、Bull et al. (2015a) ではBOSSとPlanckによるパラメータの制限と組み合わせているが本研究ではそれらと組み合わせていないことと、Bull et al. (2015a) ではBAOの情報のみを使っているのに対し、本研究ではパワースペクトル $P(k)$ の全ての情報を用いてパラメータを制限していることが挙げられる。従って本研究と先行研究との比較は同じ条件での比較になっていない。

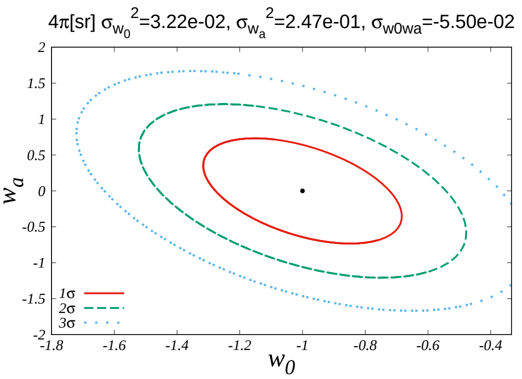

図 1: パラメータの信頼領域。赤線が 68.3%, 緑線が 95.4%, 青線が 99.7%の確率を含む等高線となっている。$(w_0, w_a) = (-1, 0)$ にある黒の点は基準とした宇宙項 Λ の場合の値を示している。

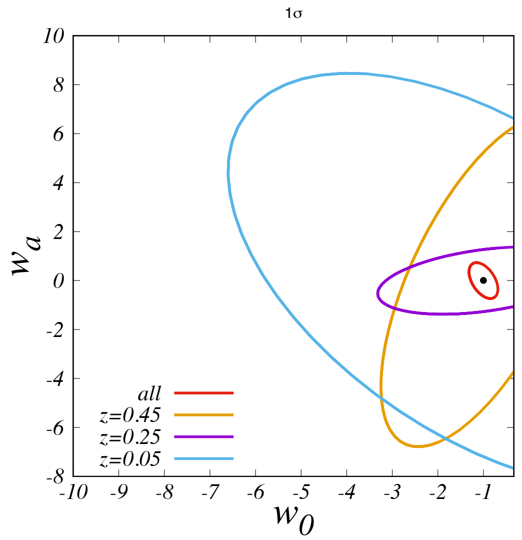

図 2: z=0.05, 0.25,0.45 と、全てを組み合わせた場合のパラメータの信頼領域。

4 Conclusion and Future work

ダークエネルギーの状態方程式パラメータを考える際には $w = w_0 + (1 - a)w_a$ とパラメータ化した。SKA の観測によって、宇宙の膨張の歴史を知ることができ、ダークエネルギーのモデルに制限を与えることが期待されている。中性水素 (HI) のスピンの反転による 21-cm 線の SKA による観測には galaxy redshift survey と intensity mapping survey の 2 つがある。SKA でのダークエネルギーの状態方程式パラメータの制限の予測を Fisher 解析を用いて行った。この際、観測されるパワースペクトルには赤方偏移空間歪みの効果があるので、それを考慮する必要がある。本研究では制限する際の条件が異なっていたため、先行研究を再現する事は出来なかった。

今後の課題として、Planck による制限と組み合わせることや、BAO の振動のみを用いた制限、intensity mapping survey での制限の予測などを行いたい。

Acknowledgement

本発表のためにご指導してくださった名古屋大学宇宙論研究室の皆様に深く感謝いたします。

Reference

Bull, P., Camera, S., Raccanelli, A., et al. 2015, Advancing Astrophysics with the Square Kilometre Array (AASKA14), 24

Bull, P., Ferreira, P. G., Patel, P., & Santos, M. G. 2015, APJ, 803, 21

Linder, E. V. 2003, Physical Review Letters, 90, 091301

Seo, H.-J., & Eisenstein, D. J. 2007, APJ, 665, 14

Eisenstein, D. J., & Hu, W. 1998, APJ, 496, 605

Eisenstein, D. J., Zehavi, I., Hogg, D. W., et al. 2005, APJ, 633, 560

Santos, M., Alonso, D., Bull, P., Silva, M. B., & Yahya, S. 2015, Advancing Astrophysics with the Square Kilometre Array (AASKA14), 21

Kaiser, N. 1987, MNRAS, 227, 1

Matsubara, T., & Szalay, A. S. 2003, Physical Review Letters, 90, 021302

Planck Collaboration, 2014, A&A, 571, A16

孤立系モデルによるボイドの形状進化の解析

簑口 睦美 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙の大規模構造における低密度領域は、ボイド (void) と呼ばれる。近年の大規模な銀河サーベイによる観測や、大規模シミュレーションにおける計算速度の向上を背景に、ボイドは宇宙論モデルの検証を行うためのプローブの一つとして注目を集めている。しかし、ボイドそのものの物理に関して体系的に取り扱った研究は少ない。本研究では、シミュレーションによって大規模構造中のボイドの進化傾向を調べるとともに、一様密度中に単体で存在する単純化されたボイドモデルを考え、これによって大規模構造中のボイドの振る舞いの説明を試みた。

1 Introduction

宇宙の大規模構造と呼ばれる特徴的な銀河分布が発見されたのは 1980 年代である。以来、銀河をはじめとする高密度領域だけでなく、銀河の少ないボイド領域に関しても盛んに研究が行われてきた。Sheth ら [1] は、低密度領域が時間発展すると、初期の形状によらず、球形に近づくことを理論的に導いた。これは、高密度構造が時間発展すると歪みが助長されていく「Zel'dovich のパンケーキ」と呼ばれる現象の逆として理解されることが多い。このため、Sheth らは、ボイドを論じるには球対称モデルで十分であると主張した。

一方で、近年の大規模な銀河サーベイの結果、観測的にはボイドが必ずしも球ではないことが示唆されている。さらに、それらが球に近づくという傾向もほとんど見られない。BOSS DR 11 中のボイドの統計的性質を解析した Nadathur [2] の報告によると、最長軸と最短軸の軸比の平均は、現在に近い $0.15 < z < 0.43$ で $1.44^{+0.19}_{-0.20}$、より時間を遡った $0.43 < z < 0.7$ で $1.44^{+0.19}_{-0.20}$ である。このことから、多くのボイドが球からずれて歪みを持っているにもかかわらず、1 σ の範囲でほとんど形状の時間変化が見られないことがわかる。

しかし、後者は統計的な振る舞いであり、個々のボイドの形状が変化しないということを表すものではないため、大規模構造中における個々のボイドの発展傾向は明らかでない。そこで本研究では、粒子 ID を用いたボイド同定アルゴリズムによって、シミュレーション中の個々のボイドの形状進化を解析し、その振る舞いを解析解と比較することで、個々のボイドの進化傾向、及びそれを決定づける主要因の決定を試みた。

2 Methods

本研究では、シミュレーションデータの解析および解析的計算によって個々のボイドの時間発展を調べ、これを比較する。

2.1 Simulation

Set up

本研究では、以下のセットアップによる N 体シミュレーションデータを用いた。

表 1: シミュレーションセットアップ

N	L (Mpc)	Ω_{m0}	$\Omega_{\Lambda 0}$	h
125^3	500	0.31	0.69	0.70

このデータのうち、赤方偏移 10.2 ～ 0 の計 10 つのスナップショットに関して、各々独立に、ボイド同定ツールキット VIDE [3] を用いてボイドを検出した。

Void identification

VIDE は ZOBOV（Neyrinck (2008)[4]）による以下のアルゴリズムによってボイドを同定している。

1. 粒子同士の二等分面によって、シミュレーション体積を Voronoi セルと呼ばれる微小な空間に分割する。これにより、各 Voronoi セルは粒子をただ一つ含む。このため、Voronoi セルの体積の逆数を粒子数密度と捉えることができる。
2. Watershed Algorithm と呼ばれる手法により、Voronoi セルをグループ分けする。この手法は、任意の Voronoi セルに対し、その隣接するセルの中で最も密度の低いものを選んで行き、最終的に行き着いたセル（極小値をとるようなセル）によってグループ分けするものである。
3. 最後の手順は VIDE で加えられたものであるが、上の手順でグループ分けされた小領域のうち、それらを隔てる高密度領域（表層のセル）が、平均粒子数密度の 0.2 倍よりも小さな場合、それらを一つの領域とみなし、領域の統合を行う。この結果できる各領域を個々のボイドとみなす。

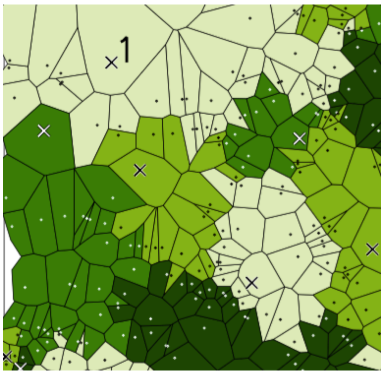

図 1: Voronoi セルに分割されたシミュレーション領域の一部（改 Neyrinck (2008)[4]）。手順 2 によるグループが色の違いで表されている。

以上の手法により、今回のデータにおいて、10^4 個のボイドが同定された。

Trace rules

本研究では、個々のボイドの時間発展を見る。そのために、各スナップショット中のボイドが「同じ」ボイドであるかどうかを判定する必要がある。これは、ボイドの統合や分裂、生成や消滅などを考えると、必ずしも自明な問題ではないが、ここでは以下のルールに従ってボイドを同定した。

- 各粒子は粒子 ID により区別することができる。赤方偏移の大きいスナップショット、すなわちより過去のボイドを親として、親ボイドから見て最も多くの粒子を与えた子ボイドを一つ定める
- 子ボイドから見て最も多い粒子数を受け継いだ親ボイドを一つ定める

これによって、注目する赤方偏移区間中で生成や消滅を行わず、”主流”（粒子数が最も多く受け継がれる）となるようなボイドのみを抽出することになる。今回の解析では、10^4 個のボイドのうち、10^3 個程度のボイドが該当した。

Ellipticity

形状を表すパラメータとして、Sutter[3] の定義に則って楕円率を以下で導入する。

$$e \equiv 1 - \left(\frac{\Lambda_1}{\Lambda_3}\right)^{1/4} \qquad (\Lambda_1 < \Lambda_3) \tag{1}$$

ここで Λ_i は慣性テンソル

$$I = \sum_{\text{all particle i}} \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -y_i x_I & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -z_i x_i & -z_i y_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

の固有値であり、$\Lambda_1 < \Lambda_2 < \Lambda_3$ を満たすように定める。定義により楕円率は 0 から 1 の値をとる。

2.2 Analytical aproach

Equations & Initial conditions

本解析では、Yoshisato ら [5] による以下の一連の手法を用いた。まず、背景一様密度場 $\bar{\rho}$ に対する密度ゆらぎを

$$\delta(t) \equiv \frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \tag{3}$$

で定義する。初期密度としてトップハット型の楕円体を与える。楕円体が相似発展するとして、楕円体

内部に質量保存則を課すと、

$$\delta(\mathbf{x},t) = \delta_e(t)\Theta\left[1-\sum_{i=1}^{3}\frac{{x_i}^2}{\alpha_i^2(t)}\right] \qquad \delta_e(t) \equiv (1+\delta_{in})\frac{\alpha_{in1}\alpha_{in2}\alpha_{in3}}{\alpha_1(t)\alpha_2(t)\alpha_3(t)}-1 \tag{4}$$

ここで $\alpha_1(t)$、$\alpha_2(t)$、および $\alpha_3(t)$ は楕円体の各共動軸長である。一方、一様等方膨張宇宙の共動座標における Euler 方程式は、粒子の座標 $\mathbf{x}$ に対し、

$$\ddot{\mathbf{x}} + 2H\dot{\mathbf{x}} = -\nabla_{\mathbf{x}}\Phi(\mathbf{x},t) \tag{5}$$

と表せる。このポテンシャル $\Phi(\mathbf{x},t)$ は Poisson 方程式を解くことによって与えられるが、これは Kellogg[6] によって解析的に解かれている。これを用いると、特に回転楕円体（$\alpha_1(t)=\alpha_2(t)$）の場合、

$$\Phi = \frac{3}{8}H^2\delta_e\sum_{i=1}^{3}A_i(t)x_i^2 \qquad A_1 = A_2 = \frac{2}{3}(1+h) \qquad A_3 = \frac{2}{3}(1-2h) \tag{6}$$

$$h = \begin{cases} \frac{3}{2}\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda^3}\sin^{-1}\lambda - \frac{3-\lambda^2}{2\lambda^2} & (\alpha_1 > \alpha_3) \\ \frac{3}{4}\ln\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right) + \frac{3-2\lambda^2}{2\lambda^2} & (\alpha_1 < \alpha_3) \end{cases}$$

$$\lambda = \begin{cases} \sqrt{1-\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)^2} & (\alpha_1 > \alpha_3) \\ \sqrt{1-\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\right)^2} & (\alpha_1 < \alpha_3) \end{cases}$$

となる。式 (2) より、楕円体の運動は代表点の運動のみで記述されるから、式 (3) を $(\alpha_1,0,0),(0,0,\alpha_3)$ の 2 点について解けば十分である。本研究では、この式を数値計算によって解いた。なお、初期条件の振幅は、現在（赤方偏移 0）において、$\delta\sim-0.8$ となるようにとった。

Ellipticity

式 (1) に従う。ただし、

$$\Lambda_i = \alpha_i \tag{7}$$

ととる。実際、式 (2) について連続極限を取り、式 (4) の楕円体について積分を実行すると、対称性から非対角成分はゼロになり、対角成分＝固有値が

$$\Lambda_i \propto 4\pi\alpha_j\alpha_k \qquad (i,j,k)\text{: cyclic in } (x,y,z) \tag{8}$$

となるから、回転楕円体の場合は、$\Lambda_1/\Lambda_3 = \alpha_1/\alpha_3$ となる。

3 Results

解析計算の結果では、Sheth ら [1] の指摘通り、全体に球に近づく性質が見られた（図 2）。しかし、oblate（$\alpha_1=\alpha_2>\alpha_3$、パンケーキ型）の場合においても、prolale（$\alpha_1=\alpha_2<\alpha_3$、ラグビーボール型）の場合においても、極端に楕円率の大きなものではその傾向は小さくなることがわかった。一方で、シミュレーションデータ中のボイドは、図 3 のような振る舞いを見せた。これを見ると、初期楕円率 0.2 頃を境に、球に近づくか否かの振る舞いが変わっている。図の右側に当たる初期楕円率の大きなボイド、つまり歪んだボイドが球に近くなる振る舞いは解析計算とある程度一致するものの、図の左側の振る舞い、つまり球に近かったボイドが歪んでいく振る舞いの説明がつかない。

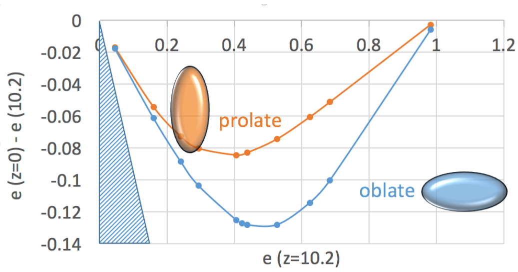

図 2: 解析計算における楕円率の変化。横軸は赤方偏移 10.2（初期）の楕円率、縦軸は現在の楕円率と初期の楕円率の差。影のついた領域は楕円率が負の値を取らないことによる禁止領域である。初期の楕円率によらず楕円率が減少しており、すべて球に近づいている。

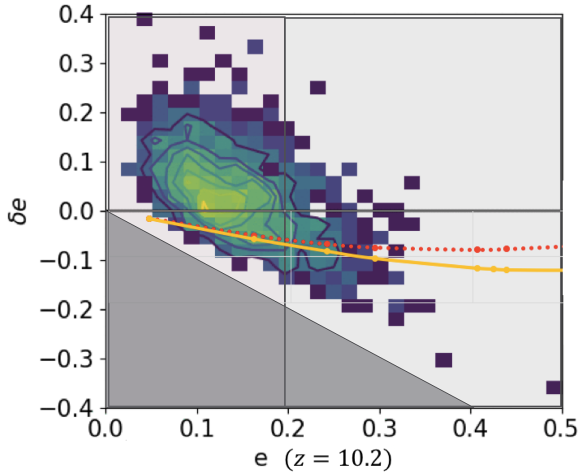

図 3: シミュレーションにおける楕円率の変化。縦軸・横軸および影の領域は図 2 に同じ。線は図 2 の解析計算により得られた曲線。

4 Discussion

以上の結果のうち、解析的にはボイドが時間発展に伴って球対称に近づくこと、また、シミュレーションのようなより現実的なボイドでは球対称でないボイドが多く存在し、それらが実際時間発展しても球に近づく傾向が見られなかったことに関しては Introduction で述べた先行研究の結果を裏付けるものである。従って、球に近いボイドが歪んで行く振る舞いに関しては、シミュレーションと解析計算でやはり不一致が顕著であった。しかし、ここではまだ重要な効果を考慮に入れていない。それは、ボイドを取り囲む高密度領域である。現実的には、銀河団のような、ボイドを取り囲む高密度領域が存在するが、今回用いたプロファイルのように、初期条件でそのようなボイド表面の高密度領域が与えられていない密度プロファイルを用いた場合でも、そのような高密度領域が時間発展とともに現れる可能性はある。なぜなら、ボイド内部は低密度であるものの必ずしもゼロでない質量を持つため、これが宇宙の膨張に打ち勝つ高さであれば外側から質量が集まってくると素朴には考えられるからである。しかし、今回用いた手法では、楕円体外部のポテンシャルの発展を解いておらず、こうした効果は全く反映されない。

こうした高密度領域は、膨張しようとするボイドを外側から重力的に抑え込む効果を持つ。このため、こうした効果を考慮しない今回のモデル・手法では、膨張によって球に近づく効果は再現されるが、高密度領域によって外側から抑えられることによる変形効果が見られなかったと考えられる。従って、ボイドの形状進化には外部の密度の高さと、中心部の密度の低さの比が大きく関わっていることが予想される。

5 Conclusion

ボイドは時間発展に伴い球に近づくという Sheth ら [1] の主張は、現実の状況下におけるボイドに対しては必ずしも正しくないということが確認された。その理由として、楕円体外部の高密度領域を考慮していないことが最も大きいと考えられる。従って、実際の状況下におけるボイドの振る舞いを理解するためには、外部の密度発展まで考慮してモデルの発展を解き、さらに詳しい検証を行っていく必要がある。

6 Acknowledgement

N 体シミュレーションデータの提供、また、議論・ご指導いただきました、名古屋大学 講師 西澤淳氏に感謝いたします。また、天文天体若手夏の学校にご賛同・ご支援いただきました方々に、厚く御礼申し上げます。

Reference

[1] R. K. Sheth and R. van de Weygaert. 2003, MNRAS, 350:517-538.

[2] S. Nadathur. 2016, MNRAS, 461:358-370.

[3] P. M. Sutter *et al.* 2015, Astronomy and Computing, 9:1-9

[4] M. C. Neyrinck. 2008, MNRAS, 386:2101-2109.

[5] A. Yoshisato, T. Matsubara, and M. Morikawa. 1998, ApJ, 498:48-59

[6] Kellogg, O. 1953, Foundation of Potential Theory

CMB distortion を利用した初期曲率揺らぎの非ガウス性制限予測

加藤 健太 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

初期宇宙においては、光子・バリオンは強く結合しており、熱平衡状態が保たれることで宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) の黒体放射スペクトルは維持される。しかし、宇宙膨張に伴い温度が低下することで、光子・バリオンの結合が徐々に弱まり、光子が熱浴から解放されていく。それ以後、光子にエネルギーの流入があった際には、黒体放射スペクトルに歪み (distortion) が生じることが予測されている。例えば、初期宇宙における揺らぎの音響モードの減衰で散逸したエネルギーが CMB 光子に流入することで、非等方的な distortion を生じさせる可能性がある。散逸するエネルギーは温度揺らぎの２次に対応する。それに由来する distortion parameter と温度自体の相関は、温度の高次相関とみなすことができるので、初期曲率揺らぎの非ガウス性の制限をすることができる。本発表では、宇宙初期におけるエネルギー流入に由来する CMB distortion に注目し、その非等方性を用いた初期曲率揺らぎの非ガウス性に関する制限予測を行っている論文 (Chluba et al.2017) のレビューを行う。レビュー論文では、光子バリオン流体の相互作用の遍歴を考慮して、μ, y-パラメータそれぞれへのエネルギー流入を現実に即した形で記述し、k〜740Mpc^{-1} での小スケールで、非ガウス性を表すパラメータ $f_{\rm NL}$ について、$f_{\rm NL} < \mathcal{O}(10^3)$ という制限予測を与えている。これは、Planck 衛星の温度揺らぎの三点相関から得られた制限 $f_{\rm NL} = 2.5 \pm 5.7 (k < O(1){\rm Mpc}^{-1})$ に比べ遥かに小スケールまでをカバーし、また、類似した先行研究などに比べ、より一般化した表式により正確な予測を与えている。本レビューでは、論文内で示されている CMB distortion を記述する μ, y -パラメータの表式の導出、それを用いた初期曲率揺らぎの非ガウス性に対する制限予測、及び類似する先行研究との比較を行う。

1 Introduction

光子が脱結合し宇宙が晴れ上がる以前、光子・バリオンはダブルコンプトン散乱、制動放射、コンプトン散乱等の過程によって強く結合しており１つの流体として振る舞う。その時代においては、ハッブル長よりも小さいスケールの流体の揺らぎは圧力を感じて振動する (音響振動)。さらに、光子の平均自由行程以下のスケールでの揺らぎは均されるので、小スケールの揺らぎの振動は減衰する (シルク減衰)。この現象により、揺らぎのエネルギーは散逸し、散逸したエネルギーが CMB 光子へ流入することで黒体放射スペクトルからの歪み (CMB distortion) を引き起こすことが予測されている。

スペクトルの歪みは一般に、光子数の保存に伴う化学ポテンシャルに起因するもの (μ-type distortion) と光子が伝搬する間に電子からエネルギーを受け取るもの (y-type distortion) に大別される。そして、μ, y -パラメータと温度 T の相互相関を取ることで初期曲率揺らぎの非ガウス性を制限できることが知られている (e.g. Pajer & Zaldarriaga 2012, Ganc & Komatsu 2012)。

本発表では、まず distortion が生じる過程について宇宙の熱史を説明する。その後、エネルギー流入による μ, y -パラメータの表式の導出し、それを利用して初期曲率揺らぎの非ガウス性を表すパラメータ $f_{\rm NL}$ について、その上限を見積もるプロセスを順に説明していく。

2 宇宙の熱史

宇宙膨張に伴い温度が低下することで、光子・バリオンの結合が徐々に弱まり、順に結合は切れていく。図１は、各過程の反応率と赤方偏移 z の関係を示している。高赤方偏移においては、ダブルコンプトン散乱、制動放射が光子数自体を変化させることができるため、この過程が効いている時代においては黒

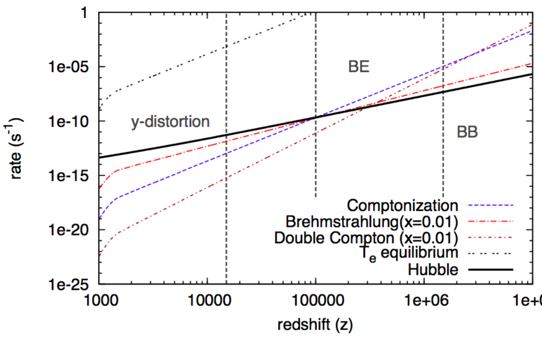

図 1: 初期宇宙における光子・バリオン相互作用の反応率と赤方偏移の関係 (Khatri et al. 2012)。(横軸：赤方偏移　縦軸：相互作用の反応率)

体放射が保たれる。しかし、この２つ過程が徐々に効かなくなると、エネルギーの流入があった際にも光子数が保存され光子の分布はボース・アインシュタイン分布に近づく (μ distortion)。さらに低赤方偏移において、コンプトン散乱も切れバリオンとのエネルギーのやりとりが出来なくなると、もはや熱平衡状態は保てなくなり、光子に対するエネルギー流入が直接スペクトルに反映される (y distortion)。

3　μ, y-パラメータ

3.1　シルク減衰からのエネルギー流入

シルク減衰によって散逸したエネルギーは、温度揺らぎの２次成分を通して光子分布に対するエネルギー流入となる。このとき、エネルギー流入率は温度揺らぎ ($\Theta \equiv \Delta T/T$) を用いて次のように表すことができる (Chluba et al. 2012b)。ここで、Q はエネルギー流入量、ρ_γ は光子のエネルギー密度である。強結合近似では、

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{Q(\boldsymbol{x},t)}{\rho_\gamma}\right] \approx -4\langle\Theta\dot{\Theta}\rangle_\Omega \equiv -4\int \Theta\dot{\Theta}\frac{d^2\hat{n}}{4\pi} \tag{1}$$

$$\approx 15\dot{\tau}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')} \times\mathcal{R}(\boldsymbol{k})\mathcal{R}(\boldsymbol{k}')\mathcal{T}_2(k,t)\mathcal{T}_2(k',t) \tag{2}$$

となる。ここで、$\dot{\tau} = \sigma_T N_e c$ は光学的深さの時間微分、σ_T はトムソン散乱の断面積、N_e は電子の数密度、c は光速、$\mathcal{R}(\boldsymbol{k})$ は初期曲率揺らぎ、$\mathcal{T}_2(k,t)$ は波数空間における以下の遷移関数である (Hu & Sugiyama 1996)。

$$\mathcal{T}_2(k,t) \approx \frac{8kDc}{15\dot{\tau}a}\frac{\sin(kr_s)}{\sqrt{3}}e^{-k^2/k_D^2} \tag{3}$$

ここでそれぞれ、$r_s = \int c\ dt/a/\sqrt{3}$ は音響ホライズン、$a = (1+z)^{-1}$ はスケール因子、k_D は $k_D^{-2} = \int_z^\infty dz'\ 8c^2/45\dot{\tau}aH$ で定義される減衰の典型的なスケール、H はハッブルパラメータ、D は massless なニュートリノが３種類の場合、$D \approx 0.90$ の定数である。

3.2　μ, y-パラメータへのエネルギー分配

２章で述べたように、時代ごとにエネルギー流入が寄与する distortion type には大きな違いがある。したがって、流入するエネルギー量に加え、流入する時代を考慮することも重要である。

図２は、ある一度のエネルギー流入に対して、各時代で CMB の放射強度スペクトルが元の黒体放射スペクトルからどのようにずれるかを数値計算したものである (Chluba 2013b)。各線それぞれがエネルギーの流入した時代を表している。同じエネルギーの流入であっても、流入する時代によってスペクトルの変化は異なる。その結果から、μ, y -パラメータを

$$y(\boldsymbol{x},z) \approx \frac{1}{4}\int_z^\infty \frac{d}{dz'}\left[\frac{Q(\boldsymbol{x},z')}{\rho_\gamma}\right]\mathcal{J}_y(z')dz' \tag{4}$$

$$\mu(\boldsymbol{x},z) \approx 1.4\int_z^\infty \frac{d}{dz'}\left[\frac{Q(\boldsymbol{x},z')}{\rho_\gamma}\right]\mathcal{J}_\mu(z')dz' \tag{5}$$

と表すことができる (Chluba 2013b)。ここで、時代ごとのエネルギーの分配比を表す関数 $\mathcal{J}_\mu(z)$, $\mathcal{J}_y(z)$ を、

$$\mathcal{J}_y(z) \approx \begin{cases} \left(1+\left[\frac{1+z}{6\times10^4}\right]^{2.58}\right)^{-1} & \text{for } 10^3 \le z \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{6}$$

$$\mathcal{J}_\mu(z) \approx \exp\left[-\left(\frac{z}{2\times10^6}\right)^{\frac{5}{2}}\right] \times\left[1-\exp\left(-\left[\frac{1+z}{5.8\times10^4}\right]^{1.88}\right)\right] \tag{7}$$

と定義した。

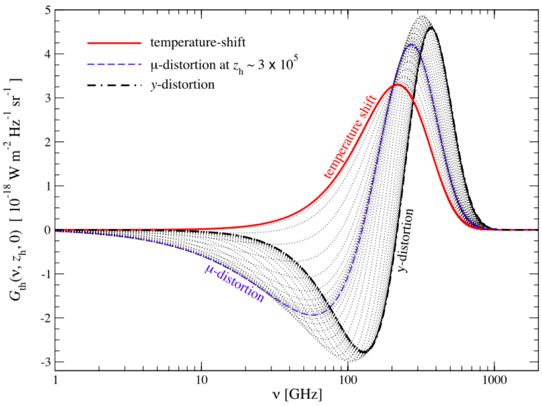

図 2: 各時代ごとのエネルギー流入に対する CMB スペクトルの変化 (Chluba et al. 2013b)。縦軸がスペクトルの変化に対応し、横軸が振動数である。各線がエネルギー流入があった赤方偏移を表している（赤線：温度上昇、青線：μ distortion、黒線：y distortion に対応するスペクトルの変化を表す）。

3.3 初期曲率揺らぎの非ガウス性

ここでは非ガウス性を記述するパラメータ $f_{\rm NL}$ について説明する。実空間における初期曲率揺らぎを以下のように定義する。

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{R}^{\rm G}(\boldsymbol{x}) + \frac{3}{5} f_{\rm NL}\left([\mathcal{R}^{\rm G}(\boldsymbol{x})]^2 - \langle[\mathcal{R}^{\rm G}(\boldsymbol{x})]^2\rangle\right) \tag{8}$$

ここで、$\mathcal{R}^{\rm G}(\boldsymbol{x})$ はガウシアンランダムスカラー場である。次に、波数空間にフーリエ変換した $\mathcal{R}(\boldsymbol{k})$ のバイスペクトルを計算すると以下のようになる。

$$\begin{aligned}&\langle\mathcal{R}(\boldsymbol{k}_1)\mathcal{R}(\boldsymbol{k}_2)\mathcal{R}(\boldsymbol{k}_3)\rangle\\ &\quad= (2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{k_1}+\boldsymbol{k_2}+\boldsymbol{k_3})P_{\mathcal{R}}(k_1)P_{\mathcal{R}}(k_2)\\ &\qquad\times\frac{12 f_{\rm NL}(k_1)}{5}\end{aligned} \tag{9}$$

ここで、$\langle\mathcal{R}(\boldsymbol{k})\mathcal{R}(\boldsymbol{k'})\rangle = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k'})P_{\mathcal{R}}(k)$ であり、$P_{\mathcal{R}}(k) = 2\pi^2\Delta^2(k)/k^3$ は曲率揺らぎのパワースペクトルである。また、$k_1 \approx k_3 \gg k_2$ を仮定した。式 (9) から温度揺らぎの三点相関を計算することで $f_{\rm NL}$ に制限をつけることができる。本発表では、温度揺らぎの 2 次に由来する μ -パラメータと温度の相関を取ることで、擬似的な温度の三点相関を計算している。

3.4 μ-T の相関

3.4.1 定式化

μ -パラメータと温度 T の相互相関を計算する。μ, T を球面調和関数 $Y_{\ell m}(\hat{\boldsymbol{n}})$ で展開した時の係数、$a_{\ell m}$ はそれぞれ、

$$\begin{aligned}a^{\mu}_{\ell m} &= 4\pi(-i)^{\ell}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}Y^*_{\ell m}(\hat{\boldsymbol{k}}_+)\\ &\quad\times j_{\ell}(k_+ r_{\rm L})\mathcal{R}(\boldsymbol{k})\mathcal{R}(\boldsymbol{k'})W_{\mu}(k,k',z_{\rm rec})\end{aligned} \tag{10}$$

$$a^{T}_{\ell m} = \frac{12\pi}{5}(-i)^{\ell}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\mathcal{R}(\boldsymbol{k})\Delta_{\ell}(k)Y^*_{\ell m}(\hat{\boldsymbol{k}}) \tag{11}$$

となる。ここで、

$$W_{\mu}(k,k',z) \sim \int_z^{\infty}\frac{\dot{\tau}a}{H}\mathcal{J}_{\mu}(z')\mathcal{T}_2(k,z')\mathcal{T}_2(k',z')\,dz' \tag{12}$$

とウィンドウ関数を定義した。また、$\boldsymbol{k}_+ = \boldsymbol{k}+\boldsymbol{k'}$ であり、$\Delta_{\ell}(k) \simeq j_{\ell}(kr_{\rm L})/3$ は、ザックス-ヴォルフェ極限 (SW 極限) における放射遷移関数、$j_{\ell}(x)$ は球ベッセル関数、$r_{\rm L} \approx 14$Gpc は最終散乱面までの共動距離である。

次に $\langle(a^X_{\ell m})^* a^T_{\ell' m'}\rangle = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}C^{XT}_{\ell}$ で定義される T-T、μ-T の角度パワースペクトルを計算すると、

$$C^{TT,SW}_{\ell} \approx \frac{4\pi}{25}\int\frac{dk}{k}j^2_{\ell}(kr_L)\Delta^2(k) \tag{13}$$

$$C^{\mu T}_{\ell} \approx 12 C^{TT,SW}_{\ell}\rho(\ell)f_{\rm NL}(k_{\mu})\langle\mu\rangle \tag{14}$$

となる。ここで、$\langle\mu\rangle$ は μ パラメータの平均値、$C^{TT,SW}_{\ell}$ は SW 極限における温度揺らぎの角度パワースペクトルである。また、$\rho(\ell) = C^{\mu T}_{\ell}/C^{\mu T,SW}_{\ell}$ は SW 極限における角度パワースペクトルと他の効果を含めた場合との比を表す (Ganc & Komatsu 2012)。$k_{\mu} = 740{\rm Mpc}^{-1}$ は W_{μ} から得られる μ パラメータの典型的なスケールである。角度パワースペクトルを計算する際、$a^{\mu}_{\ell m}$ からの $\mathcal{R}(\boldsymbol{k})\mathcal{R}(\boldsymbol{k'})$ と $a^{\mu}_{\ell m}$ からの $\mathcal{R}(\boldsymbol{k})$ のバイスペクトルを計算することで、式 (9) から $f_{\rm NL}$ を使って、$C^{TT,SW}_{\ell}$ と $C^{\mu T}_{\ell}$ を関係づけることができる。

3.4.2 Distortion のシグナル–ノイズ比

期待される distortion 観測の S/N 比は以下の式で見積もることができる (Ganc & Komatsu 2012)。

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 \approx \sum_{\ell=2}^{\ell_{max}} \frac{(2\ell+1)\left(C_\ell^{XT}\right)^2}{C_\ell^{TT} C_\ell^{\mu\mu,N}}$$
$$= 144\,[f_{\rm NL}(k_\mu)\langle\mu\rangle]^2 \sum_{\ell=2}^{\ell_{max}} \frac{(2\ell+1)\left(C_\ell^{TT,SW}\right)^2 \rho^2(\ell)}{C_\ell^{TT} C_\ell^{\mu\mu,N}} \tag{15}$$

ここで、$\ell_{\rm max} = 200$ とし、2 つ目の式変形には式 (14) を使った。また、C_ℓ^{TT} は CMB 温度揺らぎのパワースペクトル、$C_\ell^{\mu\mu,N}$ は μ distortion のノイズレベルである。将来観測 $PIXIE$ では、$C_\ell^{\mu\mu,N} \approx 4\pi\mu_{\rm min}^2 e^{\ell^2/84^2}$ で与えられる (Pajer & Zaldarriaga 2012)。$\mu_{\rm min}$は観測可能な distortion の最小シグナルを表す。

4 Discussion and Conclusion

最後に、$f_{\rm NL}(k_\mu)$ の上限を見積もる。式 (16) から、$PIXIE$ による将来観測では、$f_{\rm NL}(k_\mu)$ の上限について次のような見積を得る。

$$f_{\rm NL}(k_\mu) \leq 4500 \left[\frac{\Delta_{\rm p}^2}{2.2\times10^{-9}}\right]^{-\frac{1}{2}} \times \left[\frac{\mu_{\rm min}}{1.4\times10^{-8}}\right]\left[\frac{\langle\mu\rangle}{2.3\times10^{-8}}\right]^{-1} \tag{16}$$

ここでは、$\Delta^2(k) = \Delta_{\rm p}^2$ のスケール不変パワースペクトルと、$C_l^{TT} \approx C_l^{TT,SW}$ を仮定した。$\Delta_{\rm p}^2$、$\mu_{\rm min}$、$\langle\mu\rangle$ の値はそれぞれ、Planck 衛星による値、将来観測 $PIXIE$ で予測される値、計算によって得られた値を使用している。$k_\mu = 740{\rm Mpc}^{-1}$ である。

先行研究と比較すると、Planck 衛星による温度揺らぎの三点相関から得られた制限は $f_{\rm NL} = 2.5\pm5.7(k \leq \mathcal{O}(1){\rm Mpc}^{-1})$ であり、それに比べると大幅に緩い制限になっている。しかし、CMB distortion を使った今回の制限は、シルク減衰によって温度揺らぎからだけでは制限することが難しいより小スケール ($k_\mu = 740{\rm Mpc}^{-1}$) についての非ガウス性の制限を行うことができている。これは、μ パラメータの元になっている曲率揺らぎのスケールが温度揺らぎのスケールに比べて大幅に小さいためである。将来観測 $PRISM$ では、予測される精度が $\mu_{\rm min} \sim 10^{-9}$ となり、$f_{\rm NL} \leq \mathcal{O}(10^2)$ まで制限を強くできる。

次に、CMB distortion を利用して同様に非ガウス性の制限を予測している 2 つの論文 (Pajer & Zaldarriaga 2012, Ganc & Komatsu 2012) と比較する。Pajer & Zaldarriaga 2012 は、$\Delta_{\rm p}^2 = 2.4\times10^{-9}$、$\mu_{\rm min} = 10^{-8}$、$\langle\mu\rangle = 4.2\times10^{-8}$ とすると、$f_{\rm NL}(k_\mu) \leq 1700$ となり、Ganc & Komatsu 2012 は、$\Delta_{\rm p}^2 = 2.46\times10^{-9}$、$\mu_{\rm min} = 10^{-8}$、$\langle\mu\rangle = 3\times10^{-8}$ とすると、$f_{\rm NL}(k_\mu) \leq 2400$ となる。今回 (Chluba et al. 2017) の制限よりも強い制限を与えているが、それらがウィンドウ関数を自ら仮定し手で与えているのに対し、Chluba et al. 2017 は時代ごとのエネルギー流入の distortion に対する寄与を $\mathcal{J}_\mu$ を使うことでより事実に即した形で与えている。この点から、制限自体は緩くなったものの、Chluba et al. 2017 の方が正確な評価を与えていると言える。

加えて、Pajer & Zaldarriaga 2012 では流入するエネルギーを計算する際、3/4 という係数 (Chluba et al. 2012b) を無視していることで、$\langle\mu\rangle$ を過大に見積もってしまっている点も、Chluba et al. 2017 では改善されている。

Acknowledgement

本発表にあたり、お世話になった名古屋大学宇宙論研究室の先生方、学生の皆様に感謝致します。

Reference

Chluba J., Dimastrogiovanni E., Amin M A., Kamionkowski M., 2017, MNRAS, 466, 2390

Chluba J., Khatri R., Sunyaev R. A., 2012b, MNRAS, 425, 1129

Planck Collaboration et al., 2016, A&A, 594, A13

Khatri R., Sunyaev R. A., 2012 JCAP, 06, 038

Chluba J., Dai L., Grin D., Amin M. A., Kamionkowski M., 2015, MNRAS, 446, 2871

Hu W., Sugiyama N., 1996, ApJ, 471, 542

Chluba J., 2013b, MNRAS, 434, 352

Ganc J., Komatsu E., 2012, Phys.Rev.D, 86, 023518

Pajer E., Zaldarriaga M., 2012, Physical Review Letters, 109, 021302

Beyond generalized Proca 理論における宇宙論

中村 進太郎 (東京理科大学大学院 理学研究科)

Abstract

ベクトル･テンソル理論に属する多くの模型を内包する generalized Proca 理論を拡張した beyond generalized Proca (BGP) 理論では，一様等方な背景時空上でのベクトル場のスカラーモードの伝搬速度が物質場の伝搬速度と結合する非自明な性質を示す．この性質は BGP 理論のスカラー極限をとった際に帰着するスカラー・テンソル理論である GLPV 理論でも同様に見られ，模型によってはスカラー場の伝搬速度が負になる不安定性が現れる．本研究では，BGP 理論において具体的な模型を考え，GLPV 理論の場合と比較して上記のような不安定性が現れるかどうかを議論する．さらに，物質場との実効的な重力結合について調べ，そのような模型の観測的な兆候について明らかにする．

1 Introduction

近年の観測によって，現在の宇宙が加速膨張していることが示されてきた．この後期加速膨張の起源は暗黒エネルギーと呼ばれており，その正体は未だ解明されていない．暗黒エネルギーの最も単純な候補は，一般相対論に対して負の圧力を持つように宇宙項を取り入れた模型である．しかし，Planck 衛星と Ia 型超新星の最新の観測データの複合解析結果からは，宇宙項と冷えた暗黒物質を基にした Λ-CDM 模型は必ずしも最適な模型ではなく, 大スケールにおいて重力理論を変更した可能性 (修正重力理論) が示唆されている．修正重力理論の候補としては，スカラー場と重力場が結合した理論（スカラー・テンソル理論）や，ベクトル場と重力場が結合した理論（ベクトル・テンソル理論）などがある．

運動方程式を 2 次のオーダーに保つ最も一般的なスカラー・テンソル理論である Horndeski 理論を拡張した GLPV 理論では，一様等方な背景時空上でのスカラー場の伝搬速度が物質場の伝搬速度と結合する非自明な性質を示す．この性質を持つために，模型によってはスカラー場の伝搬速度の 2 乗が負になる不安定性が現れる．

ベクトル・テンソル理論に対しては，ローレンツ対称性と $U(1)$ ゲージ対称性を要請した上で Galileon と同様なラグランジアンを構成できないことが知られている．そこで $U(1)$ ゲージ対称性を破る Proca 場を採用することで，ベクトル・テンソル理論に属する多くの模型を内包する generalized Proca (GP) 理論が構成された [1]．GP 理論での運動方程式は 2 次のオーダーに保たれ，さらにスカラー極限において Horndeski 理論の特殊な場合に帰着する．

Horndeski 理論から GLPV 理論への拡張と同様の手法を適用して，GP 理論を拡張した beyond generalized Proca (BGP) 理論 [2] が構成された．BGP 理論のスカラー極限は GLPV 理論に帰着し，さらにベクトル場のスカラーモードの伝搬速度に対して GLPV 理論における伝播速度と同様の非自明な性質が見られる．

また，赤方偏移空間での銀河の固有速度に関する歪みの観測から，宇宙大規模構造が関係するスケールで，重力の強さがニュートン重力定数よりも小さい可能性が指摘されているが，スカラー・テンソル理論において不安定性が現れずにそれを実現することは一般的に困難を伴う．一方で GP 理論では，宇宙論的スケールでの小さな重力定数を実現できることが先行研究によって明らかにされた．

本研究では，BGP 理論において，伝搬速度に付随する不安定性およびゴーストの現れない有効な暗黒エネルギー模型を構築する．さらに，物質場との実効的な重力結合について調べ，宇宙論的スケールでの小さな重力定数を不安定性なしに実現できるか明らかにする．

2 Models

以下の作用のもとで議論していく：

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}\left(\sum_{i=2}^{6}\mathcal{L}_i+\mathcal{L}^{\mathrm{N}}\right)+S_M\,. \quad (1)$$

ここで，g は計量テンソルの行列式，S_M は物質場の作用をあらわす．$\mathcal{L}_i$ は GP 理論のラグランジアンであり，ベクトル場 A^μ を用いて以下で定義される：

$$\mathcal{L}_2=G_2(X,F,Y)\,,\quad \mathcal{L}_3=G_3(X)\nabla_\mu A^\mu\,,$$

$$\mathcal{L}_4=G_4(X)R+G_{4,X}(X)\left[(\nabla_\mu A^\mu)^2-\nabla_\rho A_\sigma\nabla^\sigma A^\rho\right],$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_5=&G_5(X)G_{\mu\nu}\nabla^\mu A^\nu-\frac{1}{6}G_{5,X}(X)[(\nabla_\mu A^\mu)^3\\&-3\nabla_\mu A^\mu\nabla_\rho A_\sigma\nabla^\sigma A^\rho+2\nabla_\rho A_\sigma\nabla^\gamma A^\rho\nabla^\sigma A_\gamma]\\&-g_5(X)\tilde{F}^{\alpha\mu}\tilde{F^\beta}_\mu\nabla_\alpha A_\beta\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_6=&G_6(X)L^{\mu\nu\alpha\beta}\nabla_\mu A_\nu\nabla_\alpha A_\beta\\&+\frac{1}{2}G_{6,X}(X)\tilde{F}^{\alpha\beta}\tilde{F}^{\mu\nu}\nabla_\alpha A_\mu\nabla_\beta A_\nu\,.\end{aligned}$$

但し，$X\equiv-A_\mu A^\mu/2\,,F_{\mu\nu}\equiv\nabla_\mu A_\nu-\nabla_\nu A_\mu$ であり，

$$F\equiv-\frac{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{4}\,,\quad Y=A^\mu A^\nu F_\mu{}^\alpha F_{\nu\alpha}\,.$$

$$L^{\mu\nu\alpha\beta}\equiv\frac{1}{4}\mathcal{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\mathcal{E}^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\rho\sigma\gamma\delta}\,,\quad \tilde{F}^{\mu\nu}\equiv\frac{1}{2}\mathcal{E}^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\,.$$

とした．$R,G_{\mu\nu}$ はそれぞれスカラー曲率および Einstein テンソルである．$\mathcal{E}^{\mu\nu\rho\sigma}$ は Levi-Civita テンソルであり，規格化条件 $\mathcal{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\mathcal{E}_{\mu\nu\rho\sigma}=-4!$ に従う．G_2 は X,F,Y に関する任意関数，$G_{3,4,5,6}$ はそれぞれ X に関する任意関数であり，$G_{i,X}\equiv\partial G_i/\partial X$ と表した．

また，$\mathcal{L}^N$ は BGP 理論における GP 理論からの拡張項であり，次のように定義される：

$$\mathcal{L}^{\mathrm{N}}=\mathcal{L}_4^{\mathrm{N}}+\mathcal{L}_5^{\mathrm{N}}+\tilde{\mathcal{L}_5^{\mathrm{N}}}+\mathcal{L}_6^{\mathrm{N}}\,,$$

但し，

$$\mathcal{L}_4^{\mathrm{N}}=f_4\hat{\delta}^{\beta_1\beta_2\beta_3\gamma_4}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\gamma_4}A^{\alpha_1}A_{\beta_1}\nabla^{\alpha_2}A_{\beta_2}\nabla^{\alpha_3}A_{\beta_3}\,,$$

$$\mathcal{L}_5^{\mathrm{N}}=f_5\hat{\delta}^{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}A^{\alpha_1}A_{\beta_1}\nabla^{\alpha_2}A_{\beta_2}\nabla^{\alpha_3}A_{\beta_3}\nabla^{\alpha_4}A_{\beta_4}\,,$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_5^{\mathrm{N}}=\tilde{f}_5\hat{\delta}^{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}A^{\alpha_1}A_{\beta_1}\nabla^{\alpha_2}A^{\alpha_3}\nabla_{\beta_2}A_{\beta_3}\nabla^{\alpha_4}A_{\beta_4}\,,$$

$$\mathcal{L}_6^{\mathrm{N}}=\tilde{f}_6\hat{\delta}^{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}\nabla_{\beta_1}A_{\beta_2}\nabla^{\alpha_1}A^{\alpha_2}\nabla_{\beta_3}A^{\alpha_3}\nabla_{\beta_4}A^{\alpha_4}\,.$$

ここで，$\hat{\delta}^{\beta_1\beta_2\gamma_3\gamma_4}_{\alpha_1\alpha_2\gamma_3\gamma_4}\equiv\mathcal{E}_{\alpha_1\alpha_2\gamma_3\gamma_4}\mathcal{E}^{\beta_1\beta_2\gamma_3\gamma_4}$ とした．$f_{4,5}(X),\tilde{f}_{5,6}(X)$ はそれぞれ X に関する任意関数である．

作用 (1) に対してスカラー極限 $A_\mu\to\nabla_\mu\pi$ (π はあるスカラー) をとると，これは GLPV 理論の特殊な場合に帰着する．

以降，具体的な模型として以下の 2 つを考える．

[GP model]

$$G_2=b_2X^{p_2}+F,\ \ G_3=b_3X^{p_3},\ \ G_4=\frac{M_{\mathrm{pl}}^2}{2}+b_4X^{p_4},$$

$$G_5=b_5X^{p_5},\ \ g_5=G_6=0,\ \ f_4=f_5=\tilde{f}_5=\tilde{f}_6=0.$$

[BGP model]

$$G_2=b_2X^{p_2}+F,\ \ G_3=b_3X^{p_3},\ \ G_4=\frac{M_{\mathrm{pl}}^2}{2},$$

$$G_5=g_5=G_6=0,\ \ f_4=\frac{1}{4}b_4(2p_4-1)X^{p_4-2},$$

$$f_5=-\frac{1}{12}b_5p_5X^{p_5-2},\ \ \tilde{f}_5=c_5X^{q_5},\ \ \tilde{f}_6=c_6X^{q_6}.$$

ここで，$b_{2,3,4,5}$，$p_{2,3,4,5}$，$c_{5,6}$，$q_{5,6}$ は定数であり，$p_{3,4,5}$ については p_2 とある正の定数 p を用いてそれぞれ次の関係式を満たすとする：

$$p_3=\frac{p+2p_2-1}{2},\ p_4=p+p_2,\ p_5=\frac{3p+2p_2-1}{2}.$$

3 Background cosmology

この節では，平坦な FLRW 計量 $ds^2=-dt^2+a^2(t)\delta_{ij}dx^idx^j$ のもとで運動方程式および状態方程式について議論する．物質場は完全流体とし，輻射（エネルギー密度 ρ_r，圧力 $P_r=\rho_r/3$）および非相対論的物質（エネルギー密度 ρ_m，圧力 $P_m=0$）を伴うものとする．ベクトル場は FLRW 背景時空の対称性から $A^\mu=(\phi(t),0,0,0)$ とし，空間成分は後に摂動として扱う．後の便利のために以下の変数を定義する：

$$\begin{aligned}&A_2=G_2\,,\ \ A_3=(2X)^{3/2}E_{3,X}\,,\\&A_4=-G_4+2XG_{4,X}+4X^2f_4\,,\\&A_5=-\sqrt{2}X^{3/2}\left(\frac{1}{3}G_{5,X}-4Xf_5\right),\\&B_4=G_4\,,\ \ B_5=(2X)^{1/2}E_5\,,\end{aligned}$$

但し，$E_3(X)$ および $E_5(X)$ は X に関する任意関数であり，関係式 $G_3=E_3+2XE_{3,X},G_{5,X}=E_5/(2X)+$

$E_{5,X}$ を満たす．ここで，$A_{4,5}$ および $B_{4,5}$ の定義より，関係式 $A_4+B_4-2XB_{4,X}=4X^2f_4$, $A_5+\frac{1}{3}XB_{5,X}=(2X)^{5/2}f_5$．を得る．$f_4=0=f_5$ の場合，すなわち GP 理論ではこの関係式の右辺は 0 に保たれる．これらの変数を用いたとき，背景時空での運動方程式は以下のように得られる：

$$A_2-6H^2A_4-12H^3A_5=\rho_r+\rho_m\,, \tag{2}$$

$$\dot{A}_3+4(H\dot{A}_4+\dot{H}A_4)+6H(H\dot{A}_5+2\dot{H}A_5) \\ =\rho_r+\rho_m+P_r+P_m\,, \tag{3}$$

$$\phi\left(A_{2,X}+3HA_{3,X}+6H^2A_{4,X}+6H^3A_{5,X}\right)=0\,. \tag{4}$$

$A_{2,3,4,5}$ および $B_{4,5}$ を用いて GP model および BGP model を表現すると次のようになる：

[GP model]

$$A_2=b_2X^{p_2}+F,\quad A_3=\frac{2\sqrt{2}b_3p_3}{1+2p_3}X^{p_3+1/2},$$
$$A_4=-\frac{M_{\rm pl}^2}{2}+b_4(2p_4-1)X^{p_4},$$
$$A_5=-\frac{\sqrt{2}b_5p_5}{3}X^{p_5+1/2},\quad B_4=\frac{M_{pl}^2}{2}+b_4X^{p_4},$$
$$B_5=\frac{2\sqrt{2}b_5p_5}{1+2p_5}X^{p_5+1/2},\quad g_5=G_6=\tilde{f}_5=\tilde{f}_6=0,$$

[BGP model]

$$A_2=b_2X^{p_2}+F,\quad A_3=\frac{2\sqrt{2}b_3p_3}{1+2p_3}X^{p_3+1/2},$$
$$A_4=-\frac{M_{\rm pl}^2}{2}+b_4(2p_4-1)X^{p_4},$$
$$A_5=-\frac{\sqrt{2}b_5p_5}{3}X^{p_5+1/2},\quad B_4=0,\quad B_5=0,$$
$$g_5=G_6=0,\quad \tilde{f}_5=c_5X^{q_5},\quad \tilde{f}_6=c_6X^{q_6},$$

この 2 つのモデルは $A_{2,3,4,5}$ がそれぞれ同じ形をしているため，背景時空のレベルでは違いが現れない．

このモデルに対して，式 (2) および (3) は整理することによって次の形に書きあらわすことができる：

$$3M_{\rm pl}^2H^2=\rho_{\rm DE}+\rho_m+\rho_r\,, \tag{5}$$

$$-2M_{\rm pl}^2\dot{H}=\rho_{\rm DE}+P_{\rm DE}+\rho_m+\frac{4}{3}\rho_r\,, \tag{6}$$

ここで $\rho_{\rm DE}$ および $P_{\rm DE}$ はそれぞれベクトル場に関連付けられたエネルギー密度と圧力である．密度パラメータ $\Omega_i\equiv\rho_i/(3M_{\rm pl}^2H^2)$ $(i={\rm DE},r,m)$ を用いると，暗黒エネルギーの状態方程式 $w_{\rm DE}\equiv\rho_{\rm DE}/P_{\rm DE}$ は以下で与えられる：

$$w_{\rm DE}=-\frac{3(1+s)+s\Omega_r}{3(1+s\Omega_{\rm DE})}\,. \tag{7}$$

但し，$\Omega_m=1-\Omega_{\rm DE}-\Omega_r$, $s\equiv p_2/p$ とした．これは密度パラメータの変化 (a) 輻射優勢期: $(\Omega_{\rm DE},\Omega_r)=(0,1)\rightarrow$ (b) 物質優勢期: $(\Omega_{\rm DE},\Omega_r)=(0,0)\rightarrow$ (c) 加速膨張期: $(\Omega_{\rm DE},\Omega_r)=(1,0)$ に応じて，(a) $w_{\rm DE}=-1-4s/3\rightarrow$ (b) $w_{\rm DE}=-1-s\rightarrow$ (c) $w_{\rm DE}=-1$ と変化し，安定な加速膨張解へと収束することを示している．

4 Stability conditions

この節では，ゴーストおよびラプラシアン不安定性を避けるための条件を BGP model についてのみ議論する．計量に関する摂動を次のように与えられる：

$$ds^2=-(1+2\alpha)dt^2+2(\partial_i\chi+V_i)dtdx^i \\ +a^2(t)\left(\delta_{ij}+h_{ij}\right)dx^idx^j \tag{8}$$

テンソルおよびベクトル摂動に関するゴーストおよびラプラシアン不安定性を避ける条件は，次のように得られる [3]：

$$|\beta_4|\ll 1,\ |\beta_5|\ll 1,\ |\tilde{f}_6|H^2\phi^2\ll 1,\ \tilde{f}_5H\phi^3\ll 1.$$

但し，$\beta_i=[p_ib_i(\phi^pH)^{i-2}]/(2^{p_i-p_2}p_2b_2)$ とした．$|\beta_4|\ll 1$, $|\beta_5|\ll 1$ のもとで，スカラーゴーストを避けるための条件は

$$q_S=-2^{2-p_2}b_2p_2\left(p+p_2\Omega_{\rm DE}\right)M_{\rm pl}^{2(1+p_2)}\left(\phi/M_{\rm pl}\right)^{2p_2}$$

となる．これより，$p_2>0$ ならば $b_2<0$ を満たすことで $q_S>0$ となりゴーストを避けることができる．

スカラー摂動に関するラプラシアン不安定性を避けるための条件は，スカラーモードの伝搬速度の 2 乗 c_S^2 が常に正であることに対応する．注意すべきことは，BGP 理論における c_S^2 は物質場の伝搬速度と結合する非自明な性質を示すことである．c_S^2 は GP 理論におけるスカラーモードの伝搬速度の 2 乗 $c_{\rm P}^2$ とそれからのずれ $\beta_{\rm P}$ として表すことができる：

$$c_S^2=c_{\rm P}^2-\beta_{\rm P} \tag{9}$$

ここで，β_{P} は $\beta_{\mathrm{P}} \propto \Omega_{\mathrm{DE}}(\Omega_r + \Omega_m)(f_4 + 3H\phi f_5)$ という形をしており，GP 理論の場合（$f_4 = f_5 = 0$）には $\beta_{\mathrm{P}} = 0$ となる．BGP 理論の場合でも β_{P} は上記のように密度パラメータに依存しているために，宇宙初期および de・Ditter 期どちらにおいても小さな値に維持される傾向にある（図 1）．

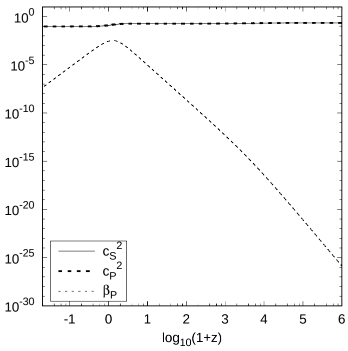

図 1: $\beta_{\mathrm{P}}, c_{\mathrm{S}}^2, c_{\mathrm{P}}^2$ の時間発展．但し，モデルパラメータは $p_2 = 1$，$p = 5, \beta_4 = 0.01, \beta_5 = 0.03$ とした．

5 Realization of weak gravity

スカラー摂動に関して 2 次のオーダーの作用の変分をとることによって，各摂動量の従う運動方程式が得られる．その運動方程式を解くことで，スカラー摂動量によって特徴づけられるゲージ不変な重力ポテンシャル $\Psi \equiv \alpha + \dot{\chi}$, および密度ゆらぎ $\delta \equiv \delta\rho_m/\rho_m$ の時間発展を調べることができる．さらに，これらが波数 k のフーリエ空間で満たすポアソン方程式

$$\frac{k^2}{a^2}\Psi = -4\pi G_{\mathrm{eff}}\rho_m\delta\,. \tag{10}$$

を解くことによって有効重力結合 G_{eff} の時間発展を議論できる．一般に，有効重力結合 G_{eff} は任意関数 $G_{2,3,4,5,6}, g_5, f_{4,5}, \tilde{f}_{5,6}$ を含むために万有引力定数 G からのずれが生じる．

図 2.(上) は GP model および BGP model についてそれぞれ上記の手順で計算を行った G_{eff}/G の発展を示したものである．これより，BGP model の場合には現在付近で $G_{\mathrm{eff}}/G \simeq 0.8$ 程度を示しており，大スケールでの小さな重力定数を実現している．図 2.(下) は密度揺らぎの線形成長率の時間発展を観測データと比較した図である．BGP model の場合は Λ-CDM 模型よりも小さな値を取りながら，観測結果と矛盾しない結果を示している．

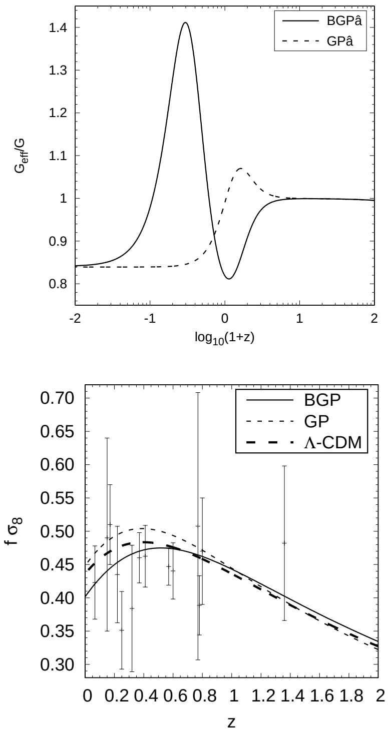

図 2: GP および BGP model における G_{eff}/G の時間発展 (上図) と密度揺らぎの成長率の時間発展 (下図)．モデルパラメータはそれぞれ $p_2 = 1$，$p = 5$，$q_V = 1$，$\beta_4 = 5.0 \times 10^{-2}, \beta_5 = 6.78 \times 10^{-2}$ とした．

6 Conclusion

今回の研究では，まず BGP 理論の枠組みで現在付近で $w_{\mathrm{DE}} < -1$ となる有効な加速膨張模型を構築した．また，BGP 理論におけるベクトル場のスカラーモードの伝搬速度については，BGP 理論特有のラグランジアン $\mathcal{L}^N$ によるスカラー摂動由来の不安定性が生じないことを明らかにした．さらに，観測から示唆されているような大スケールでの小さな重力定数を実現し，Λ-CDM 模型よりも小さな密度揺らぎの成長率を示すことが可能であることを示した．

Reference

[1] L. Heisenberg, JCAP 1405, 015 (2014).

[2] L. Heisenberg, R. Kase and S. Tsujikawa, Phys. Lett. B 760, 617 (2016).

[3] S. Nakamura, R. Kase and S. Tsujikawa, Phys. Rev. D 95, 104001 (2017).

Palatini f(R) 重力による宇宙論とダークエネルギー

嶋田 圭吾 (早稲田大学理工学術院 先進理工学研究科)

Abstract

本研究では、Palatini 形式を用いて、f(R) 重力を解析し、形式の違いにより生じる差異及び、ダークエネルギー問題の解決を図る。Ia 型超新星の赤方偏移データを用い、f(R) 重力理論の一つである Hu-Sawicki 模型のパラメータをフィッティングしたのち、重力の補正項によって生じる有効的な状態方程式の発展をみる。

1 Introduction

1915 年に Einstein が一般相対性理論を提唱して以来，様々な実験の観測により，その正しさは検証されてきた。しかし一般相対性理論の枠組みで成功を収めているビッグバン宇宙論に大きな謎が現れた。宇宙は未明の構成物質，ダークエネルギーとダークマターで大部分を占められるというのである。前者は，1998 年に遠方にある Ia 型超新星の観測によりに発見された宇宙の加速膨張を説明するために導入された [?]。この宇宙の加速膨張の問題解決には大きく分けて二つのアプローチがある。加速膨張を引き起こす奇妙な物質 (例えば宇宙項) を考えるアプローチと宇宙論スケールでは重力相互作用が一般相対性理論とは異なる修正重力理論を用いるアプローチである。

2 Palatini f(R) 重力

2.1 Palatini 形式

Einstein 方程式は、Einstein-Hilbert 作用という以下のような作用から導かれることが知られている。$\kappa^2 = 8\pi G$ として、

$$S_g = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}R(g_{\mu\nu}, \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}) \tag{1}$$

この際、変数は計量のみとして変分を取れば、Einstein 方程式を得られることが知られている。これを計量形式と呼ぶ。このとき、接続 $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ は Levi-Civita 接続 $\{^{\alpha}_{\beta\gamma}\}_{h_{\mu\nu}}$ としている。
別の方法として、作用を計量 $g_{\mu\nu}$ と接続 $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ を変分することができる。これを Palatini 形式と呼ぶ。この時、$\Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\beta} = 0$ または $\nabla^{\Gamma}_{\alpha} g^{\alpha\beta} = 0$ を課せば、Einstein-Hilbert 作用から Einstein 方程式を得られることが知られている。
しかしながら、重力を Einstein-Hilbert 作用以外で表した場合、計量形式と Palatini 形式が一致しないことがある。そのような一例を次の f(R) 重力で見てみる。

2.2 f(R) 重力と形式による差異

まず f(R) 重力の作用は

$$S_g = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}f\left(R(g_{\mu\nu}, \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma})\right) \tag{2}$$

である。これは Einstein-Hilbert 作用に対して、曲率の高次の項を補正した形と考えることができる。補正項は初期宇宙を考えているときは、インフレーションを起こす要因を作ることができ、また現在の宇宙を考えているときは、ダークエネルギーやダークマターの役割を担わせることができる。
さてこの f(R) 重力を計量形式で変分すると以下のような修正された Einstein 方程式を得られる。$F(R) \equiv \frac{\partial f(R)}{\partial R}$ として

$$\begin{aligned} & F(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}F(R) + g_{\mu\nu}\Box F(R) \\ = \ & \kappa^2 T^{M}_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{3}$$

ここで、物質のエネルギー運動量テンソルは $T^{M}_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta \mathfrak{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}}$ とした。
さて、これに対して Palatini 形式では、接続の対称性を課すと

$$F(R)R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} = \kappa^2 T^{M}_{\mu\nu} \tag{4}$$

$$\nabla^{\Gamma}_{\alpha}\left(F(R)g^{\beta\gamma}\right) = 0 \tag{5}$$

両形式の結果を比較すると、計量形式は $\phi \equiv F(R)$ という新たなスカラーの自由度が伝播するが、Palatini 形式はそのようなスカラー自由度がない。
同じ作用に関わらず、計量形式と Palatini 形式によって生じる結果がまるで異なるのである。

2.3 基礎方程式

前説で Palatini 形式の f(R) 重力の運動方程式

$$F(R)R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} = \kappa^2 T^M_{\mu\nu} \tag{6}$$

$$\nabla^\Gamma_\alpha \left(F(R)g^{\beta\gamma}\right) = 0 \tag{7}$$

で表された。さて修正された Einstein 方程式のトレースを取ると、

$$F(R)R - 2f(R) = \kappa^2 T^\mu{}_\mu \tag{8}$$

となる。すなわち Palatini 形式での f(R) 重力理論での曲率スカラーとエネルギー運動量テンソルは代数方程式で繋がっていることがわかる。これは Einstein 方程式と同様である。
次に接続の方程式は、新たに計量 $h_{\mu\nu} \equiv F(R)g_{\mu\nu}$ を定義した際、

$$\begin{aligned} & \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} \\ = \ & \left\{{}^{\,\alpha}_{\beta\gamma}\right\}_{h_{\mu\nu}} && (9) \\ = \ & \left\{{}^{\,\alpha}_{\beta\gamma}\right\}_{g_{\mu\nu}} + \frac{1}{2}\big(\delta^\alpha_\beta \partial_\gamma \ln F(R) + \delta^\alpha_\gamma \partial_\beta \ln F(R) \\ & \qquad -g_{\beta\gamma}g^{\alpha\delta}\partial_\delta \ln F(R)\big) && (10) \end{aligned}$$

となる。
Palatini f(R) 重力では関数 f(R)、さらに物質の振る舞いを決めると曲率と物質が代数方程式で関係しているため、曲率が一意的に定まる。

2.4 Palatini f(R) 宇宙論

まず平坦 Friedmann Lemaitre Robertson Walker 計量を考える。

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dr^2 + r^2 d\Omega^2) \tag{11}$$

さらにエネルギー運動量テンソルを完全流体に近似する。

$$T^\mu{}_\nu = \mathrm{diag}(-\rho_i, w_i\rho_i, w_i\rho_i, w_i\rho_i) \tag{12}$$

すると修正 Friedmann 方程式は

$$\left(H + \frac{\dot{F}}{2F}\right)^2 = \frac{\kappa^2}{3F}\left[\rho_i + \frac{FR - f}{2}\right] \tag{13}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6F}\left\{(1+3w_i)\rho_i - (FR - f)\right\} \tag{14}$$

$\dot{\square} = \frac{d}{dt}$ とし、Hubble 宇宙膨張率は $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ である。これらの Friedmann 方程式を解析する前にダークエネルギーのエネルギー密度 ρ_{DE} 及び圧力 p_{DE} を定義する。すなわち

$$\rho_{DE} \equiv \frac{3}{\kappa^2}H^2 - (\rho_m + \rho_r) \tag{15}$$

$$p_{DE} \equiv -\frac{2}{\kappa^2}\dot{H} - \left(\rho_m + \frac{4}{3}\rho_r + \rho_{DE}\right) \tag{16}$$

すなわち Einstein 方程式より導いた Friedmann 方程式との差から修正重力の補正項を完全流体として近似したのである。またこのエネルギー密度と圧力により、ダークエネルギーの状態方程式変数を以下のように定義する。

$$w_{DE} \equiv \frac{p_{DE}}{\rho_{DE}} \tag{17}$$

2.5 Hu-Sawicki 模型

この章の最後に計量形式で現在成功を収めている f(R) 重力の模型の一つ Hu-Sawicki 模型について述べる [?]。m をダークエネルギーが効いてくるスケールとすると、関数 f(R) は

$$f(R) = R - m^2 \frac{c_1 \left(\frac{R}{m^2}\right)^n}{c_2 \left(\frac{R}{m^2}\right)^n + 1} \tag{18}$$

である。自由変数として、c_1, c_2, n がある。この模型の特徴として、R が十分大きいとき、有効的な宇宙項として

$$\Lambda_{eff} \sim \frac{m^2 c_1}{2c_2} \tag{19}$$

となるのに対して、R が小さいときは宇宙項が存在しない。すなわち我々のスケールでは重力の補正項が効かないが、宇宙スケールでは生じるような模型である。

3 Results

Palatini f(R) 重力の Hu-Sawicki 模型を発光性赤色銀河の 12 点のデータ [?] を用いて、フィッティングした結果

$$\begin{aligned} c_1 &= -2.2 \\ c_2 &= -3.3 \\ m &= 2.29 H_0 \end{aligned}$$

を得た。これらを用いて、Hubble 変数の時間変化をプロットすると、また以下のように定義された有効

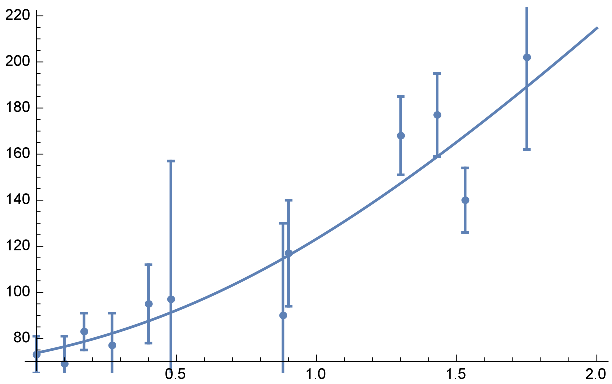

図 1: Hubble 変数の時間変化

状態方程式変数の時間発展は

$$w_{eff} = -1 + \frac{2(1+z)}{3H(z)} dH(z)dz \tag{20}$$

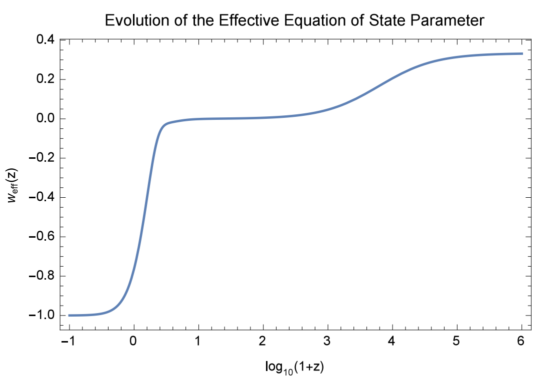

図 2: 有効状態方程式変数の時間発展

最後にダークエネルギーの状態方程式変数の時間発展は

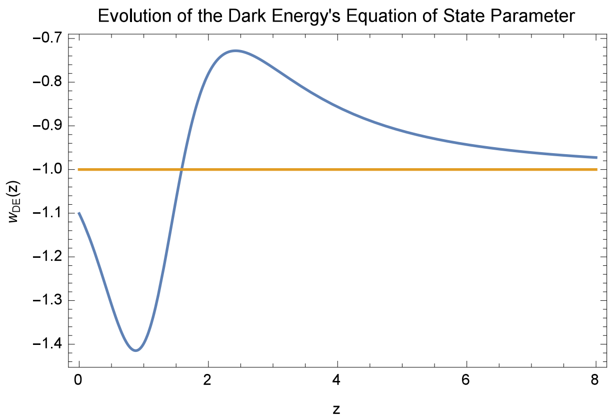

図 3: ダークエネルギー状態方程式変数の時間発展

4 結論と考察

本研究では，修正重力理論の一つである f(R) 重力のうち二つの模型を Palatini 形式で解析した．適切なパラメータの選択により，観測される宇宙の加速膨張を説明し，ファントム相の存在も示した。
Palatini 形式に基づく重力理論の解析はまだ十分に行われていない。
今後は

1. 密度揺らぎの発展の解析
2. ほかの重力理論に基づくダークエネルギー問題解決の可能性

について調べる。

Acknowledgement

この度、第 47 回天文・天体物理若手夏の学校の運営にご支援くださった機関及び個人の方々に深く感謝いたします。特に研究室で、研究の機会をくださった前田教授をはじめ、議論をしてくださった方々にこの場をお借りて深く感謝申し上げます。

Reference

[1] A. G.Riess et al, Astronomical J. 116,1009 (1998)
[2] A.Einstein, Sitzungber. Preuss. Akad. Wiss.,414 (1925)
[3]W.Hu, I.Sawicki, Phys. Rev. D, 76, 064004, (2007)

3 階微分方程式に従うスカラー・テンソル理論の Ostrogradsky 不安定性

彌永 亜矢 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

スカラー・テンソル理論 (S-T 理論) を構築する際、理論自体の不安定性を回避することが大きな方針の 1 つとされている。この不安定性は Ostrogradsky 不安定性と呼ばれ、運動方程式の高階微分項に起因する。Ostrogradsky 不安定性を避けるため、多くの S-T 理論の運動方程式は時間について 2 階微分までと制限されている。しかし、重力理論において Ostrogradsky 不安定性の存在が確認されているのは時間について 4 階微分方程式以上の理論であり、3 階微分方程式の理論については言及されていない。本講演では、まず質点系が 3 階微分方程式に従う理論の不安定性 [1] についてレビューを行う。その後、スカラー場の理論、S-T 理論における研究成果を報告する。

1 背景

Newton の運動方程式に代表されるように、多くの物理法則は時間について 2 階もしくは 1 階の微分方程式で記述される。時間について 2 階微分より高階の微分方程式が現れない理由は、Ostrogradsky 不安定性 [2] によって説明できる。一般的に、高階微分方程式に従う理論はハミルトニアンに下限が存在しないことが知られている。このような理論にはエネルギー的に安定な状態がなく、非孤立系である場合にはエネルギーが際限なく落ち続けてしまう。運動方程式の高階微分項に起因する、こういった不安定性を Ostrogradsky 不安定性という。

Ostrogradsky 不安定性は理論自体の不安定性であるため、理論構築の際に重要な役割を担う。特に一般相対論の拡張である修正重力理論を構築する際は、Ostrogradsky 不安定性を回避することが大きな方針となっている。S-T 理論の一種である Horndeski 理論 [3] や beyond Horndeski 理論 (GLPV 理論 [4] など) はその典型例である。これらの理論は Ostrogradsky 不安定性を回避する目的で、運動方程式が時間について 2 階微分までに抑えられている。しかしながら、Ostrogradsky 不安定性の存在が確認されているのは 4 階微分以上の理論であり、3 階微分の理論については言及されてこなかった。近年になり、質点が 3 階微分方程式に従う理論の不安定性がようやく証明された [1]。しかし、重力理論を含む場の理論における不安定性の検証はまだ行われていない。

2 ハミルトニアン解析

Ostrogradsky 不安定性を持つ理論は、安定な理論よりも自由度が大きいことが知られている。従って、理論の自由度を数えれば不安定な理論かどうかを判定できる。最も厳密に自由度を数える方法として、ハミルトニアン解析がある。この方法では、

$$
\begin{aligned}
&2 \times (\text{理論の自由度}) \\
&= (\text{独立な正準変数の数}) - (\text{ゲージ自由度}) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

として理論の自由度を求める。本研究での具体的な手順としては、「Dirac の手法」[5] と呼ばれる方法を用いる。

3 3 階微分方程式に従う理論

3.1 質点系

質点系が 3 階微分方程式に従う理論についての議論は、近年の先行研究 [1] によって行われた。$2N$ 個の質点が全て 3 階微分方程式に従うような一般的な理論は、異なる質点を区別するための添字を I、f^I, g を任意関数として、以下のラグランジアンで記述される：

$$
L = g(x_J, \dot{x}_K) + \sum_{I=1}^{2N} \ddot{x}_I f_I(x_J, \dot{x}_K). \qquad (2)
$$

さらに運動方程式の 3 階微分項の係数行列 $M_{IJ}^{(\dot{x})}$ について

$$\det M_{IJ}^{(\dot{x})} \equiv \det\left(\frac{\partial f_I}{\partial \dot{x}_J} - \frac{\partial f_J}{\partial \dot{x}_I}\right) \neq 0 \tag{3}$$

という条件を課す。これは 3 階微分方程式の存在条件である。今後は添字 I についても Einstein の縮約を用いるが、添字の上下が揃っていても縮約を取ることとする。この理論をハミルトニアン形式に移し、自由度を解析する。まずラグランジアンに含まれる時間の 2 階微分項を除くため、(2),(3) を

$$L = g(x_J, y_K) + \dot{y}_I f_I(x_J, y_K) + \lambda_I(\dot{x}_I - y_I), \tag{4}$$

$$\det M_{IJ}^{(y)} \equiv \det\left(\frac{\partial f_I}{\partial y_J} - \frac{\partial f_J}{\partial y_I}\right) \neq 0 \tag{5}$$

と書き換える。ここで $y_I \equiv \dot{x}_I$ は補助場、λ_I はラグランジュ未定乗数である。(4) を x_I, y_I, λ_I で変分をとって得られる運動方程式は、元のラグランジアン (2) から導かれるものと等価になる。ラグランジアン (4) の下で状態空間から位相空間に移る。一般化座標を (x_I, y_I, λ_I) とし、これらの共役運動量を

$$p_{x_I} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_I} = \lambda_I, \tag{6}$$

$$p_{y_I} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_I} = f_I(x_J, y_K), \tag{7}$$

$$p_{\lambda_I} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_I} = 0 \tag{8}$$

とする。(6)〜(8) は正準変数どうしの関係式と解釈できる。そこで (6)〜(8) を（第 1 次）拘束条件として

$$\xi_{x_I} \equiv p_{x_I} - \lambda_I = 0, \tag{9}$$

$$\xi_{y_I} \equiv p_{y_I} - f_I = 0, \tag{10}$$

$$\xi_{\lambda_I} \equiv p_{\lambda_I} = 0 \tag{11}$$

と表すことにする。

次にハミルトニアンを以下のように定義する：

$$\begin{aligned} H &\equiv p_{x_I}\dot{x}_I + p_{y_I}\dot{y}_I + p_{\lambda_I}\dot{\lambda}_I - L \\ &= \lambda_I y_I - g(x_J, y_K). \end{aligned} \tag{12}$$

さらに、時間発展の生成子となる「全ハミルトニアン」を、$\mu_{x_I}, \mu_{y_I}, \mu_{\lambda_I}$ をラグランジュ未定乗数として

$$H_T \equiv H + \mu_{x_I}\xi_{x_I} + \mu_{y_I}\xi_{y_I} + \mu_{\lambda_I}\xi_{\lambda_I} \tag{13}$$

と定義する。全ハミルトニアンを用いると、任意関数 $h(p, x)$ の時間微分は

$$\begin{aligned} \dot{h} &= \{h, H_T\} \\ &= \sum_{q=x,y,\lambda}\left(\frac{\partial h}{\partial q_I}\frac{\partial H_T}{\partial p_{q_I}} - \frac{\partial h}{\partial p_{q_I}}\frac{\partial H_T}{\partial q_I}\right) \end{aligned} \tag{14}$$

と表せる（{} はポアソン括弧）。これより、(第 1 次) 拘束条件の時間変化は

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{q_J} &= \{\xi_{q_J}, H_T\} \\ &= \{\xi_{q_J}, H\} + \sum_{\tilde{q}=x,y,\lambda}\mu_{\tilde{q}_I}\{\xi_{q_J}, \xi_{\tilde{q}_I}\} \end{aligned} \tag{15}$$

となる。拘束条件どうしのポアソン括弧は

$$\{\xi_{x_J}, \xi_{y_I}\} = \frac{\partial f_I}{\partial x_J}, \tag{16}$$

$$\{\xi_{y_J}, \xi_{y_I}\} = M_{IJ}^{(y)}, \tag{17}$$

$$\{\xi_{\lambda_J}, \xi_{x_I}\} = \delta_{IJ}, \tag{18}$$

それ以外は 0 である。拘束条件の時間変化が 0 であることを要請し、(16)〜(18) を (15) に代入すると以下の式が得られる：

$$\mu_{x_I} = y_I, \tag{19}$$

$$\mu_{y_I} = \left(M^{(y)}\right)^{-1}_{IJ}\left[\lambda_J + y_K\frac{\partial f_J}{\partial x_K} - \frac{\partial g}{\partial y_J}\right], \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \mu_{\lambda_I} = &-\left(M^{(y)}\right)^{-1}_{JK}\left[\lambda_K + y_L\frac{\partial f_K}{\partial x_L} + \frac{\partial g}{\partial y_K}\right]\frac{\partial f_J}{\partial x_I} \\ &+ \frac{\partial g}{\partial x_I}. \end{aligned} \tag{21}$$

これらは全てラグランジュ未定乗数を決める式であり、正準変数どうしの関係式 (拘束条件) にはなっていない。よって、この理論における拘束条件は (9)〜(11) の $6N$ 本である。そして (16)〜(18) より、全ての拘束条件は第 2 類、すなわちゲージ自由度は存在しない。従って、この理論の自由度は $(12N - 6N)/2 = 3N$ となる。$2N$ 個の質点からなる安定な理論、つまり時間について 2 階の微分方程式に従う理論の自由度は $2N$ なので、(2), (3) で記述される理論は Ostrogradsky 不安定性を持つ。

3.2 平坦時空におけるスカラー場

本研究では先行研究 [1] での議論を場の理論に応用した。その第 1 段階として、重力の寄与がない平

坦時空でのスカラー場の理論を考えた。$2N$ 個のスカラー場が全て 3 階微分方程式に従うような一般的な理論は、異なるスカラー場を区別するための添字を I、$G_2, G_{3I}, \mathcal{A}_{(IJ)K}$ を任意関数、補助場を $A_0^I := \dot{\phi}^I$、ラグランジュ未定乗数を λ_I^0、運動項を $X^{IJ} := -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^I\partial_\nu\phi^J = \frac{1}{2}(A_0^I A_0^J - \partial_i\phi^I\partial_i\phi^J)$ として (2) を応用すると、以下のラグランジアン密度で記述できる：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= G_2(\phi^J, X^{KL}) - G_{3I}(\phi^J, X^{KL})\Box\phi^I \\
&\quad - \mathcal{A}_{(IJ)K}(\phi^L, X^{MN})\partial_\mu\phi^I\partial^\nu\phi^J\partial_\nu\partial^\mu\phi^K \\
&= G_2(\phi^J, X^{KL}) - G_{3I}(\phi^J, X^{KL})[-\dot{A}_0^I + \partial_i\partial_i\phi^I] \\
&\quad - \mathcal{A}_{(IJ)K}(\phi^L, X^{MN})[A_0^I A_0^J \dot{A}_0^K \\
&\qquad - 2A_0^I\partial_i\phi^J\partial_i A_0^K + 2\partial_i\phi^I\partial_j\phi^J\partial_i\partial_j\phi^K] \\
&\quad + \lambda_I^0(\dot{\phi}^I - A_0^I).
\end{aligned} \tag{22}
$$

後に重力の寄与を考えることを見据えて、今回は時間微分と空間微分をまとめて ∂_μ と表記している。また、任意の関数 F について

$$
F_{,<IJ>} := \frac{\partial F}{\partial X^{IJ}} = \frac{\partial F}{\partial X^{JI}} \tag{23}
$$

と表記すると、運動方程式の時間についての 3 階微分項が存在する条件は

$$
\begin{aligned}
&M_{IJ} := \\
&A_0^K\left[G_{3J,<IK>} - G_{3I,<JK>} + 2(\mathcal{A}_{(JK)I} - \mathcal{A}_{(IK)J})\right] \\
&\neq 0,
\end{aligned} \tag{24}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{M}_{KN} &:= (\mathcal{A}_{(IJ)N,<MK>} - \mathcal{A}_{(IJ)K,<MN>})A_0^M A_0^I A_0^J \\
&\neq 0
\end{aligned} \tag{25}
$$

となる。

この理論に対してハミルトニアン解析を行う。一般化座標を $(\phi^I, A_0^I, \lambda_I^0)$ とし、それらに共役な運動量を以下のように定義する：

$$
\pi_I := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}^I} = \lambda_I^0, \tag{26}
$$

$$
B_I^0 := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_0^I} = G_{3I} - \mathcal{A}_{(JK)I}A_0^J A_0^K, \tag{27}
$$

$$
\Lambda_0^I := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\lambda}_I^0} = 0. \tag{28}
$$

この全ては拘束条件として

$$
\Pi_I := \pi_I - \lambda_I^0 \approx 0, \tag{29}
$$

$$
C_I^0 := B_I^0 - G_{3I} + \mathcal{A}_{(JK)I}A_0^J A_0^K \approx 0, \tag{30}
$$

$$
\Lambda_0^I \approx 0 \tag{31}
$$

と書き換えられる。次にハミルトニアン H と全ハミルトニアン H_T を以下のように定義する ($\alpha^I, \beta_0^I, \theta_I^0$ はラグランジュ未定乗数)：

$$
H \equiv \int d^3x\mathcal{H}, \tag{32}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &\equiv \pi_I\dot{\phi}^I + B_I^0\dot{A}_0^I - \mathcal{L} \\
&= -G_2 + \partial_i\partial^i\phi^I G_{3I} \\
&\quad + 2\mathcal{A}_{(IJ)K}[-A_0^I\partial_i\phi^J\partial_i A_0^K + \partial_i\phi^I\partial_j\phi^J\partial_i\partial^j\phi^K] \\
&\quad + \lambda_I^0 A_0^I.
\end{aligned} \tag{33}
$$

$$
H_T \equiv \int d^3x\mathcal{H}_T, \tag{34}
$$

$$
\mathcal{H}_T \equiv \mathcal{H} + \alpha^I\Pi_I + \beta_0^I C_I^0 + \theta_I^0\Lambda_0^I. \tag{35}
$$

場の理論におけるポアソン括弧を

$$
\begin{aligned}
&\{A^I(\boldsymbol{x}), B^J(\boldsymbol{y})\} \\
&\equiv \sum_{q^K, p_K}\int d^3z \\
&\left(\frac{\delta A^I(\boldsymbol{x})}{\delta q^K(\boldsymbol{z})}\frac{\delta B^J(\boldsymbol{y})}{\delta p_K(\boldsymbol{z})} - \frac{\delta A^I(\boldsymbol{x})}{\delta p_K(\boldsymbol{z})}\frac{\delta B^J(\boldsymbol{y})}{\delta q^K(\boldsymbol{z})}\right)
\end{aligned} \tag{36}
$$

とすると、例えば拘束条件 Π_I の時間変化は

$$
\begin{aligned}
\dot{\Pi}_I &= \{\Pi_I, H_T\} \\
&= \{\Pi_I, H\} + \alpha^J\{\Pi_I, \Pi_J\} \\
&\quad + \beta_0^J\{\Pi_I, C_J^0\} + \theta_J^0\{\Pi_I, \Lambda_0^J\}
\end{aligned} \tag{37}
$$

となる。ここで拘束条件どうしのポアソン括弧は

$$
\{\Pi_I, \Lambda_0^J\} = \delta_I^J, \tag{38}
$$

$$
\{C_I^0, \Pi_N\} = -\frac{\partial G_{3I}}{\partial\phi^N} + \frac{\partial\mathcal{A}_{(JK)I}}{\partial\phi^N}A_0^J A_0^K, \tag{39}
$$

$$
\{C_I^0, C_J^0\} = -M_{IJ} + \tilde{M}_{IJ} \neq 0 \tag{40}
$$

となることを用いると、

$$\dot{\Pi}_I = \{\Pi_I, H\} + \theta_I^0, \tag{41}$$

$$\dot{C}_I^0 = \{C_I^0, H\} + \alpha^J \{C_I^0, \Pi_J\} + \beta_0^J \{C_I^0, C_J^0\}, \tag{42}$$

$$\dot{\Lambda}_0^I = \{\Lambda_0^I, H\} - \alpha^I + \beta_0^J \{\Lambda_0^I, C_J^0\}. \tag{43}$$

これらは全てラグランジュ未定乗数を決める式となっている。(38)〜(40) より拘束条件は全て第 2 類であるから、今回もゲージ自由度は存在しない。以上より、この理論の自由度は $(12N - 6N)/2 = 3N$ となる。$2N$ 個のスカラー場が時間について 2 階の微分方程式に従う理論の自由度は $2N$ なので、この理論は Ostrogradsky 不安定性を持つことが分かった。

3.3 ダイナミカルな時空中のスカラー場 (S-T 理論)

最後に、(22), (24), (25) で表されるスカラー場の理論の時空をダイナミカルな時空に変更することで、S-T 理論を構築する。ここでは新たな量として

$$A_*^I \equiv \frac{1}{N}(A_0^I - N^i D_i \phi^I), \tag{44}$$

$$\Xi^I \equiv D^i \phi^I D_i N + N^i D_i A_*^I, \tag{45}$$

$$V_*^I \equiv \frac{1}{N}(\dot{A}_*^I - \Xi^I). \tag{46}$$

を用いる。また運動項を $X^{IJ} := -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi^I \nabla_\nu \phi^J$ とする。この時、考えるラグランジアン密度は

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \sqrt{-g} \Bigg[&\frac{{}^{(4)}R}{2} + G_2(\phi^J, X^{KL}) \\ &- G_{3I}(\phi^J, X^{KL}) g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi^I \\ &- \mathcal{A}_{(IJ)K}(\phi^L, X^{MN}) \nabla_\mu \phi^I \nabla^\nu \phi^J \nabla_\nu \nabla^\mu \phi^K \Bigg],\end{aligned} \tag{47}$$

と表される。運動方程式に時間についての 3 階微分項が存在する条件は (24), (25) である。平坦時空でのスカラー場と同様にハミルトニアン解析を行う。するとこの理論の自由度は $[2(10+3N) - 2\times 8 - 3N]/2 = 3N/2 + 2$ となる。$2N$ 個のスカラー場が時間について 2 階の微分方程式に従う S-T 理論の自由度は $2N + 2$ なので、この理論は Ostrogradsky 不安定性を持つことが分かった。

4 結論

先行研究 [1] では、時間について 3 階の微分方程式に従う質点系の一般的な理論が構築され、Ostrogradsky 不安定性を持つことが示された。本研究ではこれを場の理論に応用し、平坦時空でのスカラー場・曲がった時空でのスカラー場が時間について 3 階微分方程式に従う一般的な理論を構築した。そしてこれらについてハミルトニアン解析を行ない、どちらの理論も Ostrogradsky 不安定性を持つことを明らかにした。これは、時間についての 3 階微分項 $\dddot{\phi}^K$ が運動方程式に現れるための条件によって、位相空間内の拘束条件が減り、独立な正準変数の数が増えたことによる。

謝辞

天文天体物理若手夏の学校にご賛同頂き、ご支援下さった皆様に感謝致しております。また日頃議論にお付き合い頂いている研究室の方々にも、この場を借りて御礼申し上げます。

Reference

[1] H. Motohashi and T. Suyama, Phys. Rev. D **91**, no. 8, 085009 (2015) [arXiv:1411.3721 [physics.class-ph]].

[2] M. Ostrogradsky, Mem. Acad. St. Petersbourg **6**, no. 4, 385 (1850).

[3] G. W. Horndeski, Int. J. Theor. Phys. **10**, 363 (1974). doi:10.1007/BF01807638

[4] J. Gleyzes, D. Langlois, F. Piazza and F. Vernizzi, Phys. Rev. Lett. **114**, no. 21, 211101 (2015) doi:10.1103/PhysRevLett.114.211101 [arXiv:1404.6495 [hep-th]].

[5] 菅野礼司「ゲージ理論の解析力学」(2007, 吉岡書店).

修正重力理論による時空特異点回避の可能性

小林 曜 (早稲田大学大学院 先進理工学研究科)

Abstract

本研究は，一般相対性理論の修正によって時空特異点が回避される可能性を探るものである．一般相対論においては普遍的に特異点が現れることが示されているが，特異点では理論が予測可能性を失うため，特異点の生じない重力理論が必要である．本研究では，Gauss-Bonnet 項を制限した重力理論によって，特異点のない宇宙モデルと球対称静的な時空のモデルを議論する．

1 Introduction

現在，一般相対性理論は，多くの観測や実験的検証によって，少なくとも太陽系スケールにおいて正しいと考えられている．しかし，Penrose と Hawking の特異点定理によって，物質場が適切なエネルギー条件に従い，時空が一定の条件を満たせば，時間的あるいは光的な測地線が不完備になる特異点が，時空の対称性によらず普遍的に現れることが示された (Hawking & Ellis 1973)．宇宙初期や，ブラックホール内部に現れる特異点では，曲率が発散し，時空の構造が破綻するため，その上で物理量が定義できず，一般相対論は予測能力を失う．現実の宇宙にはこのような特異点は存在しないと考えられるため，このように強重力，高エネルギーの領域においては，重力の量子効果が無視できず，一般相対論を修正する理論が必要である．これまでに重力の量子化や他の相互作用との統一理論など，さまざまなアプローチが試みられてきた．

重力の量子論が完成していない現状において，現象論的に量子論の効果を取り込むアプローチとして，曲率制限仮説 (Limiting Curvature Hypothesis, LCH) を考える (Markov 1982), (Markov 1987), (Mukhanov & Brandenberger 1992), (Brandenberger et al. 1993)．量子効果を考えたとき，Planck 長 $l_{\rm Pl} \sim \sqrt{G\hbar c^{-3}} \sim 10^{-35}$m より小さなスケールで観測を行うことはできない (Amati et al. 1989)．一方，上述のように，一般相対論によると特異点が現れる領域では多くの場合曲率が極めて多くなる．曲率テンソルから作られる座標不変量，たとえば R，$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ はそれぞれ長さの逆 2 乗，逆 4 乗の次元を持つが，$|R| \gtrsim l_{\rm Pl}^{-2}$，$|R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}| \gtrsim l_{\rm Pl}^{-4}$ のように曲率が極めて大きいとき，時空の曲率半径は Planck 長程度になり，一般相対論への量子補正が無視できなくなると考えられる．曲率制限仮説は，量子効果によって前述のような曲率に関する量が制限され，特異点の形成が避けられると予測する．この考え方に基づき，Brandenberger, Mukhanov らは一様等方宇宙で宇宙初期特異点を回避する宇宙モデルを構築した (Mukhanov & Brandenberger 1992), (Brandenberger et al. 1993)．最近では，曲率制限仮説により，複数の地平線が入れ子状になった，特異点のないブラックホール時空のモデルも提案されている (Chamseddine & Mukhanov 2017)．

2 Methods/Instruments and Observations

Brandenberger, Mukhanov らは，Lagrange の乗数に相当する補助場を導入する方法に基づいて (Altshuler 1990)，曲率不変量 $I_1, \ldots, I_n$ を制限して LCH を実現する重力場の作用として次の式を考えた (Mukhanov & Brandenberger 1992), (Brandenberger et al. 1993)．

$$S_g = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}(R + \phi_1 I_1 + \cdots \phi_n I_n + V(\phi_1, \ldots, \phi_n)) \tag{1}$$

この作用を変分すると，拘束条件

$$I_i = \frac{\partial V}{\partial \phi_i},\ i = 1, \ldots, n \tag{2}$$

が得られる．よって，$\partial V/\partial \phi_i$ が有界になるように V を選ぶと $I_1, \ldots, I_n$ を制限できることが分かる．Brandenberger, Mukhanov らは，制限される曲率不変量として

$$I = R - \sqrt{3(4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - R^2)} \tag{3}$$

を採用し，宇宙初期特異点を回避することができた．しかし，(3) の I は Riemann テンソルのうち，Ricci テンソルの成分のみから成っている．ブラックホール時空を含めて，一般に Weyl テンソルは 0 でないので，Weyl テンソルを含まない (3) の I が有限でも，曲率の有限性は保証されない．大きな曲率を制限する量子効果を適切に取り込んだ修正重力理論は，宇宙初期だけでなくブラックホール内部などあらゆる状況で特異点を回避すべきである．そこで，Riemann テンソルの全ての成分から作られる曲率不変量を考える．このような量として自然なのは Riemann テンソルの 2 乗

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} \tag{4}$$

であろう．しかし，の変分からは一般に 2 階より高次の微分が生じ，ゴースト不安定性などの問題が生じる．そこで，解析を簡単にするため，本研究では，制限する曲率不変量として Gauss-Bonnet 曲率 2 乗項

$$R^2_{\mathrm{GB}} = R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2 \tag{5}$$

を考え，重力場の作用を

$$S_g = \int \sqrt{-g} d^4x \left(R + \alpha\phi R^2_{\mathrm{GB}} - V(\phi) \right) \tag{6}$$

として特異点回避の可能性を解析した．Gauss-Bonnet 項は位相不変量であって，

$$\delta \int d^4x \sqrt{-g} R^2_{\mathrm{GB}} = 0$$

という性質を持つため，(6) で Gauss-Bonnet 項を含む項からは高階微分が生じない．(6) を変分して物質場も考えて得られる基礎方程式は，

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} + \alpha(\phi H_{\mu\nu} + 4(\nabla^\alpha\nabla^\beta\phi)P_{\alpha\mu\beta\nu} + V(\phi)g_{\mu\nu} \\ = 8\pi G T_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{7}$$

である．但し，

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &\equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \\ H_{\mu\nu} &\equiv -\frac{1}{2}R^2_{\mathrm{GB}}g_{\mu\nu} + 2(R_{\alpha\beta\gamma\mu}R^{\alpha\beta\gamma}{}_{\nu} \\ &\quad - 2R_{\alpha\mu}R^{\alpha}{}_{\nu} - 2R^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu} + RR_{\mu\nu}) \\ P_{\alpha\mu\beta\nu} &\equiv R_{\alpha\mu\beta\nu} + 2R_{\alpha[\mu}g_{\beta]\nu} \\ &\quad + 2R_{\nu[\beta}g_{\nu]\alpha} + Rg_{\alpha[\beta}g_{\nu]\mu} \end{aligned}$$

と定義した (Z. Guo et al. 2008)．まず，宇宙初期特異点が回避されるか調べるため，Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker 計量

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 d\phi^2)\right]$$

を仮定して宇宙の進化を調べた．このとき，基礎方程式は

$$\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right]\left(1 + \frac{4\alpha\dot{a}\dot{\phi}}{a}\right) - \frac{1}{3}V(\phi) = \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{8}$$

$$\begin{aligned} 4\alpha\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right]\ddot{\phi} + 8\alpha\frac{\dot{a}\ddot{a}}{a^2}\dot{\phi} + 2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \\ + \frac{k}{a^2} - V(\phi) = -8\pi G\rho \end{aligned} \tag{9}$$

$$\frac{12\alpha\ddot{a}(\dot{a}^2 + k)}{a^3} = \frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi} \tag{10}$$

となる．宇宙初期特異点を回避する例として，宇宙のスケール因子 a が収縮期を経て最小値に達し，再び膨張するバウンス宇宙や，スケール因子が振動して有限の値を保つ宇宙が考えられる．

3 Results

基礎方程式 (8), (9), (10) により，宇宙初期特異点の回避を議論する．簡単のため，曲率が小さい領域で理論が一般相対論に帰着することを課さず，ポテンシャル $V(\phi)$ を

$$V(\phi) = V_0\phi \ (V_0\text{:長さの逆 2 乗の次元の定数})$$

とする．また，結合定数 α は正とする．次に，空間曲率 k の符号によって場合分けし，解の振舞いを調べた．

3.1 k = 0

このとき，式 (10) より，

$$\frac{12\alpha\ddot{a}\dot{a}^2}{a^3} = V_0$$

となる．バウンスが起こるためには $\dot{a} = 0$ かつ $\ddot{a} > 0$ でなくてはならないが，これを左辺に代入すると $V_0 = 0$ となり，成り立たない．よって，$k = 0$ の場合にはバウンスは起こらない．

3.2 $k = -1$

このとき，式 (10) は

$$\frac{12\alpha\ddot{a}(\dot{a}^2 - 1)}{a^3} = V_0$$

となる．この場合，$V_0 > 0$ では $\dot{a} = 0$ かつ $\ddot{a} > 0$ と矛盾するためバウンスは起こらない．$V_0 < 0$ かつ $0 < \dot{a}(0) < 1$ の場合，バウンスが存在するが，$\dot{a}$ が 1 に近づくにつれて有限時間で $\ddot{a}$ が発散し，曲率特異点が生じる．

3.3 $k = +1$

このとき，式 (10) は

$$\frac{12\alpha\ddot{a}(\dot{a}^2 + 1)}{a^3} = V_0$$

となり，初期条件で Hubble パラメータの絶対値 $|\dot{a}/a|_{t=0}$ を臨界値以下に取った場合にバウンス解が存在し，宇宙初期特異点が回避された．$|\dot{a}/a|_{t=0}$ が臨界値を越える宇宙では，バウンスする前に特異点が形成された (図 1).

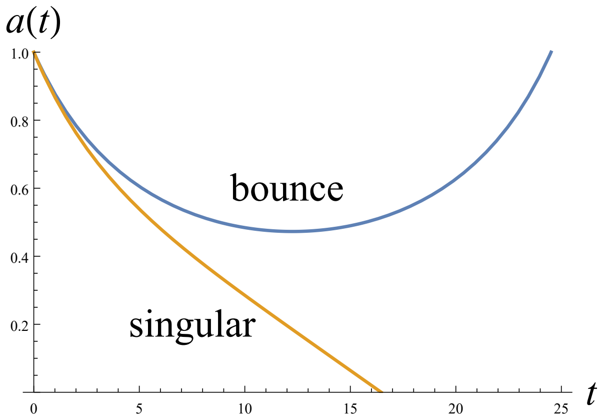

図 1: $a(0) = 1$ としたときの $a(t)$ の変化．バウンスが起こる場合と特異点が形成される場合を示した．

4 Discussion

以上の考察では一様等方宇宙を考えたが，ブラックホール時空の特異点の回避を議論するため，球対称静的時空を考える．一般に計量は

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + g(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

と書くことができる．しかし，この形の計量でブラックホール解を記述すると，地平線上で $g(r)$ が発散する座標特異点が表れるという問題がある．これを避けるため，$dv = dt + \sqrt{g/f}dr$ と座標変換し，Eddington-Finkelstein 型の座標

$$ds^2 = -T(r)dv^2 + 2B(r)dvdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$$

を用いる．この座標系で基礎方程式を書き下すと，

$$\frac{2\left[-6\alpha TB'\phi' + B^2B'(r + 2\alpha\phi') - 2\alpha B^3\phi'' + 2\alpha BT\phi''\right]}{r^2B^5} = 0 \tag{11}$$

$$\frac{B^4(-1 + r^2V) - 6\alpha TT'\phi' + B^2\left[T + T'(r + 2\alpha\phi')\right]}{r^2B^5} = 0 \tag{12}$$

$$\begin{aligned}&\Big(2rB^5 - B^2B'(2T + rT') + 12\alpha TB'T'\phi' + B^3(2T' + rT'')\\&-4\alpha B(T'^2\phi' + T\phi'T'' + TT'\phi'')\Big)(2r^3B^5)^{-1} = 0\end{aligned} \tag{13}$$

$$-2\frac{\partial V}{\partial\phi} + \frac{4\alpha\left[B^2B'T' - 3TB'T' - B^3T'' + B(T'^2 + TT'')\right]}{r^2B^5} = 0 \tag{14}$$

となる．3 節と同様にまず $V = V_0\phi$ として，$r = 0$ で境界条件を設定して r が大きくなる方向にこの方程式系を解くと，AdS 時空が解になることを確認した．しかし，一様でなく，かつ中心で特異にならないような解を見つけることはできていない．

5 Conclusion

本研究では，Gauss-Bonnet 項を有限にする作用を仮定し，一様等方時空及び球対称静的時空における特異点回避の可能性について解析した．その結果，一様等方時空については適当なポテンシャルでバウンス解を得て，特異点回避を実現することができた．今後は地平線を持ち，内部に特異点を含まない解を構成することが課題である．

Acknowledgement

国立天文台，京都大学基礎物理学研究所 (研究会番号: YITP-W-16-02)，野辺山宇宙電波観測所，宇宙線研究者会議，光学赤外線天文連絡会，理論天文学宇宙物理学懇談会，日本天文学会ならびに，企業・個人の皆様のご支援に心より感謝いたします．

Reference

D. Amati, M. Ciafaloni and V. Veneziano 1989, Phys. Lett. B216, 14

B. L. Altshuler 1998, Class. Quant. Grav. 7, 189

R. Brandenberger, V. Mukhanov & A. Sornborger 1993, Phys. Rev. D48,1629

A. H. Chamseddine & V. Mukhanov 2017, Eur. Phys. J. C77, 183

S. W. Hawking & G. F. R. Ellis *The Large Scale Structure of Space-Time,* Cambridge University Press, 1973

M. Markov 1982, JETP Lett. 36, 265

M. Markov 1987, JETP Lett. 46, 431

V. Mukhanov & R. Brandenberger 1992, Phys. Rev. Lett. 68, 1969

Z. Guo, N. Ohta & T. Torii 2008, Prog. Theor. Phys. 120 (3) 581

Degravitation of Cosmological Constant in Massive Gravity and Bigravity

富川 慶太郎 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

一般相対論を用いて宇宙の加速膨張を説明するために通常は宇宙定数が導入されるが、これは場の理論での予言と 60 桁以上もの差が生じる。これを宇宙定数問題という。本講演では、重力子が質量を持つ massive gravity と呼ばれる重力理論を用いて宇宙定数問題の解決を試みた論文をレビューする [1]。ここでは decoupling limit をとった dRGT massive gravity[2] を用いる。 degravitation という機構が働くことで任意の大きさの宇宙定数が存在してもその影響を消し去ることができることを示す。

1 Introduction

Ia 型超新星の観測により現在の宇宙が加速膨張していることが判明している。一般相対論で加速膨張を説明するならば、真空のエネルギーと解釈される正の宇宙定数を導入する必要がある。一方、場の量子論で真空のエネルギーを求めると観測から制限される宇宙定数の値と 60 桁以上もの差が生じてしまう。これは宇宙定数問題と呼ばれ、現代物理学の大きな謎の一つとなっている。本講演では、重力子が質量を持つ massive gravity と呼ばれる重力理論を用いて宇宙定数問題の解決を図る。massive gravity には重力と宇宙定数の相互作用を小さくする degravitation という機構が存在する。degravitation が働くことで観測される宇宙定数の値が制限を満たし、宇宙定数問題が解決できるかどうかを確かめる。

2 Massive Gravity

一般相対論 (GR) は massless spin-2 particle の場の理論である。しかし、今日までに graviton の質量がゼロであるという明確な根拠は見つかっていない。Massive Gravity には、ゴーストと呼ばれる負の運動エネルギーを持つ自由度が現れ系が不安定になる等の問題があった。近年、この問題が解決された dRGT Massive Gravity という理論が提唱され、宇宙論への応用も盛んになっている。dRGT Massive Gravity の作用は一般に

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= M_{\rm Pl}^2\sqrt{-g}R \\ &\quad - \frac{M_{\rm Pl}^2 m^2}{4}\sqrt{-g}\left(U_2\left(g,H\right) + U_3\left(g,H\right)\right. \\ &\qquad \left. + U_4\left(g,H\right) + U_5\left(g,H\right) + \cdots\right)\end{aligned} \tag{1}$$

で与えられる。ここで U_i は $H_{\mu\nu}$ の i 次オーダーの potential terms を表し

$$U_2\left(g,H\right) = H_{\mu\nu}^2 - H^2 \tag{2}$$

$$U_3\left(g,H\right) = c_1 H_{\mu\nu}^3 + c_2 H H_{\mu\nu}^2 + c_3 H^3 \tag{3}$$

$$\begin{aligned}U_4\left(g,H\right) &= d_1 H_{\mu\nu}^4 + d_2 H H_{\mu\nu}^3 + c_3 H_{\mu\nu}^2 H_{\alpha\beta}^2 \\ &\quad + d_4 H^2 H_{\mu\nu}^2 + d_5 H^4\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}U_5\left(g,H\right) &= f_1 H_{\mu\nu}^5 + f_2 H H_{\mu\nu}^4 + f_3 H^2 H_{\mu\nu}^3 \\ &\quad + f_4 H_{\alpha\beta}^2 H_{\mu\nu}^3 + f_5 H\left(H_{\mu\nu}^2\right)^2 \\ &\quad + f_6 H^3 H_{\mu\nu}^2 + f_7 H^5\end{aligned} \tag{5}$$

である。縮約は $g_{\mu\nu}$ を用いて行う。係数 $c_i, d_i.f_i$ は任意の定数である。$H_{\mu\nu}$ は

$$H_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{ab}\partial_\mu\varphi^a\partial_\nu\varphi^b \tag{6}$$

である。ここで $a,b = 0,1,2,3$ $\eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ である。また、φ^a は座標変換に対してスカラーである。ここで、

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{h_{\mu\nu}}{M_{\rm Pl}} \tag{7}$$

とし、スカラー場 φ^a を座標 x^α と場 π^α で展開して、

$$\varphi^a = \left(x^\alpha - \pi^\alpha\right)\delta_\alpha^a \tag{8}$$

とする。さらに、$\pi_a = \partial_a \pi / \Lambda_3^3$ として、

$$H_{\mu\nu} = \frac{h_{\mu\nu}}{M_{\rm Pl}} + \frac{2\partial_\mu\partial_\nu\pi}{\Lambda_3^3} - \frac{\partial_\mu\partial^\alpha\partial_\nu\partial_\alpha\pi}{\Lambda_3^6} \tag{9}$$

となる。ここでエネルギースケール $\Lambda_3 \equiv (M_{\rm Pl} m^2)^{1/3}$ に注目して decoupling limit

$$m \to 0, \quad M_{\rm Pl} \to \infty, \quad \Lambda_3 = \left(M_{\rm Pl} m^2\right)^{1/3} \text{fixed.} \tag{10}$$

をとる。decoupling limit の下で Lagrangian は (1)

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2} h^{\mu\nu} \mathcal{E}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} + h^{\mu\nu} \sum_{n=1}^{3} \frac{a_n}{\Lambda_3^{3(n-1)}} X_{\mu\nu}^{(n)} [\Pi] \tag{11}$$

となる。ここで、3 つの対称テンソル $X_{\mu\nu}^{(n)}[\Pi]$ は helicity-0 field の二階微分の項 $\Pi_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu\partial_\nu\pi$ からなり、完全反対称テンソル $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ を用いて、

$$\begin{aligned} X_{\mu\nu}^{(1)}[\Pi] &= \varepsilon_\mu{}^{\alpha\rho\sigma} \varepsilon_\nu{}^\beta{}_{\rho\sigma} \Pi_{\alpha\beta} \\ X_{\mu\nu}^{(2)}[\Pi] &= \varepsilon_\mu{}^{\alpha\rho\gamma} \varepsilon_\nu{}^{\beta\sigma}{}_\gamma \Pi_{\alpha\beta}\Pi_{\rho\sigma} \\ X_{\mu\nu}^{(3)}[\Pi] &= \varepsilon_\mu{}^{\alpha\rho\gamma} \varepsilon_\nu{}^{\beta\sigma\delta} \Pi_{\alpha\beta}\Pi_{\rho\sigma}\Pi_{\gamma\delta} \end{aligned} \tag{12}$$

と表される。

3 Degravitation in Massive Gravity

decoupling limit をとった Lagrangian(11) に Source を足すと、

$$-\mathcal{E}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} + \sum_{n=1}^{3} \frac{a_n}{\Lambda_3^{3(n-1)}} X_{\mu\nu}^{(n)}[\Pi] = -\frac{1}{M_{\rm Pl}} T_{\mu\nu} \tag{13}$$

である。これを $h^{\mu\nu}, \pi$ で変分して、運動方程式はそれぞれ

$$-\mathcal{E}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} + \sum_{n=1}^{3} \frac{a_n}{\Lambda_3^{3(n-1)}} X_{\mu\nu}^{(n)}[\Pi] = -\frac{1}{M_{\rm Pl}} T_{\mu\nu} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &\left(a_1 + \frac{a_2}{\Lambda_3^3}\Box\pi + \frac{3a_3}{2\Lambda_3^6}\left([\Pi]^2 - [\Pi^2]\right)\right) \\ &\quad \times \left(\Box h - \partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta}\right) \\ &+ \frac{1}{\Lambda_3^3}\left(a_2\Pi_{\mu\nu} - 3\frac{a_3}{\Lambda_3^3}\left(\Pi_{\mu\nu}^2 - \Box\pi\Pi_{\mu\nu}\right)\right) \\ &\quad \times \left(2\partial^\mu\partial_\alpha h^{\alpha\nu} - \Box h^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu h\right) \\ &- \frac{3a_3}{\Lambda_3^6}\left(\Pi_{\mu\alpha}\Pi_{\nu\beta} - \Pi_{\mu\nu}\Pi_{\alpha\beta}\right)\partial^\alpha\partial^\beta h^{\mu\nu} = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

となる。Source は宇宙定数として、一様等方な解を求めるので

$$T_{\mu\nu} = -\lambda\eta_{\mu\nu} \tag{16}$$

$$h_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} H^2 x^\alpha x_\alpha M_{\rm Pl} \eta_{\mu\nu} \tag{17}$$

$$\pi = \frac{1}{2} q x^\alpha x_\alpha \Lambda_3^3 \tag{18}$$

と置くと、$h^{\mu\nu}, \pi$ の運動方程式はそれぞれ、

$$\left(-\frac{1}{2} M_{\rm Pl} H^2 + \sum_{n=1}^{3} a_n q^n \Lambda_3^3\right)\eta_{\mu\nu} = -\frac{\lambda}{6M_{\rm Pl}}\eta_{\mu\nu} \tag{19}$$

$$H^2\left(a_1 + 2a_2 q + 3a_3 q^2\right) = 0 \tag{20}$$

となる。(20) 式より、

$$\begin{cases} H = 0 & \text{Degravitation branch} \\ H \neq 0 & \text{deSitter branch} \end{cases} \tag{21}$$

の 2 つの branch がある。$H = 0$ なら (17),(7) より、$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ となり宇宙定数が存在しても flat な時空が実現している。また、$H = 0$ のとき (19) 式は

$$a_1 q + a_2 q^2 + a_3 q^3 = -\frac{\lambda}{6\Lambda_3^3 M_{\rm Pl}} \tag{22}$$

となる。これは $a_3 \neq 0$ であれば q の 3 次方程式であるから任意の λ に対して少なくとも一つの実数解が存在する。すなわち、たとえ莫大な真空エネルギーが存在したとしても、その影響を完全に消し去り時空を flat にすることができる。

4 Conclusion

Massive Gravity を用いて、真空エネルギーの影響を完全に消し去り時空を flat にすることができた。しかし、ここで得られた一様等方解は $H = 0$ となり定常宇宙になってしまう。加速膨張を説明するならば宇宙定数の影響を打ち消しつつある程度残さなければならない。

Acknowledgement

夏の学校を運営してくださった事務局の皆様、支援いただいた皆様に感謝いたします。

Reference

[1] C. de Rham, G. Gabadadze, L. Heisenberg and D. Pirtskhalava, Phys. Rev. D **83**, 103516 (2011) doi:10.1103/PhysRevD.83.103516 [arXiv:1010.1780 [hep-th]].

[2] C. de Rham, G. Gabadadze and A. J. Tolley, Phys. Rev. Lett. **106**, 231101 (2011) doi:10.1103/PhysRevLett.106.231101 [arXiv:1011.1232 [hep-th]].

[3] M. Platscher and J. Smirnov, JCAP **1703**, no. 03, 051 (2017) doi:10.1088/1475-7516/2017/03/051 [arXiv:1611.09385 [gr-qc]].

極限ブラックホール近傍での光子放出

南川 朋輝 (近畿大学大学院　一般相対論・宇宙論研究室)

Abstract

ブラックホール近傍から放射される様々な光（電磁波）の観測により、ブラックホールについて多くの情報が得られると期待されている。そのためにはブラックホール近傍から観測者の位置する遠方への光の測地線を解く必要があるが、一般に楕円積分となるため数値計算による以外、解析が極めて困難であることが知られている。しかし近年、回転角速度が大きい極限ブラックホールの場合には、共形対称性と呼ばれる特別な対称性を利用することで、測地線方程式を初等関数を用いて解析的に解く方法が Strominger らにより提案された（2017)。この共形対称性を用いた新しい方法は、最近では極限に近い角速度で回転するブラックホールからの重力波波形の計算にも利用されている。本発表では、この Strominger らによる極限ブラックホール時空での光的測地線方程式の新しい解法を紹介する。

1 Introduction

現在、観測技術の進歩によって大小様々なブラックホールが発見されており、これらの観測結果はブラックホール天文学をさらに発展させると期待されている。観測されているブラックホールの中で、特に活動銀河核にある超大質量のブラックホールは、非常に高速で回転していることが分かっている。そのようなブラックホール近傍から放射される電磁波やそれ自身からの重力波を観測することで天文学に関して新たな知見を得ることが出来るはずである。そのためにはブラックホール近傍から観測者の位置する遠方への光の測地線を解く必要があるが、一般的に測地線方程式は楕円積分となり、解析的に解くことが非常に困難である。しかし、回転ブラックホールの角速度には上限があり、最大の角速度で回転している極限ブラックホールの場合には、共形対称性を利用することでホライズン近傍での計量が簡単になり、そこでのダイナミクスが 2 次元の共形場理論に現れる。このことは Kerr/CFT 対応として知られている。このような特別な対称性を用いることで、測地線方程式を初等関数のみを用いて解析的に解く方法が Strominger らによって提案された (2017)。この方法は、極限ブラックホール近傍での重力波波形の計算、ブラックホール近傍から遠方へと伝わっていく鉄輝線等の電磁放射に関する観測的な問題や極限カー・ブラックホール時空での超対称性をもつ弦理論的なブラックホールの研究等に応用されている。Strominger らは、極限ブラックホール時空でホライズン近傍領域と遠方領域という極端な 2 つの領域でそれぞれ測地線方程式を近似し、中間領域で整合させるという方法を用いている。本発表では、この Strominger らによる極限ブラックホール時空での光的測地線方程式の新しい解法を紹介する。

2 extreme Kerr black hole

宇宙に存在するほとんどの星は自転していると考えられる。自転する天体外部の重力場を理解するために、真空のアインシュタイン方程式を定常かつ軸対称という仮定のもとで解いて得られた解の内、最も重要なものがカー解であり、その計量で記述されるカー・ブラックホールは質量と角運動量の 2 つのパラメータによって特徴づけられる。計量は、

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \\ &= -\frac{\Delta}{\hat{\rho}^2}\left(d\hat{t} - a\sin^2\theta d\hat{\phi}\right)^2 \\ &+ \frac{\sin^2\theta}{\hat{\rho}}\{\left(\hat{r}^2+a^2\right)d\hat{\phi} - ad\hat{t}\}^2 \\ &+ \frac{\hat{\rho}}{\Delta}d\hat{r}^2 + \hat{\rho}^2 d\theta^2 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\Delta \equiv \hat{r}^2 - 2M\hat{r} + a^2, \quad \hat{\rho}^2 \equiv \hat{r}^2 + a^2\cos^2\theta \tag{2}$$

M は天体の質量、$a = \frac{J}{M}$ はカー・パラメータである。カー・ブラックホールには地平面が２つ存在し、

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \tag{3}$$

と表される。r_+ を外部地平面（事象の地平面)、r_- を内部地平面と呼ぶ。$M^2 = a^2$ となる場合を extreme Kerr black hole と呼ぶ。この時、2 つ存在した地平面は 1 つ（$r_{\pm} = M$）になり、対称性が高くなっている。ホライズン近傍での計量は、Bardeen-Horowitz 座標

$$t = \frac{\hat{t}}{M}, \quad \phi = \hat{\phi} - \frac{\hat{t}}{M}, \quad r = \frac{\hat{r} - M}{M} \tag{4}$$

を用いて、次のように書ける。

$$ds^2 = 2M^2\Gamma(\theta)\left(-r^2dt^2 + \frac{dr^2}{r^2} + d\theta^2 + \Lambda(\theta)^2(d\phi + rdt)^2\right) + \cdots \tag{5}$$

ここで、$\Gamma(\theta) = \frac{1+\cos^2\theta}{2}$, $\Lambda(\theta) = \frac{2\sin\theta}{1+\cos^2\theta}$ である。このように、extreme black hole を考えた場合は、ホライズン近傍での時空の対称性が高くなる。実際、GRS 1915+105($a \sim 0.98$)、LMC X-1 ($a \sim 0.92$) 等、極限 ($a = 1$) に近い角運動量をもって回転しているブラックホール候補天体が見つかっている。(J. E. McClintock et al. 2015)

3　カー時空での測地線方程式

相対論でのハミルトン・ヤコビ方程式は、

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial S}{\partial x^\mu}\frac{\partial S}{\partial x^\nu} - \mu c^2 = 0 \tag{6}$$

ただし、μ は粒子の質量である。この方程式は測地線方程式の別の表現であり、重力場中を運動する粒子について成り立つ。定常で軸対称なカー時空の場合、計量が時刻 t と対称軸周りの角 ϕ に依らないので、エネルギーと角運動量を表す定数をそれぞれ E と L とし、作用 S の形を

$$S = -Et + L\phi + S(r) + S(\theta) \tag{7}$$

と仮定すると、ハミルトン・ヤコビ方程式は、

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 &+ \left(aE\sin\theta - \frac{L}{\sin\theta}\right)^2 \\ &+ a^2\mu^2\cos^2\theta = K\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{dS_r}{dr}\right)^2 &- \frac{1}{\Delta}\left[\left(r^2 + a^2\right)E - aL\right]^2 + \mu^2 r^2 \\ &= -K\end{aligned} \tag{9}$$

と θ 部分と r 部分の常微分方程式に分離できる。ここで新しい定数 (Carter 定数) を使って、

$$K \equiv Q + (L - aE)^2 \tag{10}$$

としてある。

カー時空での測地線方程式は、次のようになる。

$$\int_{r_n}^{r_f}\frac{d\hat{r}}{\sqrt{R}} = \int_{\theta_n}^{\theta_f}\frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\phi_f &- \phi_n = -\frac{1}{2}\int_{r_n}^{r_f}\frac{\Phi}{r\sqrt{R}}dr \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\theta_n}^{\theta_f}\frac{\left(3 + \cos^2\theta - 4\lambda\right)\cot^2\theta}{\sqrt{\Theta}}d\theta\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}t_f - t_n &= \frac{1}{2}\int_{r_n}^{r_f}\frac{T}{r^2\sqrt{R}}dr \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\theta_n}^{\theta_f}\frac{\cos^2\theta}{\sqrt{\Theta}}d\theta\end{aligned} \tag{13}$$

ここで、

$$\begin{aligned}R &= r^4 + 4r^3 + \left(q^2 + 8\lambda - 4\lambda^2\right)r^2 \\ &+ 8\lambda r + 4\lambda^2\end{aligned} \tag{14}$$

$$\Theta = 3 - q^2 + \cos^2\theta - 4(1-\lambda)^2\cot^2\theta \tag{15}$$

$$\Phi = r^3 + 4r^2 + (3 + 4\lambda)r + 4\lambda \tag{16}$$

$$T = r^4 + 4r^3 + 7r^2 + 4(1+\lambda)r + 4\lambda \tag{17}$$

で、λ はホライズンから少し外部の領域を表すパラメータで、q^2 は無次元の定数である。これらの積分は楕円型で、解析的に解くことが難しく、一般的には数値的に解かれる。そのような複雑な積分に対して Strominger らが行ったのは、matched asymptotic expansions(MAE) という解析方法である。これはホライズン近傍から遠方へ広がっていく測地線に対し

て、近傍での測地線方程式と遠方での測地線方程式を解いて、その解を 2 つの領域が重なる領域 (overlap 領域) で整合させるという方法である。近傍領域 (Near Region) では $r \ll 1$、遠方領域 (Far Region) では $r \gg \sqrt{\lambda}$、overlap 領域では $\sqrt{\lambda} \ll r \ll 1$ である。ここで、

$$\lambda = 1 - \frac{L}{2ME} \ll 1 \tag{18}$$

と定義されるパラメータである。

4 測地線方程式の新しい解法

式 (11) の動径積分を、MAE を使って解く。式 (14) は、

$$R \approx r^4 + 4r^3 + q^2r^2 + 8\lambda r + 4\lambda^2 \tag{19}$$

と近似し、ホライズン近傍領域 ($r \ll 1$) で r が 4 次と 3 次の項を無視すると、

$$R_n(r) = q^2r^2 + 8\lambda r + 4\lambda^2 \tag{20}$$

また、遠方領域では $\lambda \ll r^2$ であり、r の次数が高い項ほど支配的になるので、

$$R_f(r) = r^2\left(r^2 + 4r + q^2\right) \tag{21}$$

とさらに近似する。これで、難解な楕円積分を解析的に解ける形に変形できた。ホライズン近傍領域での積分結果と遠方での積分結果を書き下すと、

$$\begin{aligned} I_n(r) &= \int^r \frac{dr'}{\sqrt{R_n(r')}} \\ &= \frac{1}{q}\ln\left(q\sqrt{R_n(r)} + q^2r + 4\lambda\right) + C_n \\ &= \frac{1}{q}\left(\ln r + \ln 2q^2 + qC_n + \frac{4\lambda}{q^2r} + \cdots\right) \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} I_f(r) &= \int^r \frac{dr'}{\sqrt{R_f(r')}} \\ &= -\frac{1}{q}\ln\frac{1}{r^2}\left(q\sqrt{R_f(r)} + q^2r + 2r^2\right) + C_f \\ &= \frac{1}{q}\left(\ln r - \ln 2q^2 + qC_f - \frac{2r}{q^2} + \cdots\right) \end{aligned} \tag{23}$$

近傍と遠方が重なる領域で、$I_n = I_f$ を要求すれば、

$$C_f = C_n + \frac{2}{q}\ln 2q^2 \tag{24}$$

積分結果は、

$$\begin{aligned} I &= I_f(r_f) - I_n(r_n) \\ &= -\frac{1}{q}\ln\frac{\left(qD_n + q^2r_n + 4\lambda\right)\left(qD_f + 2r_f + q^2\right)}{4q^4r_f} \end{aligned} \tag{25}$$

ここで、

$$D_n = \sqrt{R_n(r_n)} = \sqrt{q^2r_n^2 + 8\lambda r_n + 4\lambda^2} \tag{26}$$

$$D_f = \frac{1}{r_f}\sqrt{R_n(r_f)} = \sqrt{r_f^2 + 4\lambda r_f + q^2} \tag{27}$$

である。$r - \phi$ 平面や $r - t$ 平面についても同じ方法で解析可能である。

5 結果

- extreme black hole 時空では、ホライズン近傍での Kerr 計量は対称性の高い形で書かれる。その対称性を用いて測地線方程式を解く際に、解析が困難な楕円積分が初等関数を用いて表せる。
- 本研究でなされた解法は様々な場面で応用が利く。(重力波波形の計算、電磁放射の伝搬に関する観測 etc⋯)

Reference

A. P. Porfyriadis, Yichen Shi, & A. Strominger 2017, Photon emission near extreme Kerr black holes, Phys. Rev. D **95**, 064009

A. P. Porfyriadis, & A. Strominger, 2014, Gravity waves from Kerr/CFT, Phys. Rev. D **90**, 044038

B. Carter 1968, Grobal structure of the Kerr Family, Phys. Rev. Vol 174, Number 5

J. Bardeen, & G. T. Horowitz 1999, Phys. Rev. D **60** 104030

J. E. McClintock, R. Narayan, L. Gou, J. Liu, R. F. Penna & J. F. Steiner, 2010, AIP Conference Proceedings 1248, 101

ランダウ & リフシッツ 1978, 場の古典論

AdS の等長沈め込みとブラックホール

松野皐 (大阪市立大学大学院 理学研究科)

Abstract

一般にブラックホールとは非常に強い重力ゆえの時空構造であると認識されている。しかしその定義は重力の強さによるものではなく時空の因果構造により規定される。定義の性質上は重力の作用が弱くてもブラックホール構造を持つ時空はありえることになる。我々は Kaluza-Klein リダクションなど統一場理論においてよく用いられる手法である等長沈め込みを AdS に行いブラックホール構造を持つ時空を得た。本発表では AdS3 においてブラックホール構造を持つ時空が現れる理由を幾何学的に理解できるように解説する。またより高次元の AdS5 においてもブラックホール構造を持つ時空が得られており少し紹介する。

1 Introduction

どの方向へ光を出しても無限の未来へ飛び去ることができないような領域があるときそのような領域の境界はイベントホライズンと呼ばれ、その時空はブラックホールと呼ばれる。定義の性質上は重力の作用が弱くてもブラックホール構造を持つ時空はありえることになる。かつて Banados らは AdS3 において等長変換群の作用による軌道空間を考えた（軌道空間とは等長変換群によって移りあう点たちを同一視した空間のこと）。AdS は極大対称空間なのでワイルテンソルはないため重力の作用は存在せず、またその軌道空間は局所的には AdS3 と同じ幾何を持つためやはり重力の作用は存在しない。ところがこの時空はブラックホール構造を持つことが示され衝撃を与えた。そこで我々は Banados らとは違った方法で AdS からブラックホール構造を持つ時空を作り出すことを試みた。Kaluza-Klein リダクションなど統一場理論においてよく用いられる手法である等長沈め込みを AdS に行いブラックホール構造を持つ時空を得た。

2 Submmersion and Orbit space

擬リーマン多様体 M に Lie 群 G が等長変換群として作用しているとする。M 上の G の軌道を同一視して得られる空間を M の G による軌道空間という。軌道空間 M/G には軌道に垂直な方向へ M の計量を射影した計量が自然に定まり、M/G も擬リーマン多様体となる。このとき、射影 $\pi:\ M \to M/G$ を（リーマン）沈め込みとよぶ。本研究では 1 次元の等長変換群による軌道空間を考え、その因果構造を調べ、ブラックホール構造を持つか否かを調べた。M のキリングベクトル場 ξ が生成する 1 パラメータ等長変換群と M に作用する 1 次元等長変換群 G_ξ は 1 対 1 に対応するため、以下では M/G_ξ を M/ξ と書くことにする。

3 Results

擬ユークリッド空間 $E^{(n-1,2)}$ を $(\mathbb{R}^{n+1}, \{t, s, x^1, \cdots, x^{n-1}\})$ に計量 $ds^2 = -(dy^1)^2 - (dy^2)^2 + (dx^1)^2 + \cdots + (dx^{n-1})^2$ を定義した空間とする。n 次元 Anti de Sitter space(AdS_n) は $E^{(n-1,2)}$ において $-(y^1)^2 - (y^2)^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(x^i)^2 = -1$ で定義される部分多様体である。$E^{(n-1,2)}$ のキリングベクトル $K_{y^k x^i} := x^i\partial_{y^k} + y^k\partial_x^i$, $L_{x^i x^j} := -x^j\partial_{x^i} + x^i\partial_{x^j}$ は AdS_n においてもキリングベクトルとなる。以下これらの表記を用いて得られた結果をまとめる。

3.1 $n = 3$ の場合

AdS_3 において、$y^1 = t, y^2 = s, x^1 = x, x^2 = y$ とおくとき、$AdS_3/K_{tx}, AdS_3/(K_{tx} + \alpha K_{sy})$ の二つの

時空がブラックホール構造を持つことが分かった。これら 2 つについては幾何的にある程度直感的な理解が可能である。このことについては口頭発表の機会に説明したい。

3.2 一般次元の場合

一般次元 n においては AdS_n/K_{tx} がブラックホール構造を持つことが分かっている。他のものもあるかもしれないが現在判明しているのはこの 1 例のみである。これについても幾何的に簡単に理解することができる。

4 Discussion

今回の研究では AdS の軌道空間を考えることでブラックホール構造を持つ時空を得た。しかし得られた時空は時間的な広がりを持った空間的無限遠を持つなど AdS の無限遠構造を引き継ぐ性質を持っている。また Einstein-Maxwell-dilaton 理論の解ではあるが Einstein 重力の解ではない。軌道空間がブラックホール構造を持つ原因は AdS の特異な無限遠構造が影響していることが観察される。そのため AdS 以外の時空からも同じような処方でブラックホール構造を得ることは少し難しいように思われる。しかし Kerr 時空などよく知られた時空が沈め込みにより得られたならば非常に興味深いと思われるため今後も研究していきたい。

Reference

M.Banados,M.Henneaux,C.Teitelboim,J.Zanelli arXiv:gr-qc/9302012

S.Holst, P.Peldan arXiv:gr-qc/9705067

HSC 銀河団カタログと Fermi γ 線観測データを用いたダークマター探査

橋本　大輝 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙の物質の主要な構成要素であるダークマターの正体を明らかにすることは現代の宇宙物理学において大きな目標の一つであり，様々な手法でその探査が行われている．ダークマター (DM) を探査する際に用いられる性質として，対消滅 (Dark Matter Annihilation (DMA)) や崩壊 (Decaying Dark Matter (DDM)) の際の γ 線の放出が挙げられる．従って，DMA，DDM は Extragalactic Gamma-ray Background (EGB) に寄与する可能性がある．観測される EGB の強度分布と理論から予測される DM からの γ 線強度から DM の性質を制限することができる．

本研究において，観測面では Fermi Gamma-ray Space Telescope (Fermi GRST) によって得られた EGB の強度分布と HSC によって得られた銀河団の天球上の分布と赤方偏移を用いる．従って，銀河団方向の EGB を視線方向の情報と結びつけることができる．理論面では，一つの銀河団のビリアル半径内からの全 γ 線強度分布を DDM, DMA のそれぞれの場合について，観測する γ 線のエネルギーと赤方偏移の関数として求める．

銀河団の質量を $10^{14}\mathrm{M}_{\odot}$，DM の質量を 10GeV と仮定し，観測で得られた赤方偏移に対応する銀河団からの信号を全て足し合わせた理論予測と，銀河団方向から飛来する EGBγ 線の光子計数を足し合わせた数値を比較することで，DMA に対してその反応断面積の上限として，$\langle\sigma v\rangle < 2.5\times10^{-25}[\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}]$ という結果を得た．これは [1] と無矛盾な結果となった．DDM については理論モデルの計算に止まった．

1 Introduction

宇宙マイクロ波背景放射などの観測により，dark matter (DM) は宇宙における物質エネルギー密度の 80%ほどを担っていることが判明している。その一方で，その正体を解明することは難航しており，未だ明らかにされていない。従って宇宙の物質の主要な構成要素である DM の正体を明らかにすることは，現代の宇宙物理学において大きな目標の一つである。これまでの観測により，DM の質量には構造形成の観点から制限がついており，ニュートリノに代表される熱いダークマター (HDM, 質量 $\sim$ 数 eV 以下) は DM の主要な成分に慣れないことが示されている．暖かいダークマター (WDM, 質量 $\sim$ 数 keV 程度) についてもパワースペクトルの点で観測の食い違いが指摘されている．したがって現在 DM の主要な成分として有力な候補は冷たいダークマター (CDM, 質量 $\sim$ 数 MeV 以上) である．

CDM はその質量から，対消滅 (Dark Matter Annihilation) や崩壊 (Decaying Dark Matter) によって γ 線を放出することが期待される．一方で宇宙には銀河系外 γ 線背景放射 (EGB) と呼ばれる，線源の判明していない γ 線放射光が観測されている．EGB に寄与する候補として考えられる天体は Blazar，Mis-aligned AGN，Star-Forming Galaxies (SFG)，ミリパルサーなどが挙がっているがいずれもまだ定量的な評価は不確かな部分がある．CDM によって DMA や DDM が生じているとすれば，CDM も EGB に寄与する候補となるから，観測から得られた EGB の強度分布から DMA の反応断面積や DDM の崩壊率に上限をつけることができる．

先行研究 [1] では，Fermi GRST によって観測された EGB の強度分布と Navarro-Frenk-White (NFW) プロファイル [2] から予測される DM の密度分布を用いて，γ 線の非等方性における角度パワースペクトルの解析から DMA の信号を評価している。この手法では天球面上の 2 次元的な情報のみを用いて評価が行われている．本研究では，観測データとして Fermi GRST による EGB の強度分布だけでなく，

HSC による銀河団カタログを用いる．HSC の銀河団カタログから得られる個々の銀河団の赤方偏移を取り入れることで，DM からの γ 線強度分布に視線方向の情報を付加し，DMA，DDM の信号の赤方偏移依存性を評価する．今までの研究ではこれらの信号を赤方偏移依存性の観点から評価したことはなく，その評価に有為性が見出せれば DM の新たな探査方法となることが期待される．宇宙論パラメータについては，物質密度パラメータΩ_m, DM 密度パラメータΩ_{DM}, 無次元のハッブル定数 h についてそれぞれ, $\Omega_m = 0.277, \Omega_{DM} = 0.23, h = 0.72$ とした．

第 2 章で理論モデルを扱い，第 3 章で観測とその解析方法について示し，第 4 章で結果をまとめ，第 5 章で future work について触れ，第 6 章で結論を述べる．

2 Models

DMA，DDM のそれぞれについて一つの銀河団から受け取る全個数強度の赤方偏移依存性を評価する．仮定として，

・銀河団の密度分布は NFWプロファイルに従う

・銀河団の質量 M は $M = 10^{14}\mathrm{M}_\odot$で固定する

とする．

また扱う対消滅と崩壊の具体的なモデルとして簡単に，

・対消滅過程として, 2 つの DM が対消滅して 2 つの光子が放出される過程

・崩壊過程として, 1 つの DM が崩壊して 2 つの光子が放出される過程

を取り扱う．

まず各過程における γ 線個数強度を与える式を示す．この強度は，銀河団中の単位時間あたりの γ 線の生成数と光度距離による減衰，optical depth による減衰の積で表される．これは DMA，DDA の γ 線個数強度を I_{ann}, I_{dec} とすると，観測される γ 線のエネルギー E_{obs} と銀河団の赤方偏移 z の関数として，以下のように定式化される．

$$I_{ann}(E_{obs}, z) = \frac{\langle\sigma v\rangle}{4\pi}\int\left(\frac{\rho^{NFW}}{m_{DM}}\frac{\Omega_{DM}}{\Omega_m}\right)^2 dV \times \frac{1}{d_L^2(z)}\exp(-\tau(E_{obs}, z)) \quad (1)$$

$$I_{dec}(E_{obs}, z) = \frac{P}{2\pi}\int\frac{\rho^{NFW}}{m_{DM}}\frac{\Omega_{DM}}{\Omega_m}dV \times \frac{1}{d_L^2(z)}\exp(-\tau(E_{obs}, z)) \quad (2)$$

ここで $d_L(z)$ は光度距離，τ は optical depth, $\langle\sigma v\rangle, P$ はそれぞれ DMA における反応断面積と DM の速度の積の平均，及び DDM における崩壊率を表す．以下にそれぞれの因子の定量的な評価を与える．

2.1 NFW profile

ハロー内部の物質密度関数としてシミュレーションから得られた NFW プロファイルを仮定する．NFW プロファイルによればハロー中の物質密度分布はハロー中心の距離 r の関数として，

$$\rho^{NFW}(r) = \frac{\rho_s}{\left(\frac{c}{r_{\rm vir}}r\right)\left(1+\frac{c}{r_{\rm vir}}r\right)^2} \quad (3)$$

で与えられる．$r_{\rm vir}$ はビリアル半径である．c, ρ_s はパラメータで，特に c は concentration と呼ばれる，ハロー内での物質の中心集中度を表すパラメータである．ビリアル半径まで物質が分布しているとすると，ビリアル半径内の質量はハローの質量に等しいから ρ_s は,

$$\rho_s = \frac{Mc^3}{4\pi r_{\rm vir}^3}\left(\log(1+c) - \frac{c}{1+c}\right)^{-1} \quad (4)$$

で与えられる．M は銀河団の質量である．また，c は,

$$\log(c(M,z)) = a(z)\log\left(\frac{M_{\rm vir}}{h^{-1}\mathrm{M}_\odot}\right) + b(z) \quad (5)$$

$$a(z) = 0.029z - 0.097$$

$$b(z) = -\frac{110.001}{z+16.885} + \frac{2469.720}{(z+16.885)^2}$$

を用いる [3]. ビリアル半径 r_{vir} は,

$$r_{\rm vir} = \left(\frac{M}{\frac{4}{3}\pi\Delta_{\rm vir}\rho_{c,z}}\right)^{1/3} \quad (6)$$

で定義する．$\rho_{c,z}$ はある z での臨界物質密度である．$\Delta_{\rm vir}$ は，$\rho_{c,z}$ とハロー内部の平均密度を結びつける量である．近似式として，

$$\Delta_{\rm vir} = 18\pi^2 + 82d - 39d^2 \quad (7)$$

$$d = \frac{\Omega_m(1+z)^3}{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda} - 1$$

を用いる [4]．従ってこれらのモデルを使うことで，銀河団の質量と赤方偏移が決まればプロファイルが一意に決まる．ビリアル半径内での体積分 $\int {\rho^{NFW}}^2$ は，式 (3)〜(7) より，

$$\int {\rho^{NFW}}^2 dV = \frac{M}{9}\rho_{c,z=0}\Delta_{\rm vir}(1+z)^3\left(1-\frac{1}{(1+c)^3}\right) \times c^3\left(\log(1+c)-\frac{c}{1+c}\right)^{-2} \quad (8)$$

と計算される．また，体積分 $\int \rho^{NFW} dV = M$ である．以上より式 (1), (2) の銀河団で生成される γ 線の個数を評価できる．

2.2 optical depth

semi-analitic な手法により得られた optical depth の赤方偏移依存性を図 1 に示す [5]．γ 線の optical depth は γ 線の光子-光子散乱や電子-陽電子対生成による γ 線強度の散逸の度合いを表す．よりエネルギーの高い γ 線ほどより低いエネルギーの光子と電子-陽電子対生成を生じるのでよりエネルギーの減衰が大きい．

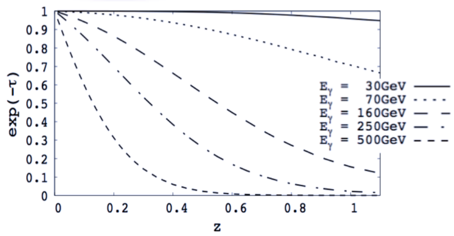

図 1.optical depth のエネルギーと赤方偏移依存性．縦軸は optical depth による減衰，横軸は赤方偏移を表す．

3 Observations and Methods

解析に用いたデータと解析方法について述べる．

・Fermi GRST

Pass 8(観測期間 378 週間) のデータ [6] を用いた．天球上の座標とそれに対応する γ 線の個数強度を，500MeV から 500GeV まで 24 分割されたエネルギービンごとに与える．角度分解能は 0.1°であり，それに対応して γ 線の強度マップは 1pixel が $0.1^2({\rm deg}^2)$ で与えられる．

・HSC

銀河団を特定するためのアルゴリズム，CAMIRA から得られた銀河団カタログ [7] を用いた．4948 個の銀河団が含まれており，天球上の座標と赤方偏移を与える．全銀河団の赤方偏移範囲は $0.1 \leq z \leq 1.1$ である．

この 2 つの観測データを組み合わせることにより，銀河団方向から届く γ 線強度を探査することが可能となる．$10^{14}{\rm M}_\odot$ の質量の銀河団におけるビリアル半径に対応する視直径は，$z = 0.1$ の時でおよそ 0.09 °（式 (6), (7) より）である．したがって，Fermi GRST の分解能を考慮して，銀河団の位置に対応する 1pixel のみを銀河団からの γ 線が含まれている領域と見なして解析を行った．

4 Result

まず，理論モデルから計算された，1 つの銀河団からの γ 線個数強度の赤方偏移依存性を図 2，3 に示す．

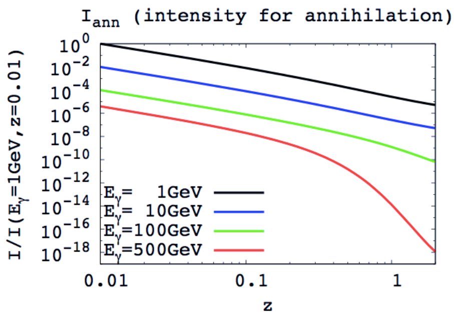

図 2. DMA における γ 線強度の赤方偏移依存性．縦軸は $E_\gamma = 1{\rm GeV}, z = 0.01$ での強度を基準として際の相対強度である．横軸は赤方偏移を表す．それぞれ黒色が $E_\gamma = 1$GeV, 青色が $E_\gamma = 10$GeV, 緑色が $E_\gamma = 100$GeV, 赤色が $E_\gamma = 500$GeV の時の相対強度である．

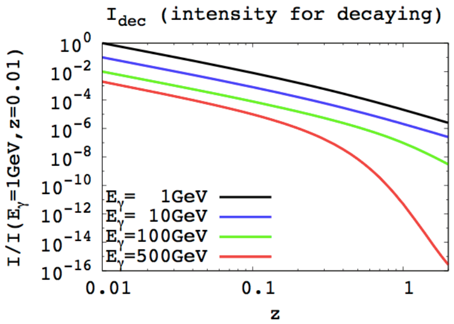

図 3. DDM における γ 線強度の赤方偏移依存性．縦軸は $E_\gamma = 1\text{GeV}, z = 0.01$ での強度を基準として際の相対強度である．横軸は赤方偏移を表す．それぞれ黒色が $E_\gamma = 1\text{GeV}$, 青色が $E_\gamma = 10\text{GeV}$, 緑色が $E_\gamma = 100\text{GeV}$, 赤色が $E_\gamma = 500\text{GeV}$ の時の相対強度である．

まず DMA，DDM に共通して見られる γ 線強度の特徴は，赤方偏移の増加に対して，全体として光度距離の 2 乗に比例して減少する．高エネルギーになるにつれて optical depth の寄与が大きくなり，急激に減少することが示された．また DMA と DDM の違いについては，γ 線強度について，DM の数密度に対する依存性の違いから DMA の方が DDM よりも同赤方偏移においてエネルギーの増加に対してより減少することが見て取れる．

次に理論モデルと観測データの比較について述べる．

DM の質量を 10GeV として，DMA の場合の理論モデルから計算される γ 線個数強度と観測から計数された γ 線個数強度を比較することで $\langle\sigma v\rangle$ について

$$\langle\sigma v\rangle < 2.5 \times 10^{-25}[\text{cm}^3/\text{s}] \tag{9}$$

という上限をつけることができた．

5 Future Work

DM の質量を変化させて同様の解析を行うことで数 GeV から数十 GeV の質量の DM の反応断面積における上限の質量依存性を評価することができる．今回の手法は DDM の場合でも同様であるから，崩壊率における上限の質量依存性も評価することができる．

また HSC によって得られた各銀河団の赤方偏移情報を用いることでこれまでの研究では扱うことのできなかった，信号強度の赤方偏移依存性を探査することができ，DM のモデルを識別することができる．従って，今後の課題は各銀河の赤方偏移を用いて EGB の赤方偏移依存性の有無を探査することが挙げられる．

6 Conclusion

まず理論モデルについては，DMA，DDM のそれぞれの場合について，銀河団からの γ 線個数強度の赤方偏移依存性を評価した．赤方偏移が小さくなるにつれ，concentration が大きくなることから γ 線強度の赤方偏移依存性に concentration が顕に寄与し，銀河団の密度プロファイルの赤方偏移進化を見出せるのではないかと期待されたが，実際は光度距離と optical depth の寄与が主要で銀河団密度プロファイルの情報を得ることは難しいと言える．

また 10GeV の質量の DM に対して，理論モデルから計算される γ 線個数強度と観測データから得られた γ 線個数強度を比較することで反応断面積に対して $\langle\sigma v\rangle < 2.5 \times 10^{-25}[\text{cm}^3/\text{s}]$ という上限をつけた．この上限は先行研究 [1] の上限（$\langle\sigma v\rangle \lesssim 10^{-25}[\text{cm}^3/\text{s}]$）と同程度である．

Reference

[1] Ando, S., & Komatsu, E. 2013, Phys. Rev. D, 87, 123539

[2] Navarro, J. F., Frenk, C. S., & White, S. D. M. 1997, ApJ, 490, 493

[3] Muñoz Cuartas, J. C., Macciò, A., Gottlöber, S., & Dutton, A. 2010, Cosmic Radiation Fields: Sources in the early Universe (CRF 2010), 16

[4] Bryan, G. L., & Norman, M. L. 1998, ApJ, 495, 80

[5] Gilmore, R. C., Somerville, R. S., Primack, J. R., & Domínguez, A. 2012, MNRAS, 422, 3189

[6] Atwood, W., Albert, A., Baldini, L., et al. 2013, arXiv:1303.3514

[7] Oguri, M., Lin, Y.-T., Lin, S.-C., et al. 2017, arXiv:1701.00818

銀河団のガンマ線観測による原始ブラックホールの密度パラメータへの制限

榊原 日菜子 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

原始ブラックホール (PBH) は初期宇宙で高密度領域が重力崩壊して形成されるブラックホールである．PBH の存在を示す観測的証拠は未だないが，PBH の存在量を制限することは，初期宇宙モデルへの制限や，PBH がダークマターかどうかの検証など，様々な宇宙論的問題の解決への鍵となることが期待される．
PBH はホーキング放射によりガンマ線源となりうることが知られている．本研究では，高密度領域であるため PBH が豊富に存在すると予想される銀河団に着目する．銀河団のダークマターハローに存在する PBH の集団はガンマ線背景放射に非等方成分を作る．我々はこの非等方成分を統計的に評価するために角度パワースペクトルを理論的に計算し，Fermi-LAT の観測データと比較することで PBH の存在量へ制限を課した．その結果，PBH が形成された時刻での宇宙の密度に対する PBH の密度の割合 β' に関して，PBH の形成時の質量が 4×10^{14} g の時に $\beta' \leq 4.46 \times 10^{-26}$ という制限を得た．

1 Introduction

原始ブラックホール (PBH) は初期宇宙において高密度領域が重力崩壊することで形成されるブラックホールである．PBH の存在を示す観測的証拠は未だないが，PBH の存在量を制限することは，初期宇宙モデルへの制限や，PBH がダークマターかどうかの検証など，宇宙論的問題の解決への鍵となることが期待される．

PBH は放射によってエネルギーを失い，最終的には完全に蒸発する．PBH の放射は二種類あり，一つ目 (primary 成分) はホーキング放射と呼ばれる，PBH から直接放出される熱的放射である．二つ目 (secondary 成分) は PBH からホーキング放射により放出されたクォークとグルーオンから形成される不安定なハドロンが崩壊して出る放射である．これらの放射によって PBH はガンマ線を放出するため，ガンマ線源となりうる．

先行研究 (Carr et al. 2010) では，ガンマ線背景放射のフラックスを計算して，PBH の形成時 $t_{\rm i}$ における宇宙のエネルギー密度に対して PBH の密度が占める割合 $\beta \equiv \rho_{\rm PBH}(t_{\rm i})/\rho(t_{\rm i})$ を制限している．これに対し，本研究では PBH が豊富に存在すると予想される銀河団に着目し，銀河団のダークマターハローに存在する PBH から飛来するガンマ線の非等方性を評価することで，PBH の存在量をより強く制限できるかどうか検討した．本集録では得られた結果の報告と今後の課題について議論する．

2 Methods

2.1 PBH の性質

本節では PBH の温度や蒸発のタイムスケールなどの性質について述べる．PBH の温度と質量との間には

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B} \sim 10^{-7} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1} \,[\mathrm{K}] \qquad (1)$$

という関係がある (Hawking 1974)．ここで $\hbar$ は換算プランク定数，c は光速，G は万有引力定数，k_B はボルツマン定数である．PBH は放射によってエネルギーを失うため，PBH の質量は時間とともに減少する．PBH の質量の減少の割合は $dM/dt \propto M^{-2}$ であるため，質量の時間依存性は

$$M(t) \approx \sqrt[3]{M_i^3 - 1.60 \times 10^{26} f(M) t}\,[\mathrm{g}] \qquad (2)$$

と表される．ここで M_i は PBH の形成時の質量であり，$f(M)$ は質量 M の PBH からホーキング放射に

より放出される各粒子の寄与を表す関数である．質量の大きい PBH は温度が低く，光子やニュートリノなどの質量がゼロの粒子のみを放射するので $f(M)$ は小さくなる．PBH の質量が小さくなると温度が高くなり，質量を持つ粒子も放出し始めるため，$f(M)$ は大きくなる．式 (2) から，蒸発が完了する時間は

$$\tau \approx 4.07 \times 10^{-28} \left(\frac{f(M)}{15.35}\right)^{-1} M_i^3 \, [\mathrm{s}] \tag{3}$$

となる．式 (2) より，PBH の質量は蒸発のタイムスケール τ の近傍で急激に減少することが分かる．また，蒸発のタイムスケールが宇宙年齢となる ($\tau \approx 13.8\,\mathrm{Gyr}$)PBH の初期質量は，式 (3) から $M_i \approx 5 \times 10^{14}\,\mathrm{g}$ となることが分かる．この質量よりも初期質量が小さい PBH は現在完全に蒸発しており，一方で初期質量が大きい PBH は現在も存在している．

次に PBH の放射について簡単に説明する．本研究では簡単のためホーキング放射を黒体放射と仮定し，放射の secondary 成分は考慮しない．1 個の PBH からホーキング放射によって放出されるガンマ線のスペクトルは，プランク分布から

$$\frac{d^2N}{dEdt} = \frac{E^2}{\pi^2 \hbar^3 c^2} \frac{1}{e^{E/k_B T} - 1} 4\pi R^2 \, [\mathrm{GeV^{-1}\,s^{-1}}] \tag{4}$$

と表される．ここで $R = 2GM/c^2$ はシュヴァルツシルト半径である．PBH の温度は質量に依存しているため，放射のスペクトルは質量から一意に決まる．

PBH 形成時 t_i での宇宙の密度 $\rho(t_i)$ に対する PBH の密度 ρ_{PBH} の比は

$$\begin{aligned} \beta &\equiv \rho_{\mathrm{PBH}}(t_{\mathrm{i}})/\rho(t_{\mathrm{i}}) \\ &\approx 7.98 \times 10^{-29} \gamma^{-1/2} \left(\frac{g_{*i}}{106.75}\right)^{1/4} \\ &\quad \times \left(\frac{M_i}{M_\odot}\right)^{3/2} \left(\frac{n_{\mathrm{PBH}}(t_0)}{1\mathrm{Gpc}^{-3}}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

と表される．γ は PBH 形成時のホライズン内の質量に対する 1 個の PBH の質量の割合，g_{*i} は PBH の形成時での相対的な自由度，$n_{\mathrm{PBH}}(t_0)$ は現在の PBH の数密度である．本研究では，β と γ，g_{*i} を組み合わせたパラメータ

$$\beta' \equiv \gamma^{1/2} \left(\frac{g_{*i}}{106.75}\right)^{-1/4} \beta(M_i) \tag{6}$$

を制限する．

2.2 角度パワースペクトル

本節では，ガンマ線の非等方成分の評価に用いた角度パワースペクトルについて説明する．銀河団のダークマターハローに含まれる PBH から放射されるガンマ線の強度は

$$I(E) = \int d\chi W((1{+}z)E, \chi)\, \delta \, [\mathrm{GeV^{-1}\,cm^{-2}\,s^{-1}\,sr^{-1}}] \tag{7}$$

と表される．ここで z は赤方偏移，overdensity$\delta = (\rho - \bar{\rho})/\bar{\rho}$ は宇宙の平均密度 $\bar{\rho}$ に対してダークマターハローの密度 ρ がどれだけ大きいかを表す．χ は共動距離であり，ハッブルパラメータ $H(z)$ とは $d\chi/dz = c/H(z)$ の関係で結びついている．また，

$$W(E, z) = \frac{1}{4\pi} n_{\mathrm{PBH}}(t) \frac{d^2N}{dEdt} \tag{8}$$

はダークマターハローに含まれる全ての PBH が単位体積，単位時間，単位エネルギー，単位立体角当たりに放射するガンマ線の個数である．さらに，$n_{\mathrm{PBH}}(t) = n_{\mathrm{PBH}}(t_0)(1+z)^3$ は時刻 t での PBH の数密度であり，$n_{\mathrm{PBH}}(t_0) = 1.25 \times 10^{19} (M_i/M_\odot)^{-3/2} \beta'$ は現在での PBH の数密度である．

銀河団のダークマターハローの密度分布は NFW プロファイル

$$\rho(r) = \frac{\rho_s}{(r/r_s)(r/r_s + 1)^2} \tag{9}$$

を仮定する．ここで $r_s = r_{\mathrm{vir}}/c_{\mathrm{vir}}$ は密度プロファイルの形を決める特徴的なスケールである．r_{vir} はダークマターハローのビリアル半径であり，

$$M_{\mathrm{vir}} = \frac{4\pi}{3} r_{\mathrm{vir}}^3 \Delta_{\mathrm{vir}}(z) \rho_c(z) \tag{10}$$

によりハローのビリアル質量 M_{vir} と関係づけられる．ここで ρ_c は宇宙の臨界密度であり，$\Delta_{\mathrm{vir}}(z) = 18\pi^2 + 82d - 39d^2$, $d = [\Omega_m(1+z)^3/(\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda)] - 1$ である (Bryan & Norman 1998)．Ω_m, Ω_Λ はそれぞれ物質と宇宙定数の密度パラメータである．c_{vir} は concentration parameter と呼ばれ，ハロー中心への密度の集中の度合いを表す．このパラメータはダークマターハローのビリアル質量と赤方偏移に依存する．本研究では Duffy et al.(2008) のモデルを採用した．また，特徴的な密度 ρ_s は

$$\rho_s = \frac{M_{\mathrm{vir}}}{4\pi r_s^3} \left[\ln(1 + c_{\mathrm{vir}}) - \frac{c_{\mathrm{vir}}}{1 + c_{\mathrm{vir}}}\right]^{-1} \tag{11}$$

と表される．

式 (7) の強度の角度パワースペクトルは

$$C_l(E) = \int \frac{d\chi}{\chi^2} W^2((1+z)E, z) P_\delta \left(k = \frac{l}{\chi}, z\right) \tag{12}$$

と表される．k は波数，l は天球面上の波数である．式 (12) は天球面上で角度が $\theta \sim 180°/l$ 離れた位置の相関を意味する．P_δ はダークマターハローの δ のパワースペクトルであり，

$$P_\delta(k,z) = \frac{1}{\bar{\rho}^2} \int dM_{\rm vir}\, n(M_{\rm vir}, z) M_{\rm vir}^2 |\tilde{u}(k)|^2 \tag{13}$$

と表される．$n(M_{\rm vir}, z)$ はハローの質量関数であり，本研究では楕円崩壊モデルを仮定して Sheth et al.(2001) の近似式を使用した．式 (13) はハローの内部の overdensity の相関 (1-halo term と呼ばれる) を意味する．簡単のため，本研究では異なるハロー間の overdensity の相関を表すパワースペクトル (2-halo term と呼ばれる) は考慮しない．ここで

$$\tilde{u}(k) = \frac{1}{M_{\rm vir}} \int_0^{r_{\rm vir}} \rho(r) \frac{\sin(kr)}{kr} 4\pi r^2 dr \tag{14}$$

は密度のプロファイルを表す関数のフーリエ変換である．本研究ではパワースペクトルの観測値が式 (12) のパワースペクトルの上限値となるように β' に制限を課す．

3 Results and Discussion

本研究では PBH の形成時の質量が 2×10^{14} g，3×10^{14} g，4×10^{14} g の場合について，$\beta' = 10^{-27}$ として式 (12) からガンマ線のエネルギーの範囲が $5.0 \le E \le 10.4$ [GeV] の角度パワースペクトルを計算した．各質量の場合での蒸発のタイムスケール τ と，それに対応する赤方偏移を表 1 に示す．

表 1: 計算に使用した PBH の初期質量と，蒸発のタイムスケール τ，それに対応する赤方偏移．

質量 (g)	τ(s)	赤方偏移
2×10^{14}	2.63×10^{16}	5.54
3×10^{14}	8.87×10^{16}	1.91
4×10^{14}	2.10×10^{16}	0.64

PBH の形成時の質量が 4×10^{14} g の場合について，角度パワースペクトルの計算結果を図 1 に示す．図 1 では，赤方偏移 $z \sim 0.6$ に存在するダークマターハローのビリアル半径 $r_{\rm vir}$ に対応する $l \sim 2 \times 10^3$ においてパワースペクトルが減少し始めている．このパワースペクトルの減少は，l が増加すると見込む角度が小さくなるため，ダークマターハローの外縁部の密度の低い領域の相関の影響が大きくなるためであると考えられる．

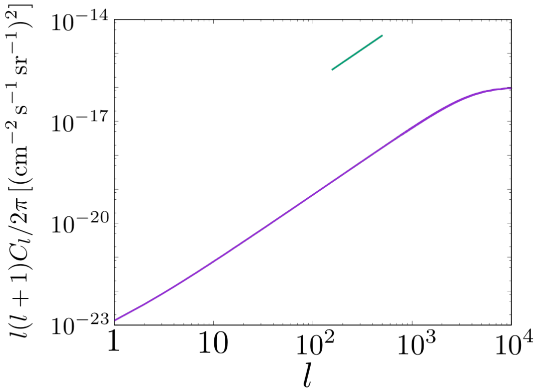

図 1: PBH の初期質量が 4×10^{14} g，$\beta' = 10^{-27}$ の場合の，PBH から放射されるガンマ線の強度の角度パワースペクトル C_l．縦軸は $l(l+1)C_l/2\pi$，横軸は l である．図中の緑線は Fermi-LAT の観測値を示す．

ガンマ線の角度パワースペクトルは Fermi-LAT(Ackermann et al. 2012) の観測により得られている．それによれば，$155 \le l \le 504$ の範囲において，エネルギーが 5.0 から 10.4GeV のガンマ線の角度パワースペクトルの観測値は

$$C_l = (8.45 \pm 2.46) \times 10^{-20} \tag{15}$$

であり，図 1 においてこれを緑線で示した．我々の理論モデルでは，PBH の初期質量が 4×10^{14} g，$\beta' = 10^{-27}$ の場合，$l = 155$ において

$$C_l = 4.25 \times 10^{-23} \left(\frac{\beta'}{10^{-27}}\right)^2 \tag{16}$$

という結果が得られた．したがって β' の値は

$$\beta' \le (4.46^{+0.61}_{-0.71}) \times 10^{-26} \tag{17}$$

と制限される．各初期質量に対しての β' の制限を図 2 に示す．

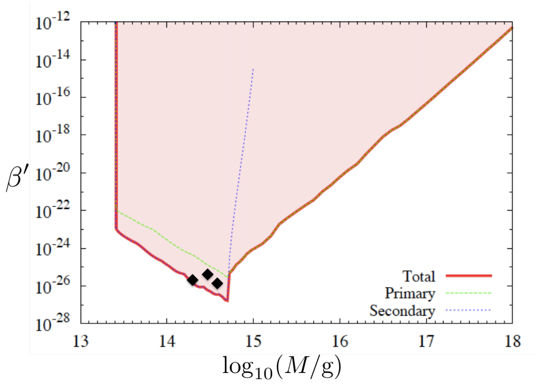

図 2: 先行研究 (Carr et al. 2010) による PBH の存在量への制限と，本研究で得られた制限．グラフの緑の点線は primary 成分のみ，青の点線は secondary 成分のみを用いた制限であり，赤線は二種類の放射を考慮した制限である．黒点が本研究で得られた結果である．縦軸は β'，横軸は PBH の形成時の質量である．

先行研究 (Carr et al. 2010) では，初期質量が 10^{14} g の PBH の存在量を

$$\beta' \leq 5.86 \times 10^{-27} \tag{18}$$

と制限している．本研究では先行研究に対して約 1 桁大きい上限値が得られた．しかし，蒸発によって PBH の質量が小さくなると放射の secondary 成分が優勢になるため，今後 secondary 成分を計算することでさらに制限を強めることができる可能性がある．また，本研究では overdensity のパワースペクトルの 2-halo term を無視したが，$l = 155$ に対応する角度は約 1° であり，銀河団の典型的な視直径 (数 arcmin) に対して大きいため，2-halo term を考慮することでより厳しい制限が得られる可能性がある．

4 Conclusion

先行研究 (Carr et al. 2010) はガンマ線背景放射を用いて PBH の存在量 β' に制限を付けた．それに対し，本研究では PBH が豊富に存在すると予想される銀河団のダークマターハローに着目した．銀河団のダークマターハローに含まれる PBH から放射されるガンマ線の非等方成分を見積もるために角度パワースペクトルを用いて理論的に計算することで PBH の存在量に制限を課した．その結果，PBH の形成時の質量が 4×10^{14} g のときに $\beta' \leq (4.46^{+0.61}_{-0.71}) \times 10^{-26}$ という結果が得られた．

Acknowledgement

本研究を行うにあたり，研究の指導をしてくださった教授の皆様，アドバイスをくださったり議論の場を設けてくださった同研究室の方々に心より感謝いたします．

Reference

B.J.Carr, K.Kohri, Y.Sendouda, & J.Yokoyama 2013, Phys. Rev. D81, 104019

S.W.Hawking 1974, Nature 248,30

G.L.Bryan & M.L.Norman 1998, Astrophys. J. 495,80

A. R. Duffy, J. Schaye, S. T. Kay, & C. Dalla Vecchia 2008, Mon. Not. R. Astron. Soc. 390, L64

R.K.Sheth, H.J.Mo, & G.Tormen 2001, Mon. Not. R. Astron. Soc. 323, 1

M.Ackermann et al. (Fermi LAT collaboration) 2012, Phys. Rev. D85, 083007

アクシオン的カーバトンモデルによる原始ブラックホール生成

安藤 健太 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

アクシオン的カーバトンモデルでは、小スケールに大きな曲率ゆらぎができる。そこから生成される原始ブラックホールの質量スペクトルを求め、LIGO イベントを説明し得ることを示した。また、原始ブラックホール生成に伴って発生する重力波を数値的に計算し、PTA の観測と無矛盾であることを確かめた。

1 Introduction

2016 年に重力波の初の直接検出が LIGO により報告された。このイベントは太陽質量 $M_\odot \simeq 2\times 10^{33}$ g の 30 倍程度のブラックホール (BH) 連星の合体であり、さらにその後も同様のイベントが確認された。これらは通常の星の進化の果てにできる BH としてはやや重く、正体が原始ブラックホール (Primordial Black Hole: PBH) であることが有力な可能性になっている。PBH とは、初期の宇宙で密度ゆらぎの大きい領域が重力でつぶれてできる BH である。

CMB の観測により、大スケールの初期ゆらぎは精度よく測定されているが、小スケールゆらぎについては観測的に理解が進んでいない。本研究では、小スケールに大きなゆらぎが生じ、PBH 生成につながるモデルとして、アクシオン的カーバトンモデル (M. Kawasaki et al. 2013) を調べ、LIGO イベントを説明し得るか検証した。カーバトンとは、インフラトンに変わって曲率ゆらぎを生み出す場のことを指す。

また、PBH ができるような大きなゆらぎがあると、摂動の 2 次の効果で重力波が発生する。ちょうど LIGO イベントの質量と関連した周波数領域には、Pulsar Timing Array (PTA) の観測により重力波の強さに厳しい制限が課されている。この観測事実とモデルの整合性も調べる。

2 Axion-like curvaton model

2.1 Potential

アクシオン的カーバトンモデルは、小スケールで大きいゆらぎ（ブルーなゆらぎ）が生成されるモデルである。このモデルは SUSY の枠組みで作られ、その superpotential は、

$$W = hS(\Phi\bar{\Phi} - f^2) \tag{1}$$

で与えられる。ここで、$\Phi, \bar{\Phi}, S$ は chiral superfield、f はあるエネルギースケール、h は無次元の結合定数である。これより、global SUSY でのスカラーポテンシャルは、

$$V = h^2|\Phi\bar{\Phi} - f^2|^2 + h^2|S|^2(|\Phi|^2 + |\bar{\Phi}|^2) \tag{2}$$

となる。ただし、superfield のスカラー成分を同じ記号で表した。

このポテンシャルには flat direction

$$\Phi\bar{\Phi} = f^2, \quad S = 0 \tag{3}$$

があり、場の値は常にこの条件を満たしているとする。場の初期値として、一般性を失わずに $|\Phi| \gg |\bar{\Phi}|$ と取れ、$\bar{\Phi}$ のダイナミクスを無視できる。複素スカラー場 Φ を動径方向 φ と位相方向 σ に分け、

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi \exp\left(i\frac{\sigma}{f}\right) \tag{4}$$

と書く。σ がこのモデルでのカーバトンである。

Supergravity の効果を加えると、Hubble-induced mass term

$$V_\varphi = \frac{1}{2}cH^2\varphi^2 \tag{5}$$

が flat direction を持ち上げるので、φ は $\varphi_{\rm min} \simeq f$ まで転がる。ここで、c はオーダー 1 の定数である。後で見るように、φ がインフレーション中に遠くから転がってくることが、ブルーなゆらぎにつながる。

このモデルには global $U(1)$ 対称性があり、$\Phi, \bar{\Phi},$

S のチャージはそれぞれ $+1$, -1, 0 である。ある非摂動効果で $U(1)$ 対称性が破れ、低エネルギーの宇宙では σ はアクシオンのように次のポテンシャルを持つとする。

$$V_\sigma = \Lambda^4\left[1-\cos\left(\frac{\sigma}{f}\right)\right] \simeq \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 \tag{6}$$

ここで、カーバトンの質量は $m_\sigma = \Lambda^2/f$ である。$U(1)$ 対称性が破れた時の misalignment angle を $\theta = \sigma_i/f$ とする。

2.2 Dynamics

カーバトンのダイナミクスは次のようになる。

まず、Hubble parameter がカーバトンの質量 m_σ と同程度になると、カーバトンは振動を始める。このときのカーバトンは matter として振る舞う。よって、再加熱後の radiation とのエネルギー密度の比 r は、カーバトンが崩壊するまでスケールファクターに比例して増える。

$$r = \frac{\rho_\sigma}{\rho_r} \propto a \tag{7}$$

そして、カーバトンの崩壊率 Γ_σ が Hubble parameter と同程度になると、カーバトンは崩壊して radiation になる。カーバトンの相互作用はアクシオンのように f で抑えられ、崩壊率は、

$$\Gamma_\sigma = \frac{\kappa^2}{16\pi}\frac{m_\sigma^3}{f^2} \tag{8}$$

のようになる。ここで、κ は結合定数である。これより、崩壊温度は、

$$T_{\rm dec} = \left(\frac{90}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{4}} g_*^{-\frac{1}{4}}(\Gamma_\sigma M_P)^{\frac{1}{2}} = \frac{90^{\frac{1}{4}}}{4\pi}g_*^{-\frac{1}{4}}\kappa\frac{M_P^{\frac{1}{2}}m_\sigma^{\frac{3}{2}}}{f} \tag{9}$$

となる。ここで、$M_P = 1/\sqrt{8\pi G} \simeq 2.44\times10^{18}$ GeV は換算プランク質量である。

2.3 Curvature perturbation

このモデルでは、大スケールのゆらぎには主にインフラトンが寄与し、CMB のスペクトルを再現する一方で、小スケールゆらぎはカーバトンが担い、PBH が生成されるほどの大きなゆらぎを作る。

インフレーション中にできるカーバトンの密度ゆらぎ（等曲率ゆらぎ）$S_{\rm curv} \equiv \frac{\delta\rho_\sigma}{\rho_\sigma} \simeq \frac{2\delta\sigma}{\sigma} = \frac{2\delta\theta}{\theta}$ のパワースペクトルは、

$$\mathcal{P}_{S,{\rm curv}}^{1/2}(k) = \frac{2\mathcal{P}_{\delta\theta}^{1/2}(k)}{\theta} = 2\cdot\frac{H_{\rm inf}}{2\pi\varphi(k)\theta} \tag{10}$$

と表される。ここで、$\varphi(k)$ はモード k のゆらぎがホライズンから出たときの φ の値を表す。これより、カーバトン由来の曲率ゆらぎは、

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\zeta,{\rm curv}}(k) &= \left(\frac{r_D}{4+3r_D}\right)^2\mathcal{P}_{S,{\rm curv}} \\ &= \left(\frac{2r_D}{4+3r_D}\right)^2\left(\frac{H_{\rm inf}}{2\pi\varphi(k)\theta}\right)^2 \end{aligned}\tag{11}$$

と計算できる (D. H. Lyth & D. Wands 2002)。ここで、r_D はカーバトンが崩壊するときの r の値である。φ が $\varphi_{\rm min} \simeq f$ に達したときにホライズンから出て行くスケールを k_* と表すと、それ以降のパワースペクトルは一定なので、

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\zeta,{\rm curv}}(k) &= \mathcal{P}_{\zeta,{\rm curv}}(k_*) \\ &\simeq \left(\frac{2r_D}{4+3r_D}\right)^2\left(\frac{H_{\rm inf}}{2\pi f\theta}\right)^2 \quad {\rm for} \quad k > k_* \end{aligned}\tag{12}$$

となる。一方、カーバトン由来の tilt n_σ は次のように定義される。

$$\mathcal{P}_{\zeta,{\rm curv}}(k) = \mathcal{P}_{\zeta,{\rm curv}}(k_*)\left(\frac{k}{k_*}\right)^{n_\sigma-1} \quad {\rm for} \quad k < k_* \tag{13}$$

φ の運動方程式を解くことにより、n_σ は式 (5) の c を用いて、

$$n_\sigma - 1 = 3 - 3\sqrt{1-\frac{4}{9}c} \tag{14}$$

と表される。例えば、$c = 5/4$ のとき $n_\sigma = 2$ であり、Hubble induced mass term の効果で、ブルーなスペクトルが実現されることが分かる。

2.4 Non-Gaussianity

カーバトンモデルの特徴の一つに、non-Gaussianity を生み出しやすいことがある。こ

のモデルでは 2 次の non-Gaussianity ができ、そのパラメタ $f_{\rm NL}$ は次のように表せる (M. Kawasaki et al. 2011)。

$$f_{\rm NL} = \frac{5}{12}\left(-3 + \frac{4}{r_D} + \frac{8}{4+3r_D}\right) \tag{15}$$

3 PBH formation

放射優勢期の宇宙で密度ゆらぎの大きい領域がホライズンの中に入るとき、Hubble patch での平均の密度ゆらぎがある値 δ_c を超えていると重力崩壊してブラックホールができる。δ_c の値として、解析的な評価による $\delta_c = 1/3$ を用いる。PBH の質量は生成時のホライズン内の質量に比例する。

$$\begin{aligned} M &= \gamma \frac{4\pi}{3}\rho_r H^{-3} \\ &\simeq 6\times 10^{35}\,{\rm g}\left(\frac{\gamma}{0.2}\right)\left(\frac{g_*}{10.75}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{T}{10^{-2}\,{\rm GeV}}\right)^{-2} \\ &\simeq 8\times 10^{35}\,{\rm g}\left(\frac{\gamma}{0.2}\right)\left(\frac{g_*}{10.75}\right)^{-\frac{1}{6}}\left(\frac{k}{10^{5}\,{\rm Mpc}^{-1}}\right)^{-2} \end{aligned} \tag{16}$$

比例定数には解析的に見積もられている値 $\gamma \simeq 3^{-3/2} \simeq 0.2$ を用いる (B. J. Carr 1975)。k は PBH 生成時にホライズンに入るスケールである。

生成時の PBH のエネルギーの割合 β は、Gaussian の密度ゆらぎを仮定すると、

$$\begin{aligned} \beta(M) &= \int_{\delta_c} d\delta \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle\delta_{\rm cg}^2(M)\rangle}} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\langle\delta_{\rm cg}^2(M)\rangle}\right) \\ &\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{\langle\delta_{\rm cg}^2(M)\rangle}}{\delta_c}\exp\left(-\frac{\delta_c^2}{2\langle\delta_{\rm cg}^2(M)\rangle}\right) \end{aligned} \tag{17}$$

と表される。ここで、$\langle\delta_{\rm cg}^2(M)\rangle$ はホライズン内でならした (coarse-grained) 密度ゆらぎの分散であり、次で与えられる。

$$\langle\delta_{\rm cg}^2(M)\rangle = \int_0^\infty \frac{dq}{q} W^2(qR)\frac{16}{81}(qR)^4\mathcal{P}_\zeta(q) \tag{18}$$

ここで、$W(qR) = \exp(-q^2R^2/2)$ は window function、$R = k^{-1} = (aH)^{-1}$ は PBH の質量 M と結びついたホライズンスケールである。アクシオン的カーバトンモデルでは、式 (12) と (13) を用いて、

$$\begin{aligned} \langle\delta_{\rm cg}^2(R)\rangle &= \frac{8}{81}\mathcal{P}_{\zeta,{\rm curv}}(k_*) \\ &\times \left[(k_*R)^{-(n_\sigma-1)}\gamma\left(\frac{n_\sigma+3}{2}, k_*^2R^2\right) + \tilde{\gamma}(2, k_*^2R^2)\right] \end{aligned} \tag{19}$$

where

$$\gamma(a,x) = \int_0^x t^{a-1}e^{-t}dt\,, \quad \tilde{\gamma}(a,x) = \int_x^\infty t^{a-1}e^{-t}dt \tag{20}$$

と計算される。

PBH は matter として振る舞うことを考慮すると、質量 M から ${\rm d}\ln M$ の間の PBH の量は次のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_{\rm PBH}(M)}{\Omega_c} &\simeq \left(\frac{\beta(M)}{2.75\times 10^{-9}}\right)\left(\frac{\gamma}{0.2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3.36}{g_*}\right)^{\frac{1}{4}} \\ &\times \left(\frac{0.12}{\Omega_c h^2}\right)^2\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{21}$$

ここで、$\Omega_{\rm PBH}$ (Ω_c) は PBH (DM) の現在の密度パラメタである。

LIGO イベントのイベントレートを再現する PBH のエネルギーの割合は、$\sim 10^{-3} - 10^{-2}$ 程度と見積もられている (M. Sasaki et al. 2016)。適切なモデルのパラメタを取ると、図 1 のように、$\sim 30M_\odot$ に LIGO イベントを再現する PBH が生成される。

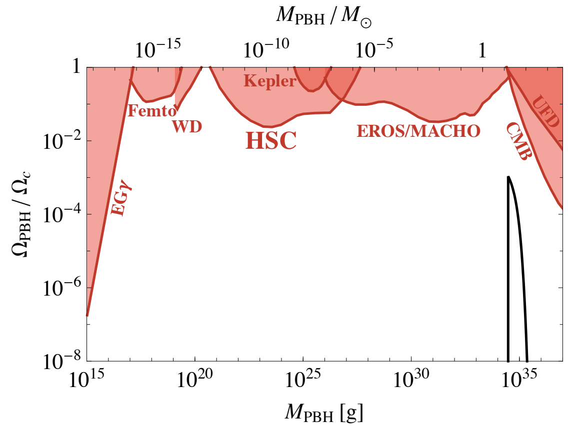

図 1: 黒線：PBH の質量スペクトル。赤色影：さまざまな観測からの PBH の量に対する制限。

また、このときのパラメタは宇宙論のさまざまな点と無矛盾であることを確かめた。例えば、カーバトンが崩壊するときの温度は $T_{\rm dec} \simeq 50\,{\rm MeV}(> 1\,{\rm MeV})$ であり、ビッグバン元素合成を壊さない。

4 GW form second-order effects

前節のように PBH ができるほどの大きな曲率ゆらぎがあると、摂動の 2 次の効果で重力波が生成される。アクシオン的カーバトンモデルでの重力波の強さを定量的に調べる (M. Kawasaki et al. 2013)。

時空の計量のゆらぎは、ニュートニアン・ゲージで次のように表される。

$$ds^2 = -a^2(1+2\Phi)d\eta^2 + a^2\left[(1-2\Psi)\delta_{ij} + \frac{1}{2}h_{ij}\right]dx^i dx^j \tag{22}$$

第 2 章の Φ と同じ記号を用いているが、異なる意味で用いていることに注意する。非等方ストレスが無視できるとすると、$\Phi = \Psi$ である。アインシュタイン方程式より、h_{ij} の運動式は、

$$h''_{ij} + 2\mathcal{H}h'_{ij} - \nabla^2 h_{ij} = -4\hat{\mathcal{T}}_{ij}{}^{lm}\mathcal{S}_{lm} \tag{23}$$

となる。ここで、$'$ は共動時間 η での微分、$\mathcal{H} = a'/a$ は conformal Hubble、$\hat{\mathcal{T}}_{ij}{}^{lm}$ は transverse かつ traceless 部分への射影テンソルである。また、$\mathcal{S}_{ij}$ はスカラー曲率ゆらぎの 2 次から来る source term である。

$$\mathcal{S}_{ij} = 4\Phi\partial_i\partial_j\Phi + 2\partial_i\Phi\partial_j\Phi - \partial_i\left(\frac{\Phi'}{\mathcal{H}} + \Phi\right)\partial_j\left(\frac{\Phi'}{\mathcal{H}} + \Phi\right) \tag{24}$$

詳細は省略するが、重力波の密度パラメタ $\Omega_{\rm GW}$ はパワースペクトル $\mathcal{P}_h$ を通して計算される。

$$\Omega_{\rm GW}(k,\eta) = \frac{1}{\rho_c(\eta)}\frac{d\rho_{\rm GW}(\eta)}{d\ln k} = \frac{k^2}{24\mathcal{H}^2(\eta)}\mathcal{P}_h(k,\eta) \tag{25}$$

さらに、アクシオン的カーバトンモデルでは、式 (15) に従って non-Gaussianity が生じ、特に r_D が小さいとき $f_{\rm NL}$ が正に大きくなる。そして、PBH の量は β で決まるが、$f_{\rm NL}$ が正のとき、同じ β を再現する曲率ゆらぎ ζ の分散は小さくなり、重力波は抑えられる (T. Nakama et al. 2017)。このことを考慮して現在の重力波のスペクトルを数値計算すると、図 2 のようになり、PTA の制限を避けている。

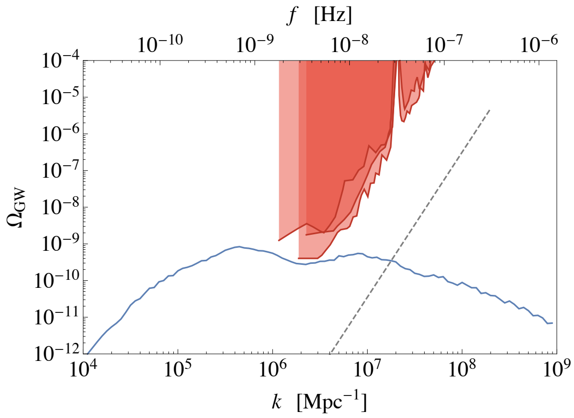

図 2: 青線：重力波のスペクトル。赤色影：PTA の観測からの制限。

5 Conclusion

アクシオン的カーバトンモデルで生成される PBH により、LIGO イベントを説明できる。また、そのときに発生する重力波は PTA による制限と無矛盾である。

Reference

M. Kawasaki, N. Kitajima and T. T. Yanagida 2013, Phys. Rev. D 87, 063519 [arXiv:hep-ph/1207.2550].

D. H. Lyth & D. Wands 2002, Phys. Lett. B 524, 5 [arXiv:hep-ph/0110002].

M. Kawasaki, T. Kobayashi & F. Takahashi 2011, Phys. Rev. D 84, 123506 [arXiv:1107.6011 [astro-ph.CO]].

B. J. Carr 1975, Astrophys. J. 201, 1.

M. Sasaki, T. Suyama, T. Tanaka & S. Yokoyama 2016, Phys. Rev. Lett. 117, 061101 [arXiv:1603.08338 [astro-ph.CO]].

M. Kawasaki, N. Kitajima & S. Yokoyama 2013, J. Cosmol. Astropart. Phys. 042 [arXiv:1305.4464[astro-ph.CO]]

T. Nakama, J. Silk & M. Kamionkowski 2017, Phys. Rev. D 95, 043511 [arXiv:1612.06264[astro-ph.CO]].

原始ブラックホールと臨界現象

片桐　拓弥 (立教大学大学院　理学研究科)

Abstract

初期宇宙の理解は進みつつあるが、不明瞭な部分も多い。初期宇宙を探るひとつの方法として、原始ブラックホール (PBH) の研究が挙げられる。PBH とは、インフレーション直後に密度揺らぎが重力崩壊を起こすことで形成されるブラックホールである。重力崩壊は揺らぎの大きさが臨界点を超えることで引き起こされ、時空構造が大きく変わる。この変化に伴って見られる特徴的な振る舞いを、臨界現象と呼ぶ。臨界現象に注目することで、PBH 形成に関する新たな理解が期待される。本講演では [1] についてレビューし、まず流体が放射成分のみである場合における PBH 形成を議論する。次に、臨界現象に着目する。PBH における臨界現象では、揺らぎの大きさが臨界点に十分近いとき、その質量がスケーリング則に従う。この領域における揺らぎが、流体の状態方程式のパラメーター $w(p = w\rho)$ を変えることで見せる振る舞いについて調べた。w 依存性を調べることで臨界現象を一般化された状態方程式の観点から見ることが可能になる。

1 Introduction

PBH の存在が Hawking ら [2] によって示唆されて以来、その形成について多くの研究が重ねられてきた。PBH は初期宇宙の痕跡を色濃く反映するため、その形成に関する理解が進めば初期宇宙の描像がより明確になることが期待される。

PBH は、密度揺らぎの過密度領域が自己重力によって崩壊することで形成される。この崩壊は、揺らぎの長さスケール δ が臨界点 δ_c を超えることで引き起こされる。形成には時空構造の相転移があり、$\delta \to \delta_c$ で

$$M_{PBH} \sim |\delta - \delta_c|^{\gamma}$$

のスケーリング則が見られる。スケーリング則は、PBH の形成時に系が自己相似な時空を経過することを意味する。そして、臨界現象に見られる重要な性質として、γ が初期条件の詳細によらないことが挙げられる。この臨界現象の持つ普遍性を用いることで、PBH の質量を見積もることが出来る。ここに PBH の臨界現象を調べる意義がある。

本研究では、スケーリング則の w 依存性を調べることで PBH の臨界現象を一般化された状態方程式の観点から見ること目標とする。

2 Analytics

揺らぎの成長を見るために、時空を摂動時空と背景時空に分けて考えていく。今回は、背景時空を漸近的に平坦な Friedmann 宇宙とする。一般相対論で系の時間発展を考える場合は時間一定の超曲面の発展を追うが、今回は、初期条件の設定のために宇宙時間一定の超曲面での分解を、PBH 形成までのダイナミクスの記述のためにヌル座標一定の超曲面での分解を用いる。

2.1 Cosmic-time slicing

計量を次のように与える。

$$ds^2 = -a(t,r)^2dt^2 + b(t,r)^2dr^2 + R(t,r)^2d\Omega^2 \quad (1)$$

計量をこのように与えることで、系の初期条件を一様な宇宙で与えることが出来る。(1) 式の場合、t は宇宙時間に対応する。

そして、この計量を用いて

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (2)$$

$$T_{\mu\nu} = (p+\rho)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (3)$$

$$T^{\nu}_{\mu\ ;\nu} = 0 \quad (4)$$

を書き換える。ここで得られた微分方程式にて長波長極限をとることで、摂動時空が従う微分方程式が得られる。ここで、u_μ は重力崩壊する領域内部に含まれる流体の 4 元速度で、$T_{\mu\nu}$ は流体のエネルギー運動量テンソルを表す。また、流体の従う状態方程式を

$$p = w\rho \quad (5)$$

として、状態方程式パラメーター w を用いて表す。

2.2 Initial condition

揺らぎの振幅を次のように与える。

$$\delta(t) \equiv (\frac{4}{3}\pi r_0^3)^{-1}\int_0^{r_0} 4\pi r^2(\frac{e(t,r)-e_b(t)}{e_b(t)})dr \quad (6)$$

ここで、e_b、r_0 をそれぞれ Fiedmann 宇宙におけるエネルギー密度、過密度領域の長さスケールとする。

また、2.1 で与えた微分方程式から初期の曲率 $K(r)$ を用いて

$$\frac{e(t,r)-e_b(t)}{e_b(t)} = \epsilon(t)\frac{3(1+w)}{5+3w}\frac{r_0^2}{3r^2}\frac{\partial[r^3K(r)]}{\partial r} \quad (7)$$

が得られるが、(7) 式の $K(r)$ を具体的に与えれば (6) 式を解くことが出来る。そして、K(r) を

$$K(r) = (1+\alpha\frac{r^2}{\triangle^2})\exp(-\frac{\mathrm{r}^2}{2\triangle^2}) \quad (8)$$

として与えると、(6) 式は

$$\delta(t) = \epsilon(t)\frac{3(1+w)}{5+3w}f(\alpha)\triangle^2(1+\alpha\frac{f(\alpha)}{2})\exp(-\frac{\mathrm{f}(\alpha)}{2}) \quad (9)$$

となる。ここで、

$$f(\alpha) = \begin{cases} 3 & \text{if} \quad \alpha = 0 \\ \frac{(5\alpha-2)+\sqrt{(5\alpha-2)^2+24\alpha}}{2\alpha} & \text{if} \quad \alpha \neq 0 \end{cases} \quad (10)$$

である。

α の値を変えることは、系の初期条件を変えることに相当する。

2.3 Null-slicing

2.1 で用いた方法は、初期条件を Friedmann 宇宙にて与えることが出来ることが出来る。一方で、PBH 形成までの系の時間発展を考える場合は都合が悪い。そこで、null 座標 $fdu = adt - bdr$ を用いて (1) 式の計量を変更する。

$$ds^2 = -f^2du^2 - 2fbdrdu + R^2d\Omega^2 \quad (11)$$

f を $r=0$ で $f=1$ とすることで、u は球の中心にいる観測者の固有時と等しくなる。

(11) 式の計量を用いることで、(2)、(3)、(4) 式から PBH 形成までの時間発展を記述する。

2.4 Self-simirality

系がスケーリング則に従う範囲を調べるために、自己相似解を用いる。自己相似解は、自己相似な時空のダイナミクスを記述する。即ち、2.3 で得られる解析と自己相似解を比較することで、系がスケーリング則に従う範囲がわかる。

自己相似解は、自己相似な座標

$$\xi \equiv -\frac{R}{u} \quad (12)$$

を用いて、2.3 で与える発展方程式を表すことで得られる。

3 Discussion

本講演では、$w = 1/3$ の場合について解析結果が自己相似解に従う範囲を見る。その後、γ、δ_c を w の関数として表して、先行研究 [3] の結果を再現することを見る予定である。

Acknowledgement

夏の学校を運営してくださった方、ご支援くださった方に心より感謝いたします。同時に、議論や研究生活における様々な場面で平素よりお世話になっている、先輩方、同僚達にお礼申し上げます。

Reference

[1] I. Musco and J. C. Miller, Class. Quant. Grav. bf 30 (2013) 145009

[2] B. J. Carr and S. W. Hawking, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 168, 399 (1974). M

[3] M. Snajdr, Class. Quant. Grav. bf 23 (2006) 3333

カオティックインフレーションにおける reheating 温度の制約

森 祐子 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

reheating はインフレーションとビッグバンの間に起こった現象であるが、宇宙初期にあったことであるため、reheating の詳細については未だよくわかっていない。しかし、近年の観測技術の向上により、今まで非常に大きかった reheating 温度の範囲を小さくすることが可能になった。本講演ではスペクトル指数やテンソルスカラー比を用いて reheating 温度の範囲がどのように制限したのかをレビューする [1]。

1 Introduction

インフレーション理論は、宇宙初期の急激な加速膨張期を記述する理論である。インフレーションの代表的なモデルとして、ポテンシャルが $V(\phi) \propto \phi^n$ で表されるカオティックインフレーションがある。このうち、ϕ^4 のモデルには Higgs インフレーションが含まれている。

急激な加速膨張期が終わると宇宙は放射優勢期に入る。この急激な加速膨張期と放射優勢期を繋げるという重要な役割を持っているのが reheating と呼ばれる過程であるが、解明されていない部分が多くある。例えば、インフレーションモデルに依存する量としてビッグバン開始時の温度を表す reheating 温度 T_{rh} がある。これまでの研究では、T_{rh} の取りうる値は 1MeV$\leq T_{rh} \leq 10^{16}$GeV と非常に範囲が広かった。しかし、近年では Planck 衛星による曲率ゆらぎのスペクトル指数 n_s やスカラー・テンソル比 r への制限に基づき、T_{rh} に対してもより強く制限をつけることが可能になってきている。

n_s と r からカオティックインフレーションでの T_{rh} に対する制限をより強くつけられることを説明する。そのために、まずインフレーション中の膨張指数 N と n_s,r がどのような関係で結びついているのかを述べる。そこから測定誤差に起因する N の許容範囲を求め、この結果から T_{rh} の取りうる範囲がどのように求められるかを説明する。$n = 4$ のポテンシャルの場合だとこれらの量に関係がつかなくなってしまう代わりに $n_{\mathcal{R}}$ と r が reheating に関係なく決まるという性質があるので詳しく見ていく。

2 reheating 温度と膨張指数

まず、膨張指数 N_k とスペクトル指数 $n_{\mathcal{R}}$、テンソルスカラー比 r の関係を調べる。そのために、インフレーション中に horizon をでた波数 $k = a_k H_k$ と現在の horizon との比を取ると、

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{k}{a_0 H_0}\right) &= \log\left(\frac{a_k}{a_e}\frac{a_e}{a_{rh}}\frac{a_{rh}}{a_0}\frac{H_k}{H_0}\right)\\ &= -N_k - N_{rh} + \log\left(\frac{a_{rh}}{a_0}\right) + \log\left(\frac{H_k}{H_0}\right)\end{aligned} \tag{1}$$

となる。ここで、a_e,a_{rh} はそれぞれインフレーション終了時と reheating 時のスケール因子を表し、N_k と N_{rh} はそれぞれ波数が horizon の外に出てからインフレーションの終わりまでの間と reheating までの間の膨張指数を表している。reheating 温度 T_{rh} は (1) 式の第 3 項に

$$\frac{a_{rh}}{a_0} = \left(\frac{11}{43}g_{s*}\right)^{-1/3}\frac{T_0}{T_{rh}} \tag{2}$$

という関係式があるために暗に含まれている。g_{s*} は reheating 時のエントロピーの有効自由度を表している。N_{rh} は reheating 時の状態方程式パラメータ w_{rh} を用いてフリードマン方程式から

$$N_{rh} = \frac{1}{3(1+w_{rh})}\log\left(\frac{\rho_e}{\rho_{rh}}\right) \tag{3}$$

となる。ρ_e,ρ_{rh} はそれぞれインフレーション終了時、reheating 時のエネルギー密度を表している。ここで、$\rho_e/\rho_{rh} \equiv \beta$ とする。これを用いれば reheating 温度は

$$T_{rh} = \left(\frac{30}{\pi^2 g_*}\beta\rho_e\right)^{1/4} \tag{4}$$

となる。g_* は相対論的粒子の有効自由度である。これらを用いれば (1) 式は

$$N_k = -\log\left(\frac{k}{a_0 H_0}\right) + \log\left(\frac{T_0}{H_0}\right) + \log\left(\frac{H_k}{\rho_e^{1/4}}\right) + \log\left[\left(\frac{11}{43}g_{s*}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{\pi^2}{30}g_*\right)^{\frac{1}{4}}\right] + \frac{1-3w_{rh}}{12(1+w_{rh})}\log\beta \tag{5}$$

と変形できる。第 1 項、第 2 項は観測によって決定できる量であり、第 3 項、第 4 項はインフレーションのモデルに依存する量になっている。最後の項に reheating 温度の寄与が含まれている。

3　reheating 温度の制限

以下では

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^{4-n}\phi^n \tag{6}$$

のポテンシャルを考える。slow-roll パラメータ

$$\epsilon \equiv \frac{m_{pl}^2}{2}\left(\frac{V'}{V}\right)^2 \tag{7}$$

$$\eta \equiv m_{pl}^2 \frac{V''}{V} \tag{8}$$

より、スペクトル指数 $n_{\mathcal{R}}$ とテンソルスカラー比 r は膨張指数を用いて

$$n_{\mathcal{R}} - 1 = -\frac{1}{N_k} \tag{9}$$

$$r = \frac{1}{N_k^2} \tag{10}$$

と表せる。この関係式から膨張指数の測定誤差 ΔN_k を求めるときに、ΔN_k に寄与するのは (5) 式の reheating に関する項からがほとんどであるという仮定をする。すると、reheating 温度の測定誤差 ΔT_{rh} はスペクトル指数、テンソルスカラー比の場合でそれぞれ

$$\Delta N_k \approx \frac{\Delta n_{\mathcal{R}}}{(n_{\mathcal{R}}-1)^2} \approx \frac{1-3w_{rh}}{12(1+w_{rh})}\log\Delta\beta \tag{11}$$

$$\therefore \frac{\Delta T_{rh}}{T_{rh}} = \mathcal{O}(10^2 - 10^3) \tag{12}$$

$$\Delta N_k \approx \frac{1}{2}\frac{\Delta r}{r^{1+1/2}} \approx \frac{1-3w_{rh}}{12(1+w_{rh})}\log\Delta\beta \tag{13}$$

$$\therefore \frac{\Delta T_{rh}}{T_{rh}} = \mathcal{O}(1) \tag{14}$$

となり、従来の T_{rh} の範囲よりも範囲の幅を狭めることができた。

4　ポテンシャルが n=4 の場合

(5) 式の reheating の寄与が含まれている最後の項は $w_{rh} = 1/3$ のときに 0 になる。w_{rh} の具体的な形は状態方程式 $p = w\rho$ をインフラトンの振動期間で時間平均を取ることで

$$w_{rh} \approx \frac{n-2}{n+2} \tag{15}$$

となることが知られている [2]。このことから、$w_{rh} = 1/3$ となるのは $n = 4$ のときであることがわかる。よって、$n = 4$ の場合は膨張指数と reheating 温度に関連がつかなくなるので、今までのやり方で reheating 温度を求めるのが不可能となっている。このように、$n = 4$ の場合は他と比べて特殊なので詳しく見ていく必要がある。

(6) 式のポテンシャルのままでは、$n = 4$ のモデルは Planck 衛星の観測により 99.7% の確率で除外されてしまう。そこで、non-minimal coupling の作用を考えるとジョルダンフレームでは

$$S_J = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{m_{pl}^2}{2}\left(1+\xi\frac{\phi^2}{m_{pl}^2}\right)R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{\lambda}{4}\phi^4\right] \tag{16}$$

となる。これを、$g_{\mu\nu} \to \left(1+\frac{\xi\phi^2}{m_{pl}^2}\right)g_{\mu\nu}$($\xi$ は変換の接続係数) と共形変換することによりアインシュタインフレームに移るので

$$S_E = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{m_{pl}^2}{2}\widetilde{R} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\chi\partial_\nu\chi - W(\chi)\right] \tag{17}$$

となる。$\widetilde{R}$ は変換後のリッチスカラーを、$W(\chi)$ は変換後のポテンシャルを表している。スカラー場 phi と変換後の場 χ の関係は

$$\frac{d\chi}{d\phi} = \frac{\sqrt{1+(1+6\xi)\xi\phi^2/m_{pl}^2}}{1+\xi\phi^2/m_{pl}^2} \tag{18}$$

となっている。

ポテンシャル $W(\chi)$ は χ_{cr} の値を境に

$$W(\phi) \approx \begin{cases} \frac{\lambda}{6\xi^2} m_{pl}^2 \chi^2 & (\chi_{cr} < \chi \ll \chi_e) \\ \frac{\lambda}{4}\chi^4 & (\chi < \chi_{cr}) \end{cases} \tag{19}$$

のように形が変化する。ここで、χ_e はインフレーション終了時の場の値である。ポテンシャルの形が変わる前後の状態方程式パラメータをそれぞれ w_1,w_2 とする。これらを用いれば膨張指数は先ほどの場合と同様にして

$$N_k = -\log\left(\frac{k}{a_0 H_0}\right) + \log\left(\frac{T_0}{H_0}\right) + \log\left(\frac{H_k}{\rho_e^{1/4}}\right) + \log\left[\left(\frac{11}{43}g_{s*}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{\pi^2}{30}g_*\right)^{\frac{1}{4}}\right] + \frac{1-3w_2}{12(1+w_2)}\log\beta + \left[\frac{1}{3(1+w_1)} - \frac{1}{3(1+w_2)}\right]\log\left(\frac{\rho_{cr}}{\rho_e}\right) \tag{20}$$

となる。(19) 式より、χ_{cr} 以降はポテンシャルの形が ϕ^4 の時と同じになっているので $w_2 = 1/3$ となる。よって、この場合でも膨張指数は reheating 温度に依らなくなる。

このような場合の reheating 温度の制限は、χ_{cr} とインフレーション時のエネルギー密度から求めることができ、

$$3.4 \times 10^{13}\mathrm{GeV} < T_{rh} < \left(\frac{\lambda}{0.25}\right)^{1/4} \times 1.1 \times 10^{14}\mathrm{GeV} \tag{21}$$

となる [3]。また、スペクトル指数やテンソルスカラー比も

$$n_{\mathcal{R}} = 0.9640 \pm 0.0007 \tag{22}$$

$$r = 0.0040 \pm 0.0003 \tag{23}$$

となり、reheating の詳細を知らなくても値を求めることができた。

5 Conclusion

$V = m^{4-n}\phi^n$ で表されるカオティックインフレーションの場合、スペクトル指数やテンソルスカラー比を用いることで、reheating 温度の範囲を小さくすることができた。これは、ϕ^4 の場合は通用しなくなるが、non-minimal coupling を考えることにより、reheating の詳細を知らなくてもポテンシャルから reheating 温度の範囲を絞ることや、スペクトル指数、テンソルスカラー比の値を求めることができることがわかった。

Acknowledgement

夏の学校を支援してくださっている皆様、および運営してくださっている皆様に感謝いたしております。また、日頃議論や指導をしてくださっている研究室の皆様方に、この場をお借りして感謝申し上げます。

Reference

[1] J. O. Gong, S. Pi and G. Leung, JCAP **1505**, no. 05, 027 (2015) doi:10.1088/1475-7516/2015/05/027 [arXiv:1501.03604 [hep-ph]].

[2] M. S. Turner, Phys. Rev. D **28**, 1243 (1983).

[3] F. Bezrukov, D. Gorbunov and M. Shaposhnikov, JCAP **0906**, 029 (2009) doi:10.1088/1475-7516/2009/06/029 [arXiv:0812.3622 [hep-ph]].

Higgs Inflation と重力非最小結合

佐藤　星雅 (早稲田大学大学院 先進理工学研究科)

Abstract

Inflation モデルは数多く提唱されているが人類がこれまでに発見した粒子は標準模型のみであり、その枠組みにおいてスカラー粒子は Higgs 粒子のみである。このため Higgs 粒子をインフラトンとした Higgs Inflation は自然な Inflation モデルである。しかし、単純に一般相対論の枠組みでこのモデルを検討すると量子的揺らぎが大きすぎてしまい CMB の観測と合わない。そこで Higgs 場と重力が非最小結合するモデルが考えられてきた。本研究では重力の非最小結合として、質量項と Ricci スカラーの結合と運動項と Einstein テンソルの結合を両方考慮した新しい Inflation モデルの構築を行った。その際、Disformal 変換をしたのち高次の微分項無視する近似方法で解析し、その妥当性を検証した。

1　Introduction

Inflation 理論は現在標準理論となりつつあるモデルであるがインフラトンは不明なままである。一方で、人類がこれまでに発見した粒子は標準模型のみであるため、その枠組みにおいてスカラー粒子は Higgs 粒子のみである。このため Higgs 粒子をインフラトンとした Higgs Inflation は自然な Inflation モデルである。しかし、単純に一般相対性理論で Higgs 場のダイナミクスを考えると、観測と矛盾しないような Higgs の自己相互作用定数 λ の値は 10^{-13} ほどになってしまい、加速器実験の結果 ($\lambda \sim 10^{-2} - 10^{-1}$) と矛盾してしまう。

この問題を解決するため Higgs 場と重力の相互作用を導入するモデルが提唱された。まず最初に考えられたのが Higgs 場が Ricci スカラーと非最小結合する理論 $\left(\xi h^2 R\right)$ である (Spokoiny, B. L. (1984)) 。このモデルを区別するためにここでは conventional Higgs inflation と呼ぶことにする。次に、考えられたのが Higgs 場の運動項が Einstein テンソルと相互作用する理論 ($G^{\mu\nu}\partial_\mu h \partial_\nu h$) である。この Inflation モデルは New Higgs Inflation と呼ばれている (C.Germani & A.Kehagias (2010)) 。そこで、我々はこの二つの相互作用項を含んだ Inflation モデルとして Hybrid Higgs Inflation を提唱しその解析を行った。

この解析を行う際 Disformal 変換を行った。この変換はメトリックを $g_{\mu\nu} \to \bar{g}_{\mu\nu} \equiv \Omega^2 \left(g_{\mu\nu} + B_{\mu\nu}\right)$ のように変換する Conformal 変換 $\left(g_{\mu\nu} \to \bar{g}_{\mu\nu} \equiv \Omega^2 g_{\mu\nu}\right)$ を拡張した変換である。しかしこの変換では Higgs 場の高次の微分項が大量に現れてしまい解析が困難となる問題があった。そこで Inflation 中のインフラトンがポテンシャルの上を"slow-roll"することに着目し、これらの項を切り捨てることが 2011 年に Germani によって示唆された。我々はこの手法を Hybrid Higgs inflation モデルを用いてこの近似が Background の解析だけでなく観測量である cosmological perturbations にも適用可能であることを数値的に検証した。

2　Higgs inflation models

重力と非最小結合する Higgs inflation のモデルとしてまず conventional Higgs inflation と New Higgs Inflation について紹介する。conventional Higgs inflation の作用は以下のように与えられる。

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left[\frac{M_P^2 - \xi h^2}{2} R - \frac{\partial^\mu h \partial_\mu h}{2} - V(h) \right] \tag{1}$$

h は Higgs 場、ξ は無次元量の結合定数である。また $\xi = 1/6$ でこの作用は共形不変になることが知られている。Higgs 場のポテンシャル $V(h)$ は

$$V(h) = \frac{\lambda}{4} \left(h^2 - v^2\right)^2 \simeq \frac{\lambda}{4} h^4 \tag{2}$$

である。Inflation 中を考える際は場の値 h が真空期待値 v に対して十分大きいと考えられるため最右辺に近似できる。今後は最右辺をポテンシャルとして

解析を行う。この Inflation モデルは量子揺らぎのテンソル成分が小さく、観測とよく整合することが知られている。観測量は Starobinsky と同様である。

次に New Higgs Inflation は

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}M_P^2 R - \left(g^{\mu\nu} - \frac{G^{\mu\nu}}{M^2}\right)\frac{\partial_\mu h \partial_\nu h}{2} - V(h)\right] \quad (3)$$

として作用が与えられる。$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu}$ は Einstein テンソルである。また M は質量次元をもった結合定数である。この非最小結合項は Galilei 変換に対して不変であることから導出された。

一般に Inflation 理論では以下のように定義される potential slow-roll parameter でモデルが特徴づけられる。

$$\epsilon_V \equiv \frac{M_P^2}{2}\left(\frac{\frac{dV}{d\phi}}{V}\right)^2 \approx \epsilon \quad (4)$$

$$\eta_V \equiv -M_P^2 \frac{\frac{dV}{d\phi}}{V} \approx \eta + \epsilon_V \quad (5)$$

観測量となる量子揺らぎのスカラー成分の power spectrumP_ζ は

$$P_\zeta \simeq \frac{1}{24\pi^2 M_P^4}\frac{V}{\epsilon_V} \quad (6)$$

と表され、power spectrum の傾きを表す n_s と量子揺らぎのテンソル成分のスカラー成分に対する比 r は

$$n_s \simeq 1 - 6\epsilon_V + 2\eta_V \quad , \quad r \simeq 16\epsilon_V \quad (7)$$

として与えられることが知られている。しかし作用に Einstein-Hilbert 項、正準な場の運動項、ポテンシャル以外の項がある場合は以上のように解析できるかは自明でない。そのため conventional Higgs inflation では以前からメトリックを Conformal 変換 $\left(g_{\mu\nu} \to \bar{g}_{\mu\nu} \equiv \Omega^2 g_{\mu\nu}\right)$ することで重力非最小結合項をなくしてから解析を行う手法が行われてきた。しかし、Conformal 変換では New Higgs Inflation の重力非最小結合項を消去することは出来ない。以上の式を用いずとも ADM 分解という計算手法で観測量を求めることは可能であるが計算が煩雑になる。観測された量子揺らぎの振幅から 2 つのモデルの結合定数は $\xi \sim -10^4, M \sim 10^{-8}M_P$ と求まる。

3 Hybrid Higgs inflation

重力非最小結合項を 1 つもつ Inflation モデルを議論してきたが、一般的にこれは自明ではなく、複数の相互作用項が存在する場合が考えられる。そこで我々は conventional Higgs inflation と New Higgs inflation の重力非最小結合を両方とも含んだ Inflation モデルとして"Hybrid Higgs inflation"を提唱した。作用は以下のように与えられる。

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g}\left[\frac{M_P^2 - \xi h^2}{2}R - \left(g^{\mu\nu} - \frac{G^{\mu\nu}}{M^2}\right)\frac{\partial_\mu h \partial_\nu h}{2} - V(h)\right] \quad (8)$$

この FLRW 計量を代入し、作用を変分することで以下の基礎方程式が得られる。

$$3H^2 + 2\dot{H} = -\frac{1}{M_P^2}\left[\left(1 - \frac{3H^2}{M^2}\right)\frac{\dot{h}^2}{2} - \frac{\lambda}{4}h^4 - \frac{1}{M^2}\frac{d}{dt}(H\dot{h}^2)\right] \quad (9)$$

$$\left(1 + \frac{3H^3}{M^2}\right)\ddot{h} + 3H\left(1 + \frac{3H^2 + 2\dot{H}}{M^2}\right)\dot{h} + 6\xi\left(\dot{H} + 2H^2\right)h + \lambda h^3 = 0 \quad (10)$$

$$H^2 = \frac{1}{3(M_P^2 - \xi h^2)}\left[\left(1 + \frac{9H^2}{M^2}\right)\frac{\dot{h}^2}{2} + \frac{\lambda}{4}h^4 + 6\xi h\dot{h}H\right] \quad (11)$$

ここで、重力の非最小結合を消去し計算を簡略化するため計量を以下のように Disformal 変換する。

$$g_{\mu\nu} \to \bar{g}_{\mu\nu} \equiv \left(1 - \frac{\xi h^2}{M_P^2}\right)^{-1}\left(g_{\mu\nu} + \frac{\partial_\mu h \partial_\nu h}{2M^2 M_p^2}\right) \quad (12)$$

また、場を正準化するために新しい場 ϕ を以下のように定義する。

$$\frac{d\phi}{dh} = \left(1 - \frac{\xi h^2}{M_P^2}\right)^{-1}\sqrt{1 - \frac{\xi h^2}{M_P^2} + \frac{V}{M^2 M_P^2}} \quad (13)$$

以上より、変換後の作用は

$$S_E \simeq \int dx^4 \sqrt{-\bar{g}}\left[\frac{1}{2}M_P^2 \bar{R} - \bar{g}^{\mu\nu}\frac{\partial_\nu\phi\partial_\mu\phi}{2} - U(\phi)\right] \quad (14)$$

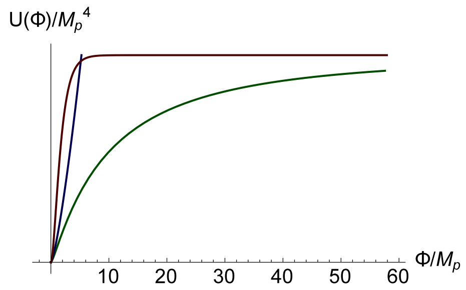

図 1: 有効ポテンシャルの概形:青線が New Higgs, 赤線が conventional Higgs, 緑線が Hybrid Higgs。

となる。bar は Disformal 変換後の計量による量であることを表す。ここで Inflation 中は、場の変化率が小さいため、場の微分の二次以上の項は無視できるほど十分小さいとした。$U(\phi)$ は

$$U(\phi) = \left(1 - \frac{\xi h^2}{M_P^2}\right)^{-2} V\left(h(\phi)\right) \tag{15}$$

$$\simeq \frac{\lambda}{4}\left(h(\phi)\right)^4 \left(1 - \frac{\xi h^2}{M_P^2}\right)^{-2} \tag{16}$$

であり、重力の非最小結合の効果を取り入れた有効ポテンシャルである。図 1 に概形を図示した。

この変換後の作用を変分して、変換後の基礎方程式は

$$\dot{\bar{H}} + \bar{H}^2 = -\frac{1}{3M_P^2}\left(\dot{\bar{\phi}}^2 - U(\phi)\right) \tag{17}$$

$$\ddot{\bar{\phi}} + 3\bar{H}\dot{\bar{\phi}} + \frac{dU}{d\phi} = 0 \tag{18}$$

$$\bar{H}^2 = \frac{1}{3M_P^2}\left(\frac{\dot{\bar{\phi}}^2}{2} + U(\phi)\right) \tag{19}$$

となり、変換前と比べて解析が容易であることがわかる。しかし高次の微分項を無視する近似を行っているためこの近似がいつまで成り立っているか確認する必要がある。そこで変換の前後で Higgs 場のダイナミクスを解析し、比較した (図 2)。 この図から観測される e-folding 50 から 60 までの間は近似が十分に成り立っていることが確認される。従って式 (6) を用いて、量子揺らぎのスカラー成分の振幅が観測量である約 2.2×10^{-9} であるような ξ と M の関係が求まる。この関係を満たす場合の specral index 式 (7) を求めると図 3 のようになることがわかる。

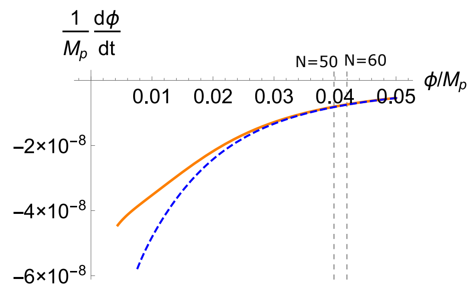

図 2: Higgs 場の位相図:橙線が返還前青破線が変換後

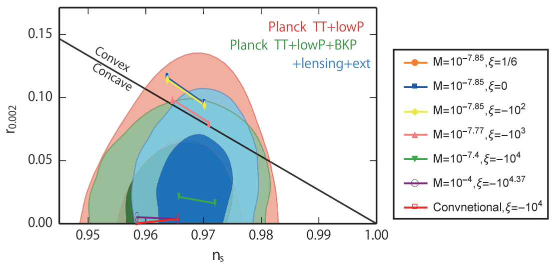

図 3: CMB による観測的制限

4 Disformal truncation

前章で観測される領域の Background では高次の微分項を無視した近似が十分成り立つことを確認したが、摂動である量子揺らぎでも同様に成り立っているか確認する必要がある。そこで、ADM 分解を用いて式 (6),(7) を使わずに観測量を求める。

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \gamma_{ij}\left(dx^i + N^i dt\right)\left(dx^j + N^j dt\right) \tag{20}$$

$$N = 1 + \alpha, \qquad N_i = \partial_i \beta, \tag{21}$$

$$\gamma_{ij} = a^2(t) e^{2\zeta}\left(\delta_{ij} + h_{ij} + \frac{1}{2}h_{ik}h_{kj}\right). \tag{22}$$

これは ADM 計量と呼ばれる摂動を含んだ計量である。α, β, ζ が摂動のスカラー成分で、h_{ij} がテンソル成分である。初めに量子揺らぎのスカラー成分を求める。この計量を作用に導入し、これらの摂動の 2 次まで考えるとする。α, β について変分することで摂動の拘束条件が導出され、摂動を ζ のみで表すことができる。これによって作用の摂動の 2 次の部分を含んだ項を取り出すと

$$S_S^{(2)} = \int dt dx^3 M_P^3 a^3 \left[G_S \dot{\zeta}^2 - \frac{F_S}{a^2}\left(\zeta_{,i}\right)^2\right] \tag{23}$$

$$
\begin{aligned}
G_S =& 3\left(1-\xi\frac{h^2}{M_P^2}-\frac{\dot{h}^2}{2M^2M_P^2}\right) \\
&+\left(-3H^2\left(1-\xi\frac{h^2}{M_P^2}\right)+\frac{9H^2\dot{h}^2}{M^2M_P^2}+\frac{\dot{h}^2}{2M_P^2}+\frac{6H\xi h\dot{h}}{M_P^2}\right) \\
&\times\frac{\left(1-\xi\frac{h^2}{M_P^2}-\frac{\dot{h}^2}{2M^2M_P^2}\right)^2}{\left(H-\xi\frac{h^2}{M_P^2}H-\frac{3\dot{h}^2}{2M^2M_P^2}H-\xi\frac{h\dot{h}}{M_P^2}\right)^2}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

$$
\begin{aligned}
F_S =& \frac{1}{a}\frac{d}{dt}\left(\frac{a\left(1-\xi\frac{h^2}{M_P^2}-\frac{\dot{h}^2}{2M^2M_P^2}\right)^2}{H-\xi\frac{h^2}{M_P^2}H-\frac{3\dot{h}^2}{2M^2M_P^2}H-\xi\frac{h\dot{h}}{M_P^2}}\right) \\
&-\left(1-\xi\frac{h^2}{M_P^2}+\frac{\dot{h}^2}{2M^2M_P^2}\right)
\end{aligned}
\tag{25}
$$

この F_S, G_S の変化率が一定である、つまり

$$
f_S \equiv \frac{\dot{F}_S}{HF_S} \simeq const, g_S \equiv \frac{\dot{G}_S}{HG_S} \simeq const \tag{26}
$$

とすると、量子揺らぎのスカラー成分の power spectrumP_ζ は

$$
P_\zeta = \frac{\gamma_S}{2}\sqrt{\frac{G_S}{F_S^3}}\frac{H^2}{4\pi^2}, \tag{27}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_S \equiv& 2^{\frac{2(3-\epsilon+g_S)}{2-2\epsilon-f_S/2+g_S/2}-3}\left|\frac{\Gamma\left(\frac{3-\epsilon+g_s}{2-2\epsilon-f_S/2+g_S/2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\right|^2 \\
&\times\left(1-\epsilon-\frac{f_S+g_S}{2}\right)^2
\end{aligned}
\tag{28}
$$

と求まる。同様にしてテンソル成分の power spectrum,P_T が求まるため、$r \equiv P_T/P_\zeta$ も求まる。以上から前章で求めた n_s, r と ADM formalism を用いて求めたものを比較し、以下のように ADM からの差を評価すると

$$
\frac{|n_s - n_s(ADM)|}{n_s(ADM)} \times 100 \lesssim 0.5[\%] \tag{29}
$$

$$
\frac{|r - r(ADM)|}{r(ADM)} \times 100 \lesssim 5[\%]. \tag{30}
$$

となる。これより、この近似は摂動でも十分有効であることが分かる。

5 Summary & Discussion

我々は conventional Higgs inflation と New Higgs Inflation の両方の重力非最小結合項を含んだ新しい Inflation モデルとして"Hybrid Higgs inflation"を提唱した。観測量を計算すると、この inflation モデルは n_s の値をあまり変化させず r の値を変化させる頃ができる特徴をもつことが確認できた。また CMB の観測ともよく整合することが示された。

また Inflation モデルを解析する際に Disformal 変換をした後高次の微分項を無視する近似 (Disformal truncation) を行った。この近似は Inflation 終了時では破れしまうが、観測できる領域においては Background だけでなく摂動量に対しても十分成り立つことが分かった。これにより容易に観測量が求められた。この手法が他のモデルにも適用可能かは検証する必要がある。また Higgs 場の自己相互作用 λ に関して平坦な時空での量子効果を考慮すると、現在の電弱真空が安定でないことが分かっている。従ってこの効果お考慮に入れた場合どのような変化をモデルにもたらすか、または重力に非最小結合がこの不安定性にどのような影響を与えるかは大変興味深い。また λ に曲がった時空の量子効果が加わった場合も検証する必要がある。

Acknowledgement

共同研究者として丁寧なご指導及び議論をして下さった早稲田大学の前田恵一教授、 Auckland 大学の Richard Easther 教授、Nathan Musoke さんに感謝申し上げます。更に、この研究のきっかけを与えて下さった早稲田大学の安倍博之教授にこの場を借りて感謝申し上げます。また、天文天体物理若手夏の学校にご賛同頂き、ご支援下さった方々に深く感謝致します。

Reference

Spokoiny, B. L. 1984, Phys. Lett , 147B, 39

Toshifumi Futamase & Kei-ichi Maeda 1989, Phys. Rev. D 39, 399

Cristiano Germani & A.Kehagias 2010 , Phys. Rev. Lett. 105, 011302

Stefano Di Vita & Cristiano Germani 2016, Phys. Rev. D 93, 045005

T.Kobayashi, M.Yamaguchi& J.Yokoyama 2011, PTP, 126.3: 511-529,

Multi T-Model Inflation

戸塚 良太 (早稲田大学大学院 先進理工学研究科)

Abstract

本研究では 2 スカラー場の T-Model Inflation のダイナミクスを解析し、密度ゆらぎとエントロピーゆらぎを数値的に解析した。ゆらぎのダイナミクスは、スカラー場が "ターン" する時期によって、概ね 3 つの場合に分類する事ができる。解析して得られたゆらぎの量を観測値と比較して、初期値の依存性など、このモデルへの制限を検証した。

1 Introduction

ビッグバン宇宙論の理論的困難を解決するアイデアとして、インフレーション理論が提唱されている。現在、インフレーション理論は、現象論的には好ましい特徴を多く持つが、実際にどのような場（インフラトン）がインフレーションを引き起こすかは分かっていない。インフレーション理論のエネルギースケールはプランク質量より少し低い GUT スケール程度と考えられているが、このような高エネルギースケールにおける物理を記述する理論が確立されていないというのも、インフラトンの起源が分からない理由の一つである。

現在、高エネルギー領域における素粒子統一理論として有力視されているのが、超弦理論である。超弦理論は、弦の性質から来る共形対称性を内在する。この共形対称性は、高エネルギー現象における鍵となることが予想され、インフレーション理論においても重要な役割を果たすと考えられる。また、10 次元で構成される超弦理論において現実の 4 次元時空を説明するには、6 次元の余剰次元をコンパクト化する必要があるが、その 4 次元時空にはモジュライを含むスカラー場が数多く現れる。

共形対称性を持つ作用から始め、インフレーションモデルを構築する試みは 2013 年に Kallosh と Linde によって提唱されている。インフラトンが 1 つの場合は、ある程度の任意性を持つポテンシャルに対して、上記の観測的制限を満たすインフレーションシナリオが考えられている。さらに彼らは、複数スカラー場の場合においても、この理論は近似的に単一スカラー場の場合と同じゆらぎの量を予言するということを、定性的に議論している。しかし、一般的な初期条件においては、ダイナミクスが単一スカラー場のモデルに近似できず、複数スカラー場を含むインフレーション理論特有の性質がゆらぎの量に影響を及ぼす場合がある。

本研究では、複数スカラー場の T-Model Inflation のダイナミクスを解析した後、このモデルにおける密度ゆらぎの振幅、スペクトル指数を解析し、観測量と比較してモデルにどのような制限がかかるか考察する。

2 Multi T-Mode Inflation モデル

まず、以下のような局所共形不変性をもつ作用を考える。

$$S = -\int d^4x\sqrt{-g}\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\left(\nabla\phi_i\right)^2 + \frac{\phi_i^2}{12}R\left(g\right) + V_i\left(\phi_i;\chi_i\right) - \left(\frac{1}{2}\left(\nabla\chi_i\right)^2 + \frac{\chi_i^2}{12}R\left(g\right)\right)\right] \tag{1}$$

ここで、V_i はポテンシャル、ϕ_i はスカラー場である。conformal compensatorχ_i を導入し、ゴーストが現れないように

$$\chi_i^2 - \phi_i^2 = M_i^2 \tag{2}$$

という条件を考える。

Einstein-Hilbert 作用の定義から、

$$\sum_{i=1}^{N} M_i^2 = 6M_{PL}^2 \tag{3}$$

ここで M_{PL} は reduced Planck mass である。これらの条件の下、新しいスカラー場

$$\chi_i = M_i \cosh\left[\frac{\varphi_i}{M_i}\right] \ , \quad \phi_i = M_i \sinh\left[\frac{\varphi_i}{M_i}\right] \tag{4}$$

を導入すると、作用 (1) は

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{M_{PL}^2}{2}R - \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\left(\nabla\varphi_i^2\right)^2 + U_i\left(\varphi_i\right)\right)\right] \tag{5}$$

と書ける。ここで U_i はポテンシャルで、

$$U_i\left(\varphi_i\right) = V_i\left(M_i \sinh\left[\frac{\varphi_i}{M_i}\right]; M_i \cosh\left[\frac{\varphi_i}{M_i}\right]\right) \tag{6}$$

である。この作用を現実的な作用とし、インフレーションを議論する。

このポテンシャルが、共形不変性を満たし、かつ $SO\left(1,1\right)$ 対称性を破っていると仮定すると、

$$V_i = F_i\left(\frac{\phi_i}{\chi_i}\right)\left(\phi_i^2 - \chi_i^2\right)^2 \tag{7}$$

のように表すことができる。(F_i は任意関数) この場合、ポテンシャル U_i は

$$U_i = M_i^4 F_i\left(\tanh\left[\frac{\varphi_i}{M_i}\right]\right) \tag{8}$$

と書ける。このポテンシャルは $U_i\left(\infty\right) = F_i\left(1\right)M_i^4 = const.$ であり、$\varphi_i \gg M_i$ で平らなポテンシャルになっている。簡潔な F_i の形としては、

$$U_i\left(x\right) = \frac{\lambda_i}{2n_i}x^{2n_i} \tag{9}$$

が考えられる (T-Model)。本研究では簡単のため、$i = 2, n = 2$ の場合 (2 スカラー場) を解析する。

3 基礎方程式

本研究では、線形のスカラー摂動を含んだ Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker(FLRW) 時空を考える。また、空間的平坦ゲージでゲージ固定する:

$$ds^2 = -\left(1+2A\right)dt^2 + 2aB_{,i}dx^i dt + a^2\delta_{ij}dx^i dx^j \tag{10}$$

尚、a はスケールファクター、A, B はスカラー摂動である。バックグラウンドの基礎方程式は、

$$\ddot{\varphi}_i + 3H\dot{\varphi}_i + U_{i,\varphi_i} = 0 \tag{11}$$

$$H^2 = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\sum_i \dot{\varphi}_i^2 + U_i\right] \tag{12}$$

スカラー場の線形摂動方程式は

$$\delta\ddot{\varphi}_i + 3H\delta\dot{\varphi}_i + \left[\frac{k^2}{a^2} + U_{i,\varphi_i\varphi_i}\right]\delta\varphi_i - \frac{1}{a^3}\sum_j\left(\frac{a^3}{H}\dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_j\right)^{\cdot}\delta\varphi_j = 0 \tag{13}$$

である。ここで $M_{PL} = 1$ とした。また、$\delta\varphi_i$ はスカラー場の摂動量、k は物理的なスケールである。空間的平坦ゲージでは、曲率ゆらぎ $\mathcal{R}$ と $\delta\varphi_i$ との間には

$$\mathcal{R} = \sum_i\left(\frac{\dot{\varphi}_i}{\sum_j \dot{\varphi}_j^2}\right)\delta\varphi_i \tag{14}$$

なる関係がある。単一場の場合にはこのゆらぎが超ハッブルスケールにおいて保存することが分かっているが、複数場の場合は一般にエントロピーゆらぎも生成され、その寄与で $\mathcal{R}$ が保存しないことが知られている。

エントロピーゆらぎの寄与を見るため、スカラー場を以下のように再定義する:

$$\delta\sigma \equiv \left(\cos\theta\right)\delta\varphi_1 + \left(\sin\theta\right)\delta\varphi_2 \tag{15}$$

$$\delta s \equiv \left(\cos\theta\right)\delta\varphi_2 - \left(\sin\theta\right)\delta\varphi_1 \tag{16}$$

ここで、$\tan\theta = \frac{\delta\dot{\varphi}_1}{\delta\varphi_2}$ である。$\delta\sigma, \delta s$ はそれぞれ断熱場、エントロピー場のゆらぎに対応している。
再定義したスカラー場を用いると、断熱ゆらぎ、エントロピーゆらぎはそれぞれ、

$$\mathcal{R} \equiv \frac{H}{v_\sigma}\delta\sigma \quad , \quad \mathcal{S} \equiv \frac{H}{v_\sigma}\delta s \tag{17}$$

と定義できる。($v_\sigma \equiv \sqrt{\dot{\varphi_1}^2 + \dot{\varphi_2}^2}$)本研究では、解析の際にこれらの式を用いた。
ゆらぎの初期値は、サブホライスンスケールにおいて、スローロール条件を満たしているならばバンチ・デービス真空であると仮定して、

$$\delta\varphi_1 = \frac{H_k}{\sqrt{2k^3}} e_{\varphi_1}(k), \delta\varphi_2 = \frac{H_k}{\sqrt{2k^3}} e_{\varphi_2}(k) \tag{18}$$

と決める。ここで、$e_i(k), (i, j = \varphi_1, \varphi_2)$ は Gaussian random variables

$$\langle e_i(k) \rangle = 0, \langle e_i(k) e_j^*(k') \rangle = \delta_{ij}\delta(k - k') \tag{19}$$

である。

4 結果

以下では、パラメーターを $M_1 = \sqrt{3}, \lambda_1 = \lambda_2 = 10^{-10}$ と固定して考える。

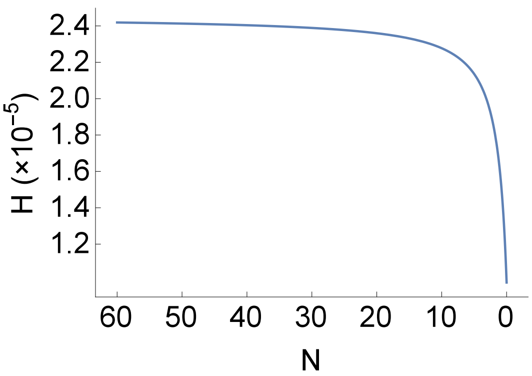

図 1: H のダイナミクス(単一場)

図 1、図 4 は、単一場($i = 1, M_1 = \sqrt{6}$)の場合の H と曲率ゆらぎのパワースペクトルのダイナミク

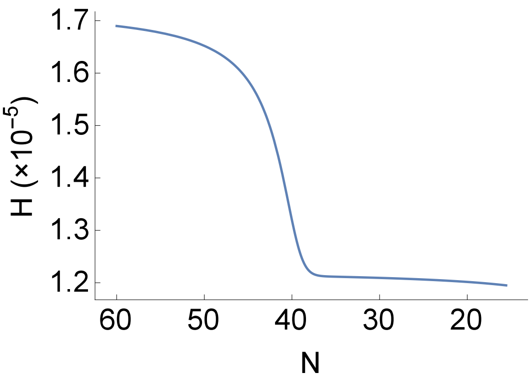

図 2: H のダイナミクス($\varphi_1 = 4.7M_{PL}, \varphi_2 = 5.3M_{PL}$)

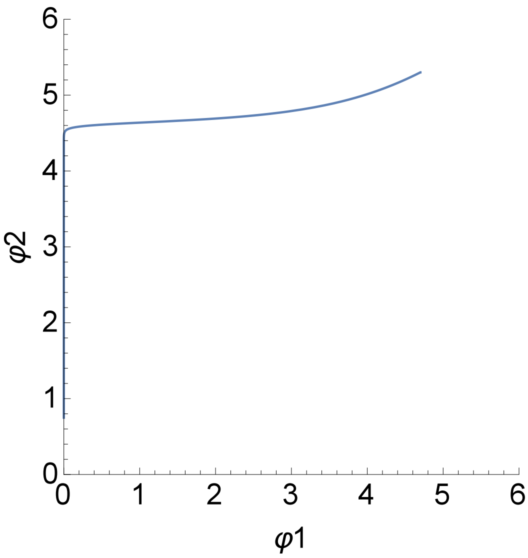

図 3: スカラー場のダイナミクス($\varphi_1 = 4.7M_{PL}, \varphi_2 = 5.3M_{PL}$)

スである。横軸は $e-fold$ 数 N でインフレーション終了時を 0 としている。スケール k は $k = aH|_{N=60}$ と決める。図 4 より、単一場では超ハッブルスケールで断熱ゆらぎのパワースペクトルが保存していることが確認できる。

図 2、図 3 は、場の初期値として $\varphi = 4.7M_{PL}, \varphi_2 = 5.3M_{PL}$ とした場合のハッブルパラメーターとスカラー場のダイナミクスである。$N \simeq 40$ で、スカラー場が ” ターン ” していることが分かる。

図 5 は、同じバックグラウンドにおける断熱ゆらぎ、エントロピーゆらぎのダイナミクスである。$N \simeq 40$

付近でエントロピーゆらぎが生成され、同時に断熱ゆらぎが大きくなっている事が分かる。一般に、エントロピーゆらぎが存在すると断熱ゆらぎが大きくなることが知られているが、本研究もこれを再現している。今回の解析から求められたスペクトル指数

$$n_s = 1 + \frac{\ln \mathcal{P}_\mathcal{R}}{\ln k} \tag{20}$$

は、単一場：$n_s \simeq 0.9660$、複数場：$n_s \simeq 0.972$ となり、複数場の場合でも、観測的な制限を満たしていることが確認できた。

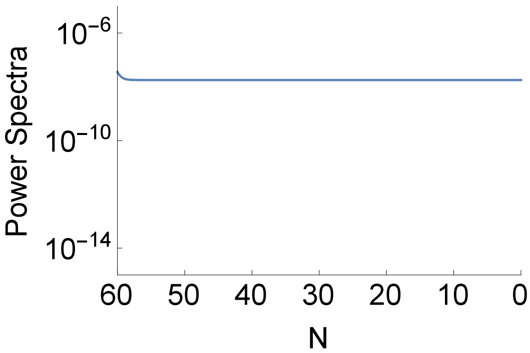

図 4: ゆらぎのパワースペクトル（単一場 ）

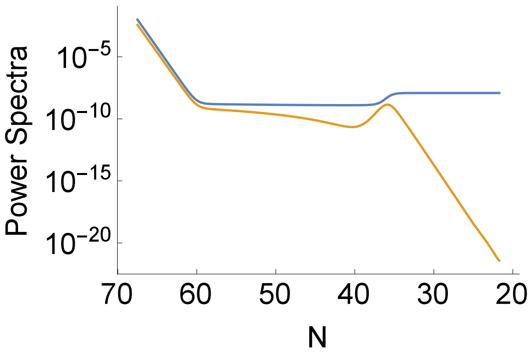

図 5: ゆらぎのパワースペクトル（$\varphi_1 = 4.7M_{PL}, \varphi_2 = 5.3M_{PL}$ ）

ゆらぎのダイナミクスは、スカラー場が”ターン”する時期により、3 つの場合に分類することができる。上記で議論した初期値は、 $N < 60$ の場合である。この時は超ホライズンスケールでエントロピーゆらぎが生成される。$N \gg 60$ の時は、ゆらぎのダイナミクスは単一スカラー場と同様になる。 $N \simeq 60$ の場合は、Horizon cross 付近でゆらぎ成長する (図 6)。

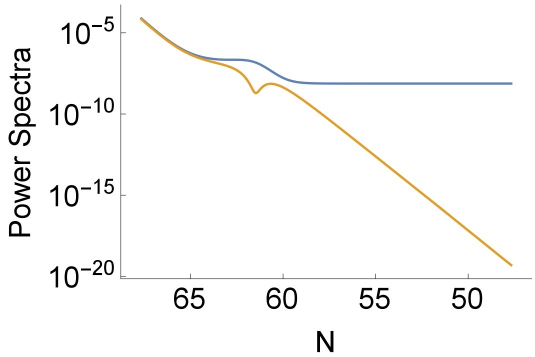

図 6: ゆらぎのパワースペクトル（$\varphi_1 = 4.53M_{PL}, \varphi_2 = 5.47M_{PL}$ ）

5 まとめ

本研究では、パラメータを固定し、スカラー場の初期値の違いによるゆらぎのダイナミクスを数値的に解析し、観測量と比較することでゆらぎの初期値依存性を調べた。ある初期値で、複数場インフレーション特有のダイナミクスがあり、テンソルースカラー比 r や、エントロピーゆらぎの大きさをパラメータである β_iso は初期値によらず観測的制限を満たすが、n_s は制限を満たさない場合がある事が確かめられた。今回は、ポテンシャルのパラメーター $M_1 = M_2 = \sqrt{3}$ の場合を解析したが、これらのパラメータが異なる場合の解析、更に、スカラー場の数が 2 つ以上の場合の解析をし、このモデルが自然にインフレーションを説明できるのかどうかを調べる必要がある。

Reference

R. Kallosh and A. Linde, ”Superconformal generalizations of the Starobinsky model,” JCAP **1306**, 028 (2013)

P. A. R. Ade *et al.* [Planck Collaboration], “Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation,”

C. Gordon, D. Wands, B. A. Bassett and R. Maartens, “Adiabatic and entropy perturbations from inflation,” Phys. Rev. D **63**, 023506 (2001)

CMB 温度の非等方性を用いた原始磁場の観測的検証

箕田 鉄兵 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙における磁場の起源は未解明であり、その候補として初期宇宙での磁場生成があげられるが、観測的検証には至っていない。初期宇宙での磁場 (原始磁場) に対する現在の観測的上限値は、(Planck Collaboration et al. 2016b) によると Mpc スケールで 4 nG 程度である。そこで、私は原始磁場の強度を観測的に検証する新たな手法を提案した。(Sethi & Subramanian 2005) などによれば、宇宙の晴れ上がり以降に原始磁場が存在すると、磁場によって生じるローレンツ力や中性粒子と荷電粒子の力学的摩擦によって、バリオンの密度、温度、電離度の進化に影響を与えると考えられる。よって、原始磁場に非一様性が存在すると、バリオンの密度、温度、電離度にも非一様性が生じるはずである。そこで私は、このようなバリオンの非一様な分布が熱的 SZ 効果によって CMB 温度の非等方性を強める可能性に注目し、原始磁場が熱的 SZ 効果を通して CMB 温度の非等方性に与える影響を計算した。この結果、Mpc スケールで nG 以下の原始磁場についても、マルチポール $l > 10^5$ の小スケールでは、銀河団分布から示唆される熱的 SZ 効果の理論予測を大きく上回ることがわかった。本発表ではこれらの研究成果を発表する。

1 Introduction

宇宙には様々なスケールで磁場が存在する。この宇宙における磁場の起源を明らかにすることは宇宙物理学における大きな目標の一つである。磁場の起源を説明する候補として、これまで長い間、初期宇宙での磁場生成が数多く考えられてきた (Turner & Widrow 1988)。以下、共動系で長さ λ の相関を持つような磁場の強度を B_λ とかく。多くの観測から B_λ には制限があるが、中でもとりわけ重要なのは宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) の非等方性による制限である。*Planck* 2015 によると、CMB 温度の非等方性を用いた原始磁場に対する上限値は、$B_{1\mathrm{Mpc}} \lesssim 5$ nG である (Planck Collaboration et al. 2016b)。そこで本研究の目的は、観測量である CMB 温度の非等方性を用いて、原始磁場の強度とスケール依存性に新たな制限を与えることである。また、本研究では銀河間領域のガスによる熱的 SZ 効果に着目した点が新しい。本研究においては標準的な宇宙論モデルとして flat-ΛCDM モデルを仮定し、宇宙論パラメータを *Planck* 2015 の観測データ (Planck Collaboration et al. 2016a) から次のように定める: $H_0 = 67.8$ km/s/Mpc, $\Omega_\Lambda = 0.692$, $\Omega_\mathrm{m} = 0.308$, $\Omega_\mathrm{b} = 0.048$.

2 Methods

本研究において、晴れ上がり後の宇宙で原始磁場がバリオンガスに与える影響を以下の二点から計算した。(1) 原始磁場がローレンツ力を通して物質密度揺らぎを生成し、(2) 双極性散逸によってバリオンガスを加熱する。こうしてガスの密度、温度、電離度の時間進化を計算して、バリオンガスによって生じる CMB 温度の非等方性をみつもった。

2.1 密度揺らぎの生成

(Wasserman 1978) で述べられているように、原始磁場が存在すれば、晴れ上がり以降の宇宙において磁場から生じるローレンツ力によって密度揺らぎが生成されると考えられる。このときの密度揺らぎの発展を記述する式は線形摂動論に従うと

$$\frac{\partial^2 \delta_\mathrm{c}}{\partial t^2} + 2H(t)\frac{\partial \delta_\mathrm{c}}{\partial t} - 4\pi G(\rho_\mathrm{c}\delta_\mathrm{c} + \rho_\mathrm{b}\delta_\mathrm{b}) = 0 \;, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \delta_\mathrm{b}}{\partial t^2} + 2H(t)\frac{\partial \delta_\mathrm{b}}{\partial t} - 4\pi G(\rho_\mathrm{c}\delta_\mathrm{c} + \rho_\mathrm{b}\delta_\mathrm{b}) = S(t) \;, \quad (2)$$

のようになる。ここで $H(t)$ はハッブルパラメータを表し、$\rho_{\rm b,c}$ と $\delta_{\rm b,c}$ はそれぞれバリオン (添字 b) とコールドダークマター (添字 c) の背景の密度および密度揺らぎを示す。また、式 (1) と (2) を導出する際に物質優勢期であることを仮定した。

ここで式 (2) において、$S(t)$ はローレンツ力によるソース項を表し、以下のように与えられる。

$$S(t) = \frac{\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}(t,\mathbf{x})) \times \mathbf{B}(t,\mathbf{x})}{4\pi\rho_{\rm b}(t)a^2(t)} \tag{3}$$

ここで $\mathbf{B}(t,\mathbf{x})$ は時刻 t、位置 $\mathbf{x}$ における共動系での磁場の強さである。また $a(t)$ がスケール因子、∇ は共動座標でのベクトル微分演算子である。本研究では、初期時刻 (晴れ上がり時刻) における密度揺らぎを $\delta_{\rm b} = 0$ と仮定して、式 (1) および式 (2) を解いて得られた解をバリオンガスの密度揺らぎの進化の式として用いた。

2.2 双極性散逸による加熱

晴れ上がり以降、宇宙における水素原子のほとんどが中性化するが、それでもわずかに電離した成分は存在し続ける。この電離した粒子は磁場の影響を受け、磁力線に引きづられるように運動するが、中性粒子は磁場の影響を受けない。そのため、電離したガスと中性ガスとの間に相対速度が生まれ、これらの力学的摩擦により磁場の散逸が起こる (この現象を双極性散逸と呼ぶ)。その結果、磁気エネルギーがガスの熱エネルギーに変換される。

原始磁場に起因する双極性散逸を考慮したガス温度の時間進化は以下のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{dT_{\rm gas}}{dt} &= -2H(t)T_{\rm gas} + \frac{\dot{\delta}_{\rm b}}{1+\delta_{\rm b}}T_{\rm gas} \\ &+ \frac{x_{\rm i}}{1+x_{\rm i}}\frac{8\rho_\gamma\sigma_{\rm T}}{3m_{\rm e}c}(T_\gamma - T_{\rm gas}) + \frac{\Gamma(t)}{1.5k_{\rm B}n_{\rm b}} \\ &- \frac{x_{\rm i}n_{\rm b}}{1.5k_{\rm B}}[\Theta x_{\rm i} + \Psi(1-x_{\rm i}) + \eta x_{\rm i} + \zeta(1-x_{\rm i})]\end{aligned} \tag{4}$$

ここで $x_{\rm i}$ は電離度、$m_{\rm e}$ は電子の静止質量、$\sigma_{\rm T}$ はトムソン散乱の散乱断面積、$k_{\rm B}$ はボルツマン定数、$n_{\rm b}$ はバリオン数密度、下添字の γ は CMB の物理量である。式 (4) において、右辺の第一項と第二項は断熱圧縮/膨張による加熱/冷却を、第三項はコンプトン散乱による加熱/冷却を表す。第四項は磁場の双極性散逸による加熱項で、加熱率 $\Gamma(t)$ は以下で書き表せる。

$$\Gamma(t) = \frac{|(\nabla \times \mathbf{B}(t,\mathbf{x})) \times \mathbf{B}(t,\mathbf{x})|^2}{16\pi^2\xi\rho_{\rm b}^2(t)}\frac{(1-x_{\rm i})}{x_{\rm i}} \tag{5}$$

いま、ξ は電離ガスと中性ガスとの牽引係数で、$\xi = 3.5\times10^{13}$ [cm^3/g/s] とした (Shu 1992)。また、式 (4) の最後の角括弧で囲まれた項はその他の冷却効果である。具体的には熱的制動放射、衝突励起冷却、再結合冷却、衝突電離冷却の四種類で、これらの冷却率を表す係数は各々Θ、Ψ、η および ζ である (Fukugita & Kawasaki 1994)。

ガス温度の時間進化の式 (4) を解くためには、電離度 $x_{\rm i}$ の値が必要となる。先行研究 (Sethi & Subramanian 2005) によると、電離度の時間進化は

$$\begin{aligned}\frac{dx_{\rm i}}{dt} = &\left[-\alpha_e n_{\rm b} x_{\rm i}^2 + \beta_e(1-x_{\rm i})\exp\left(\frac{E_{12}}{k_{\rm B}T_\gamma}\right)\right]D \\ &+\gamma_e n_{\rm b}(1-x_{\rm i})x_{\rm i}\end{aligned} \tag{6}$$

を解くことによって得られる。ここでは水素原子に対して三準位モデル (1s, 2s+2p, 自由状態) を採用し、1s と 2s+2p での電子の束縛エネルギーの差を E_{12} とする ($E_{12} < 0$)。D は Ly-α 光子による抑制因子である。式 (6) の右辺において、第一項、第二項、第三項がそれぞれ衝突再結合、光電離、衝突電離を意味しており、これらの係数 α_e、β_e および γ_e は数値計算コード `RECFAST` (Seager et al. 1999) に従って

$$\begin{aligned}\alpha_e =&\ 1.14\times10^{-13}\times\frac{4.309\ T_4^{-0.6166}}{1+0.6703\ T_4^{0.5300}}\ \ [\mathrm{cm^3/s}]\ ,\\ \beta_e =&\ \alpha_e\left(\frac{2\pi m_{\rm e}k_{\rm B}T_\gamma}{h_{\rm Pl}^2}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left(\frac{E_{2s}}{k_{\rm B}T_\gamma}\right)\ \ [\ /\mathrm{s}]\ ,\\ \gamma_e =&\ 0.291\times10^{-7}\times U^{0.39}\frac{\exp(-U)}{0.232+U}\ \ [\mathrm{cm^3/s}]\ ,\end{aligned}$$

と与える。ここで、$T_4 \equiv \dfrac{T_{\rm gas}}{10^4{\rm K}}$ および $U \equiv \left|\dfrac{E_{1s}}{k_{\rm B}T_{\rm gas}}\right|$ とした。

2.3 CMB 温度の非等方性

前節までの議論から、非一様な原始磁場はガスの密度、温度、電離度の揺らぎを生成しうる。これらのガスの揺らぎは、CMB 光子への逆コンプトン散乱を通じて CMB 温度に非等方性を与える。CMB 光子に与える逆コンプトン散乱の強度を表す指標として、視線方向 $\hat{n}$ についての y パラメータが以下のように与えられる (Sunyaev & Zeldovich 1970)。

$$y(\hat{n}) \equiv \frac{k_{\mathrm{B}}\sigma_{\mathrm{T}}}{m_{\mathrm{e}}c^2}\int d\chi\ a_\chi w(\chi,\hat{n}) \tag{7}$$

ここで χ は共動距離で a_χ は χ に対応するスケール因子である。いま三次元共動座標 $\mathbf{x}=\chi\hat{n}$ において $w(\chi,\hat{n}) = x_{\mathrm{i}}n_{\mathrm{b}}(T_{\mathrm{gas}}-T_\gamma)|_{\mathbf{x}}$ とした。このとき、y パラメータと CMB の温度揺らぎとの関係は $\Delta T/T(\hat{n}) = g_\nu y(\hat{n})$ であり、$x \equiv h_{\mathrm{Pl}}\nu/k_{\mathrm{B}}T$ について $g_\nu = -4 + x/\tanh(x/2)$ である。よって逆コンプトン散乱による CMB の角度パワースペクトルは

$$C_\ell = \left(\frac{g_\nu k_{\mathrm{B}}\sigma_{\mathrm{T}}}{m_{\mathrm{e}}c^2}\right)^2 \int d\chi \frac{P_w(\chi,\ell/\chi)}{\chi^2} \tag{8}$$

となる。ここで ℓ は多重極モーメントであり、$P_w(\chi,k)$ は共動距離 χ における y パラメータの三次元パワースペクトルである。また、式 (8) を導出する際には Limber 近似を用いた。

3 Simulation Setup

磁場による密度揺らぎと温度のソース項、すなわち式 (3) および式 (5) は非線形な項であり、磁場のモデルから解析的に求めることが難しい。そこで私は以下の手順によって磁場の分布を数値的に生成し、熱的 SZ 効果の角度パワースペクトルを数値計算によって求めた。この節では、本研究で行った数値計算の設定について簡単にまとめる。

本研究では原始磁場の時間進化は宇宙膨張のみによって決定されるものとする。また、原始磁場のモデルについては、本研究では原始磁場の生成機構を特定せず、一般的な磁場のモデルを考慮して磁場の分布を行う。具体的には、磁場のパワースペクトル $P_B(k)$ が指数 n_B の単一のべきで書けるような単純なモデルを仮定する。ここで、$P_B(k)$ は波数空間の磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{k})$ を用いて以下のように定義する。

表 1: 原始磁場のモデル

モデル	B_n [nG]	n_B	λ_c [kpc]
1	0.5	0.0	250
2	0.5	-1.0	162
3	0.1	0.0	131
4	0.1	-1.0	72.4

$$\langle B_i^*(\mathbf{k})B_j(\mathbf{k}')\rangle = 4\pi^3\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\left(\delta_{ij}-\hat{k}_i\hat{k}_j\right)P_B(k)\ ,$$
$$P_B(k) = \frac{n_B+3}{2}\frac{(2\pi)^2B_n^2}{k_n^{n_B+3}}k^{n_B}\ . \tag{9}$$

ここで B_n はスケール $k_n = 1\ \mathrm{Mpc}^{-1}$ でならした磁場の強度である。式 (9) の直感的理解の手助けとして、いま B_λ なる物理量を以下のように導入しておく。

$$B_\lambda^2 = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{k_\lambda} k^2dkP_B(k) = B_n^2\left(\frac{k_\lambda}{k_n}\right)^{n_B+3} \tag{10}$$

B_λ は実空間においてスケール λ での磁場の強度を表しており、$n_B=-3$ で磁場の強度がスケール不変となること、及び n_B が大きくなると小スケールで磁場の強度が増幅されることがわかる。加えて、本研究では晴れ上がり以前における光子へのエネルギー散逸により、原始磁場の最小カットオフスケールが存在することを仮定した。(Jedamzik et al. 1998) などによれば、t_r を晴れ上がりの時刻、l_γ を CMB 光子の平均自由行程、$\lambda_c = 2\pi/k_c$ として、カットオフ波数は $k_c^{-2} = \dfrac{B_{\lambda_c}^2(t_r)}{4\pi\rho_\gamma(t_r)}\displaystyle\int_0^{t_r}\frac{l_\gamma(t')}{a^2(t')}dt'$ で与えられる。

本研究における原始磁場のモデルは B_n と n_B の二つのパラメータのみで決定される。ここでは *Planck* 2015 の観測と矛盾しない範囲で表 1 のようにパラメータを設定し、それぞれのモデルに対する CMB 温度の非等方性を見積もった。このとき、計算領域はすべてのモデルに対して $(1\ \mathrm{Mpc})^3$ とし、メッシュ数はモデル 1–3 については 64^3 であり、モデル 4 については 128^3 とした。計算領域の各点での物理量の時間発展は空間的に独立であるとみなし、$z=1000$ から $z=10$ まで 67 個の赤方偏移スライスをとり、角度パワースペクトルの推定を行った。

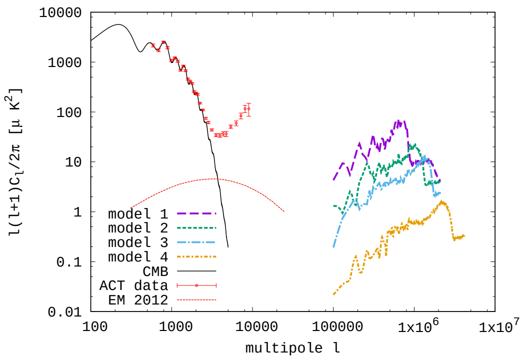

図 1: 原始磁場による熱的 SZ 効果の角度パワースペクトル。インフレーションで生成される CMB 温度の非等方性と、アタカマ宇宙論望遠鏡 (Hasselfield et al. 2013) による観測データを黒実線および誤差棒付きの赤点で示す。銀河団周りのガスによる熱的 SZ 効果のパワースペクトルの推定を細点線で書いた (Efstathiou & Migliaccio 2012)。

4 Results & Discussion

表 1 に示した原始磁場のモデルについては、晴れ上がり直後に密度揺らぎが非線形領域に到達するという結果を得た。よって、ガス密度を正値に保つため密度揺らぎの下限値を $\delta_{\rm b} = -0.9$ と定めた。高密度領域では、ガスの単位質量あたりに対する磁場の加熱率が低く、衝突再結合率も非常に高いためにガスの温度と電離度が非常に低い状態であることがわかった。一方低密度領域では、磁場による加熱効率は高いが衝突再結合率は非常に小さいため、双極性散逸を通した加熱によって温度が $\sim 10^5$ K 程度まで上昇し、晴れ上がり以降も完全電離した状態を保つことがわかった。また CMB の非等方性については、図 1 に示す通り、0.1 nG 程度の原始磁場についても $\ell \sim 10^6$ 程度の小スケールでは卓越したシグナルになり得るという結論を得られた。

5 Conclusion

本研究では原始磁場が CMB 温度の非等方性に与える影響について考察した。原始磁場をランダムガウス場であると仮定して数値的に生成し、IGM の密度、温度、電離度を計算した。また、これらの物理量は強い相関を持ち、熱的 SZ 効果によって CMB 温度の非等方性を作ることを初めて示した。この非等方性はスケールが非常に小さいため、前景放射の除去が難しいものの、将来観測で原始磁場の強度に対する強い制限を与える可能性を得た。ただし、本研究で採用した手法は、単純化のために密度揺らぎや磁場構造の非線形な進化を無視している。これらの効果を考慮した原始磁場による CMB 温度の非等方性の見積もりは、宇宙論的 MHD シミュレーションを用いることで可能になるであろう。

Acknowledgement

本研究を行う上でお世話になった皆様、夏の学校運営に携わって頂いた皆様に深く感謝いたします。

Reference

Efstathiou, G., & Migliaccio, M. 2012, MNRAS, 423, 2492

Fukugita, M., & Kawasaki, M. 1994, MNRAS, 269, 563

Hasselfield, M., Hilton, M., Marriage, T. A., et al. 2013, J. Cosmology Astropart. Phys., 7, 008

Jedamzik, K., Katalinić, V., & Olinto, A. V. 1998, Phys. Rev. D, 57, 3264

Planck Collaboration, Ade, P. A. R., Aghanim, N., et al. 2016, A&A, 594, A13

Planck Collaboration, Ade, P. A. R., Aghanim, N., et al. 2016, A&A, 594, A19

Seager, S., Sasselov, D. D., & Scott, D. 1999, ApJ, 523, L1

Sethi, S. K., & Subramanian, K. 2005, MNRAS, 356, 778

Shu, F. H. 1992, The physics of astrophysics. Volume II: Gas dynamics., by Shu, F. H.. University Science Books, Mill Valley, CA (USA), 1992, 493 p., ISBN 0-935702-65-2, Price £ 36.95.,

Sunyaev, R. A., & Zeldovich, Y. B. 1970, Ap&SS, 7, 3

Turner, M. S., & Widrow, L. M. 1988, Phys. Rev. D, 37, 2743

Wasserman, I. 1978, ApJ, 224, 337

重力波を用いた宇宙論パラメータへの制限

小粥 一寛 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

2015 年 9 月にブラックホール連星 (BBH) 合体からの重力波が LIGO により初めて直接観測された。これにより重力波の存在が実証されたのに加え、重力波を用いた宇宙の観測が可能であることが実証された。これは電磁波観測とは独立した観測手段であり、新たな宇宙の情報を得る手段となる。とりわけ、重力波を用いた宇宙論への応用の一つとして宇宙膨張率の測定がある。本発表では、重力波を用いて宇宙膨張率の測定精度を見積もった文献 Holz & Hughes (2005) と Nishizawa (2016) をレビューする。Holz & Hughes (2005) では、宇宙重力波望遠鏡 *LISA* により大質量 BBH までの光度距離が決定される。加えて、電磁波対応天体の観測によって赤方偏移を決定することで、 標準光源による観測とは独立してダークエネルギーの状態方程式に制限を与えられることが明らかにされている。一方、Nishizawa (2016) では、地上観測器ネットワークを用いて重力波観測を行い、BBH の赤方偏移を BBH が属する銀河から得る。これにより、ハッブル定数が高精度で決定できることができ、宇宙マイクロ波背景放射やセファイド変光星などの観測から得られたハッブル定数の不一致を解決する手段となりうることが期待されている。これらの文献を通じて、重力波による将来的な宇宙論パラメータへの制限を議論する。

1 Introduction

重力波は 1916 年にアインシュタインにより光速で時空を伝搬する波として予言された。その約 100 年後、*LIGO(Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory)* がブラックホール連星 (BBH) の合体による重力波として 2015 年に GW150914 と GW151226 を、2017 年に GW170104 を直接観測した。これにより BBH の重力波を用いた宇宙論への応用が期待され、その一つに宇宙膨張率の測定がある。

現在の宇宙は加速膨張していることが知られている。これは、遠方にある Ia 型超新星の光度距離と赤方偏移の関係から導かれ、観測的な証拠として知られている (e.g. Knop et al. 2003)。Ia 型超新星は、最も明るくなるときの強度が一定である。ピークの明るさを正確に測定することは難しいが、明るさの時間変化を観測することで、誤差 15%程度でピークの明るさが推定できる。これを用いることで、Ia 型超新星の光度距離が推定できる。また、スペクトルを測定することで赤方偏移が推定できる。これらより光度距離と赤方偏移の関係から宇宙論パラメータが推定できる。

これと同様なことが重力波を用いても可能である。その手法の一つとして大質量 BBH の重力波を宇宙重力波望遠鏡 (*LISA*) で観測し、赤方偏移を電磁波対応天体を用いて決定することで宇宙論パラメータを推定する手法があり 3.1 節で述べる。

宇宙論パラメータに加えて、ハッブル定数 H_0 も宇宙論で重要なパラメータである。ハッブル定数 H_0 は、宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) とセファイド変光星/Ia 型超新星を用いて推定されている。Planck Collaboration et al. (2016) によれば、Planck 衛星による CMB データを用いた H_0 の推定値は $\pm 1\sigma$ で $H_0 = (67.8 \pm 0.9)$km/s/Mpc である。一方で、Riess et al. (2016) によると、セファイド変光星と Ia 型超新星を用いた推定値は $H_0 = (73.24 \pm 1.74)$km/s/Mpc で約 2.5σ の不一致がみられる。上記以外のハッブル定数の推定方法として重力波を用いることができ、これは上述のハッブル定数の不一致を解決する手段となりうる。その推定方法の一つとして、地上の重力波観測器ネットワーク (LIGO/VIRGO/KAGRA) を用いて恒星質量 BBH が生成する重力波を観測する。加えて、その BBH が属する銀河 (ホスト銀河) を用いて赤方偏移を決定することでハッブル定数を推定する手法があり 3.2 節で述べる。

2 連星が生成する重力波

はじめに、連星によって生じる重力波の発生メカニズムをみる。ケプラー運動に従って、円軌道上を動く連星が生成する重力波は以下のようになる。

$$h_+ = \frac{2\mathcal{M}_c^{5/3}\left[\pi f(t)\right]^{2/3}}{D_L}\left[1+(\hat{L}\cdot\hat{n})^2\right]\cos\Psi(t), \tag{1}$$

$$h_\times = \frac{4\mathcal{M}_c^{5/3}\left[\pi f(t)\right]^{2/3}}{D_L}(\hat{L}\cdot\hat{n})\sin\Psi(t). \tag{2}$$

連星を構成する質量を m_1, m_2 とした時、$M_c = (m_1 m_2)^{3/5}/(m_1+m_2)^{1/5}$ は chirp mass と呼ばれる。$\mathcal{M}_c$ は $\mathcal{M}_c = (1+z)M_c$ の関係にある。t は観測者から見た時間、$\hat{L}$ は連星の単位軌道角運動量ベクトル、$\hat{n}$ は観測者から連星を見たときの視線方向の単位ベクトル、$\Psi(t)$ は重力波の位相、$f(t)$ は重力波の周波数で、$f(t) = (1/2\pi)d\Psi/dt$ の関係にある。また、重力波の周波数と chirp mass の関係は、

$$\dot{f}(t) = \frac{96}{5}\pi^{8/3}\left(\frac{G\mathcal{M}_c}{c^3}\right)^{5/3} f(t)^{11/3}, \tag{3}$$

となる。この中で観測量は、$h_{+,\times}, f(t), \dot{f}(t)$ となる。$f(t), \dot{f}(t)$ から $\mathcal{M}_c$ を、$h_+, h_\times$ の比から $\hat{L}\cdot\hat{n}$ を推定することができる。以上より、光度距離 d_L を推定することができる。しかし、赤方偏移 z は重力波観測のみで決定することはできない。これは質量が赤方偏移と縮退しているために生じ、z が小さくて chirp mass が大きいのか、z が大きくて chirp mass が小さいのかという不定性が残るからである。そのため、宇宙論として重力波を用いるためには、重力波観測以外による手法によって、重力波源の赤方偏移を推定する必要がある。

3 重力波を用いた宇宙論パラメータの推定

前節で宇宙論として重力波を用いるには赤方偏移を別途推定する必要があることを述べた。これは光度距離と赤方偏移の関係が、平坦宇宙の場合

$$D_L(z) = \int_0^z \frac{c(1+z)dz'}{H_0\sqrt{\Omega_m(1+z')^3 + \Omega_d e^{3(1+w)}(1+z')}}, \tag{4}$$

であることから赤方偏移と光度距離を推定することで宇宙論パラメータやハッブル定数が推定できるからである。

以下、3.1 節は遠方 ($z > 1$) の大質量 BBH が生成する重力波観測による宇宙論パラメータの推定を述べ、3.2 節は近傍 ($z < 0.1$) の恒星質量 BBH が生成する重力波観測によるハッブル定数の推定について述べる。

3.1 電磁波対応天体を用いた宇宙論パラメータの推定

電磁波対応天体とは、例えば大質量ブラックホールの周りに形成された降着円盤のガスの回転で生じる摩擦熱によって生じる X 線などで電磁波と対応がつけられる天体を指す。こうした天体から放射される電磁波を測定し、これにより赤方偏移を決定をすることができる。

はじめに、電磁波対応天体を用いることで天球上の位置精度が向上した場合の光度距離の精度への影響を見る。ここでは、質量 $m_1 = 10^5 M_\odot, m_2 = 6\times10^5 M_\odot$ の BBH 連星を 10,000 個用意する。ただし、BBH 連星の天球上の位置は無作為に分布させた。LISA の設計感度を考慮しフィッシャー解析によって誤差推定をした。その結果は、図 1 となる。図 1 から、天球上の位置精度が向上すると光度距離の誤差比が減少、すなわち光度距離の精度が向上していることがわかる。仮に、$z = 3$ にある BBH が電磁波対応天体で天球上の位置が決定できた場合、光度距離の誤差比は 2%以下となる。

また、電磁波対応天体の観測から赤方偏移の情報が得られるため、重力波観測による光度距離の情報と組み合わせることで、式 (4) から宇宙論パラメータが推定できる。平坦宇宙でハッブル定数 $h_0 = 0.65$、$\Omega_m = 0.3, w = -1$ を仮定した場合の 1-σ における Ω_m と w の信頼楕円が図 2 である。これより、重力波源を 2 つ用いた場合だけでもパラメータに強い制限を与えることができることが読み取れる。

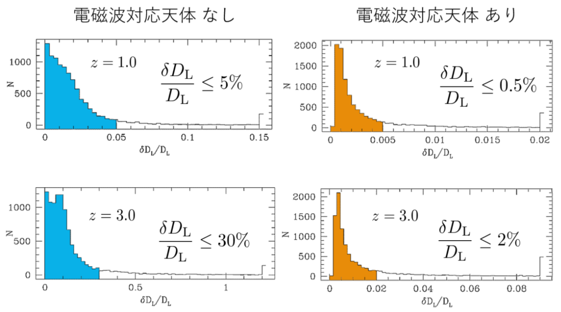

図 1: ブラックホール連星までの光度距離の誤差比。$m_1 = 10^5 M_\odot, m_2 = 6\times10^5 M_\odot$ の連星の場合。(Holz & Hughes (2005) を改変)

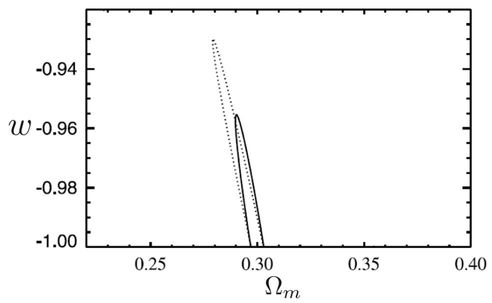

図 2: 物質密度パラメータ Ω_m とダークエネルギーの状態方程式パラメータ w の関係。実線は $z=1, z=3$ の BBH を 2 つ観測した場合を表し、破線は $0.1 \le z \le 1.7$ にある Ia 型超新星を 3000 個観測した場合を表す。(Holz & Hughes (2005) を改変)

3.2 ホスト銀河を用いたハッブル定数の推定

重力波観測では、重力波源の光度距離と天球上の位置に誤差があり、この誤差によって誤差体積が生じる。この誤差体積内の銀河の個数をカウントすることでホスト銀河の候補数を見積もる。仮定として、銀河の数密度を $n_{\rm gal} = 0.01/{\rm Mpc}^3$ とし、バイアスや色による系統誤差は考慮しないこととする。このとき、BBH のホスト銀河の平均候補数 $N_{\rm host}$ は、

$$N_{\rm host} \equiv n_{\rm gal}[V(d_{L,\rm max}) - V(d_{L,\rm min})]\frac{\Delta\Omega_S}{4\pi}, \quad (5)$$

と表せる。$V(d_{\rm L})$ は半径 d_L の球の共動体積、光度距離は $d_{L,\rm max} = d_L(z_{\rm f}) + \Delta d_L, d_{L,\rm min} = \max[d_L(z_{\rm f}) - \Delta d_L, 0]$ で、$z_{\rm f}$ は重力波源の基準となる赤方偏移、Δd_L は光度距離誤差である。重力波源の天球上の位置誤差は

$$\Delta\Omega_{\rm S} = 2\pi|\sin\theta_{\rm S}|\sqrt{(\Delta\theta_{\rm S})^2(\Delta\phi_{\rm S})^2 - \langle\delta\theta_{\rm S}\delta\phi_{\rm S}\rangle^2},$$

で表される。$\langle\ldots\rangle$ はアンサンブル平均を表し $\delta\theta_S, \delta\phi_S$ は観測の誤差、$\Delta\theta_S, \Delta\phi_S$ は $\Delta\theta_S = \langle(\delta\theta_S)^2\rangle^{1/2}, \Delta\phi_S = \langle(\delta\phi_S)^2\rangle^{1/2}$ である。

パラメータ推定のために BBH カタログを以下の設定で 100,000 個作る。パラメータは $\mathcal{M}, \eta, t_c, \phi_c, d_L, \theta_S, \phi_S, \iota$ の 8 個で、それぞれ chirp mass, 換算質量, 合体の時間, 位相, 光度距離, 重力波源の天球上の角度, 視線方向と軌道角運動量との角度である。連星を構成する各々の質量は、$5M_\odot - 100M_\odot$ の間で log-flat 分布をするが、総質量は $100M_\odot$ を超えない (e.g. Abbott et al. 2016)。重力波源の天球上の位置や軌道角運動量は無作為に選び、単位共動体積あたり単位時間あたりの合体率は一定とする。また、光度距離 d_L と天球上の位置 θ_S, ϕ_s に着目するため、ブラックホールの自転は考えないものとする。[1] 以上の設定で、LIGO の設計感度の観測器ネットワークによる重力波観測を想定しフィッシャー解析することで誤差推定をした。

ホスト銀河の候補数が 1 個以下、すなわち特定できる場合は図 3 から $\Delta\Omega_S$ が小さいときでこのとき光度距離の誤差比 $\Delta d_L/d_L$ も小さくなる。このようなホスト銀河が決定できるような BBH の特徴は、

- 質量分布はホスト銀河の候補数とは独立
- Signal-Noise Ratio(SNR) は大きい
- 赤方偏移 z は小さく $z \lesssim 0.1$

であることが読み取れる。つまり、$z \lesssim 0.1$ の銀河カタログが完璧に揃えば、BBH の赤方偏移を推定することができることが示唆され、この事実からハッブル定数を推定することができる。ここでホスト銀河が決まった $(N_{\rm host} < 1)$BBH の数を $N_{\rm gold}$ と表すことにする。ハッブル定数の測定誤差をフィッシャー解析により見積もる。ここでは、平坦な ΛCDM モデル宇宙を仮定し、パラメータはハッブル定数 H_0 と Ω_m を用いた。結果は図 4 となる。図 4 より、$N_{\rm gold}$

[1] 実際、LIGO による 3 つのイベントの観測ではスピンは小さいことがわかっている。(e.g. Abbott et al. 2016, 2017)

が 10 個,30 個,50 個観測できた場合、H_0 の誤差比は各々HLV のとき、1.1%,0.62%,0.47%、HLVK のとき、1.0%,0.57%,0.44%となる。

Abbott et al. (2017) によれば、LIGO の観測から予想される BBH の合体率は、中間値として 32 回/Gpc^3/年 とされている。ここでは、合体率を 30 回/Gpc^3/年 と仮定する。$z < 1$ で HLV で観測可能な個数は 2052 個/年となる一方、$N_{\rm host} < 1$ となるのは 4 個/年となる。HLVK の場合は、2620 個/年で $N_{\rm host} < 1$ となるのは 9 個/年となる。この違いは観測器の数が増えたことによって角度分解能が向上したためである。

以上より、数年の観測によってハッブル定数が 1% 以下の精度で推定できることがわかる。

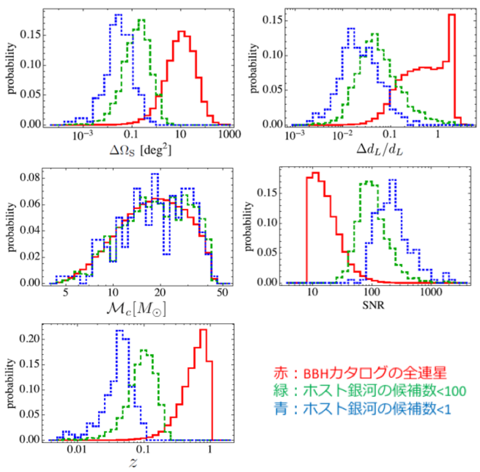

図 3: BBH カタログのパラメータの確率分布 (Nishizawa (2016) を改変)

4 Conclusion

BBH による重力波を観測することで、宇宙論パラメータの制限が可能であることを紹介した。2017 年 6 月、ESA(欧州宇宙機関) は LISA を次期宇宙科学ミッションとして選定をし 2034 年に打ち上げが予定されている。また、地上重力波望遠鏡の VIRGO や KAGRA も近々稼働が予定されており、重力波観測への期待が高まっている。宇宙を解明する手段として、人類はこれまでは電磁波を用いて様々な現象を観察してきた。重力波は、電磁波とは異なる特徴を持ち、質量が運動することによって発生する。この全く異なった起源による波動を観測手段として得ることで、一層宇宙の謎を解明できるであろう。

特に、ホスト銀河が特定できる BBH を 30 個観測すれば、誤差は約 0.6%とハッブル定数の不一致問題を解決する手段の一つになりうることが Nishizawa (2016) では示唆されており、宇宙論の問題解決の手段として大いに期待される。

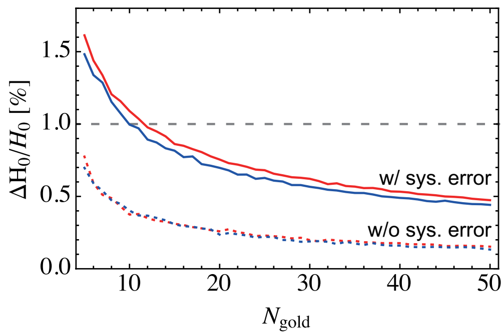

図 4: $N_{\rm gold}$ とハッブル定数の測定精度の関係。赤は HLV、青は HLVK の場合である。点線は系統誤差を考慮していない場合、実線は系統誤差を考慮した場合を表す。系統誤差は、銀河の固有速度によるもので、速度分散は 300km/s とされている。(Nishizawa 2016)

Acknowledgement

本発表にあたって、支援や指導してくださった名古屋大学宇宙論研究室の方々に感謝申し上げます。特に、西澤篤志助教、新居舜氏、角田匠氏には本内容の基礎から丁寧に指導してくださり大変お世話になりました。

Reference

Knop, R. A., Aldering, G., Amanullah, R., et al. 2003, ApJ, 598, 102

Nishizawa, A. 2016, arXiv:1612.06060

Holz, D. E., & Hughes, S. A. 2005, ApJ, 629, 15

Planck Collaboration, Ade, P. A. R., Aghanim, N., et al. 2016, A&A, 594, A13

Riess, A. G., Macri, L. M., Hoffmann, S. L., et al. 2016, ApJ, 826, 56

Abbott, B. P., Abbott, R., Abbott, T. D., et al. 2017, Physical Review Letters, 118, 221101

Abbott, B. P., Abbott, R., Abbott, T. D., et al. 2016, Physical Review X, 6, 041015

重力波による一般的なスカラー・テンソル理論の制限

那須　千晃 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

これまでの観測により、現在の宇宙が加速膨張していることが判明している。この加速膨張を説明するために、ダークエネルギーと呼ばれる未知の物質を導入する試みがある。しかし現時点では、このような物質が実在することを示す観測事実は存在しない。そこで、ダークエネルギーを導入せずに一般相対論を修正することで宇宙の加速膨張を説明するという試み（修正重力理論）が注目されている。これに含まれるものとして、一般相対論にスカラー場を加えるスカラー・テンソル理論が盛んに研究されている。
一般相対論では重力波は光速で伝播するが、修正重力理論では重力波の伝播速度は必ずしも光速に等しいとは限らない。重力波の伝播速度 c_g は、例えば $c_g < c$ の場合に宇宙線の観測から $c_g/c - 1 \gtrsim -10^{-15}$ という制限がつけられている [1]。 c_g への制限は、理論を峻別する際に有用であるため、他の制限手段も模索されている。
そこで、本講演では論文 [2] をレビューする。まず “phase lag method” と呼ばれる観測テストを用いた手法によって、 c_g へ新たな制限をつける。次に、場の運動方程式が２階になる最も一般的な単一スカラー・テンソル理論 [3] において、 $\phi \to \phi + const.$ というシフト対称性を課した場合に、伝播速度の光速からのずれを定式化する。この結果と今回つける c_g への制限から、修正重力理論の峻別が期待される。
以降、 $c = G = 1$ の単位系を用いる。

1 Introduction

CMB の観測から、現在の宇宙が加速膨張していることが明らかになっている。一般相対論を拡張して宇宙の加速膨張を説明するために、Einstein 方程式に宇宙定数を加えた

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \tag{1}$$

のように方程式を書き換えるモデル (ΛCDM モデルなど) が考えられている。しかし、この宇宙定数の起源は明らかになっていない。このために、宇宙定数を導入せずに、重力そのものを拡張した “修正重力理論（スカラー・テンソル理論）” が考えられている。この理論は、重力場にスカラー場を加えることで宇宙の加速膨張を説明する理論である。今日、様々なタイプのスカラー・テンソル理論が提唱されているが、提唱されている全ての理論が現実に即しているかどうかは明らかになっていない。そこで、一般相対論では重力波の伝播速度が光速に等しいという点から、重力波の伝播速度に制限を課すことを用いて、修正重力理論を制限する試みがなされている。すでに、論文 [1] では、光速に対する重力波の伝播速度に

$$c_g/c - 1 \gtrsim -10^{-15} \tag{2}$$

という制限が与えられることが判明している。

2 Horndeski 理論から考えられる重力波の伝播速度

本講演では論文 [2] をレビューする。
まず初めに、包括的なスカラー・テンソル理論である Horndeski 理論 ([3][4][5]) を用いて、重力波の伝播速度を求める。Horndeski 理論のラグランジアンは

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = {} & G_2(\phi, X) - G_3(\phi, X)\Box\phi \\ & + G_4(\phi, X)R + G_{4X}(\phi, X)\left[(\Box\phi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2\right] \\ & + G_5(\phi, X)G_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu\phi - \frac{1}{6}G_{5X}(\phi, X)\left[(\Box\phi)^3\right. \\ & \left. -3\Box\phi(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2 + 2(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^3\right]\end{aligned} \tag{3}$$

である。添え字 X は X の微分を意味する。ラグランジアンは、スカラー場とスカラー場の運動項で表

される任意関数 $G_i(X)$ を含み、二階微分までを含む場の方程式が得られる。今、

$$\phi \to -\phi, \quad \phi \to \phi + \mathrm{const.} \tag{4}$$

という対称性 (reflection symmetry, shift symmetry) を満たすとき

$$L = G(X)R + G_X(X)\left((\Box\phi)^2 - \nabla_\mu\nabla_\nu\phi\nabla^\mu\nabla^\nu\phi\right) \tag{5}$$

という項のみに制限される (quartic shift-symmetry Horndeski theory, [3][4][5])。このラグランジアンに、$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$、$\phi \to \phi + \varphi$ という摂動を考えて、摂動の二次の項だけを取り出す。

スカラー場の運動項 X が

$$\begin{aligned} X &= -\frac{1}{2}\left(\partial(\phi+\varphi)\right)^2 \\ &= -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \partial\phi\partial\varphi - \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 \\ &:= X + X_0 \end{aligned} \tag{6}$$

となることから、任意関数 $G(X)$ は、

$$G(X) \simeq G(X) + X_0 G_X \tag{7}$$

と展開できる。以上から、ラグランジアンの二次は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[h_{\mu\nu}\mathcal{D}^{\mu\nu,\rho\sigma}h_{\rho\sigma} + h_{\mu\nu}\mathcal{D}^{\mu\nu}\varphi + \varphi\mathcal{D}\varphi\right] \tag{8}$$

となる。$\mathcal{D}$ はバックグラウンドとその微分、微分演算子をまとめて表した係数である。ある点での重力波に興味があるので、Riemann normal coordinate を採用する。この座標系は、測地線上のある点の接ベクトルに沿って張られる座標系である。この点周りで計量 $g_{\mu\nu}$ は

$$g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{3}R_{\mu\rho\nu\sigma}x^\rho x^\sigma + \cdots \tag{9}$$

と展開でき、点周りではローレンツブーストと空間回転の自由度が残る。

ラグランジアンに含まれる変数について

$$x^\mu \to \lambda x^\mu, \quad \varphi \to \frac{1}{\lambda}\varphi, \quad h_{\mu\nu} \to \frac{1}{\lambda}h_{\mu\nu} \tag{10}$$

と書き換え、スケーリングリミット $\lambda \to 0$ をとる。$\frac{1}{\lambda}$ の字数が一番大きいところのみ注目し、TT ゲージをとる。スカラー場のゆらぎ φ を無視する。すると、ラグランジアンの二次は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}h_{\mu\nu}\left[G\Box + G_X\phi^\rho\phi^\sigma\partial_\rho\partial_\sigma\right]h^{\mu\nu} \tag{11}$$

のみが残る。以降このラグランジアンを使う。宇宙膨張をほとんど無視できるスケールで、$\nabla\phi$ がタイムライクであるときを考える。Riemann normal coordinate ではほとんど局所慣性系と見ることができるので、座標を回転して $\nabla\phi = (\dot{\phi}, 0, 0, 0)$ に変換する。このときのラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\left(G - G_X\dot{\phi}^2\right)\left(\dot{h}_{ij}^{TT}\right)^2 - G\left(\vec{\nabla}h_{ij}\right)^2\right] \tag{12}$$

となる ([3][4][5])。よって伝播速度は

$$c_g^2 = \frac{1}{1 - \frac{G_X}{G}\dot{\phi}^2} \tag{13}$$

となる。例えば任意関数 G を定数としたとき、伝播速度は光速に等しくなり、このときのラグランジアンは一般相対論のそれに相当する。以上から、重力波の伝播速度はスカラー場の任意関数に依存することがわかる。

3 WDSJ0651+2844 を用いた Phase lag test

r 離れた距離を電磁波が伝播するのにかかる時間と、伝播速度 c_g の重力波が伝播するのにかかる時間との差は

$$\Delta t = r\left(\frac{1}{c_g} - \frac{1}{c}\right) := \frac{r}{c}\varepsilon_g \tag{14}$$

である。このことから、光速と伝播速度が異なれば、電磁波と重力波の伝播時間にずれが生じることが分かる。

Phase lag test では、WDSJ0651+2844 を用いる。この連星系から出てくる重力波は、レーザー干渉計 LISA を用いて観測する。この系は LISA と同じ平面上で円運動をしているため、$h_\times$ の偏極は限りなく 0 に近づくため、重力波は h_+ の偏極のみが伝わると考えることができる。図 1 の Δx は、円運動の直径を x 軸方向に射影した長さである。干渉計から見る

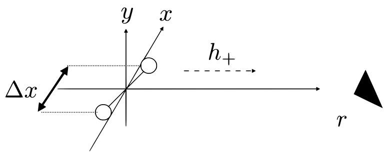

図 1: WDSJ0651+2844 の概要図

と、系の円運動は直線が伸び縮みしているように見える。このため、 Δx と h_+ は、

$$\Delta x \propto \cos(2\omega(t - r/c)) \tag{15}$$

$$h_+ \propto \cos(2\omega(t - r/c_g)) \tag{16}$$

と表すことができる。Δx と h_+ の lag を τ_0 とし、連星系と干渉計との距離を r_0 としたとき

$$\tau_0 := \varepsilon_g \frac{r_0}{c} \tag{17}$$

と定義する。Fisher 解析を用いて、典型的な値を入れたとき、LISA の観測の精度から ε_g の誤差は

$$|\varepsilon_g| = \frac{c}{r_0}\tau_0 \gtrsim 2 \times 10^{-12} \left(\frac{\mathrm{kpc}}{r_0}\right)\left(\frac{\Delta\tau_0}{0.2\mathrm{s}}\right) \tag{18}$$

である。

4 Conclusion

quartic shift-symmetry Horndeski-theory から得られる重力波の伝播速度は、任意関数の取り方によって値が光速と異なりうることが判明した。また、Phase lag test から、光速に対する伝播速度のずれの上限が式 (18) から与えられることが判明した。以上の二つの条件と論文 [2] から、数値的条件を満たし、重力波の伝播速度が変わるようなものとそうでないものに制限することができる。

謝辞

2017 年度天文・天体物理若手夏の学校を支援してくださった皆様には心から感謝申し上げます。

Reference

[1] D. Bettoni, J. M. Ezquiaga, K. Hinterbichler and M. Zumalacrregui, Phys. Rev. D **95**, no. 8, 084029 (2017) doi:10.1103/PhysRevD.95.084029 [arXiv:1608.01982 [gr-qc]].

[2] G. D. Moore and A. E. Nelson, JHEP **0109**, 023 (2001) doi:10.1088/1126-6708/2001/09/023 [hep-ph/0106220].

[3] G. W. Horndeski, Int. J. Theor. Phys. **10** (1974), 363-384.

[4] C. Deffayet, X. Gao, D. A. Steer and G. Zahariade, Phys. Rev. **D84** (2011), 064039, [arXiv:1103.3260 [hep-th]].

[5] T. Kobayashi, M. Yamaguchi and J. Yokoyama, Prog. Theor. Phys. **126** (2011), 511-529, [arXiv:1105.5723 [hep-th]].

背景重力波を用いた宇宙ひもの起源の探索

松井 由佳 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

初期宇宙で起きた相転移や超弦理論から、ひも状の高エネルギー領域である宇宙ひもの存在が示唆されている。これらの宇宙ひもは宇宙を漂う中で衝突してひも同士が組み換わり、宇宙ひもネットワークを形成する。相転移起源と超弦理論起源の宇宙ひもの相違点は、宇宙ひもの質量とひもの組み換え確率である。宇宙ひもはひも同士の組み換えの際に、尖った構造であるキンクを生成すると考えられている。キンクからは絶えず重力波が放出され、それらの重力波が重なり合うことで多波長の背景重力波を作り出す。そのため、キンク由来の背景重力波は、キンクの数と尖り具合 (キンクの分布) に依存する。本研究では、相転移起源と超弦理論起源の宇宙ひも上のキンクの分布の時間発展を明らかにした。その際、超弦理論起源の宇宙ひもネットワークにのみ存在する Y ジャンクションと呼ばれる三叉路構造がキンクの分布に与える変化を取り入れた。そして、キンクの分布を用いてキンクから放出される背景重力波のスペクトルを見積もることで、宇宙ひもの起源の解明に繋がる宇宙ひもの質量と組み換え確率に観測的制限を与えた。

1 Introduction

高温高密度で誕生したこの宇宙は、膨張に伴って温度が下がることで様々な相転移を引き起こし、ひも状高エネルギー領域の宇宙ひもが生成されると考えられている (Kibble 1976)。また、初期宇宙の理論モデルの一つである超弦理論によっても類似した性質の宇宙ひもの生成が示唆されている (Sarangi & Tye 2002)。同じ起源同士の宇宙ひもは衝突して組み換わり、宇宙ひもネットワークを形成する。二つの起源の宇宙ひもの相違点はひもの組み換え確率と宇宙ひもの質量であり、これらを観測的に探ることで、宇宙ひもの生成機構の特定を行うことができる。

宇宙ひもを観測する手段として、宇宙ひもから放出される重力波が最近注目されている。宇宙ひもはひも同士の組み換えによって、ホライズンスケールの長さの長いひもと輪状のループを生成し、ひも上に尖った構造であるキンクを作り出す。キンクは長いひも上を光速で移動することで四重極運動を生み出し、重力波を放出する (Damour & Vilenkin 2001)。そしてこれらの重力波が重なり合って多波長の背景重力波を形成する。そのためこの背景重力波はキンクの数と尖り具合 (キンクの分布) に依存する。相転移起源の長いひも上のキンクから放出される背景重力波の先行研究は数少なく (Kawasaki et al. 2010)、背景重力波のパワースペクトルを求めるために必要である、宇宙ひもネットワークの進化を取り入れたキンクの分布の時間発展が未だ明らかとなっていない。

また、超弦理論起源の長いひも上のキンクから放出される背景重力波のパワースペクトルも明らかとなっていない。超弦理論起源の宇宙ひもネットワークのみに存在する Y ジャンクションと呼ばれる三叉路構造は、キンクの分布に大きな変化をもたらすと考えられている (Binétruy et al. 2010)。そこで本研究では、Y ジャンクションがキンクの分布に与える影響を取り入れ、相転移起源と超弦理論起源の長いひも上のキンクの分布の時間発展とキンクから放出される背景重力波のパワースペクトルを求めた。これを元に、重力波干渉計の Advanced LIGO やパルサータイミングを用いた重力波検出器の SKA などを用いて、宇宙ひもの質量と組み換え確率に観測的制限を与えた。

2 Formulation

2.1 String dynamics

一様等方宇宙 $\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a(t)^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$ において、宇宙ひもの運動を見ていく。1 次元の物体である宇宙ひもは、4 次元時空上では world sheet と呼ばれる 2 次元平面を作る。そこで world sheet の座

標を ζ^0 は時間的、ζ^1 は空間的とすると、宇宙ひもの座標は $x^\mu = x^\mu(\zeta^0, \zeta^1)$ と書ける。相転移起源・超弦理論起源の宇宙ひもの作用は Nambu-Goto 作用

$$S[x^\mu] = -\mu \int \mathrm{d}^2\zeta \sqrt{-\det(\gamma_{ab})} \tag{1}$$

と書ける。μ は宇宙ひもの単位長さあたりの質量、γ_{ab} は world sheet の計量であり、$\gamma_{ab} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \zeta^a}\frac{\partial x^\nu}{\partial \zeta^b} g_{\mu\nu}$ と書ける。式 (1) の作用を x^μ で変分することで一様等方宇宙での宇宙ひもの運動方程式

$$\ddot{\boldsymbol{x}} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\boldsymbol{x}}(1-\dot{\boldsymbol{x}}^2) = \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{\boldsymbol{x}'}{\epsilon}\right)' \tag{2}$$

が得られる。ここでは $\epsilon \equiv \sqrt{\frac{\boldsymbol{x}'^2}{1-\dot{\boldsymbol{x}}^2}}$、$a$ はスケールファクターである。ドットは ζ^0、プライムは ζ^1 での微分を表す。宇宙ひもの運動方程式の解 $\boldsymbol{p}_\pm(\zeta^0, \zeta^1)$ は

$$\boldsymbol{p}_\pm \equiv \dot{\boldsymbol{x}} \mp \frac{1}{\epsilon}\boldsymbol{x}' \tag{3}$$

と表現される。これは宇宙ひも上を伝搬する波であり、left, right moving mode と呼ばれる。

2.2 Scaling law

相転移起源・超弦理論起源の宇宙ひもはひも同士が衝突して長いひもとループを生成する。これらを宇宙ひもネットワークと呼ぶ。各々の起源の長いひもの間隔は、ホライズンスケール t に比例するスケーリング則が成り立ち、長いひもの本数はホライズン内で保存される。このメカニズムは、ホライズン内に入る宇宙ひもの長さと、ループとなって長いひもから切り離される長さが均衡することで成り立つ。

スケーリング則は、ひも同士の間隔を一つのパラメータ L で表現するモデルで記述でき (Martins & Shellard 1996)、相転移起源の長いひも同士の間隔とひもの移動速さ v の時間発展は、

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = HL(1+v^2) + \frac{1}{2}cpv \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (1-v^2)\left(\frac{k(v)}{L} - 2Hv\right) \tag{5}$$

と書ける。ここで $H = \dot{a}/a$、c はループができる確率、p は組み換え確率、$k(v) \simeq \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\frac{1-8v^6}{1+8v^6}$ である。この時間発展方程式は、Y ジャンクションに繋がる超弦理論起源の長いひもの質量が全て等しい場合でも成り立つ。その際、相転移起源では $p = 1$、超弦理論起源では $10^{-3} < p < 1$ となる。式 (4) と式 (5) を数値的に解くと、$L \propto t$ を得る。

2.3 Distribution of kinks on cosmic string & cosmic superstring

キンクの尖り具合である sharpness ψ は

$$\psi \equiv \frac{1}{2}(1 - \boldsymbol{p}_{+,1}\cdot\boldsymbol{p}_{+,2}) \tag{6}$$

と定義され、添え字の 1, 2 はキンクの右側、左側を意味する。キンクは宇宙膨張の影響を受けて時間と共に鈍っていく。

まず、相転移起源の長いひも上のキンクの分布を考える。体積 V 中のキンクの分布 N の時間発展方程式は

$$\frac{\partial N}{\partial t}(\psi, t) = \frac{\bar{\Delta}V}{\gamma^4 t^4}g(\psi) + \frac{2\zeta}{t}\frac{\partial}{\partial\psi}(\psi N(\psi, t)) - \frac{\eta}{\gamma t}N(\psi, t) \tag{7}$$

と書ける (Martins & Shellard 1996)。右辺第 1 項目はひも同士の衝突する確率から得られるキンクの生成項、第 2 項目はキンクの数の保存から得られる宇宙膨張によるキンクが鈍る効果、第 3 項目はループ生成時にループへ移るキンクの数を表す。$\bar{\Delta}$ はキンクの生成する割合、$g(\psi)$ は生成する sharpness の分布、γ はひも同士の間隔の比例定数、ζ はキンクの鈍る速度、η はループに移動する割合である。$\bar{\Delta}, \gamma, \zeta, \eta$ の時間発展は式 (4) と式 (5) を解くことで得られる。

次に超弦理論起源の長いひも上のキンクの分布を考える。キンクが Y ジャンクションに入ると、透過するキンクが 2 つ、反射するキンクが 1 つでき、入射したキンクは消失する。Y ジャンクションに繋がるすべての長いひもの質量が等しい時、透過・反射したキンクの sharpness は平均的に 0.72 倍、0.49 倍になる (Binétruy et al. 2010)。この時、超弦理論起源の長いひも上のキンクの分布の時間発展方程式は

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial t}(\psi, t) = &\frac{p\bar{\Delta}V}{\gamma^4 t^4}g(\psi) + \frac{2\zeta}{t}\frac{\partial}{\partial\psi}(\psi N(\psi, t)) \\ &-\frac{\eta}{\gamma t}N(\psi, t) + \frac{2\alpha}{t}N\left(\frac{\psi}{0.72}, t\right) \\ &+\frac{\alpha}{t}N\left(\frac{\psi}{0.49}, t\right) - \frac{\alpha}{t}N(\psi, t)\end{aligned} \tag{8}$$

と書けると考えられる。第 1, 2, 3 項目は式 (7) と同様、第 4, 5, 6 項目は Y ジャンクションから透過、反射、入射するキンクの数である。右辺第 1 項目に p が入った理由は、キンクは宇宙ひもの衝突と組み換えによって生成するためである。第 4, 5 項目の N の中の $\psi/0.72$, $\psi/0.49$ は透過、反射して ψ となるキンクを表している。そして第 4, 5, 6 項目の α は 1 つのキンクが時間 t 中に通過する Y ジャンクションの数であり、$\alpha/t = 1/(\gamma t)$ と書ける。

2.4 Gravitational wave background

キンクはたわんだ長いひも上を運動することで重力波を放出し、それらの重力波が重なり合うことで背景重力波を形成する。背景重力波の密度パラメーター $\Omega_{\rm gw}$ は、振動数 f を用いて

$$\Omega_{\rm gw}(f) = \frac{2\pi^2 f^2}{3H_0^2} \int \frac{{\rm d}z}{z} \Theta(n(f,z)-1) n(f,z) h^2(f,z) \tag{9}$$

と書ける。Θ は階段関数であり、重力波の数 $n(f,\,z)$、一つのキンクからの重力波の強さ $h(f,\,z)$ は

$$n(f,z) = \frac{1}{2}\theta_m (1+z)^{-1} z f^{-1} \times \psi_{\rm max} \frac{N(\psi_{\rm max}, t)}{V} (\gamma t)^{-1} \frac{{\rm d}V(z)}{{\rm d}z} \tag{10}$$

$$h(f,z) = \frac{G\mu \{\psi_{\rm max}(\omega,t)\}^{1/2} \gamma t}{\{(1+z) f\gamma t\}^{2/3} r(z)} \Theta(1-\theta_m) \tag{11}$$

$$\theta_m = \{(1+z) f\gamma t\}^{-1/3},\ r(z) = \int_0^z \frac{{\rm d}z}{H(z)} \tag{12}$$

$$\frac{{\rm d}V}{{\rm d}z} = \frac{4\pi a^3 r^2(z)}{H(z)} \tag{13}$$

である。$\psi_{\rm max}$ とは、ある振動数 $\omega = 2\pi f$ の背景重力波に最も寄与する

$$\left(\psi \frac{N(\psi,\,t)}{V(t)/(\gamma t)^2}\right)^{-1} \sim \omega^{-1} \tag{14}$$

を満たす sharpness である。

3 Results & Discussion

相転移起源・超弦理論起源の長いひも上のキンクの分布の時間発展方程式 (7)、(8) を数値的に解いて得たキンクの分布が図 1 である。生成当初は鋭かったキンクが宇宙膨張によって鈍されるため、鈍ったキンクが多いことが分かる。また、図 1 では相転移起源よりも超弦理論起源のキンクの方が少なく見える。これは超弦理論起源のキンクは Y ジャンクションの透過項と反射項によって尖ったキンクが鈍ったキンクへ飛ばされるからである。また、組み換え確率 p の減少に伴ってキンクが少なくなっている。これは p が小さいとひも同士の組み換えが起きにくいため、ホライズン内に長いひもがたまり、ひも同士の間隔と Y ジャンクション同士の間隔が狭まって Y ジャンクションに入りやすくなるからである。

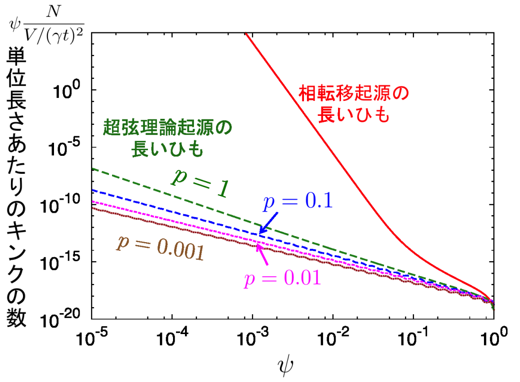

図 1: 相転移起源・超弦理論起源の長いひも上のキンクの分布。赤色の実線が相転移起源の長いひも上のキンク、残りの破線が異なる p での超弦理論起源の長いひも上のキンクの分布を表している。

図 2 は、得られたキンクの分布を用いてキンクから放出される背景重力波を計算したものである。相転移起源のキンクからの背景重力波は振動数と共に増加する。これは、高振動数の背景重力波は鈍ったキンクによって作られており、鈍ったキンクの方がホライズン内に多数存在するためである。また、超弦理論起源のキンクからの背景重力波は中高振動数領域ではその強度が振動数に依存しないことが明らかとなった。この理由は以下の通りである。Y ジャンクションによるキンクの鈍化によって、一つのキンクからの重力波は時間が経つほど弱まるため、キンク生成時に放出した重力波が背景重力波に一番寄与すると考えられる。また、ホライズン内の長いひもの本数は保存されるため、ホライズン内で生成さ

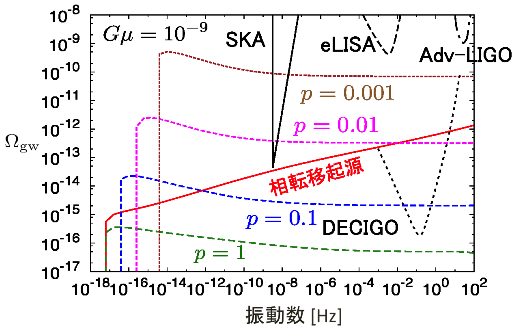

図 2: 宇宙ひもの質量が $G\mu = 10^{-9}$ の時の相転移起源・超弦理論起源の長いひも上のキンクから放出される背景重力波のパワースペクトル。G は万有引力定数。線の意味は図 1 と同じであり、黒線は重力波検出器の感度曲線である。

れるキンクの数はいつも同じとなる。従って、背景重力波に一番寄与するキンク生成時の sharpness とその時のホライズン内のキンクの数が、振動数に依存しないことが原因と考えられる。図 2 のさらなる特徴として、p が小さくなるほど背景重力波の強度は強くなる。これは p の減少に伴い、ホライズン内の長いひもの本数が増え、ホライズン内のキンクの数が増加するためである。

図 3 は、図 2 のパワースペクトルと Advanced LIGO、PPTA、SKA を用いた宇宙ひもの質量と組み換え確率の観測的制限である。すでに稼働している PPTA ではキンク由来の背景重力波は検出されなかったため、図 3 の青色の領域は棄却される。また、Advanced LIGO と SKA を用いれば、図の赤色と黒色の領域である宇宙ひもの質量と組み換え確率の宇宙ひもの観測が可能であることを明らかにした。

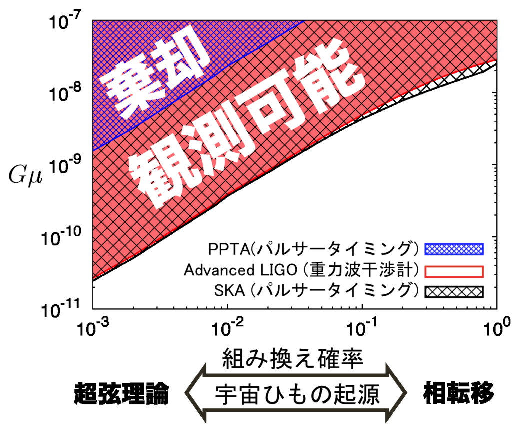

図 3: 宇宙ひもの質量と組み換え確率の制限図。塗りつぶされた領域がそれぞれの重力波検出器で検出が可能である質量と組み換え確率の領域である。

4 Conclusion

本研究では、初期宇宙で生成が示唆される相転移起源・超弦理論起源の宇宙ひもの中でも、長いひも上のキンクから放出される背景重力波に注目し、宇宙ひものネットワークの進化を取り入れたキンクの分布の時間発展を求め、背景重力波のパワースペクトルを得た。求めたパワースペクトルから宇宙ひもの物理的特徴である質量と組み換え確率に観測的制限を与え、Advanced LIGO や SKA ではキンク由来の背景重力波の観測の可能性があることを示唆した。

Acknowledgement

指導していただきましたスタッフ方、先輩方に感謝いたします。また、ご支援下さった皆様に感謝申し上げます。

Reference

T.W.B. Kibble 1976, J. Phys. A **9**, 1387 (1976)

S. Sarangi, & S. H. H. Tye, Phys. Lett. B **536**, 185 (2002)

T. Damour, & A. Vilenkin 2001, Phys. Rev. D **64**, 064008 (2001)

M. Kawasaki, K. Miyamoto, & K. Nakayama 2010, Phys. Rev. D **81**, 103523 (2010)

P. Binétruy, A. Bohe, T. Hertog, & D. A. Steer 2010, Phys. Rev. D **82**, 083524 (2010)

C. J. A. P. Martins, & E. P. S. Shellard, Phys. Rev. D **54**, 2535 (1996)

E. J. Copeland, & T. W. B. Kibble, Phys. Rev. D **80**, 123523 (2009)

重力波のリングダウンは事象の地平面の存在証拠か？

奥村 貴司 (近畿大学大学院 総合理工学研究科)

Abstract

一般的に、連星の合体からの重力波リングダウン信号は、合体で形成された天体が事象の地平面をもつこと、つまりブラックホールであることの証拠として考えらえている。この予想は、リングダウンの中間時点での波形が、合体後の天体の準固有振動によるものであるという仮定に基づいている。しかし、最近 Cardoso ら (2017) は、合体後の天体がライトリングを伴うとてもコンパクトな天体であれば、事象の地平面を持たなくともリングダウン波形を生じること、そして準固有振動の最終段階を詳細に探査して初めて事象の地平面の存在がわかることを指摘した。本発表では、この Cardoso らの研究を紹介し、事象の地平面の検証方法を議論する。

1 Introduction

重力波は、アメリカの研究グループ LIGO によって、2015 年 9 月 14 日に初めて直接観測され、コンパクト連星系からの重力波であることがわかった。つまり、重力波天文学の幕開けである。重力波は現在まで 3 例発見されており、そのすべてがコンパクト連星からのものである。その重力波信号は 3 つの段階で特徴づけられ、inspiral(2 つの天体が互いに楕円軌道を描きながらだんだん接近する段階)、merger(2 つの天体が合体する段階)、ringdown(合体後、振動が止まるまでの落ち着く段階) がある。一般に、Ringdown 波形は、最後に形成される物体の quasinormal modes(QNMs) によって支配されている。もし、合体後が Kerr ブラックホールなら、QNM スペクトル全体は、ブラックホールの質量と角運動量からでのみ特徴づけられる。そして、重力波リングダウンはコンパクト天体の事象の地平面の存在を証明する。

2 ライトリング, リングダウン, QNMs

ブラックホールの QNMs は、事象の地平面で、特有の境界条件と密接に関係している。もし合体により形成された天体が事象の地平面をもっていないなら、境界条件は完全に変わり、それゆえ QNM の構造にも大きく影響する。一般に、リングダウン波形の振動数や減衰時間は、ライトリング (光子の不安定円軌道) のスケールと密接に関係することが知られている。それゆえ、リングダウンは最終的に形成される天体がライトリングを持つ限り、ホライズンの存在にはあまり依存しない。

もし最終的に形成される天体がブラックホールなら、ホライズンでの ingoing 条件から、リングダウンの波はブラックホール内部へと伝搬する波であると考える。しかし、もし最終的に形成された天体がブラックホールでない場合は、その天体のライトリングのリングダウン振動数と一致すると予想されている。

3 設定

このようなリングダウンと QNMs の区別は、これまで観測的に確かめられたことはなかった。ここでは、リングダウン信号とライトリングを伴うホライズンのないコンパクト天体の QNMs の分析を行う。その簡単な具体的モデルとして、ここではワームホール (図 1) から放出される重力波を考える。

ここでの議論はワームホールだけでなく、gravastar や、compact boson star などの場合にも当てはまると考えられる。ここで、質量 M のシュワルツシルト計量を考える。シュワルツシルト座標の計量は ds^2=-Fdt^2+$F^{-1}dr^2$+r^2dΩ^2、F=1-2M/r と書ける。ワームホールの「くびれ」の位置を r=r_0、カメ座標では

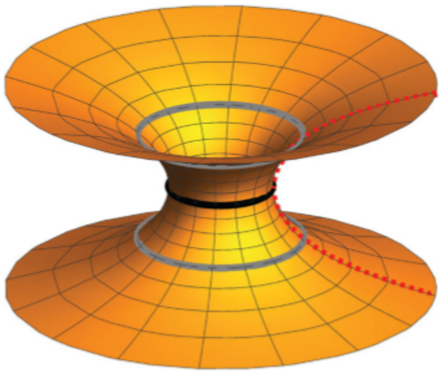

図 1: traversable wormhole の図。ホライズンのないコンパクト天体に伴う動的過程のイラスト。赤の点線はワームホール時空中で放射状に落ち込む粒子で、もう一方の宇宙に現れる。黒の曲線はワームホールの喉であり、グレーの曲線は Light ring を表す。

$r_*(r_0)$=0 と設定し、r_*=0 の左右の時空領域を＋と-の記号で区別することにする。+側 (-側) で $r_*>0(r_*<0)$ とする。ここで、カメ座標 dr/dr_*=±F を用いる。「くびれ」の位置にある、物質の球殻のエネルギー密度と表面圧力は、

$$\sigma = -\frac{1}{2\pi r_0}\sqrt{F(r_0)}, p = \frac{1}{4\pi r_0}\frac{(1-M/r_0)}{\sqrt{F(r_0)}} \tag{1}$$

となる。 質量が μ_p≪M の時、この時空におけるエネルギーを E としたときの粒子の四元速度は、

$$u_p^\mu \equiv dx_p^\mu/d\tau = (E/F, \mp\sqrt{E^2-F}, 0, 0) \tag{2}$$

で表され、τ は固有時間であり、座標時間 t_p は

$$t_p'(r) = \mp\frac{E}{F\sqrt{E^2-F}} \tag{3}$$

である。ここで、" ′ " は r に関する微分である。ワームホールに落下する物体は、有限時間 $[t_p(r_0)]$ で、ワームホールを通過するものとする。その物体のエネルギー運動量テンソルは、

$$T^{\mu\nu} = \mu_p \int (d\tau/\sqrt{-g}) u_p^\mu u_p^\nu \delta[x^\mu - x_p^\mu(\tau)] \tag{4}$$

である。アインシュタイン方程式から導かれる、Regge-Wheeler-Zerilli の方程式は、

$$\frac{d^2\psi(\omega,r)}{dr_*^2} + [\omega^2 - V_l(r)]\psi(\omega,r) = S_l, \tag{5}$$

$$V_l = 2F[\frac{9M^3+9M^2\lambda+3Mr^2\Lambda^2+r^3\Lambda^2(1+\Lambda)}{r^3(3M+r\Lambda)^2}], \tag{6}$$

ここで、

$$S_l = \frac{2\sqrt{2}\mu_p E(9+8\Lambda)^{1/4}e^{i\omega t_p}}{F(3M+r\Lambda)^2\omega t_p'(r)} \times [F^2 t_p'[2i\Lambda + (3M+r\Lambda)\omega t_p'] - (3M+r\Lambda)\omega], \tag{7}$$

$$\Lambda = (l-1)(l+2)/2, l \geq 2. \tag{8}$$

ソースタームは+と-側で異なる。Regge-Wheeler-Zerilli 関数

$$\Psi(t,r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int d\omega e^{-i\omega t}\Psi(\omega,r) \tag{9}$$

は、r_*=0 において、dΨ/dr_*、Ψ は連続であるとする。

4 QNM

ワームホームの QNMs は、S_l=0 におけるマスター方程式の固有値問題によって定義される。境界条件は、＋と-の領域の境でそれぞれ、$\psi_\pm\sim$ $e^{\pm i\omega r}$ である。境界条件はカメ座標で考え、r_0 の部分において、d$\psi_l(0)$/dr_*=0 および $\psi(0)$=0 を課す。 図 2 にワームホールの場合とブラックホールを考えた場合の有効ポテンシャルを表す。r_*=0 でワームホールの「くびれ」が存在するので、有効ポテンシャルは対称であり、r_*<0 でもう一つのバリアが生じている。ゆえに、r_0≤3M とした、間にあるポテンシャルの井戸の間でトラップされた 2 つのライトリングのワームホールでは、long-lived modes を持つ。

5 ライトリングと QNMs

直感的には、ワームホールとブラックホールとでは、リングダウン信号は大きく異なると期待するかもしれない。しかし図 3 に示すように、ライトリン

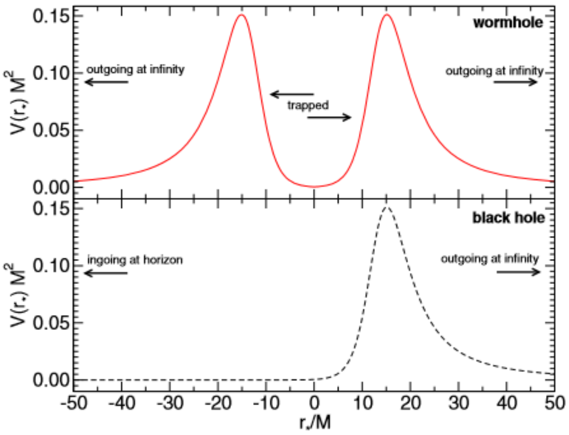

図 2: カメ座標における有効ポテンシャル (l=2)。上の図は (r_0=2.001M での)traversable wormhole について。下の図はシュワルツシルトブラックホールについてである。

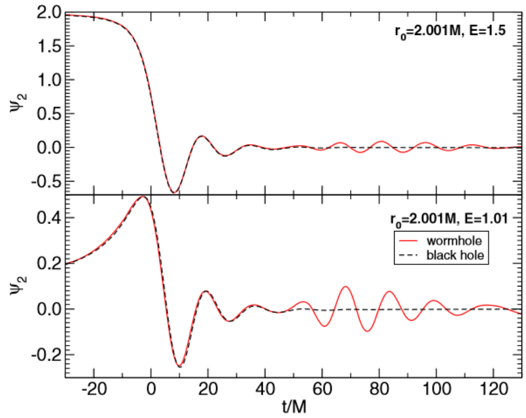

図 3: 波動関数 (l=2)、r_0=2.001M、E=1.5(上図)、E=1.01(下図) の場合に関する図。赤の曲線がホライズンのない天体を考えている場合で、黒の曲線がシュワルツシルトブラックホールについての場合であり、両者について比較した図である。

グを含みブラックホール極限 ($r_0 \to$ 2M) に近いワームホールは、初期段階ではブラックホールと極めて良く似た波形を生み出すことが分かった。

ワームホールに特有の QNMs は、リングダウン後半でのみ励起する。その特徴的なタイムスケールは

$$\Delta t = \int_{r_0}^{3M} \frac{dr}{F} \sim -2Mlog\left(\frac{\ell}{M}\right) \qquad (10)$$

である。BH 極限 ($\ell \to 0$) においては、すべての QNMs は振動数が似ており、後半で特有の振動パターンを示す。

6 まとめ

リングダウン信号の初期段階は最終的に形成される天体の QNMs ではなく、ライトリングの性質に強く依存することを示している。もしホライズンを持たない天体の質量が BH に近いなら、リングダウンの初期段階は、BH の QNMs と一致するだろう。GW150914 では、ホライズンについての最終的な証拠ではなく、一般相対論的な効果であるライトリングの存在を強く支持している。本論文の結果は、LIGO、VIRGO、KAGRA のような重力波観測装置は、リングダウンの後半を取り出し解析するべきであることを示している。

Reference

V.Cardoso,E.Franzin,P.Pani,Phys.Rev.Lett.**116**,117101 (2016).

B.P. Abbott et al. (LIGO/Virgo Scientific Collaboration), Phys. Rev. Lett. **116**, 061102 (2016).

C.J. Goebel, Astrophys. J. **172**, L95 (1972).

M. Visser, Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking (AIP, Woodbury, USA, 1996).

E.Berti,V.Cardoso,andA.O.Starinets,ClassicalQuantum Gravity **26**, 163001 (2009).

静的なブラックホール連星が作る時空中の円軌道

安積　伸幸 (大阪市立大学大学院 理学研究科)

Abstract

ブラックホール連星の研究は近年の宇宙・重力分野において非常に重要であるが、一般的なブラックホール連星の厳密解を得ることは非常に難しい。しかし最大電荷を持つ複数のブラックホールによる時空は厳密解が得られており Majumdar-papapetrou metric で記述できる。
文献 [1] では、二つの最大電荷ブラックホールが作る時空の解析の足がかりとして円軌道となる測地線の存在とその安定性の一部分について調べている。今回はこの文献のレビューに加え、同様の解析についてもう少し詳しく行う。

1 Introduction

Reissner-Nordstrom metric で記述されるブラックホールは最大電荷を持つ場合に限り、それが満たす Einstein 方程式の解は静的を仮定すれば線形解となり、任意の場所に任意の個数の最大電荷ブラックホールが存在する時空を厳密に記述することができる。この時空は厳密に記述できることから、一般的なブラックホール連星が作る時空の特徴を調べる足がかりとして多くの研究がなされている。
文献 [1] では、二つの最大電荷ブラックホールが作る時空中に、円軌道である測地線が現れる条件と場所を調べ、さらに赤道面内の軌道の動径方向の安定性について論じている。これらは二つのブラックホールの質量に依り、null な場合と timelike な場合でそれぞれ条件が異なる。
今回は、文献 [1] のレビューに加え赤道面内の軌道に対して、動径方向と垂直な方向の安定性を調べ、一定の領域に留まり続ける測地線が存在する条件を解析した。また赤道面外に現れる円軌道の数や存在領域が、二つのブラックホールの質量に対してどう変化するかをより詳しく調べた。

2 Methods

2.1 問題設定

空間に対して円筒座標をとり、全質量 M_1, M_2 の最大電荷ブラックホールがそれぞれ $(0,0,1), (0,0,-1)$ にある場合の時空を考える。この時空の計量は

$$ds^2 = -U^{-2}dt^2 + U^2(dR^2 + R^2 d\phi^2 + dz^2) \tag{1}$$

$$U(R,z) = 1 + \frac{M_1}{\sqrt{R^2+(z-1)^2}} + \frac{M_2}{\sqrt{R^2+(z+1)^2}} \tag{2}$$

と書ける。
アフィンパラメーター λ にたいして

$$\dot{x}^\mu \equiv dx^\mu/d\lambda, p_\mu \equiv g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu \tag{3}$$

とすると, 時空が軸対称・静的であることから測地線に沿った保存量

$$p_t \equiv -E, p_\phi \equiv L_z \tag{4}$$

が存在する。また 4 元速度は

$$\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu = \kappa,\ \kappa = \begin{cases} -1 & (timelike) \\ 0 & (null) \end{cases} \tag{5}$$

を満たすので、これに保存量を代入し整理すると、軌道の基本式

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\dot{z}^2 + V_{eff}(R,z) = E^2/2 \tag{6}$$

$$V_{eff}(R,z) \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{L_z^2}{R^2U^4} - \frac{\kappa}{U^2}\right) : \text{有効ポテンシャル} \tag{7}$$

が得られる。この有効ポテンシャル　$V_{eff}(R,z)$ を用いて円軌道となる測地線を調べていく。

2.2 円軌道の存在範囲

円軌道は、空間的に閉じた軸対称の測地線であり

$$\frac{\partial V_{eff}}{\partial z}=0\ and\ \frac{\partial V_{eff}}{\partial R}=0 \tag{8}$$

を満たす測地線である。R 方向の条件を書き換えると

$$\frac{M_1}{M_2}=\frac{1+z}{1-z}\left(1-\frac{4z}{R^2+(z+1)^2}\right)^{3/2} \tag{9}$$

となる。$\frac{M_1}{M_2}>0$ なので、(9) を満たす z の範囲、即ち円軌道が存在する範囲は $-1<z<1$ である。また (9) より $z=0\Rightarrow M_1=M_2$ であるので、等質量の dihole の場合のみ赤道面 (z=0 面) に円軌道となる測地線が存在する。質量の比を $q=M_1/M_2$ とし $q=1$ と $q\neq 1$ の場合に分けて議論する。

2.3 $q=1$ の時

2.3.1 赤道面内の円軌道

$q=1$ の時、赤道面に円軌道が存在する。$\left.\frac{\partial V_{eff}}{\partial z}\right|_{z=0}=0\Rightarrow M_1=M_2\equiv M$ なので、赤道面内の円軌道は

$$\left.\frac{\partial V_{eff}}{\partial R}\right|_{z=0}=0 \tag{10}$$

を null($\kappa=0$) と timelike($\kappa=-1$) の場合にそれぞれ解けばよい。

null の場合は解は角運動量に依存せず (10) の解が円軌道である。timelike の場合は解が角運動量に依存し、これは言い換えると、ある動径 R に対して適切な角運動量を与えれば、timelike な円軌道が存在するということである。よって timelike の場合 (10) は角運動量 L_z の条件に置き換えられて、$L_z^2/2=L_z^2/2(R)>0$ を満たす R の領域に円軌道が存在するので、これを満たす R の領域を調べればよい。

2.3.2 赤道面外の円軌道

(a)null の場合

$z\neq 0$ の時

$$\left.\frac{\partial V_{eff}}{\partial z}\right|_{z\neq 0}=0\Leftrightarrow R_e^2(z)=4A_e(z)-(z+1)^2 \tag{11}$$

$$A_e(z)\equiv\frac{4z}{1-\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{2/3}} \tag{12}$$

となり

$$\left.\frac{\partial V_{eff}}{\partial z}\right|_{R^2=R_e^2(z)}\equiv-\frac{1}{4}f_e(z)=0 \tag{13}$$

の解を求めればよい。

(b)timelike の場合赤道面外の timelike な円軌道の解析には”local velocity”β を用いる。local velocity とは、測地線の四元速度を tetrad

$$\mathbf{e}_t=U\partial_t,\ \mathbf{e}_R=\partial_R/U,\ \mathbf{e}_\phi=\partial_\phi/RU,\ \mathbf{e}_t=\partial_t/U \tag{14}$$

で見たときの、三元速度である。測地線が円軌道であることを仮定すると、測地線方程式の R 成分は

$$\beta=\sqrt{\frac{U}{U+R\frac{\partial U}{\partial R}}-1} \tag{15}$$

となる。timelike の時 $0<\beta<1$ なので、これに (15) を代入した条件を満たす z の領域に円軌道が存在するので、これを調べればよい。

2.4 $q\neq 1$ の時

赤道面内に円軌道は存在しないので、基本的に 2.3.2 の場合と同様の解析を行う。$R_e^2(z), A_e(z), f_e(z)$ のかわりに

$$R_u^2(z)=4A_u(z)-(z+1)^2 \tag{16}$$

$$A_u(z)\equiv\frac{4z}{1-q^{2/3}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{2/3}} \tag{17}$$

$$\left.\frac{\partial V_{eff}}{\partial z}\right|_{R^2=R_u^2(z)}\equiv-\frac{1}{4}f_u(z)=0 \tag{18}$$

を用いる。また $q>1$ と仮定する。(この仮定は一般性を失わない)

2.5 円軌道の安定性

円軌道の安定性は求めた円軌道の点 (R,z) が有効ポテンシャル $V_{eff}(R,z)$ の極小点 (安定)、極大点 (不

安定)、鞍点 (不安定) のいずれであるかを判別すればよい。これは、$V_{eff}(R,z)$ のヘッセ行列

$$H=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial R^2} & \frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial R\partial z} \\ \frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial R\partial z} & \frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial z^2} \end{pmatrix} \tag{19}$$

のトレース $tr(H)$ と行列式 $det(H)$ の符号を調べればよい。null、timelike に関わらず

$$\frac{\partial V_{eff}}{\partial R}=0, and\ , \frac{\partial V_{eff}}{\partial z}=0 \Rightarrow Tr(H)>0 \tag{20}$$

であるので、極大点は存在しない。よって $det(H)$ の符号を調べれば、円軌道の安定性がわかる。

特に赤道面の円軌道では常に $\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial R\partial z}=0$ となるので、$det(H)=\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial R^2}\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial z^2}$ となり、安定性は $\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial R^2}$, $\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial z^2}$ のみで決まる。

3 Results

3.1 赤道面内の円軌道

(a)null

null の円軌道は質量が $M(\equiv M_1=M_2)>\bar{M}\equiv\sqrt{27/8}\approx 1.83712$ の時、赤道面上に二つ存在する。それぞれの動径座標を R_{p_1}, R_{p_2} $(R_{p_1}>R_{p_2})$ とすると常に

$$\left.\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial R^2}\right|_{R=R_{p_1}}<0, \left.\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial R^2}\right|_{R=R_{p_2}}>0 \tag{21}$$

である (図 1 参照)。

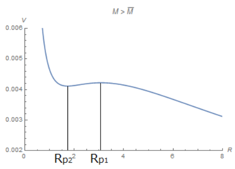

図 1: null,z=0 の場合の有効ポテンシャル

また、安定性については $M'\equiv\sqrt{27/4}\approx 2.598076$ とすると

$$\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial z^2}\begin{cases} >0 & (R>\sqrt{2}) \\ <0 & (R<\sqrt{2}) \end{cases} \tag{22}$$

$$R_{p_1}>\sqrt{5}, R_{p_2}\begin{cases} >\sqrt{2} & (\bar{M}<M<M') \\ <\sqrt{2} & (M'<M) \end{cases} \tag{23}$$

なので ((23) は図 2 参照)、global な安定性は図 3 のようになる。

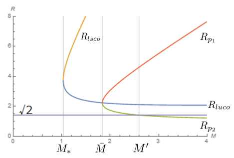

図 2: 質量 M とそれぞれの動径座標の関係

M		⋯	$\bar{M}$	⋯	M'	⋯
R_{p_1}	R方向	無し	停留点	不安定	不安定	不安定
	Z方向		安定	安定	安定	安定
R_{p_2}	R方向	無し	停留点	安定	安定	安定
	Z方向		安定	安定	不安定	不安定

図 3: null,z=0 の円軌道の安定性

(b)timelike の時

timelike な円軌道の存在範囲は、$L_z^2/2=L_z^2/2(R)>0$ より

$$0<R<R_{p_2}\ or\ R_{p_1}<R \tag{24}$$

である。また安定性については、$M_*\equiv\frac{(13+\sqrt{129})\sqrt{710+70\sqrt{129}}}{50(7+\sqrt{129})}\approx 1.02949$ とすると

$$\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial R^2}=0 \text{ の解 } R=\begin{cases} \text{無し} & (M<M_*) \\ R_{luco}, R_{lsco} & (M_*<M) \end{cases} \tag{25}$$

(ここで $R_{luco}<R_{lsco}$)

$$\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial R^2}\begin{cases} >0 & (0<R<R_{luco}, R<R_{lsco}) \\ <0 & (R_{luco}<R<R_{lsco}) \end{cases} \tag{26}$$

であり、$\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial z^2}$ の符号は (22) に一致するので、timelike な円軌道の存在領域と global な安定性は M によって変化し、図 4 のようになる。

3.2 赤道面外の円軌道

赤道面外の円軌道は (11)(16) より $z=const$ の面に対してただ一つの円軌道しか持たない。よって、円

(a) $M < M_*$

動径	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
R方向	安定		安定
z方向	不安定		安定

(b) $M_* < M < \bar{M}$

動径	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	R_{luco}	$\cdots$	R_{lsco}	$\cdots$
R方向	安定		安定		不安定		安定
z方向	不安定		安定		安定		安定

(c) $\bar{M} \leq M < M'$

動径	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	R_{p_2}	$\cdots$	R_{p_1}	$\cdots$	R_{lsco}	$\cdots$
R方向	安定		安定	円軌道無し			不安定		安定
z方向	不安定		安定				安定		安定

(d) $M' < M$

動径	$\cdots$	R_{p_2}	$\cdots$	R_{p_1}	$\cdots$	R_{lsco}	$\cdots$
R方向	安定	円軌道無し			不安定		安定
z方向	不安定				安定		安定

図 4: ttimelike,z=0 の円軌道の存在領域と安定性

軌道が存在する z を求めれば自動的に円軌道の位置が求まる。

(a)null

赤道面外の null 円軌道は (13) または (18) の解であり、(13) の解は $M < M'$ の場合に限り z_{p+}, z_{p-} ($z_{p+} > z_{p-}, z_{p+} = -z_{p-}$) の 2 個が存在する。(18) の解は 2 個の場合と 4 個の場合 ($z_{p_1} < z_{p_2} (< z_{p_3} < z_{p_4})$ とする) があり $q, M (M_1 = qM, M_2 \equiv M)$ の二つのパラメータに依存する。(q, M) と円軌道の個数は図 5 のような関係にあり、有限な (q,M) の範囲で円軌道が 4 個あることがわかる。

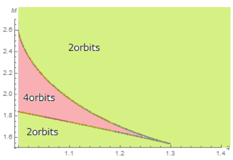

図 5: null の円軌道の個数と (q,M) の組み合わせ

(b)timelike

$0 < \beta < 1$ より timelike な円軌道の存在範囲は

$$q = 1 \Rightarrow z_{p_-} < z < 0, 0 < z < z_{p_+} \tag{27}$$

$q \neq 1$

$$\Rightarrow z_{p_1} < z < z_{equ}, z_{sing} < z < z_{p_2} (, z_{p_3} < z < z_{p_4}) \tag{28}$$

$$z_{equ} = \frac{1 + q - 2\sqrt{2}}{1 - q}, z_{sing} = \frac{q - 1}{q + 1} \tag{29}$$

となる。

4 Future Work

赤道面外の円軌道の安定性については解が完全に与えられれば判別することができるが、二つのパラメータに対して解を解析的に求めることは困難であるので、数値的に与えられた解に対して判別した結果を二つのパラメータの組に対して包括的にまとめたい。また実際の宇宙では binary blackhole は相対的に回転していると考えられるので (1) の計量に対して摂動的に相対的な回転を与えてやり、時空がどう変化するか調べていく。この際、静的な場合に安定な円軌道周りに溜まった光や物質がどのように運動するかを調べ、binary blackhole 周りの興味深い現象、特に single blackhole では起こりえないような現象が確認できることを期待する。

5 Conclusion

静的な extremal RN dihole が作る時空中には global に安定な円軌道があることが確認できた。このような測地線はは single blackhole が作る時空では存在せず binary blackhole 特有の性質であることが考えられる。

Acknowledgement

今回のテーマに対して、基礎的な部分からご指導下さった、大阪市立大学重力研究室の皆さんにこの場を借りて感謝申し上げます。

Reference

[1] Andreas Wunsch, Thomas Muller,Daniel Weiskopf & GunterWunner 2013,[arXiv:1301.7560]

重力波を用いた非一様宇宙の検証

芦田 尊 (大阪市立大学大学院 理学研究科)

Abstract

現代宇宙論の標準モデルでは宇宙は非常に大きなスケールで一様等方と仮定している。しかし、我々の宇宙が非常に大きなスケールで非一様かつ等方であると仮定すると、宇宙の加速膨張を示す観測データをダークエネルギーの導入や重力理論の修正なしに説明することができる。一様等方宇宙モデルと非一様宇宙モデルでは局所的な膨張率の値が異なり、この局所的な膨張率を観測する手段として redshift drift が有効であると考えられている。重力波干渉計 DECIGO・BBO は redshift drift を観測し、2 つの宇宙モデルを区別できる観測能力を持つ。本発表では重力波源として中性子連星を考え、重力波干渉計での redshift drift の測定精度について議論する。

1 Introduction

我々の宇宙が一様かつ等方であると仮定すると、観測データによると宇宙は加速膨張していることが知られている。一方、非一様等方宇宙モデルを仮定すると、宇宙の加速膨張をダークエネルギー・重力理論の修正なしに説明することができる。2 つの宇宙モデルは局所的な膨張率が異なるので、直接的に宇宙の加速膨張を観測することができれば 2 つの宇宙モデルを区別できる。また、2 つの宇宙モデルを区別できれば、ダークエネルギー問題を解決する可能性もある。

非一様等方宇宙モデルの例として、LTB 時空を考える。LTB 時空のメトリックは

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{\partial_r R(t,r)^2}{1-k(r)r^2}dr^2 + R^2(t,r)d\Omega^2 \tag{1}$$

で与えられる。R(t,r),k(r) はアインシュタイン方程式より定まる任意関数。

宇宙の加速膨張を観測するには、宇宙膨張による redshift の時間変化である redshift drift を観測することが有効である。

一方、一様等方宇宙モデルにおける redshift drift$\Delta_t z$ は

$$\Delta_t z = H_0 \Delta t_0 (1 + z - \frac{H(z)}{H_0}) \tag{2}$$

を満たす。Δt_0 は観測時間、H(z),H_0 はそれぞれ redshift が z の時, 現在の Hubble parameter である。Λ-CDM 宇宙モデルでは、0 ＜ z ＜ 2 の範囲で $\Delta_t z > 0$ であることが観測からわかっている。

一方、LTB 時空における redshift drift$\Delta_t z$ は以下の微分方程式を満たす。

$$\frac{d}{dz}(\frac{\Delta_t z}{1+z}) = \frac{1}{(1+z)^2}\frac{\partial_t^2 \partial_r R}{\partial_t \partial_r R}\Delta t_0 \tag{3}$$

エネルギー密度が r に対して単調増加している場合、（３）の右辺が負であることが分かっている。さらに z=0 において redshift drift が起こらない。つまり $\Delta_t z = 0$ より LTB 時空では 0 ＜ z の範囲で $\Delta_t z < 0$ である。故に 0 ＜ z ＜ 2 の範囲での $\Delta_t z$ の符号が分かれば 2 つの宇宙モデルを区別できる。しかしながら、$\Delta_t z$ の大きさは一年間の観測で 10^{-10} のオーダーでしか変化せず観測するには非常に困難である。しかし、将来計画されている重力波干渉計 DECIGO・BBO は z ＜ 2 の範囲での redshift drift を観測できる可能性を持っている。

そこで DECIGO・BBO を用いた redshift drift の測定精度について議論する。重力波源として中性子連星を考え、宇宙膨張の加速度による重力波の位相のシフトから redshift drift を観測する。

2 redshift drift による重力波の位相の補正について

宇宙膨張の加速度による重力波の位相の補正について考える。中性子連星の質量 m_1,m_2 とする。観測者

の系での coalescence time を t_c とする。Δt≡t_c-t と定義する。Δt_e を源の系での coalescenc に対する時間とし、ΔT≡($1+z_c)\Delta t_e$ を定義する。z_c は coalescence の時の redshift とする。Δt,ΔT について

$$\Delta t = \Delta T + X(z_c)\Delta T^2 \tag{4}$$

の関係を満たす。acceleration parameter X(z) を以下のように定義する。

$$X(z) \equiv \frac{H_0}{2}(1 - \frac{H(z)}{(1+z)H_0}) \tag{5}$$

一様等方空間における $\Delta_t z$ と X(z) の関係は

$$\Delta_t z = 2(1+z)\Delta t_0 X(z) \tag{6}$$

にある。

鞍点法を用いて、波形をフーリエ変換したものは以下のように表現される。

$$\tilde{h}(f) = e^{i\psi_{acc}(f)}\tilde{h}(f)|_{noaccel} \tag{7}$$

$$\psi_{acc}(f) \equiv -2\pi f X(z_c)\Delta T(f)^2 \tag{8}$$

$\tilde{h}(f)|_{noaccel}$ は宇宙膨張を考慮しない場合の波形をフーリエ変換したものに対応している。

$$\Delta T(f) = 5(8\pi\mathcal{M}_z f)^{-8/3}\mathcal{M}_z \tag{9}$$

redshifted chirp mass $\mathcal{M}_z \equiv \mathcal{M}(1+z_c)\eta^{3/5}$

（total mass $\mathcal{M} \equiv (m_1+m_2)$)

(symmetric mass ratio $\eta \equiv m_1 m_2/\mathcal{M}$）

3 Numerical Setups

redshift drift$\Delta_t z$ の測定精度を見積もる。源の連星系を特徴づける binary parameter として以下が考えられる。

$$\theta^i = \{\ln\mathcal{M}_z, \ln\eta, \beta, t_c, D_L, \phi_c, \bar{\theta}_s, \bar{\phi}_s, \bar{\theta}_L, \bar{\phi_L}, X\}$$

β を spin-orbit coupling parameter, $\bar{\phi}_c$ を coalescence phase, D_L を luminosity distance とする。$(\bar{\theta}_s, \bar{\phi}_s)$ は太陽系の重心を中心としたときの連星系の方向を指定し、$(\bar{\theta}_L, \bar{\phi}_L)$ はその座標系における連星系の軌道面の傾きを表している。(図 1)

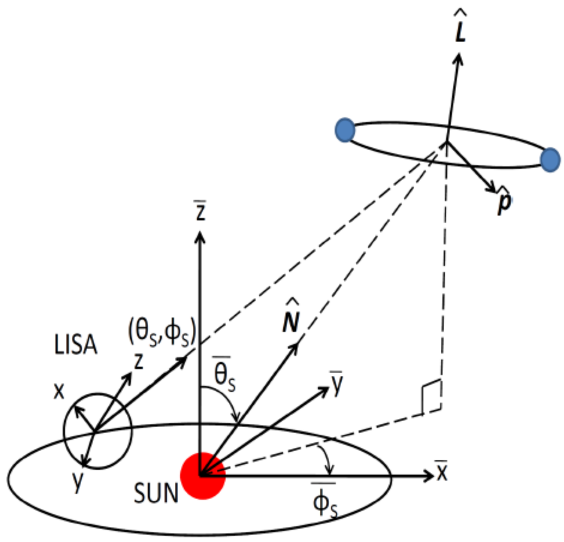

図 1: 座標系

binary parameters　θ^i の測定精度について Fisher analysis を用いることで見積もる。検出器の noise は定常かつ正規分布に従うものとする。このとき、parameter θ^i の確率分布は正規分布に従うこと知られている。標準偏差は $\Delta\theta^i \equiv (\Gamma^{-1})^{1/2}_{ii}$ で与えられる。ここで Fisher Matrix は

$$\Gamma_{ij} \equiv 4Re\int_{f_{in}}^{f_{fin}} df \frac{\partial_i\tilde{h}^*(f)\partial_j\tilde{h}(f)}{S_n(f)} \tag{10}$$

と定義される。S_n は検出器の noise spectrum を表す。積分範囲の上限値と下限値は以下

$$f_{in} = (256/3)^{-3/8}\pi^{-1}\mathcal{M}_z^{-5/8}\Delta t_0^{-3/8} \tag{11}$$

$$f_{fin} = 100Hz \tag{12}$$

f_{in},f_{fin} はそれぞれ、観測を開始した時の振動数と検出器の検出できる振動数領域の上限値を表している [2]。m_1=m_2=1.4$M_\odot$,t_c=ϕ_c=β=0 とする。以下、Λ-CDM が正しいとして計算を行う。観測から、H_0=70km/Mpc, 宇宙論パラメータの値は Ω_m=0.3,Ω_Λ=0.7 とおく。

δz=0.1 の中に存在する binary の数を $\Delta N(z)$ とし、

$$\Delta N(z) = [4\pi a_0(z)]^2\dot{n}(z)(d\tau/dz)\delta z\Delta t_0 \tag{13}$$

であらわされる。

$$a_0 r(z) = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \tag{14}$$

$$d\tau/dz = (1+z)H(z)^{-1} \tag{15}$$

z における Hubble parameter は

$$H(z) \equiv H_0\sqrt{\Omega_0(1+z)^3 + \Omega_\Lambda} \tag{16}$$

と与えられる。a_0 は現在の scale factor,r(z) を comoving distance,τ を proper look back time とする。$\dot{n}(z)$≡$\dot{n}_0$R(z) は単位 comoving volume・単位 proper time あたりの連星の数を表している。現在の値は観測より $\dot{n}_0 = 10^{-6}[Mpc^{-3}yr^{-1}]$ であることが分かっている。R は z の関数として以下

$$|z| = \begin{cases} 1+2z & z \leq 1 \\ \frac{3}{4}(5-z) & 1 \leq z \leq 5 \\ 0 & z \geq 5 \end{cases} \tag{17}$$

z_k≡0.1k+0.05(k=0,1,...) として各 z_k において、10^4sets の $(\bar{\theta}_s, \bar{\phi}_s, \bar{\theta}_L, \bar{\phi}_L)$ を乱数のとったものを用意し $[\Gamma^{-1}]_{ii}^{1/2}$ を計算し、各 z_k における平均 $[\Gamma^{-1})_{ii}]_{ave}$ を求める。各 z_k における測定精度は以下のように与えられる。

$$\Delta\theta^i = 8^{-1/2}\Delta N(z_k)^{-1/2}[(\Gamma^{-1})_{ii}]_{ave} \tag{18}$$

4 Results

図 2 は DECIGO/BBO を用いて 5 年間観測した場合の $\Delta_t z$ の測定精度を表している。z≃0.5 の付近で $\Delta_t z$>0 を観測することができる。図 3 は観測時間を 10 年にしたものである。図 3 は $\Delta_t z > 0$ より高い信頼精度で測定できる。

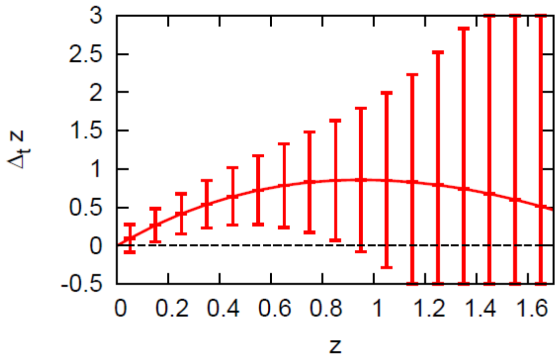

図 2: 5 年間観測した場合の $\Delta_t z$ の測定精度

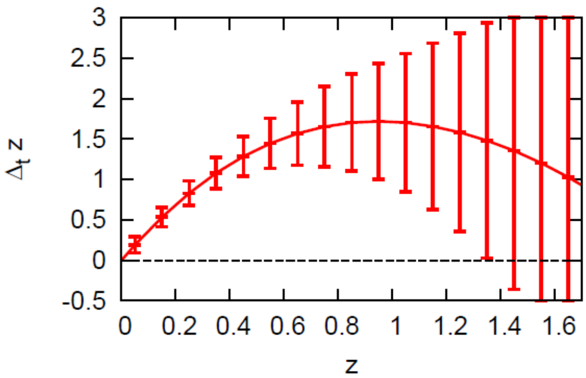

図 3: 10 年間観測した場合の $\Delta_t z$ の測定精度

5 Conclusion and Discussions

DECIGO・BBO を用いて宇宙の加速膨張を直接的に測定する測定精度について議論してきた。Λ-CDM モデルが正しいと仮定すると、5〜10 年の観測で redshift drift が正であることを観測することができる。このことから LTBvoid モデルを棄却することができる。ここでは Λ-CDM モデルが正しいと仮定した。しかし, ほかにもダークエネルギーを持つ宇宙モデルが存在する。ただ、ほかの宇宙モデルにおける redshift drift $\Delta_t z$ の値は Λ-CDM と近い値をとると考えられている。それゆえ、この結果は Λ-CDM に限ったものではないことを強調しておく。

地上に設置された重力波干渉計を用いた場合、重力波のイベント数が少ないために redshift drift を観測するのは非常に困難である。しかしながら、DECIGO や BBO とともに Einstein Telescoop を用いることで、redshift drift の観測精度はより改善されると考えられている。

また、連星の軌道は円であることを仮定した。しかし将来的には、偏心性を持った連星系における $\Delta_t z$ の測定精度について見積もる必要がある。ここでは、単純なモデルとして LTB 時空を考えたが、Swiss-Cheese 宇宙モデルなど他のモデルを用いた場合を考える必要がある。

Reference

Cutler C & Flangman E E 1994, Phys. Rev. D49 2658-2697

Yagi K & Tanaka T,Takahashi N 2010, Phys. Rev. D83 084036

Cutler C & Harms J 2006, Phys. Rev. D73 042001

軸対称時空におけるカオス現象と重力波

南 佳輝 (早稲田大学大学院 先進理工学研究科)

Abstract

本研究ではテスト粒子から放出される重力波を解析し、そこから得られる情報とカオス現象との間にどのような関係があるのかを調べる。重力波のモデルとして、対称軸上に特異点が存在する時空を考え、その時空中を運動するテスト粒子から放出される重力波の解析を行う。まずテスト粒子の軌道を求め、Poincare 断面と Lyapunov 指数を用いて軌道がカオスであるかどうかを判定する。次に、軌道がカオス的であるものとそうでないものそれぞれについて、波形やスペクトルの計算する。その重力波形・スペクトルからストークスパラメータを計算し、重力波の偏極をカオスとそうでないものとで比較する。これらの解析結果から、カオス現象から放出される重力波の特徴を議論していく。

1 Introduction

2016 年 2 月に、LIGO で重力波の直接観測に成功したことが発表された（LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration（2016））。それに続いて 2 つ目、 3 つ目の重力波も観測された。観測された重力波はどれも連星ブラックホールからのものであり、連星を構成するブラックホールの質量や、合体後のブラックホール質量まで解析された。ここまで重力波を解析できたことには、既に重力波の波形やスペクトルの理論的予測がなされてきた背景がある。

連星ブラックホール以外にも、既に多くの天体現象に関して重力の波形やスペクトルが理論的に研究されている。しかし、これらの研究は規則正しい天体運動を中心に行われており、カオス現象を伴うような複雑な系を扱っているものは数少ない。特に、一般相対論で記述されるような強重力場中におけるカオス現象についてはほとんど研究されていない。一般的な力学系はその多くが非可積分系であるため、カオス現象を伴うような系は自然界に多く存在すると考えられる。そのため、重力波が観測された今、そのような系から放出される重力波の研究は、今後発展するであろう重力波天文学において重要になってくると考えられる。

そこで本研究では重力波のモデルとしてカオス現象に注目し、放出される重力波がカオスでない現象の時とでどのように違うのかを調べる。軸上に特異点が存在する軸対称時空を考え、テスト粒子の軌道を計算し、カオス的軌道とそうでない軌道とに分類する。各軌道ごとにそこから放出される重力波に対し波形・スペクトル解析を行い、その結果を用いてストークスパラメータを計算する。これらの結果からカオス現象と重力波の関係について議論する。

2 N-Curzon Spacetime

対称軸上にＮ個の Curzon 型特異点が存在する時空（以後 N-Curzon 時空と呼ぶことにする）を考える。この時、円柱座標において、時空の計量は次式で表される（Curzon（1924））。

$$ds^2 = -e^{2U}dt^2 + e^{-2U}[e^{2k}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2] \quad (1)$$

$$U := -\sum_{i=1}^{N} \frac{M_i}{r_i} \quad (2)$$

$$k := -\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{M_i M_j}{r_i r_j} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{M_i^2\rho^2}{r_i^4} \quad (3)$$

$$r_i := \sqrt{\rho^2 + (z-b_i)^2} \quad (4)$$

ただし、b_i は軸上の特異点の位置、M_i は特異点の質量を表す。今回は $N = 2, M_1 = M_2 = M$ の場合について計算する。この時、ある初期値に対してテスト粒子はカオス的振る舞いをする（Sota, Suzuki and Maeda（1996））。

N-Curzon 時空中のテスト粒子の Hamiltonian は,

$$H = \frac{1}{2}\left[-e^{-2U}E^2 + \frac{e^{2U}}{\rho^2}L^2 e^{2U^2k}\{(p^\rho)^2-(p^z)^2\}\right]$$
$$= -\mu^2 \tag{5}$$
$$p^\rho = \dot{\rho} \tag{6}$$
$$p^z = \dot{z} \tag{7}$$

で与えられる。ただし、E、μ，L はそれぞれテスト粒子のエネルギー、質量、角運動量の z 成分、$\dot{a}$ は a の固有時間による微分を表す。これによりテスト粒子の正準運動方程式が求められる。

また、本研究ではこの正準運動方程式を数値計算によって解いているので、保存量による誤差評価が必要となる。N-Curzon 時空は軸対称なので、E、L は保存量であるから、式 (5) より、数値計算の誤差が評価できる。本研究ではこの誤差が 10^{-6} 以内になる範囲で計算を行う。

3 Quadrupole Formula

本研究では四重極公式を用いて重力波の解析を行う。四重極公式により、重力波の + モード、× モードはそれぞれ次のように書ける。

$$h_+ = \{(h^{xx}-h^{yy})\cos 2\psi + 2h^{xy}\sin 2\psi\}\frac{\cos^2\theta+1}{4}$$
$$-(h^{xx}+h^{yy}-2h^{zz})\frac{\sin^2\theta}{4}$$
$$-(h^{xz}\cos\psi + h^{yz}\sin\psi)\sin\theta\cos\theta \tag{8}$$
$$h_\times = \{2h^{xy}\cos 2\psi - (h^{xx}-h^{yy})\sin 2\psi\}\frac{\cos\theta}{2}$$
$$+(h^{xz}\sin\psi - h^{yz}\cos\psi)\sin\theta \tag{9}$$
$$h^{ij} \equiv \frac{2\mu}{r}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(X^iX^j - \frac{1}{3}\delta^{ij}X^kX_k\right) \tag{10}$$

ただし、(r,θ,ϕ)、X^i はそれぞれ重力波の観測者、テスト粒子の座標を表す。本研究では重力波の $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\phi = 0$ として議論していく。

4 Stokes Parameters

重力波の偏極の解析には Stokes パラメータを用いる。重力波の Stokes パラメータは次のように表される（Kato, Soda（2015））。

$$I = |h_+|^2 + |h_\times|^2 \tag{11}$$
$$Q = |h_+|^2 - |h_\times|^2 \tag{12}$$
$$U = h_+^* h_\times + h_\times^* h_+ \tag{13}$$
$$V = i(h_+^* h_\times - h_\times^* h_+) \tag{14}$$

ここで、

$$h_R = \frac{h_+ + ih_\times}{\sqrt{2}} \tag{15}$$
$$h_L = \frac{h_+ - ih_\times}{\sqrt{2}} \tag{16}$$

とすると、V は次のように書き換えられる。

$$V = |h_L|^2 - |h_R|^2 \tag{17}$$

式 (11)〜(14), (17) より、I は重力波の振幅、Q, U は直線偏極度合、V は円偏極度合を表す。

5 Lyapunov Exponents

軌道がカオスであるかどうかの判定には Poincare 断面だけでなく、Lyapunov 指数も用いる。Lyapunov 指数を求めるためにある N 次元の軌道に対する位相空間の偏差ベクトル $\mathbf{w}$ を考える。この時、$\mathbf{w}$ の発展方程式は次のように書ける。

$$\dot{\mathbf{w}} = \left[\mathbf{J_{2N}}\cdot\mathbf{D^2H}\right]\cdot\mathbf{w} \tag{18}$$

ここで、

$$\left[\mathbf{D^2H}\right]_{ij} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^i \partial x^j} \tag{19}$$
$$\mathbf{J_{2N}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0_N} & \mathbf{I_N} \\ -\mathbf{I_N} & \mathbf{0_N} \end{pmatrix} \tag{20}$$

ただし、$\mathbf{x}$ は位相空間における位置座標を表す。

この偏差ベクトルを用いて、Lyapunov 指数 λ は次のように定義できる。

$$\lambda = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{|\mathbf{w(t)}|}{|\mathbf{w(0)}|} \tag{21}$$

6　Results

ある二つの軌道に対するリャプノフ指数を図 1 に示す。青、オレンジの配色はそれぞれ初期条件が

$$(\rho_0/M, z_0/M, p_0^\rho/\mu, p_0^z/\mu) = (3.4, 0.0, 0.024, 0.0),$$
$$(\rho_0/M, z_0/M, p_0^\rho/\mu, p_0^z/\mu) = (2.8, 0.5, 0.0, 0.0087)$$

の時にそれぞれ対応しているただし、ともに $E/\mu = 0.943, L/\mu M = 6.8$ である。青の軌道は値が指数関数的に減少しているのに対し、オレンジの軌道は値が収束していることが分かる。よって以下では青の軌道は規則的、オレンジの軌道はカオス的として議論を進める。

カオス的軌道からと、規則的な軌道からの重力波のスペクトルを図 2，3 に示す。カオス的軌道の重力波スペクトルには、規則的な軌道では見られないような細かな構造が見られることが分かる。しかし、それと同時に、規則的な軌道と同様に特徴的な周波数に強いピークが見られる。

カオス的軌道の時と、規則的な軌道の時の重力波の Stokes パラメータをそれぞれ図 4〜6 に示す。どちらの軌道でも主な偏極は円偏極となっているが、カオス的軌道の時は偏極以外の偏極が多く混じっていることが分かる。

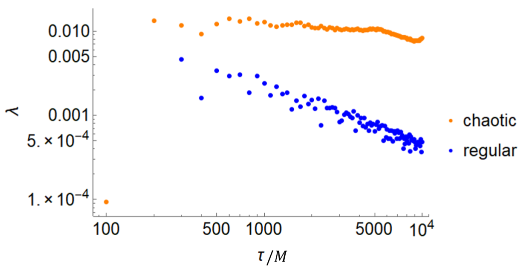

図 1: Lyapunov 指数

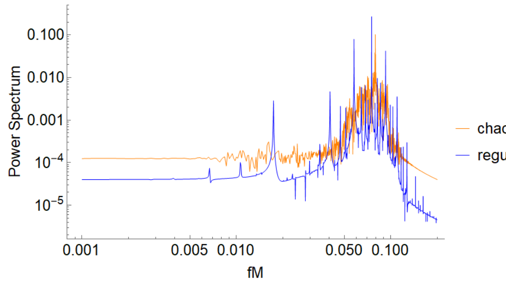

図 2: +偏極スペクトル

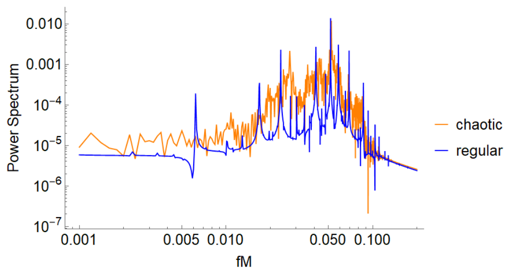

図 3: × 偏極スペクトル

7　Conclusion

カオス的な軌道の重力波スペクトルには、細かな構造が見られた。これはカオス的軌道に様々な周期の運動が入り混じっているためであり、これはカオス的軌道からの重力波の特徴であると言える。また、特徴的な周波数にピークが見られるが、これはテスト粒子の r、z、ϕ それぞれが主となる周期を持っているためであると考えられる。そのため、カオス的軌道のような複雑な現象から放出される重力波でも、これらの特徴的なピークを解析することで、重力波源の情報を得ることができると考えられる。

重力波の偏極については、円偏極が主となっていた。これはテスト粒子の軌道が円軌道に近いため、放出される重力波も円偏極が主となっていると考えられる。しかし、カオス的軌道のものは規則的な軌道に比べて円軌道からのずれが大きいため、規則的な軌道以上に円偏極以外の偏極も入り混じっていると推測される。これもスペクトルの時と同様に、カオス的軌道からの重力波の特徴であると言える。

以上のことから、カオス的軌道からの重力波には、規則的な軌道からの重力波と比べ、スペクトルや偏極に複雑な構造が見られることが分かる。しかし、この結果だけではこの系に特異な特徴である可能性があるため、異なる系に対しての解析が必要となる。これは今後の課題とする。また、そのような細かな構造は振幅が主要なピークに比べて小さく、観測時のノイズに埋もれ、観測できない可能性がある。その

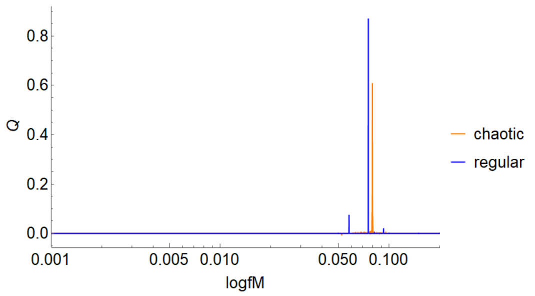

図 4: Q

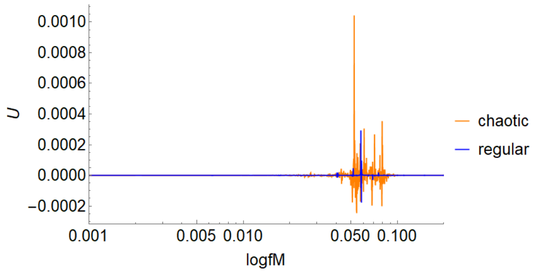

図 5: U

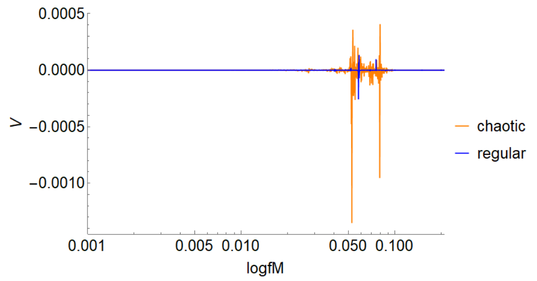

図 6: V

ため、ノイズも考慮した議論が必要となる。これについても今後の課題とする。

さらに、議論の正当性を確かめるために、軌道が解析的に明らかである可積分系において、テスト粒子の軌道に対する Stokes パラメータの振る舞いについて調べる必要がある。これに関しては Schwarzschild 時空において現在解析を進めている。

8 acknowledgement

この研究をするに当たり、指導教員の前田恵一教授をはじめ、前田研究室に所属する多くの方々のご恩情とご助力を賜りました。この場を借りてお礼申し上げます。

Reference

H. E. J. Curzon, Proc. Lond. Math. Soc. 23 (1924) 477.

Y. Sota, S. Suzuki, K. Maeda, Class. Quantum Grav. 13 (1996) 1241.

R. Kato and J. Soda, Phys. Rev. D 93, 062003 (2016).

重力波を用いた Horndeski 理論由来の加速膨張への制限

新居 舜 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙の加速膨張を説明する方法に、Horndeski 理論を用いたものがある。Horndeski 理論は修正重力理論の 1 つで、通常ある自由度 2 のテンソル場に加えてスピン 0 のスカラー場を自由度として持つ、運動方程式が 2 回微分までを含む最も一般的な重力理論である。Horndeski 理論は 4 つの任意関数を用いて決定されるが、Bellini&Sawicky 2014 により、観測量に関係する 4 つパラメータを指定することでモデルの分類が可能となった。そのうち、重力定数の時間変化率 α_M と重力波の伝搬速度のずれ α_T は、宇宙論的距離を伝搬する重力波の観測から制限することが可能である (Lombriser & Taylor 2016)。本研究では、宇宙膨張の時間進化を Λ-CDM モデルで与え、スカラー場の時間発展の形を時間の線形関数で近似した場合に、α_M と α_T の間の相関をモンテカルロ法を用いて調べた。その結果、赤方偏移 $z \sim 0.1$ の宇宙論的距離において、Lombriser & Taylor 2016 で示された結果を再現することができた。さらに、具体的なモデルの判別がどの程度できるかを議論した。

1 Introduction

1998 年の Ia 型超新星を用いた観測により、現在の宇宙が加速膨張していることが驚きとともに伝えられてから久しい [1, 2]。この後、WMAP や PLANCK 宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) の非等方性の観測 [3, 4] や、近年 SDSS 銀河サーベイを用いたバリオン音響振動 (BAO) の観測 [5] からも宇宙の加速膨張は支持されており、宇宙の時間進化 Λ-CDM モデルで記述されることが確立した。

その一方で、宇宙を加速膨張される物理過程については未だに明らかとなっていないことが多い。実際、Λ-CDM モデルは宇宙膨張の時間発展や構造形成をよく説明する一方で、加速膨張の起源を宇宙項として仮定する。宇宙項の起源を説明する方法として、圧力負の物質が宇宙に満ちていると考えるダークエネルギーがある。その代表的なものにクイッテッセンスモデル [6] や K-essense[7] などがある。しかし、こうしたモデルにはスピン 0 のスカラー場を新たな自由度として与える必要があるが、スカラー場の起源はわからないままである。そこで、こうしたスカラー場のような新たな自由度を重力理論に含まれる物理的自由度であると考えるのが、修正重力理論である。Horndeski 理論はそうした理論のうち、スピン 0 のスカラー場を含み、運動方程式が時間と空間の 2 回微分までを含む場合の最も一般的な重力理論である [8]。Horndeski 理論には先ほども出てきたクイッテッセンスモデルや K-essense の他に、$f(R)$ 重力理論 [9]、Gallileon 重力理論 [10] などが含まれている。しかし、こうした理論はモデルごとの差異が大きく、モデルと独立した解析方法は今のところ知られていない。

ところが、最近 Bellini&Sawicky 2014[11] により、観測量と結びついた 4 つのパラメータを用いて宇宙論的摂動論を解くことが提案されている。4 つのパラメータは Horndeski 理論を決定する 4 つの任意関数の関数形によって決まっている。より具体的には 4 つのパラメータ α_M、α_K、α_B、α_T は観測量と結びついている。しかし、この 4 つのパラメータがどのように相関と縮退をしているかは未だに調べられていない。しかし、Lombriser & Taylor 2016 [12] によって、修正重力理論特有の効果で加速膨張をするような場合では α_M と α_T の間に一定の相関があることが示されている。さらに, Lombriser & Taylor 2016 では、重力波の観測 [13] からモデルに制限がつけられることを示唆している。本研究は、4 つのパラメータのうち、α_M と α_T の間の相関をモンテカルロ法によって調べた。宇宙膨張の時間進化を Λ-CDM モデルに一致すると仮定し、スカラー場の時間発展は時

間の線形関数になるように近似した。その結果、赤方偏移 $z \sim 1$ においては、このような近似的な解析で Lombriser & Taylor 2016 の結果を再現することに成功した。さらに、Lombriser & Taylor 2016 では示されていないかった、各モデルごとの分類も行った。これらの結果については本集録の 3 章で詳説する。

2 修正重力理論における重力波の伝搬

ここでは、修正重力理論を考えた場合に重力波の伝搬がどのように変わるのかの一般論を行う。FRW 時空を背景時空とした場合に修正重力理論における重力波の伝搬は、

$$h''_{ij} + (2+\nu)\mathcal{H}h'_{ij} + (c_T^2 k^2 + a^2\mu^2) = 0\,, \qquad (1)$$

で与えられる [14]。ここで、' は共形時間 τ による微分、a はスケールファクター、k は共同座標で見た波数である。式. (1) 含まれているパラメータ ν、c_T、μ はそれぞれ、重力定数の時間変化率、重力波の伝搬速度、グラビトンの質量である。例えば、$\nu = c_T = \mu = 0$ の場合は一般相対性理論と一致する。今回は Horndeski 理論を考えるため、$\mu = 0$ で固定する。Bellini & Sawicky 2014 のパラメータを用いると、残った ν と c_T は

$$\nu = 1 + \alpha_M,\ c_T^2 = 1 + \alpha_T\,, \qquad (2)$$

と関係つけられる。観測と結びつけると、α_M は重力波の振幅の減衰率 (standard siren 法) から、α_T は異なる経路を伝搬する重力波の到来時間の差や電磁波対応天体から発生する電磁波と重力波の到来時間との差から検出することができる (arrival time 法)。

3 重力波から Horndeski 理論起源の加速膨張を探る

3.1 Lombriser & Taylor 2016 における議論

Lombriser & Taylor 2016 では Horndeski 理論の作用を

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\,(\Omega(t)R - 2\Lambda + \mathcal{L}_s)\,, \qquad (3)$$

と与える。ここで、R はリッチスカラーである。ここでは説明を簡単にするため、スカラー場のラグランジアンは $\mathcal{L}_s$ と省略した (詳細は [11])。$\Omega = 1$ の場合はスカラー場と相互作用する一般相対性理論と一致し、$\Lambda > 0$ とおけば Λ-CDM モデルと一致する。ここでは逆に $\Lambda = 0$ とし、Ω の時間変化を用いて加速膨張を起こす場合を考える。このとき $\Omega = M_*^2 c_T^2$ と表すことができる。c_T は先ほどと同様に重力波の伝搬速度であり、M_* は時間変化する重力結合を表す修正されたプランク質量である。実は M_* を時間で微分すると、

$$\frac{1}{M_*^2}\frac{dM_*^2}{Hdt} = \alpha_M \qquad (4)$$

という関係で結ばれる。Lombriser & Taylor 2016 では、Ω の時間変化が宇宙年齢とほぼ同じ時間であると見積もり、

$$\left|\frac{\dot{\Omega}}{H\Omega}\right| = \left|\alpha_M + \frac{\dot{\alpha}_T}{H(1+\alpha_T)}\right| \geq 1\,, \qquad (5)$$

となるとして、α_M と α_T の相関を求めている。具体的には図 1 のようになる。赤く塗られた領域が式.(5) で与えられる領域である。図 1 を見ると、重力波を用いた観測 (arrival time と standard siren) により、大部分のモデルが除外できることが示されている。

3.2 モンテカルロ法を用いた α_M と α_T の相関関係の評価

前節で見たように、修正重力理論由来の加速膨張では、α_M と α_T の間に図 1 のような相関があることがわかった。この節では、モンテ

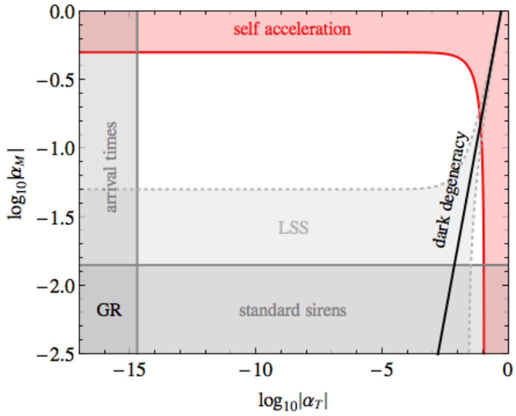

図 1: α_M と α_T の相関。ここでは $\Omega = 1 + \Omega_+ a^4$($\Omega_+$ は定数) という形を仮定している。

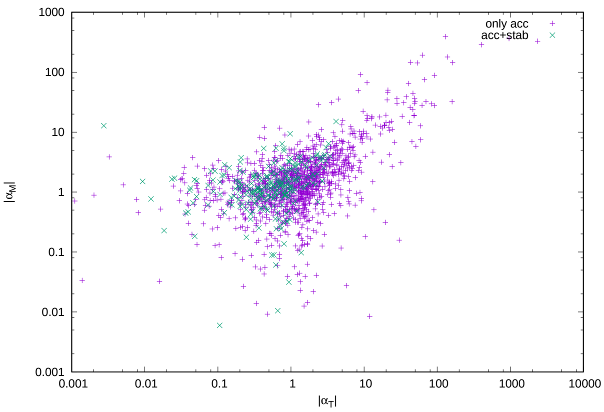

図 2: α_M と α_T の相関。100,000 個の乱数のうち、加速膨張の条件 $-1 \leq w < -1/3$ のみを満たす場合 (only acc) と、$-1 \leq w < -1/3$ に加えて、摂動量の安定性を課した場合 (acc+stab) がそれぞれプロットされている。

カルロ法を用いて Horndeski 理論の任意関数 $K(\phi, X), G3(\phi, X), G4(\phi, X), G5(\phi, X)$($X$, G_i の定義は Bellini & Sawicky 2016 に準拠する。) の関数形を決定する具体的な方法論を述べ、その結果を示す。まず、スカラー場の時間発展は

$$\phi(t) = M H_0 t_{LB}\,, \tag{6}$$

と時間の線形関数で与えられることを仮定した。ここで t_{LB} は look back time、$M \equiv \sqrt{M_{\rm pl} H_0}$ である。次に Horndeski 理論の任意関数が

$$K, G_i(\phi, X) \supset \phi, X, \phi X, \phi^2, X^2 \ (i = 3, 4, 5)\,, \tag{7}$$

と与えられると仮定し、各項の係数を-1 から 1 の間の乱数として与えた。その結果、加速膨張をする条件を与えた場合の理論の分布は $\alpha_M - \alpha_T$ 平面で図 2 のようになった。図 2 からわかるように、Lombriser & Taylor 2016 の結果を再現することができた。さらにそれに加えて、パラメータの存在領域が右上に集中している傾向を初めて見い出した。これは、図 1 における黒実線が $|\alpha_M|, |\alpha_T| \geq 1$ の領域に延長されたものである。

4 Conclusion

本研究は、重力波の伝搬に関係する Horndenski 理論のパラメータ α_M と α_T の間の相関関係を、モンテカルロ法を用いて調査した。その結果、スカラー場の時間発展を時間の線形関数で与えた場合、Lombriser & Taylor 2016 の結果を再現することができた。さらにそれに加えて、パラメータの存在領域が右上に集中している傾向を初めて示した。現在行っているスカラー場の近似はモデルとは独立に与えている。それゆえ、それぞれの任意関数ごとに背景時空のスカラー場の運動を解いた場合のハッブルパラメータと比較してみると 20% の相対誤差が生じる場合があった。したがって、より近似精度を向上させるために、$H0 t_{LB}$ の高次項を加え、誤差が最小になるような係数を求めることが今後の課題となる。また、今回の手法では、重力波の伝搬に関係する α_M や α_T だけではなく、宇宙の密度場の 1 次摂動に関係する α_K と α_B との相関を同時に得ることができる。CMB の非等方ゆらぎを計算するボルツマンコード hi-CLASS[15] では、4 つのパラメータ α_M、α_K、α_B、α_T の間の相関を手で仮定する必要がある。しかし、本研究の結果を応用すればことでモデルごとの違いをより正確に反映した相関関係を与えることができるようになる。今後は CMB や BAO の観測データと重力波観測を組み合わせることにより、観測と整合的な重力理論を調べていきたい。

Acknowledgement

本研究を遂行するにあたって、名古屋大学 宇宙論研究室の西澤篤志助教には計算方法の決定や結果の議論など、多くの時間を割いていただいた。この場を借りて感謝の意を述べさせていただきたい。

Reference

[1] A.G. Riess *et al.*, Astron. J. **116**, 1009 (1998).

[2] S. Perlmutter *et al.*, Astrophys. J. **517**, 565 (1999).

[3] E. Komatsu *et. al* Astrophys. J.Suppl. 192:18 (2011)

[4] R. Adam *et al.* (Planck Collaboration), Planck 2015 results. I. Overview of products and scientific results, Astron. Astrophys. **594**, A1 (2016).

[5] M. Ata *et. al* arXiv:1705.06373 [astro-ph.CO]

[6] P. Ratra and L. Peebles, Phys. Rev. D. 37 (12) 3406 (1988)

[7] C. Armendariz-Picon, V. Mukhanov, and P J. Steinhardt, Phys.Rev.D63:103510 (2001)

[8] G. W. Horndeski Int. J. Theor. Phys.10 363-384 (1974)

[9] T. P. Sotiriou *et. al* Rev. Mod. Phys. 82 451-497 (2010)

[10] C. Deffayet *et. al* Phys.Rev. D80 064015 (2009)

[11] E. Bellini and I. Sawicki, JCAP07 050 (2014)

[12] L. Lombriser and A. Taylor, JCAP03 031 (2016)

[13] B. P. Abbott *et al,*. (LIGO Scientific and Virgo Collaborations), Phys. Rev. Lett. **116**, 061102 (2016).

[14] I. D. Saltas *et. al* Phys. Rev. Lett. **113**, 191101 (2014)

[15] M. Zumalacarregui *et. al*, NORDITA-2016-41

f(R) gravity 理論における Ernst 形式の利用と応用について

上田　周 (東京学芸大学大学院 教育学研究科)

Abstract

Ernst 形式を用いることで、場の方程式を複素スカラー関数を用いて 1 つの非線形微分方程式に変形することができ、それは、軸対称定常時空において、有用な表現であることが知られている。Einstein eq より導かれる Ernst 形式は、修正重力理論である f(R) gravity 理論へ一般化されている。f(R) gravity 理論とは、作用の曲率項に曲率 R の関数である f(R) をおくことで、修正重力理論を一般化した理論である。f(R) gravity 理論において、定常時空における中性子星の作る重力場についての応用が考えられている。今後の展望としては、Ernst 形式を用いて、時空の離散化について考えていきたいと考えている。

1　Introduction

f(R) gravity 理論は、ダークマターやダークエネルギーを仮定することなく、観測結果を記述しようという修正重力理論の 1 つである。GR において用いられている Ernst 形式の f(R) gravity 理論への一般化について考える。ここで Ernst 形式とは、GR において定常な軸対称真空時空でのアインシュタイン方程式の表現の 1 つであり、本来、複雑な Einstein equation を 1 つの複素変数を用いて 1 本の非線形偏微分方程式に変形することができる。キリング・ベクトルを 2 つもつような時空において Ernst 形式は有効であることが知られている。1960 年代には非線形偏微分方程式の正確な解を生成する逆散乱法という方法が発見された。また、ソリトン解の性質を用いることで、既存の解から新たな解を生成できるのも Ernst 形式の利点の 1 つである。軸対称定常時空におけるコンパクト天体の作る周囲の時空について、中性子星を用いて解を求めていく。

2　Equation of motion in f(R) gravity

定常軸対称時空について考える。Wyle 座標 t, ρ, ϕ, z で表される Wyle-Lewis-Papapetrou line element を用いる。

$$ds^2 = U^{-1}\left[e^{2\gamma}(dz^2 + d\rho^2) + B^2 d\phi^2\right] - U(dt - \omega d\phi)^2 \quad (1)$$

ここで、U, γ, B, ω は ρ, と z の関数である。

f(R) gravity は GR の自然な一般化であり、作用は Einstein-Hilbert action に見られる Ricci scalar, R を R の関数 $f(R)$ に置き換えたもので表され、

$$\mathcal{A} = \int d^4x\sqrt{-g}f(R) \quad (2)$$

となる。ここで g は $det(g_{\mu\nu})$ である。

これより、ラグランジュの未定乗数法を用いるとラグランジアンは、

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = {} & \frac{e^{2\gamma}B}{U}\left[f(R) - Rf'(R)\right] + \frac{f'(R)}{2BU^2}\left[4BU^2\nabla B\cdot\nabla\gamma\right. \quad (3)\\ & \left.+U^4\nabla\omega\cdot\nabla\omega - B^2\nabla U\cdot\nabla U\right] + \frac{f''(R)}{U}2U\nabla R\cdot\nabla B\\ & +B\nabla R\cdot\nabla\gamma - B\nabla R\cdot\nabla U\end{aligned}$$

となる。このラグランジアンを用いて、構成関数 U, γ, B, ω それぞれについての eom は次のようになる。

$$\begin{aligned}0 = {} & \tfrac{e^{2\gamma}B}{U}\left[Rf'(R) - f(R)\right] + f'(R)\nabla^2 B \quad (4)\\ & +f''(R)\left[2\nabla B\cdot\nabla R + B\nabla^2 R\right] + Bf'''(R)\nabla R\cdot\nabla R\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 = {} & 2^{-2\gamma}B\left[f'(R)\nabla^2 B - f''\nabla B\cdot\nabla R\right. \quad (5)\\ & \left.-2f''(R)B\nabla^2 R - 2Bf'''(R)\nabla R\cdot\nabla R\right] + \tfrac{B^2 f(R)}{U}\end{aligned}$$

$$0 = \nabla\cdot\left[\frac{U^2}{B}f'(R)\nabla\omega\right] \quad (6)$$

$$0 = \frac{e^{2\gamma}B}{U^2}\left[f(R) - Rf'(R)\right] + \frac{f'(R)}{B}U\nabla\omega\cdot\nabla\omega + \frac{f'(R)}{U^3}\nabla U\cdot\nabla U + \frac{f'(R)B}{U^2}\nabla R\cdot\nabla U + \nabla\cdot\left[\frac{f'(R)B}{U^2}\nabla U + \frac{f''B}{U}\nabla R\right] \quad (7)$$

γ, B についての eom より γ を消去することで次の eom を得る。

$$0 = Rf'(R)\left[\frac{2f(R)}{R}\nabla^2 B - f'(R)\nabla^2 B + f''(R)\nabla B\cdot\nabla R + 2Bf''\nabla^2 R + 2Bf'''(R)\nabla R\cdot\nabla R\right] - Bf(R)\left[f''(R)\nabla^2 R - \frac{f''(R)}{B}\nabla B\cdot\nabla R + Bf'''(R)\nabla R\cdot\nabla R\right] \quad (8)$$

以上より、4 つの構成変数に対して 4 本の eom を得ることができた。

3 Ernst equation

前節で導いた eom を Ernst 形式を用いて書き換える。

そこで、U,ω をまとめ、複素変数 $\mathcal{E} = U + i\omega$ を導入することで、eom を 1 複素変数 $\mathcal{E}$ だけの閉じた方程式に帰着させることができる。

$$0 = f''(R)\Re(\mathcal{E})\left[B\Re(\nabla\mathcal{E}) - \Re(\mathcal{E})\nabla B\right]\cdot\nabla R + i\left\{\nabla\left[\frac{\Re(\mathcal{E})^2}{B}f'(R)\right]\cdot\Im(\nabla\mathcal{E}) + \frac{\Re(\mathcal{E})^2}{B}f'(R)\Im(\nabla^2\mathcal{E})\right\} + f'(R)\left\{\frac{\Re(\mathcal{E})^4}{B}\Im(\nabla\mathcal{E})\cdot\Im(\nabla\mathcal{E}) + \Re(\mathcal{E})\nabla\cdot\left[B\Re(\nabla\mathcal{E})\right] - \Re(\mathcal{E})^2\nabla^2 B - B\Re(\nabla\mathcal{E})\cdot\Re(\nabla\mathcal{E})\right\} \quad (9)$$

これより、$f(R), B$ が与えられれば $\mathcal{E}$ について解くことができ、この式は、Ernst equation を f(R) gravity 理論に一般化したものである。

f(R) gravity 理論での場の方程式の具体的な解の手順を説明する。

初めに、調べたい重力理論での、関数 f と scalar curvature R の ansatz を決定する。R は、eom 導出の際の関係式より求めることができる。

$$\sqrt{-g}R = \frac{1}{U}\nabla B\cdot\nabla U + \frac{U^2}{2B}\nabla\omega\cdot\nabla\omega - \frac{3B}{2U^2}\nabla U\cdot\nabla U - 2\nabla^2 B - 2B\nabla^2\gamma + \frac{B}{U}\nabla^2 U \quad (10)$$

f, R が決まれば式より、B を一意的に決めることができる。

次に、B がわかっていれば、Ernst eq は U,ω について解くことができる。そして、B, U, ω が決まれば直ちに γ が求まり、構成変数がすべて定まる。

この変数において、R の関係式が満たされるかどうかを確かめることで、定められた解が、仮定した ansatz において実在する時空であるかどうかを確かめることができる。

・$f(R) = R, B = \rho$ においてカー解について考える。

Ernst eq は、

$$0 = \Re(\mathcal{E})\left[\nabla^2 + \frac{\partial_\rho}{\rho}\right]\mathcal{E} - \nabla\mathcal{E}\cdot\nabla\mathcal{E} \quad (11)$$

で、ここで $\mathcal{E} = U + i\phi$ であり、

$$\frac{B}{f'(R)U^2}\nabla_3\phi = -n\times\nabla_3\omega \quad (12)$$

の関係で ω と ϕ は結ばれている。

ここに楕円体座標 $\rho = l(x^2-1)^{1/2}(1-y^2)^{1/2}, z = lxy$

$$d\rho^2 + dz^2 = l^2(x^2-y^2)\left[(x^2-1)^{-1}dx^2 + (1-y)^{-1}dy^2\right] \quad (13)$$

を導入すると、カー解のエルンストポテンシャル $\xi \equiv (1-\mathcal{E})(1+\mathcal{E})$ は

$$\xi = (px - iqy)^{-1}, p^2 + q^2 = 1 \quad (14)$$

で与えられる。ここで、p, q は定数である。

これより、カー解は次のようにあらわされる。

$$f = \frac{p^2x^2 + q^2y^2 - 1}{(p^2x^2+1)^{-1} + q^2y^2} \quad (15)$$

$$e^{2\gamma} = \frac{p^2x^2 + q^2y^2 - 1}{p^2(x^2-y^2)} \quad (16)$$

$$\omega = \frac{2Mq}{p^2x^2 + q^2y^2 - 1}(1-y^2)(px+1) \quad (17)$$

4 Ernst eq の応用 例：楕円体中性子星

前節での手順に従い、楕円体中性子星の作る重力場を考える。GR において球対称でない静的なコンパクト天体のつくる重力場を記述する the Zipoy-Voorhees metric を f(R) gravity 理論に一般化した解を求める。

scaral curvature として楕円体の Ricchi scalar

$$R = R_0(\rho^2 + z^2)^\Gamma \tag{18}$$

を仮定する。ここで、R_0 は定数であり、現実的な漸近的平坦な解を得るために、$\Gamma \leq -1$ or $R_0 = 0$ とする。

the Zipoy-Voorhees metric より、構成変数は以下のようになる。

$$U_{zv} = \left[\frac{R_+ + R_- - 2(1+\varepsilon)/M}{R_+ + R_- + 2(1+\varepsilon)/M}\right]^{1+\varepsilon} \tag{19}$$

$$\gamma_{zv} = \frac{(1+\varepsilon)^2}{2}\log\left[\frac{(R_+ + R_-)^2 - (1+\varepsilon)^2/M^2}{4R_+R_-}\right] \tag{20}$$

$$\omega = 0 \tag{21}$$

$$B = \rho \tag{22}$$

ここで、

$$R_\pm = \sqrt{\rho^2 + [z \pm (1+\varepsilon)/M]^2} \tag{23}$$

であり、M は天体の質量、ε は楕円率 parameter である。
ε の値により次のように場合分けされる。

- $\varepsilon = 0$:Schwarzschild BH
- $\varepsilon > 0$：more oblate than a Schwarzschild BH
- $\varepsilon < 0$：more prolate than a Schwarzschild BH
- $\varepsilon = -1$：Minkowski ones

f(R) gravity 理論への拡張の簡単な例として構成変数 $\gamma = \gamma_{zv}$ であると仮定し、

$$f(R) = f_0 R^\alpha, \alpha = cost \tag{24}$$

における解を調べる。

初めに自明な解として、$R_0 = 0, \nabla^2 B = 0, \alpha \leq 1$ が得られる. また、$R_0 \neq 0$ においては、$\gamma = \gamma_{zv}$ の仮定の下で $f(R)$ が R のべき乗の関数になる Γ が存在しないため、解は存在しない。
次に、非自明な $R_0 = 0$ を満たす解を見ていく。$\nabla B = 0$ であるので、$B = \rho$ としても GR において一般性は失われない。ここで、

$$U = e^{2Q} U_{zv} \tag{25}$$

の関係を導入する。Q は無限遠で 0 になる関数であり。$\alpha > 1$ とおき、f(R) gravity 理論ににおいて考えるとあらゆる ω, Q において、Ernst eq が成立する。また、このとき、構成関数について立てた eom はすべて満たされる。残りの Ricci scalar に関する式より

$$\nabla\omega \cdot \nabla\omega = \frac{4e^{-4Q}\rho^2}{U_{zv}^3}\left[\nabla U_{zv} \cdot \nabla Q \right. \tag{26}$$
$$\left. + U_{zv}\left(\nabla Q \cdot \nabla Q - \nabla^2 Q - \frac{Q_{,\rho}}{\rho}\right)\right]$$

が成り立つ。無限遠において $Q = 0$ より ω は必ず消去される。これより、$\omega = Q = 0$ は明らかに解として成り立ち、それは the Zipoy-voorhees 解を表す。この式より、f(R) gravity 理論での the Zipoy-voorhees metric での回転（静的な）時空の一般化において多くの自由度があるため、Q の選択に対して一意に対応する ω が決められる。これより、the Zipoy-voorhees metric の一般化は無数に存在することがわかる。

ここで、具体的な Q の例として

$$Q = -\ln(1 - \sigma U_{zv}) \tag{27}$$

とについて見ていく。σ は任意の定数であり、$\omega = 0$ において、静的解を得る。(26) 式より導かれるように、任意定数 σ において $R = 0$ であり、f(R)gravity 理論における場の方程式を満たす。しかし、σ が 0 をとらない限り、Ricci tensor が 0 になることはなく、$\varepsilon \to 0$ において、the Reissner-Nordstrom metric を得る。

また、the Zipoy-voorhees metric を含む、より一般的な metric においても解を記述することができる。これらより、(18) から (26) で与えられる metric を用いることで、あらゆる事象において、f(R) gravity 理論での変形された中性子星のつくる重力場をを記述することができる。

5 conclusion

本研究において、定常軸対称時空における Ernst 形式の f(R) gravity 理論への一般化について考察した。また、Ernst 形式を用いて楕円体中性子星のつくる重力場について考察した。今後の展望としては、時空を記述する際に追加した新たな parameter に物理的解釈を与えること。また Ernst 形式を用いて時空の離散化について考えていきたい。

Reference

A. G. Suvorov and A. Melatos 2016, Phys Rev, D 94, 044045

Quadratic 修正重力における Quasi-Circular バイナリのインスパイラル

森　彩乃 (東京理科大学大学院 理学研究科)

Abstract

重力波は一般相対性理論から予言された時空の歪みが波動現象として伝わるものである。一般相対性理論 (GR) を膨張宇宙の中で考えた時に、重力理論が変更されている可能性があるため修正重力理論を取り扱う必要がある。[1] では Quasi-Circular な Black Hole(BH) バイナリのインスパイラルする状態に対し Quadratic な重力を持つ作用を考え、Einstein-Dilataon-Gauss-Bonne 理論と Chern-Simons 理論を特別な場合として扱う。その際に Post-Newton 展開を用いてソース項の評価をするため GR での重力波の PN 展開をする。

1 Introduction

重力波は一般相対論から存在を予言され、時空の小さな歪みが波動として伝搬する現象である。重力の相互作用は電磁気力や強い相互作用、弱い相互作用に比べてとても小さいことが知られている。その存在は 1980 年代には間接的には証明されており、2016 年 2 月に LIGO より直接的に観測されたと発表された。重力波は質量を持った物体が加速度運動することで発生するが、観測できるほどの大きな振幅を持つには、中性子星やブラックホール (BH) などのコンパクト連星など、非常に大きな質量の天体が加速度運動をする必要がある。一般相対性理論 (GR) を膨張宇宙の中で考えた時に、重力理論が変更されている可能性があるため修正重力理論を取り扱う必要がある。

2 重力波

ミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ から微小にズレた時空

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{1}$$

を考える。ここで $h_{\mu\nu}$ は対称テンソルで、
$|h_{\mu\nu}| \ll 1$ とする。ここで

$$\begin{aligned} \phi_{\mu\nu} &\equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}hg_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu} && (2) \\ h &\equiv h^i_i = \eta h^{\mu\nu}h_{\mu\nu} && (3) \end{aligned}$$

とする。真空中を伝播する平面波の解を

$$\phi_{\mu\nu} = a_{\mu\nu}\exp(ik_\alpha x^\alpha) \tag{4}$$

とし、重力波が x^3 方向に伝播しているとすると、$k^\alpha = (k, 0, 0, k)$ である。ここで $\omega = k$ と定義し、さらに微小座標変換 $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$ を行うと、

$$\xi^\mu(x) = \frac{1}{i}\epsilon^\mu \exp(-ikx^0 + ikx^3)$$

となり、これらを整理すると

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} = \phi_{\mu\nu} = h^+ e^+_{\mu\nu}&\exp(-ikx^0 + ikx^3) \\ +h^\times e^\times_{\mu\nu}&\exp(-ikx^0 + ikx^3) \end{aligned} \tag{5}$$

このような重力波の表現を TT 表現と呼ぶ。ここで

$$e^+_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^\times_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であり、$h^+, h^\times$ は振幅を表す。

3 Post-Newton, Post-Minkowskian 展開

3.1 Post-Newton 展開

Post-Newton(PN) 展開は、弱重力場での $\frac{v}{c}$ をべきとする展開である。以下の計量を定義する。

$$\mathfrak{g} := \sqrt{-g}g^{\alpha\beta} \tag{6}$$

ここで、$det[\mathfrak{g}^{\alpha\beta}] = g$
また、harmonic 座標条件より、

$$\partial_\beta \mathfrak{g}^{\alpha\beta} = 0 \tag{7}$$

ポテンシャル $h^{\alpha\beta}$ を

$$h^{\alpha\beta} := \eta^{\alpha\beta} - \mathfrak{g}\alpha\beta \tag{8}$$

と定義する。ここで、以下のような一般的な Schwarzschild 時空を考える。

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2\rho}\right) d(ct)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2\rho}\right)^{-1} d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin\theta d\phi^2)$$

(t, ρ, θ, ϕ) は Schwarzschild 座標である。PN 展開を行うために、(9) 式の harmonic 条件を用いて新しい形へと修正する。以下のように 4 つのスカラー場 (cT, X, Y, Z) を定義する。

$$cT := ct \tag{9}$$

$$X := (\rho - GM/c^2)\sin\theta\cos\phi \tag{10}$$

$$Y := (\rho - GM/c^2)\sin\theta\sin\phi \tag{11}$$

$$Z := (\rho - GM/c^2)\cos\theta \tag{12}$$

これらを harmonic 座標へと変形すると (9)-(12) 式は

$$x^0 = ct, \qquad x^a = r\Omega^a, \qquad r := \rho - GM/c^2$$

$$\Omega^1 := \sin\theta\cos\phi, \quad \Omega^2 := \sin\theta\sin\phi, \quad \Omega^3 := \cos\theta$$

となる。

$$dx^a = \Omega^a d\rho + r\Omega^a{}_A d\theta^A \tag{13}$$

と書き換えると、(6),(8) 式は、

$$\mathfrak{g}^{00} = -\frac{(r + GM/c^2)^3}{r^2(r - GM/c^2)} \tag{14}$$

$$\mathfrak{g}^{ab} = \delta^{ab} - \left(\frac{GM/c^2}{r}\right)^2 \Omega^a\Omega^b \tag{15}$$

$$\begin{aligned} h^{00} &= -1 + -\frac{(r + GM/c^2)^3}{r^2(r - GM/c^2)} \\ &= 4\frac{GM/c^2}{r} + 7\left(\frac{GM/c^2}{r}\right)^2 + \cdots \end{aligned} \tag{16}$$

$$h^{ab} = \left(\frac{GM/c^2}{r}\right)^2 \Omega^a\Omega^b \tag{17}$$

3.2 Post-Minkowskian 展開

Post-Minkowskian(PM) 展開は (18) 式のように G をべきとする展開である。

$$h^{\alpha\beta} = Gk_1^{\alpha\beta} + G^2k_2^{\alpha\beta} + G^3k_3^{\alpha\beta} + \cdots \tag{18}$$

Einstein 場の方程式を拡張した

$$\Box h^{\alpha\beta} = -\frac{16\pi G}{c^4}\tau^{\alpha\beta} \tag{19}$$

$$\tau^{\alpha\beta} = (-g)(T^{\alpha\beta}[g] + t_{LL}^{\alpha\beta} + t_H^{\alpha\beta}) \tag{20}$$

$$(-g)t_H^{\alpha\beta} := \frac{c^4}{16\pi G}\left\{\partial_\mu h^{\alpha\nu}\partial_\nu h^{\beta\mu} - h^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}h^{\alpha\beta}\right\} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} (-g)t_{LL}^{\alpha\beta} := \frac{c^4}{16\pi G}\{&\partial_\lambda \mathfrak{g}^{\alpha\beta}\partial_\mu \mathfrak{g}^{\lambda\mu} - \partial_\lambda \mathfrak{g}^{\alpha\lambda}\partial_\mu \mathfrak{g}^{\beta\mu} \\ &+\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\lambda\mu}\partial_\rho \mathfrak{g}^{\lambda\nu}\partial_\nu \mathfrak{g}^{\mu\rho} - g^{\alpha\lambda}g_{\mu\nu}\partial_\rho \mathfrak{g}^{\beta\nu}\partial_\lambda \mathfrak{g}^{\mu\rho} \\ &-g^{\beta\lambda}g_{\mu\nu}\partial_\rho \mathfrak{g}^{\alpha\nu}\partial_\lambda \mathfrak{g}^{\mu\rho} + g_{\lambda\mu}g^{\nu\rho}\partial_\nu \mathfrak{g}^{\alpha\lambda}\partial_\rho \mathfrak{g}^{\beta\mu} \\ &+\frac{1}{8}(2g^{\alpha\lambda}g^{\beta\mu} - g^{\alpha\beta}g^{\lambda\mu}) \\ &\times(2g_{\nu\rho}g_{\sigma\tau} - g_{\rho\sigma}g_{\nu\tau})\partial_\lambda \mathfrak{g}^{\nu\tau}\partial_\mu \mathfrak{g}^{\rho\sigma}\} \end{aligned} \tag{22}$$

ここで
$T^{\alpha\beta}$: マターのエネルギー運動量テンソル
$t_H^{\alpha\beta}$: effective エネルギー運動量擬テンソル
$t_{LL}^{\alpha\beta}$: Landau-Lifshitz 擬テンソル
である。このときの計量 $g^{\alpha\beta}$ の PM 展開は、0 次オーダーに関しては $h_0^{\alpha\beta} = 0$ 、1 次オーダーに関しては effective エネルギー運動量擬テンソルに依存する。n 次オーダーに関して、ソースの位置とマターの変数に依存する。よって、

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} =& \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}h\eta^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}hh^{\alpha\beta} \\ &+ \left(\frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{4}h^{\mu\nu}h_{\mu\nu}\right)\eta^{\alpha\beta} + O(G^3) \end{aligned} \tag{23}$$

4 Near-Zone と Wave-Zone

4.1 Near-Zone と Wave-Zone

3 次元時空において、1 つのソースを考える。

$$t_c := \text{ソースの時間スケール}$$

$$\omega_c := \frac{2\pi}{t_c} = \text{ソースの振動数}$$

$$\lambda_c := \frac{2\pi c}{\omega_c} = \text{ソースから放出された波の波長}$$

とすると、観測地点とソースからの距離によって、以下の 2 つの領域に分けられる。

$$\mathrm{Near-Zone(NZ)}: \qquad r \ll \lambda_c \tag{24}$$

$$\mathrm{Wave-Zone(WZ)}: \qquad r \gg \lambda_c \tag{25}$$

以下では WZ の領域のみを考える。ポテンシャル $h^{\alpha\beta}$ に対し、場の変数 Φ, A^a, B^{ab} を以下のように導入する。

$$h^{00} := \frac{4}{c^2}\Phi, \qquad h^{0a} := \frac{4}{c^3}A^a, \qquad h^{00} := \frac{4}{c^4}B^{ab}$$

このとき、それぞれの空間、時間の導関数は

$$\partial_c h^{00} = O(c^{-2}),\ \partial_c h^{0a} = O(c^{-3}),\ \partial_c h^{ab} = O(c^{-4}) \tag{26}$$

$$\partial_0 h^{00} = O(c^{-3}),\ \partial_0 h^{0a} = O(c^{-4}),\ \partial_0 h^{ab} = O(c^{-4}) \tag{27}$$

ゲージ条件より、$\partial_0 h^{00}$ と $\partial_a h^{0a}$ 、$\partial_0 h^{0a}$ と $\partial_a h^{ab}$ がそれぞれ同じオーダーである必要がある。よって、WZ のポテンシャル $h^{\alpha\beta}$ は

$$h^{00} = \frac{4GM}{c^2 r} + \frac{G}{c^4 r}C(\tau, \mathbf{\Omega}) + O(r^{-2}) \tag{28}$$

$$h^{0a} = \frac{G}{c^4 r}D^a(\tau, \mathbf{\Omega}) + O(r^{-2}) \tag{29}$$

$$h^{ab} = \frac{G}{c^4 r}A^{ab}(\tau, \mathbf{\Omega}) + O(r^{-2}) \tag{30}$$

ここで、

$$\tau := t - r/c, \qquad \mathbf{\Omega} := \boldsymbol{x}/r \tag{31}$$

である。対称テンソル A^{ab} が以下の TT 表現より抜き出せるとする。

$$(TT)^{ab}{}_{cd} := P^a{}_c P^b{}_d \frac{1}{2} P^{ab} P_{cd} \tag{32}$$

$$P^a{}_b := \delta^a{}_b - \Omega^a \Omega_b \tag{33}$$

これにより対称 TT テンソル A^{ab}_{TT} は以下のように書ける。

$$A^{ab}_{TT} = A_+(\theta^a\theta^b - \phi^a\phi^b) + A_\times(\theta^a\phi^b + \phi^a\theta^b) \tag{34}$$

$$\mathbf{\Omega} := [\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta] \tag{35}$$

$$\boldsymbol{\theta} := [\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta] \tag{36}$$

$$\boldsymbol{\phi} := [-\sin\phi, \cos\phi, 0] \tag{37}$$

$$A_+ = \frac{1}{2}(\theta_a\theta_b - \phi_a\phi_b)A^{ab} \tag{38}$$

$$A_\times = \frac{1}{2}(\theta_a\phi_b + \phi_a\theta_b)A^{ab}] \tag{39}$$

これを PM 展開した h^{ab} に対して適用すると

$$h_+ = \frac{1}{2}(\theta_a\theta_b - \phi_a\phi_b)h^{ab} \tag{40}$$

$$h_\times = \frac{1}{2}(\theta_a\phi_b + \phi_a\theta_b)h^{ab}] \tag{41}$$

5 Quadratic Gravity

ここで、簡単のためにカップリング関数 $f(\vartheta)$ に対して小さい ϑ 周りのテイラー展開を適用すると、$f_i(\vartheta) = f_i(0) + f_i'(0)\vartheta + \mathcal{O}(\vartheta^2)$ となる。ここで、$f_i(0), f_i'(0)$ は定数である。カップリング定数をそれぞれの定数に対し以下のように定義する。

$$\alpha_i^{(0)} \equiv \alpha_i f_i(0)$$
$$\alpha_i^{(1)} \equiv \alpha_i f_i'(0)$$

作用は以下の和で表される。

$$S = S_{GR} + S_0 + S_1$$

ここで、

$$S_{GR} \equiv \int d^4x\sqrt{-g}[\kappa R + \mathcal{L}_{mat}] \tag{42}$$

$$S_0 \equiv \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\alpha_1^{(0)}R^2 + \alpha_2^{(0)}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \alpha_3^{(0)}R_{\mu\nu\delta\sigma}R^{\mu\nu\delta\sigma}\right\} \tag{43}$$

$$S_1 \equiv \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\alpha_1^{(1)}\vartheta R^2 + \alpha_2^{(1)}\vartheta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \alpha_3^{(1)}\vartheta R_{\mu\nu\delta\sigma}R^{\mu\nu\delta\sigma} + \alpha_4^{(1)}\vartheta R_{\mu\nu\delta\sigma}\ {}^*R^{\mu\nu\delta\sigma}\right\} \tag{44}$$

とする。g は $g_{\mu\nu}$ のデタミナントであり、$R, R_{\mu\nu}, R_{\mu\nu\delta\sigma}$, ${}^*R_{\mu\nu\delta\sigma}$ はそれぞれ リッチスカラー、リッチテンソル、リーマンテンソルで、${}^*R^\mu{}_{\nu\delta\sigma} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\delta\sigma}{}^{\alpha\beta}R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$, $\left(\varepsilon^{\delta\sigma\alpha\beta}\text{はレビ・チビタテンソル}\right)$ である。S_{GR} はアインシュタイン-ヒルベルト作用とマターの作用の和となっている。S_0 は 場の関数 θ に対してカップルしていない GR の修正である。S_1 はスカラー場と直接カップリングしている GR の修正とする。

6 Conclusion

弱重力場での $\frac{v}{c}$ べきでの展開を行う PN 展開、重力定数 G べきで展開を行う PM 展開を施した重力波

はそれぞれ以下のように表現される。(PN 展開)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}^{00} &= -\frac{(r+GM/c^2)^3}{r^2(r-GM/c^2)} \\
\mathfrak{g}^{ab} &= \delta^{ab} - \left(\frac{GM/c^2}{r}\right)^2 \Omega^a\Omega^b \\
h^{00} &= -1 + -\frac{(r+GM/c^2)^3}{r^2(r-GM/c^2)} \\
&= 4\frac{GM/c^2}{r} + 7\left(\frac{GM/c^2}{r}\right)^2 + \cdots \\
h^{ab} &= \left(\frac{GM/c^2}{r}\right)^2 \Omega^a\Omega^b
\end{aligned}$$

(PM 展開)

$$\begin{aligned}
g^{\alpha\beta} =& \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}h\eta^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}hh^{\alpha\beta} \\
&+ \left(\frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{4}h^{\mu\nu}h_{\mu\nu}\right)\eta^{\alpha\beta} + O(G^3)
\end{aligned}$$

TT 表現の場合、以下のように表される。

$$h^{ab}_{TT} = h_+(\theta^a\theta^b - \phi^a\phi^b) + h_\times(\theta^a\phi^b + \phi^a\theta^b)$$

7 Future Work

レビュー論文 [1] では、Quasi-Circular な Black Hole(BH) バイナリのインスパイラルする状態に対し Quadratic な重力を持つ作用を考え、Einstein-Dilataon-Gauss-Bonne 理論と Chern-Simons 理論を特別な場合として扱う。パリティの破れた場合、even-パリティに関しては、GR の quadrupole flux を-1PN 展開することでスカラー hair を得る。odd-パリティに関しては、2PN オーダーの展開を Energy flux に対し施すと dipole hair を得る。また、Quadratic 重力によって現在の観測機器で BH 同士の合体の際に放出される十分観測可能な観測値が得られるのではないかと綴られており、(当論文が発表されたのは 2015 年）実際に観測された値と比較する。

8 参考文献

[1]. Post-Newtonian, Quasi-Circular Binary Inspirals in Quadratic Modified Gravity, (2015), Arxiv:1110.5950v3

[2]. Post-Newtonian Theory for the common reader, Eric Poisson

[3]. Gravitational Waves vol.1, Michele Maggiore

輻射流体計算が予言する初代星周辺領域の 21-cm 線シグナル空間分布

田中 俊行 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

Square Kilometre Array (SKA) 計画で建設が進みつつある世界最大の電波干渉計の観測が 2020 年から開始される。この観測によって初代星周囲に存在する中性水素から放射される 21-cm 線が観測されると期待されている。しかしながら、初代星の形成過程や星質量などの物理的性質は未だ謎に包まれており、数多くの理論モデルが存在する。SKA 計画の観測データ解析のためにも、初代星の各理論モデルがどのように観測されるかを予言することは喫緊の課題である。

Yajima & Li (2014) では、輻射輸送シミュレーションを用いて、21-cm 線の観測量である輝度温度の空間分布を見積もっている。しかし、初代星周囲のガスを一様静止流体として計算を行っている。一方、本研究では初代星を取り巻く高密度領域であるハローの密度プロファイルを考慮し、ガスの運動を解くことができる輻射流体シミュレーションを実施し、1pc-1Mpc の 6 桁に渡るダイナミックレンジを同時に計算した。

結果として、初代星の寿命程度 ($\sim 10^6$ 年間) の計算時間では、先行研究の手法を用いるとシグナル領域を過大評価してしまうことがわかった。また単体の初代星周辺の中性水素から放射される 21-cm 線シグナルは SKA を用いても観測が難しいことが明らかになった。

1 Introduction

今日、宇宙論で標準とされている構造形成モデルによると、宇宙初期に形成された小さな密度ゆらぎが重力によって成長し、高密度ガス領域が形成される。そして、その高密度ガス領域内で、宇宙で最初の世代の恒星である初代星が形成されると考えられている。初代星は、宇宙で最初の電離光子と重元素の供給源天体であり、構造形成に重要である宇宙の熱的進化に影響を与える。そのため、宇宙の構造形成を理解するには、初代星の物理的性質を理解することが不可欠である。しかし、現在初代星の観測証拠は乏しく、初代星から放射された光を直接捉える直接観測となると、次世代の観測機器を用いても難しいと考えられている。一方、理論研究においては、最も重要な物理的性質である初代星の星質量関数について、典型的に大質量側に分布していると予言されているが、同意は得られていない (e.g. Hirano et al. 2014, Susa et al. 2014)。

この現状に一石を投じようとしているのが 21-cm 線観測である。21-cm 線とは、中性水素の超微細構造のエネルギー差に由来する電磁波であり、そのシグナル強度は中性水素の密度や温度に依存する。ゆえに、初代星からの輻射にさらされている周囲の中性水素は、初代星の星質量を反映する 21-cm 線を放射する。2020 年に初期科学運用が始まる Square Kilometre Array (SKA) に代表される次世代大規模電波干渉計によって、その 21-cm 線が検出できると期待されている。従って、初代星周辺領域からの 21-cm 線シグナルの観測データを解析することで、初代星の星質量関数に迫ることができる。しかし、21-cm 線シグナルの観測データを解析するために必要不可欠である、観測データと初代星の星質量関数をつなぐ理論モデルが存在しない。この理論モデルの構築は喫緊の課題である。

本研究を通して、ΛCDM 宇宙論モデルを用いた。宇宙論パラメータは物質、宇宙定数、バリオンに対してそれぞれ $\Omega_M = 0.3$、$\Omega_\Lambda = 0.7$、$\Omega_{\rm b} = 0.05$、ハッブル定数は $h = 0.7$ を用いた。

2 Simulation setup

本研究では、1 次元球対称輻射流体シミュレーションを用いて、初代星周辺に存在する中性水素から放射される 21-cm 線シグナルの空間分布を調査する。

輻射流体シミュレーションを用いると、ガスの運動と輻射輸送、化学反応を同時に解くことが可能である。計算コードは、Kitayama et al. (2004) の輻射流体シミュレーションコードを元に開発を行った。

2.1 Gas dynamics

ガスの運動を記述するの基礎方程式は、

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \tag{1}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -4\pi r^2 \frac{dp}{dm} - \frac{GM_{\rm tot}(<r)}{r^2} + f_{\rm rad}, \tag{2}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{p}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} + \frac{\mathcal{H} - \mathcal{L}}{\rho}, \tag{3}$$

$$p = \frac{2}{3}\rho u, \tag{4}$$

である。ここで、$r\,, m\,, \rho\,, p\,, u\,, M_{\rm tot}(<r)$ はそれぞれ、初代星からの距離、質量、密度、圧力、単位質量あたりの内部エネルギー、半径 r の内側に存在する全質量である。また、$\mathcal{H}\,, \mathcal{L}$ は単位体積あたりの加熱率と冷却率であり、$f_{\rm rad}$ は輻射圧である。非平衡化学反応計算には陰解法を用いている Susa & Kitayama (2000) の方法を用いる。核種は $\rm e\,, H\,, H^+\,, H^-\,, H_2\,, H_2^+$ の 6 種であり、反応率は Galli & Palla (1998) を参照した。エネルギー方程式 (式 3) には紫外線加熱と放射冷却が考慮されている。放射冷却とは具体的に、衝突電離、衝突励起、再結合、熱制動放射、宇宙マイクロ波背景放射とのコンプトン散乱、水素分子の回転振動励起による冷却である。原子冷却率に関しては Fukugita & Kawasaki (1994) を、分子冷却に関しては Galli & Palla (1998) を参照した。

2.2 Central star

本計算では、初代星が種族 III の星であり、黒体放射で輝くと仮定する。初代星の星質量 $M_\star$ は $10 - 1000 M_\odot$ の範囲に分布していると考えられているが、あまり明らかにされていないのが現状である。そのため、本研究では $M_\star = 200 M_\odot$ を採用する。また、初代星から単位時間あたりに放射される電離光子数 $\dot{n}_{\rm ion}$ と星表面の有効温度 $T_{\rm eff}$ は Schaerer (2002) の値を用いる。放射スペクトルの時間進化はないとして計算する。

2.3 Initial condition

初代星は暗黒物質とガスによって構成される高密度領域にて形成される。本計算では、暗黒物質の空間分布として NFW 密度プロファイルを用いる (Navarro et al. 1997):

$$\rho_{\rm DM} \propto \frac{1}{x(1+x)^2}. \tag{5}$$

ここで、$x = r/r_{\rm s}$ は規格化された半径である。$r_{\rm s}$ については Bullock et al. (2001) の方法に従い決定する。ハローのダイナミカルタイムは大質量星の寿命より十分長いため、本計算では、暗黒物質の時間進化は解かない。

一方、ガスの初期条件としては次のような冪乗則に従う分布を用いる:

$$n(r) = \begin{cases} n_0\,(r_{\rm J}/r)^2 & (r \le r_{\rm b}) \\ n_{\rm IGM}(z) & (r > r_{\rm b}) \end{cases} \tag{6}$$

ここで、$r_{\rm J}$ はジーンズ半径であり、$n_{\rm IGM}(z)$ は赤方偏移 z における銀河間物質 (IGM) ガスの数密度である。$r_{\rm b}$ は冪上則に従う部分と IGM の数密度が一致する位置における半径である。また、$n_0 = 1000$ を用いた。このガスのプロファイルは 3 次元シミュレーションを実施し、ハロー内ガスの密度プロファイルを求めた Yoshida et al. (2003) に啓発されたものである。

3 21-cm line

21-cm 線の観測量は輝度温度 (differential brightness temperature : $\delta T_{\rm b}$) であり、ガスの状態 (密度ゆらぎ δ、視線方向の速度勾配 $\partial_r v_r$、スピン温度 $T_{\rm S}$、電離状態 $\chi_{\rm HI}$) に依存する (Furlanetto et al. 2006):

$$\delta T_{\rm b} \approx 9\chi_{\rm HI}(1+\delta)(1+z)^{1/2}\left(1 - \frac{T_{\rm CMB}}{T_{\rm S}}\right) \times \left[\frac{H(z)/(1+z)}{\partial_r v_r}\right] \ \ [\rm mK]. \tag{7}$$

ここで、$\chi_{\rm HI}(\equiv n_{\rm HI}/n_{\rm H})$ は中性水素の割合、$H(z)$ はハッブルパラメータである。十分に遠い宇宙で放射された 21-cm 線に対しては、放射源の固有速度が宇宙膨張速度に対して十分小さいため、視線方向の速度勾配

はハッブル膨張のみであると近似できる $(H(z)/(1+z)=\partial_r v_r)$。従って輝度温度は以下の式で与えられている:

$$\delta T_{\mathrm{b}}=28.1\chi_{\mathrm{HI}}\left(\frac{1+z}{10}\right)^{1/2}\left(1-\frac{T_{\mathrm{CMB}}}{T_{\mathrm{S}}}\right)[\mathrm{mK}]. \tag{8}$$

ガスのスピン温度は、CMB 光子のトムソン散乱、Lyα 光子による Wouthuysen-Field 効果、ガス粒子の衝突によって決まる:

$$T_{\mathrm{S}}^{-1}=\frac{T_{\mathrm{CMB}}^{-1}+\chi_{\mathrm{C}}T_{\mathrm{gas}}^{-1}+\chi_{\alpha}T_{\alpha}^{-1}}{1+\chi_{\mathrm{C}}+\chi_{\alpha}}. \tag{9}$$

ここで、T_{gas} はガスの運動論的温度、T_{α} は Lyα 線の色温度、χ_{C} と χ_{α} はガス粒子の衝突と Lyα 光子の散乱の結合係数をそれぞれ表す。

Lyα 光子は中性水素に対する散乱断面積が大きく、比較的ガスと相互作用しやすい。ゆえに、この Lyα 光子とガスの相互作用のタイムスケールは、ガスの加熱や電離のタイムスケールより十分短い。従って、$T_{\alpha}=T_{\mathrm{gas}}$ として計算する。

4 Results

4.1 Impact of gas dynamics and gas density profile

赤方偏移 z=20 に存在する初代星周囲の 21-cm 線輝度温度空間分布を見積もった結果が図 1 である。これは、高密度領域の中心に存在する初代星が時刻 $t=0$ で輝き始め、$t=10^6$ 年経過した時刻におけるスナップショットである。$200M_{\odot}$ の星質量を持つ種族 III の星の寿命はおよそ 200 万年である (Schaerer 2001)。

まず、ガスの運動と密度プロファイルの影響を議論する。青線で描かれている分布は、ガスを一様な静止流体として扱っている Yajima & Li (2014) のセットアップでの計算結果である。密度は赤方偏移 z=20 での IGM のガス密度である。また、ハロー内に対応する高密度領域を考慮しない代わりに、初代星から放射される電離光子数を半分としている。これは、ハローから抜け出てくる電離光子の割合である電離光子脱出率 $f_{\mathrm{esc}}=0.5$ を意味する。図 1 からわかることは、本研究の場合 (赤線)、電離領域が小さくなることである。これは中心付近の高密度ガスの影響で電離波面の半径方向への進化が遅いことを意味している。電離波面の速度は波面位置におけるガスの数密度と電離光子のフラックスに依存する。輝度温度分布に関しては、電離波面が小さくなることにより、正のシグナル領域が内側に移動する。一方で、負の

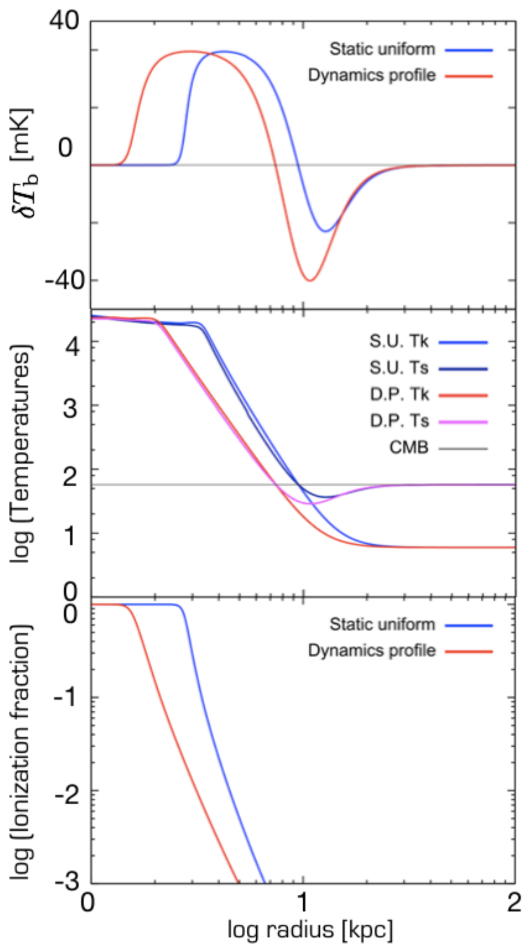

図 1: 星質量 $M_{\star}=200M_{\odot}$、赤方偏移 $z=20$、計算時間 $t=10^6$ 年。本研究のセットアップ (赤線) とガスを一様静止流体として扱っている先行研究 (Yajima & Li 2014) のセットアップ (青線) との比較。上から輝度温度 [mK]、温度 (ガス温度とスピン温度)[K]、電離度を初代星からの半径の関数としてプロットしたものである。1 つ目のパネルのグレーの横線は 0[mK]、2 つ目のパネルのグレーの横線は赤方偏移 z=20 での CMB 温度を示している。

領域の端はあまり違いが見られず、シグナルの底は深くなった。

一般に、ガスを流体として扱うことで電離波面はストレームグレン半径より大きくなりうる。しかし、電離のタイムスケール

$$t_{\rm ion} = \frac{1}{\alpha_{\rm B} n_{\rm H}}, \tag{10}$$

は、この場合およそ 5000 万年になる。つまり、$t \sim t_{\rm ion} = 5000$ 万年のタイムスケールで、電離波面がストレームグレン半径に達し、その後、ガスの運動の効果が電離波面の位置に効いてくる。そのため、大質量星の寿命の間には直接的にガスの運動の効果は電離波面の位置に影響しない。

4.2 Detectability

2020 年から初期化学運用開始を予定されている SKA での観測可能性を見積もった結果が図 2 である。SKA のノイズレベルの見積もりには次の式を用いた (Furlanetto 2006):

$$\Delta T \sim 20[\mathrm{mK}] \left(\frac{10^4 \mathrm{m}^2}{A_{\rm eff}}\right) \left(\frac{10\,\mathrm{arcmin}}{\Delta\theta}\right)^2 \tag{11}$$

$$\times \left(\frac{1+z}{10}\right)^{4.6} \left(\frac{\mathrm{MHz}}{\Delta\nu}\frac{100\mathrm{h}}{t_{\rm int}}\right) \tag{12}$$

$A_{\rm eff}$、$\Delta\theta$、$\Delta\nu$、$t_{\rm ini}$ はそれぞれ、有効集光面積、視直径、バンド幅、積分時間である。図 2 から SKA では単体で存在する初代星周囲の 21-cm 線輝度温度の観測は難しいことがわかる。

5 Conclusion

本研究では 1 次元球対称の輻射流体シミュレーションを用いて、初代星周辺領域の輝度温度の空間分布を見積もり、SKA での観測可能性を見積もった。結果として、SKA では単体で存在する初代星の 21-cm 線による観測は難しいことがわかった。

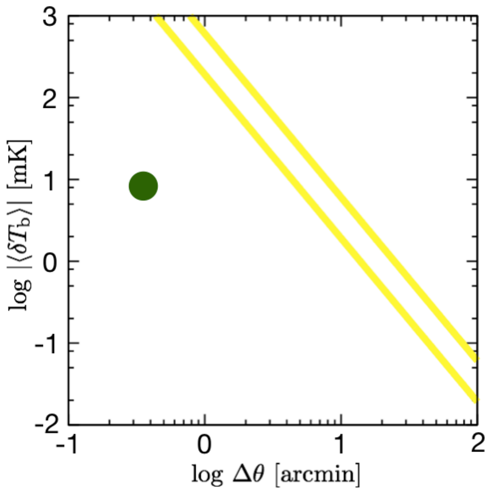

図 2: SKA による初代星の観測可能性。星質量 $M_\star = 200 M_\odot$、赤方偏移 $z = 20$、計算時間 $t = 10^6$ 年。横軸は $T_{\rm b} = -1$[mK] の位置で定義した視直径、縦軸はその視直径内で面積重み付きで平均したシグナルの絶対値である。黄色ラインはそれぞれ積分時間を 100 時間と 1000 時間として見積もった SKA のノイズレベルである。

Reference

Bullock, J., et al. 2001, MNRAS, 321, 559

Fukugita, M., Kawasaki, M. 1994, MNRAS, 269, 563

Furlanetto S. R., 2006, MNRAS, 371, 867

Furlanetto S. R., Oh S. P., 2006, ApJ, 652, 849

Galli, D., Palla F. 1998, A&A, 335, 403

Hirano S., Hosokawa T., Yoshida N., Umeda H., Omukai K., Chiaki G., Yorke H. W., 2014, ApJ, 781, 60

Kitayama T., Yoshida N., Susa H., Umemura M., 2004, ApJ, 613, 631

Navarro, J. F., Frenk, C. S., White, S. D. M. 1997, ApJ, 490, 493

Susa H., Hasegawa K., Tominaga N., 2014, ApJ, 792, 32

Susa H., Kitayama T., 2000, MNRAS, 317, 175

Schaerer, D. 2002, A&A, 382, 28

Yoshida, N., Abel, T., Hernquist, L., Sugiyama, N. 2003a, ApJ, 592, 645

Yajima H., Li Y., 2014, MNRAS, 445, 3674

磁場、輻射場を伴う完全流体のエネルギー運動量テンソル

吉田 康利 (新潟大学大学院 自然科学研究科)

Abstract

宇宙物理において磁場や輻射場が関わる状況は多くある。エネルギー運動量テンソルへの磁場、輻射場の寄与について考えることで宇宙物理の状況をより広く記述することができる。またアインシュタイン方程式の解が物理的に適切であることを保証するためには、エネルギーと運動量は energy condition を満たす必要がある。ここでは磁場と輻射場を伴った完全流体のエネルギー運動量テンソルとこれに対する energy condition を、Reference の論文をレビューして調べる。

1 Introduction

宇宙物理において磁場や輻射場が重要な役割を果たすケースは、中性子星の内部構造やパルサー、宇宙ジェットなど多くある。エネルギー運動量テンソルへの磁場、輻射場の寄与を考えることでより広く状況を記述することができる。

ところでアインシュタイン方程式の解が物理的に適切であることを保証するために、エネルギーと運動量は energy condition を満たす必要がある。ここでは完全流体のエネルギー運動テンソルを、いくつかの仮定をおいて導出し、その energy condition を調べていく。

2 エネルギー運動量テンソルの表式

ここでは磁場、輻射場を伴う完全流体のエネルギー運動量テンソルの表式を求める。これを $T^{\alpha\beta}$ とおくと、

$$T^{\alpha\beta} = T_f^{\alpha\beta} + T_m^{\alpha\beta} + T_r^{\alpha\beta} \tag{1}$$

のように 3 つの項に分けられる。ここで右辺はそれぞれ流体、磁場、輻射場のエネルギー運動量テンソルである。それぞれのテンソルを別々に導入していく。

2.1 完全流体の $T_f^{\alpha\beta}$

流体の四元速度ベクトル u^α、共動座標系で測ったエネルギー密度 ρ、流体の圧力 p を用いて、完全流体のエネルギー運動量テンソルは

$$T_f^{\alpha\beta} = (\rho + p)u^\alpha u^\beta + pg^{\alpha\beta} \tag{2}$$

となる。

2.2 磁場の $T_m^{\alpha\beta}$

電磁場のエネルギー運動量テンソル $T_{em}^{\alpha\beta}$ は、ファラデーテンソル $F^{\alpha\beta}$ を用いて

$$T_{em}^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}(F_\gamma^\alpha F^{\beta\gamma} - \frac{1}{4}F_{\gamma\delta}F^{\gamma\delta}g^{\alpha\beta}) \tag{3}$$

とかける。ここで、ファラデーテンソルを共動観測者によって電場 E^α と磁場 B^α に分解して

$$F^{\alpha\beta} = E^\alpha u^\beta - E^\beta u^\alpha + \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}(u_\mu B_\nu - u_\nu B_\mu) \tag{4}$$

となる。

一方、完全導体（$\sigma \to \infty$）と仮定するとオームの法則 $j^\alpha = \sigma E^\alpha$ より、有限の j^α となるためには $E^\alpha = 0$ である。結果、よく伝導する流体中の磁場について

$$T_{em}^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}|B|^2 + \frac{1}{4\pi}\frac{1}{2}|B|^2 - \frac{B^\alpha B^\beta}{4\pi} \tag{5}$$

が得られる。ここで $|B|^2 = B^\alpha B_\alpha$ である。

2.3 輻射場の $T_r^{\alpha\beta}$

位置 x^α、振動数 ν、運動量 p^α の光子が、方向 $N^\alpha = \frac{p^\alpha}{h_p\nu}$ へ動いているときの放射強度を I_ν とすると

$$T_r^{\alpha\beta} = \int I_\nu N^\alpha N^\beta \ d\nu d\Omega \tag{6}$$

と書ける。ν、I_ν および立体角の微小部分 $d\Omega$ は共動座標系で測られている。各成分について、輻射エネルギー密度 $T_r^{00} = E_r$、輻射フラックス密度 $T_r^{0i} = F_r^i$、輻射ストレステンソル $T_r^{ij} = P_r^{ij}$ とおく。
ここで仮定として、高密度流体などの光子の *free path* が小さい系を考えることにすると、I_ν は等方性をもち、$P_r^{ij} = P_r\delta^{ij}$、$P_r = \frac{E_r}{3}$ となる。
結果、等方的な輻射の場合

$$T_r^{\alpha\beta} = (E_r + P_r)u^\alpha u^\beta + F_r^\alpha u^\beta + F_r^\beta u^\alpha + P_r g^{\alpha\beta} \tag{7}$$

となる。ここで、輻射フラックス四元ベクトル F_r^α は

$$F_r^\alpha = h^\alpha{}_\beta \int I_\nu N^\beta \ d\nu d\Omega \tag{8}$$

で定義され、

$$h^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + u^\alpha u^\beta \tag{9}$$

である。これより $u_\alpha F_r^\alpha = 0$ が成り立っている。

2.4 $T^{\alpha\beta}$の表式

以上より、

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} = (\rho + p + \frac{|B|^2}{4\pi} + E_r + P_r)u^\alpha u^\beta \\ +(p + P_r + \frac{1}{2}\frac{|B|^2}{4\pi})g^{\alpha\beta} \\ +F_r^\alpha u^\beta + F_r^\beta u^\alpha - \frac{B^\alpha B^\beta}{4\pi} \end{aligned}$$

という表式が得られる。
共動観測者によって測られたこの系の全エネルギー ε は

$$\begin{aligned} \varepsilon &= T^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta \\ &= \rho + \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi}|B|^2 + E_r \end{aligned} \tag{10}$$

である。

等方圧力はエネルギー運動量テンソルの空間部分のトレースで書かれ、

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{3}h_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} \\ &= p + P_r + \frac{1}{6}\frac{1}{4\pi}|B|^2 \end{aligned} \tag{11}$$

となる。

ここで、$\Pi^{\alpha\beta} = \frac{1}{3}\frac{1}{4\pi}|B|^2 h_{\alpha\beta} - \frac{B^\alpha B^\beta}{4\pi}$
および $\Delta = Ph^{\alpha\beta} + \Pi^{\alpha\beta}$ を導入すると、

$$T^{\alpha\beta} = \varepsilon u^\alpha u^\beta + F_r^\alpha u^\beta + F_r^\beta u^\alpha + \Delta^{\alpha\beta} \tag{12}$$

と表せる。
正規直交基底 $\{X^\alpha, Y^\alpha, Z^\alpha\}$ によって

$$\begin{aligned} \Delta^{\alpha\beta} &= P_1 X^\alpha X^\beta + P_2 Y^\alpha Y^\beta + P_3 Z^\alpha Z^\beta \\ F_r^\alpha &= F_{r1}X^\alpha + F_{r2}Y^\alpha + F_{r3}Z^\alpha \\ B^\alpha &= B_1 X^\alpha + B_2 Y^\alpha + B_3 Z^\alpha \end{aligned} \tag{13}$$

と表せる。P_i は固有値で、次のように計算できる。

$$\begin{aligned} P_i &= \Delta^{\alpha\beta}X_\alpha X_\beta \\ &= p + P_r + \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi}|B|^2 - \frac{1}{4\pi}B_i^2 \end{aligned} \tag{14}$$

3 The Energy Condition

energy condition は、アインシュタイン方程式の解が物理的に適切であることを保証するために $T^{\alpha\beta}$ に課す条件である。条件は以下のように書かれる。W^α は任意観測者の四元速度ベクトルである。

(i)Weak Energy Condition(WEC)
任意観測者によって測定されたエネルギー密度 ϵ は負にならないはず。

$$\epsilon = T_{\alpha\beta}W^\alpha W^\beta \geq 0 \tag{15}$$

(ii)Strong Energy Condition(SEC)
重力場は引力的なはず。

$$\mu = R_{\alpha\beta}W^\alpha W^\beta \geq 0 \tag{16}$$

アインシュタイン方程式 $R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = 8\pi T_{\alpha\beta}$ を用いて書き直すと

$$\mu = \epsilon + \frac{T}{2} \geq 0 \tag{17}$$

となる。ここで $T = g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}$ である。
(iii)Dominant Energy Condition(DEC)
任意観測者によって測定されたエネルギーフラックス密度ベクトル $S^\alpha = -T^{\alpha\beta}W_\beta$ は、未来向きの時間的またはヌルベクトルのはず。

$$S_\alpha S^\alpha \leq 0 \tag{18}$$

$$S^0 > 0 \tag{19}$$

ここでの目的は、$T^{\alpha\beta}$ から *energy condition* を計算することである。このための手順は一般的なものなのでどんな状況の $T^{\alpha\beta}$ にも適用できる。
用意するものは $T^{\alpha\beta}$ の表式と、任意観測者の四元速度ベクトル W^α を
正規直交テトラッド { $u^\alpha, X^\alpha, Y^\alpha, Z^\alpha$ } で表したもので、$\gamma = \sqrt{1+A^2}$、 $A^2 = (A_1)^2 + (A_2)^2 + (A_3)^2$ として

$$W^\alpha = \gamma u^\alpha + A_1 X^\alpha + A_2 Y^\alpha + A_3 Z^\alpha \tag{20}$$

である。

まず、ϵ, μ を計算する。

$$\begin{aligned}\epsilon &= T_{\alpha\beta}W^\alpha W^\beta \\ &= \varepsilon\gamma^2 + \sum_{i=1}^{3} P_i (A_i)^2 - 2\gamma(\mathbf{F_r}\cdot\mathbf{A})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu &= \epsilon + \frac{1}{2}T \\ &= \frac{1}{2}(\varepsilon + \sum_{i=1}^{3} P_i) + \sum_{i=1}^{3}(\varepsilon + P_i)(A_i)^2 - 2\gamma(\mathbf{F_r}\cdot\mathbf{A})\end{aligned}$$

次に、$\gamma^2 = 1 + A^2$、$\gamma \geq A$
$-F_r A \leq \mathbf{F_r}\cdot\mathbf{A} \leq F_r A$ を用いて、ϵ, μ を調べる。今の状況においての結果は

$$\epsilon \geq (\varepsilon - 2F_r) + \sum_{i=1}^{3}(\varepsilon + P_i - 2F_r)(A_i)^2$$

$$\mu \geq \frac{\varepsilon + 3P - 4F_r}{2} + \sum_{i=1}^{3}(\varepsilon + P_i - 2F_r)(A_i)^2$$

となる。
ここで *WEC*($\epsilon \geq 0$) および *SEC*($\mu \geq 0$) を用いる。
すると *WEC* からは

$$\begin{aligned}\varepsilon &\geq 2F_r \\ \varepsilon + P_i &\geq 2F_r\end{aligned} \tag{21}$$

SEC からは

$$\begin{aligned}\varepsilon + 3P &\geq 4F_r \\ \varepsilon + P_i &\geq 2F_r\end{aligned} \tag{22}$$

が得られる。
今度は S^α を共動テトラッドで書く。$e^\alpha_{(\mu)}$ を正規直交ベクトルとして

$$S_{(\mu)} = e^\alpha_{(\mu)} S_\alpha \tag{23}$$

と書く。これより

$$\begin{aligned}S^{(0)} &= \varepsilon\gamma - \mathbf{F_r}\cdot\mathbf{A} \\ &> (\varepsilon - F_r)\gamma\end{aligned}$$

ここに *DEC* の一つ ($S^{(0)} > 0$) を考えると

$$\varepsilon > F_r \tag{24}$$

が得られる。
また、$S_\alpha S^\alpha = S_{(\mu)}S^{(\mu)} = -N(S)$ とおくと、

$$\begin{aligned}N(S) &= (S^{(0)})^2 - (S^{(1)})^2 - (S^{((2)})^2 - (S^{(3)})^2 \\ S^{(i)} &= F_{ri}\gamma - P_i A_i\end{aligned}$$

これより *N(S)* の表式は

$$N(S) = (\varepsilon\gamma - \mathbf{F_r}\cdot\mathbf{A})^2 - \sum_{i=1}^{3}(F_{ri}\gamma - P_i A_i)^2 \tag{25}$$

ここに $F_r > 0$ と先ほどの結果 $\varepsilon > F_r$ を使うと、

$$\begin{aligned} N(S) &\geq [\varepsilon^2 - F_r^2 - 2(\varepsilon + 3P)F_r] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{3}[\varepsilon^2 - F_r^2 - 2(\varepsilon + P)F_r - P_i^2]A_i^2 \end{aligned}$$

が得られる。ここでもう一つの *DEC* *(*$S^\alpha S_\alpha = -N(S) \geq 0$*)* を考えると、

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &\geq F_r^2 + 2(\varepsilon + 3P)F_r \\ \varepsilon^2 &\geq P_i^2 + F_r^2 + 2(\varepsilon + 3P)F_r \end{aligned} \tag{26}$$

以上が $T^{\alpha\beta}$ に対する *energy condition* の計算の流れで、式 *(21),(22),(26)* がそれにあたる。あとは、ε、P の式 *(10),(11)* を用いてまとめると、

$$\rho + \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi}|B|^2 + E_r \geq 2F_r \tag{27}$$

$$\rho + \frac{1}{4\pi}|B|^2 + E_r + p + P_r - \frac{1}{4\pi}B_i^2 \geq 2F_r \tag{28}$$

$$\rho + \frac{1}{4\pi}|B|^2 + E_r + 3p + 3P_r \geq 4F_r \tag{29}$$

$$\begin{aligned} (\rho + \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi}|B|^2 + E_r)^2 &\geq (p + P_r + \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi}|B|^2 - \frac{1}{4\pi}B_i^2)^2 + F_r^2 \\ &\quad + 2(\rho + \frac{1}{4\pi}|B|^2 + E_r + 3p + 3P_r)F_r \end{aligned} \tag{30}$$

というように、*energy condition* を書くことができる。これが輻射場、磁場を伴う完全流体の *energy condition* の表式である。

4 Conclusion

ここでは様々な仮定をおいた理想的な状態のエネルギー運動量テンソルを考えたが、これはあとの *energy condition* の計算を簡単にするためのものなので、ここからより複雑な状態においても応用が利くことが期待される。また、*energy condition* の計算手順は一般的であるため様々な場合に適用できる。

Reference

Oscar M. Pimetel, F.D.Lora-Clavijo, & Guillermo A.Gonzalez. Ideal Magnetohydrodynamics with Radiative Terms:Energy Conditions. arXiv1612.03299v2

超新星爆発のメカニズムと多次元シミュレーションの現状

水口 万結香 (福岡大学大学院 理学研究科)

Abstract

太陽の約 8 倍以上の質量をもつ恒星は元素合成の最終段階において中心部に鉄のコアを形成する。この鉄コアが重力的に不安定になって急激に潰れ始め（重力崩壊)、それによって生じる爆発が重力崩壊型超新星爆発である。この現象は、自然界の 4 つの相互作用がすべて関与し起こるという点で非常に重要な現象である。さらに中性子星やブラックホール天体の生成現場であり、銀河の化学進化にも重要な役割を果たしていると考えられており、天文学や高エネルギー宇宙物理分野において最も注目される天体現象の一つである。しかし、重力崩壊型超新星爆発がどのような過程により起こっているのかは、長い研究の歴史を持ちつつも未だ解明されていない。この現象を解明するにあたって、まずは内部コアで起こっている現象を理解する必要がある。

重力崩壊が進み中心密度が核密度に達したとき、核力によって急激に圧力があがるため中心の超高密度領域（内部コア）が外側の物質をはじき返し、内部コア表面に衝撃波が形成される。しかしこの衝撃波は、その背面での鉄の光分解とニュートリノ冷却によりエネルギーを失い、およそ半径が 100-200km の地点で一度停止してしまう。停止した衝撃波が復活するにあたって重要になるシナリオが、ニュートリノ加熱メカニズムである。ニュートリノによって再加熱された衝撃波は再び外側に向かって動き出し、星の表面まで到達して超新星として観測されると考えられている。

今回の夏の学校では、超新星はどのようにして起こるのか、そしてニュートリノはどのように衝撃波を再加熱し復活に導くのかについて、最新の多次元シミュレーションの結果を交えながら詳しく議論していきたい。

1 Introduction

超新星爆発とは天文学や高エネルギー宇宙物理分野において最も注目されている天体現象の一つである。近年はスーパーコンピューターによるシミュレーションが盛んに行われているが、詳細なメカニズムは未だに解明されていない。今回は星のコアに注目し、最新のシミュレーション結果に触れつつ超新星爆発のメカニズムについて考える。

2 Methods/Instruments and Observations

爆発メカニズムの解明には超新星コアでどのような現象が起こり、爆発に至るかが重要である。そこでコアに注目し、理論とシミュレーション両方に触れつつ考える。

3 Results

超新星は鉄コア生成後、光分解・電子捕獲反応によって重力崩壊が急激に進む。密度の上昇に伴ってニュートリノトラッピングが起こり、核密度を超えると急激に圧力が上昇することから衝撃波を形成する。これがコアバウンスである。衝撃波は重元素を分解しながら外へ伝搬していくため、中心部では光分解が盛んに起き、エネルギーを失うため衝撃波は停滞する。停滞した衝撃波を復活させるために考え出されたのがニュートリノ加熱メカニズムである。ゲイン領域においてニュートリノで星を加熱することで衝撃波を復活させ、爆発へ転じさせることが可能となる。また、従来の数値シミュレーションでは爆発しなかったモデルが、ストレンジネスの効果を考えることによって爆発に転じたという報告もある (Melson et al. 2015)。

4 Discussion

現在に至るまでに多くの研究がされてきたが、未だに解明はされていない。また、シミュレーション結果と観測値の結果の整合性も取れていない。爆発メカニズムとシミュレーションについてどのような研究が進んでいるかについて考える。

5 Conclusion

超新星爆発のシミュレーションを行う上での課題は長時間のシミュレーションである。スーパーコンピューターを駆使し、より精巧で長時間のシミュレーションの実行が求められている。

6 参考文献

Melson at el. 2015, ApJ, 808, L42
固武慶, & 滝脇知也 2007, 日本物理学会誌 Vol .62, No.10

銀河間空間の重元素線の吸収と物理的条件

田辺直人 (筑波大学大学院 数理物質科学研究科)

Abstract

銀河間物質 (IGM) とは、銀河と銀河の間にある希薄なガス ($n_H \approx 10^{-5}\mathrm{cm}^{-3}$) で、宇宙のバリオンの大部分を IGM が占める。QSO 吸収線上に観測された Ly α Forest(LAF) から IGM の存在が知られている。QSO 吸収線上にきざまれる重元素線から IGM の重元素についての情報を得ることができる。それらの重元素はどこから来たのかを、今回レビューを行う Oppenheimer et al.(2012) では宇宙論的流体シミュレーションに銀河風モデルを組み込み IGM の重元素汚染状態を調査した。さらにそれが吸収線としてどのように観測されるかを疑似観測の手法を用いて調査した。

1 Introduction

1.1 IGM の重元素

宇宙の重元素は一般的には星形成により生成される。IGM には顕著な星形成活動は見られていないが、重元素を含んでいる。それらは銀河で作られた重元素が超新星爆発や銀河風によって銀河間空間に飛ばされたものであると宇宙論的シミュレーションにより示されている（e.g. Oppenheimer & Davé 2006)。IGM の重元素と中性水素がつくる背景 QSO のスペクトル上の吸収線を観測することで IGM の重元素分布が分かり、宇宙の物質分布の理解につながる。

1.2 重元素吸収の観測

Ly α Forest と比べて重元素吸収の情報は少ない。理由として重元素線は弱く検出しずらい上に、いくつかの重元素線は Ly α Forest の中に重なることで判別が困難になるためである (e.g. Chen et al. 2003)。

しかしこの問題は Hubble 望遠鏡の Cosmic Origins Spectrograph(COS) の高精度化により解決される可能性がある。COS の高精度化は IGM の metallicity、重元素汚染した IGM の温度、重元素の均一性になどについて正確にもたらし、IGM の重元素分布の大きな理解につながることが期待されている。

2 Methods/Instruments and Observations

2.1 シミュレーションコード

計算コードには GADGET-2 の N 体計算と SPH 法を修正した宇宙論的シミュレーション（Oppenheimer and Davé 2008）を用いている。宇宙論パラメーターは WMAP7 の条件 (Jarosik et al. 2011) を用いている。粒子数 2×128^3 と 2×384^3 の $16h^{-1}$Mpc と $48h^{-1}$Mpc のボックスを使用する。

2.2 銀河風の実装

銀河から銀河間空間に重元素を運ぶ銀河風について、前論文 (Oppenheimer and Davé 2008) と同様に nw(no wind)、sw(slow wind)、cw(constant wind)、vzw(momentum-conserved wind) を用いる。nw は銀河風のない場合で他の銀河風と比較するために用いる。sw、cw の速度はそれぞれ $v_{\mathrm{wind}} = 340\mathrm{km\ s^{-1}}$、$v_{\mathrm{wind}} = 680\mathrm{km\ s^{-1}}$ となっている。vzw は輻射圧による wind で $v_{\mathrm{wind}} = 3\ \sigma\sqrt{f_L - 1}$ となっている (Springel and Hernquist 2003a)。ただし、σ は $\eta = \sigma_0/\sigma$ (η:質量負荷計数,$\sigma_0 = 150\mathrm{km\ s^{-1}}$)、また f_L は銀河からガスを放出するのに必要な光度を Eddington 光度で規格化した値である。

また、重元素は Type Ⅱ supernovae(型 SNe)、Type Ia supernovae(Ia 型 SNe)、asymptonic giant branch(AGB) 星などから生成され、銀河間空間に運ばれる。

2.3 密度-温度分布での相の区分

IGM のガス成分を温度と密度により 4 つの相に分割する。

- Diffuse ($\mathrm{T} < \mathrm{T_{th}}, \delta < \delta_{\mathrm{th}}$)
- WHIM ($\mathrm{T} > \mathrm{T_{th}}, \delta < \delta_{\mathrm{th}}$)
- Hot halo ($\mathrm{T} > \mathrm{T_{th}}, \delta > \delta_{\mathrm{th}}$)
- Condensed ($\mathrm{T} < \mathrm{T_{th}}, \delta > \delta_{\mathrm{th}}$)

$\mathrm{T_{th}} = 10^5\mathrm{K}$ は低温相と高温相の区分を示し、ヘリウムと重元素の冷却曲線の最大に近い温度である。$\delta_{th}(= 6\pi^2[1 + 0.4093(1/f_\Omega - 1)^{0.9052}] - 1)$ はビリアル半径内にあるハローガスと IGM ガスの密度による区分を示し、f_Ω は赤方偏移により変化する。これらの相の重元素分布を調べる。

3 Results

3.1 密度-温度分布

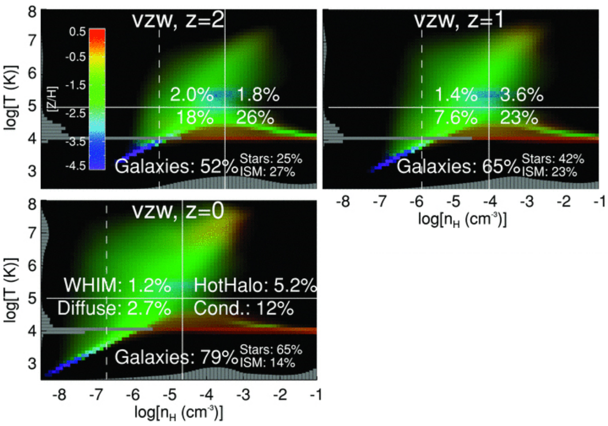

図 1: z = 2∼0 での vzw モデルの密度温度分布 : 割合は各相の重元素を示し、カラーで密度温度での metallicity、ヒストグラムで銀河外の重元素のみの気体分布を表す。

図 1 は進化の経過を示し、Diffuse 中の重元素の割合は z=2 から 0 にかけて 18 %から 3 %に減少する。WHIM の重元素の割合は z=2 で小さく、さらに少しずつ減少している。

Davé(2010) では z=2∼0 での vzw モデルのバリオン質量の割合は WHIM が 10 %から 24 %に増加、Diffuse では 73 %から 41 %に減少している。従って、全体的に見ると IGM(Diffuse+WHIM) の重元素の割合は時間経過により減少しているが、IGM は重元素は増えているため metallicity は減少していない (図 2)。

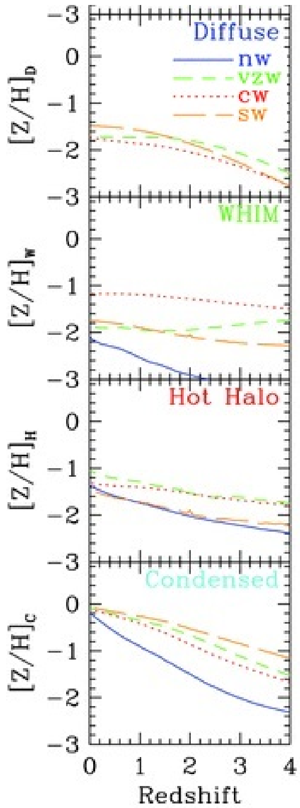

図 2: z = 4∼0 でのそれぞれの銀河風モデル・相での metallicity を示す。

3.2 IGM 重元素汚染

図 3 の上図は z=0 の密度領域それぞれに分布している重元素の平均年齢を示したものであり、どの銀河風モデルでも低密度領域の重元素がより古いことが分かる。つまり低密度領域は高密度領域より早期に重元素汚染されていることが分かる。

下図は z=0、vzw モデルでの重元素それぞれの宇宙電離密度を表していて、Ne_{VIII} や O_{VI} などの高電離重元素は低密度領域を占めていて、C_{IV} や Si_{IV} などの低電離重元素は高密度領域を占めている。従って Ne_{VIII} や O_{VI} などの高電離重元素は早期に IGM に汚染し、C_{IV} や Si_{IV} などの低電離重元素は晩期に汚染したということになる。

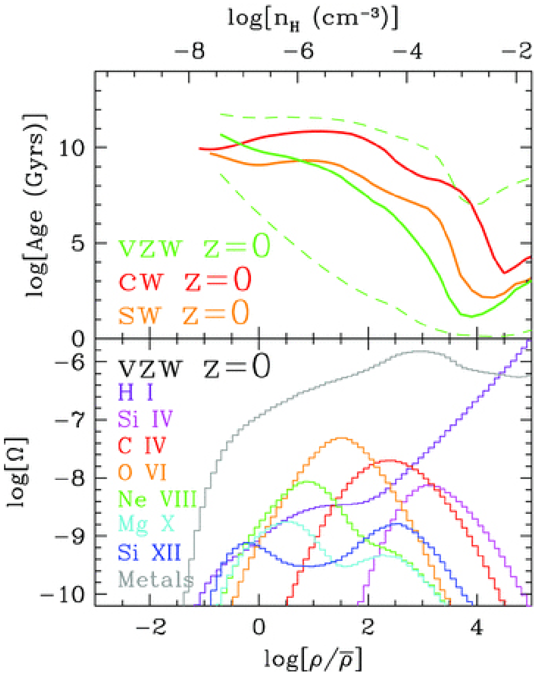

図 3: 上図はそれぞれの銀河風の z=0 での密度領域と重元素の平均年齢を示し、下図は vzw モデルでのそれぞれの重元素の密度領域での存在比を示す。

3.3 モデルの物理的条件

いくつかの重要な物理的・化学的仮定を変更した場合のモデルの妥当性を調べる。以下、主に O_{VI} について焦点を当てる。

3.3.1 ionization background

高電離重元素は背景 UV 分布の強度によって光電離され、吸収線強度も変化する。

背景 UV 分布の強度を $F_\nu \propto \nu^{-\alpha}$ とし、$\alpha = 1.2, 2.0$ での重元素線を比較する。

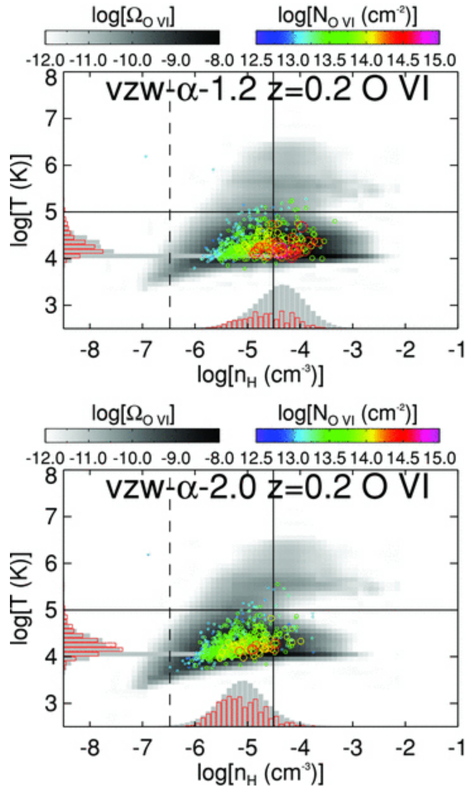

図 4: z=0.2 での O_{VI} の vzw モデルの α =1.2(上図) と α =2.0(下図) の密度-温度分布： SPH 粒子から合計された $\Omega_{O_{VI}}$ の分布とその密度-温度のヒストグラム、 COS での吸収を柱密度を用いた色付きの分布と赤いヒストグラムで示す。

図 4 に示すように α の値を $\alpha = 2.0$ と $\alpha = 1.2$ の場合を比較すると、$\alpha = 1.2$ では宇宙電離密度 $\Omega_{O_{VI}}$ は全体的に高密度領域の割合が増加し、ハロー (Condensed+Hot halo) の割合も増える。α が小さくなり背景 UV 分布の強度が大きくなるとハロー領域での重元素の割合が増加することが図 4 のヒストグラムからわかる。

一方温度についてみると、どちらも 10^5K より高温の割合はほとんどない。これは 10^5K より高温の領域、つまり WHIM では O_{VII} などのより高い電離化状態となり、O_{VI} はトレースされないためである。

3.3.2 metal-line cooling

metal-line cooling について、衝突電離 (CIE) による cooling の場合と光電離 (PI) による cooling の比較を表す。

光電離の場合は結合電子の数が減少し cooling の効率が低下する。そのため衝突電離の場合と比べて高温状態の重元素線をとらえると予測される。

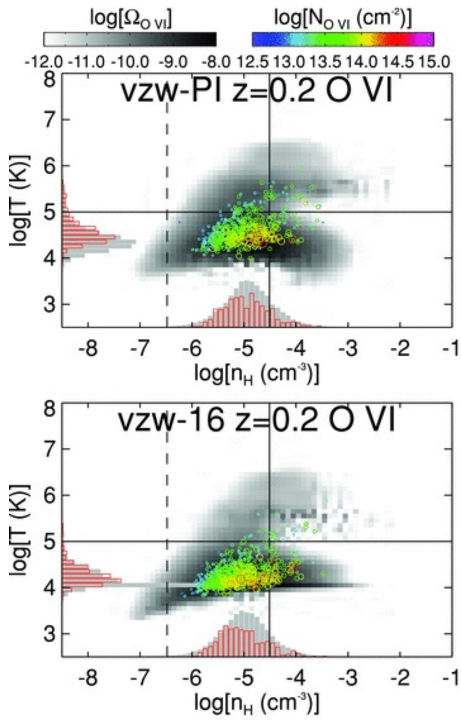

図 5: z=0.2 での O_{VI} の vzw モデルの光電離 (PI)(上図) と衝突電離 (CIE)(下図) の密度温度分布： SPH 粒子から合計された $\Omega_{O_{VI}}$ を白〜黒の分布と灰色のヒストグラム、COS での吸収を柱密度を用いた色付きの分布と赤いヒストグラムで示す。

図 5 で PI の $n_H \leq 10^{-5.5}\mathrm{cm}^{-3}$ では CIE とほぼ変わらないが、$n_H \geq 10^{-5.5}\mathrm{cm}^{-3}$ では PI は CIE と比べて高温の O_{IV} をトレースしている。

しかし、高温ではあるが相としては WHIM 相ではなく Diffuse 相であるため、WHIM 相の一握りの重元素しかトレースできていない。

4 Discussion/Conclusion

銀河間空間のバリオンの 90 %を占める重元素の吸収線と物理的条件について調べた。

重元素は赤方偏移 z=2 から z=0 では低密度の領域にも存在するが、より高密度領域に存在している。現在は IGM に多く存在するバリオンとは対照的に銀河の中に大半の重元素が存在していて、metallicity は高温 IGM 領域の WHIM 相では $1/50Z_{\odot}$、低温 IGM 領域の Diffuse 相では $1/10Z_{\odot}$ ほどになっている。

どの銀河風モデルでも IGM(Diffuse+WHIM) は時間経過により metallicity が増加しているが、銀河風のない nw モデルのみ増加せずに星や ISM の metallicity が高くなっている。

光電離 (PI) による cooling は衝突電離 CIE の cooling では重元素の温度が少し異なるが、O_{VI} では両方とも Diffuse 相に多く、他の重元素であっても基本的な結論は変わらない。

Reference

Oppenheimer B. D., Davé R. Karz N., Kollmeiner J.,Weinberg D. H., 2012, MNRAS 420,829

Oppenheimer B. D., Davé R. A., 2006, MNRAS 373,1265

Oppenheimer B. D., Davé R. A., 2008, MNRAS 387,587

Chen X., Weinberg D. H., Karz N., Davé R., 2003, ApJ, 594, 42

Jarosik N. et al., 2011, ApJS, 192, 14

Davé R., Oppenheimer B. D., Karz N., Kollmeier J. A., Weinberg D. H., 2010, MNRAS, 408, 2051

密度ゆらぎ形成における非線形ニュートリノの影響

上野 智久 (東京大学大学院 M1 理学系研究科)

Abstract

宇宙の構造形成において、ニュートリノは自由流の影響でゆらぎを消す働きをし、宇宙のゆらぎの形成を妨害する。この影響を観測することでニュートリノの質量の上限値に制限をかけることができる。しかし、このことは解析的な計算で厳密解を出すことが難しく、研究が進んでいない。この発表では、(Shun Saito et al. 2008) の内容をレビューし、さらにそこで行われた計算の再現を試みた。

1 Introduction

ニュートリノの質量の合計の上限値 0.2〜0.6eV (2008 年当時) は宇宙の構造形成の観測によって制限されている。しかし、有限のニュートリノ質量を考慮した非線形ゆらぎ計算は N 体シミュレーションを用いてしか行えず、計算量の問題からニュートリノの質量などのパラメータを変化させて性質を調べることが困難であった。それを解決するためには解析的な計算方法が必要である。

2 Principle

宇宙のインフレーション後の初期状態には物質密度のゆらぎが存在する。その物質密度が他よりも高い部分には、重力によって他から物質が集まりさらに密度が高くなる。このようにして、宇宙の大規模構造が形成される。ここで、物質の中に有限の質量を持ったニュートリノが含まれている場合を考える。ニュートリノは、他の物質に対して質量が軽いため、熱運動による速度が無視できない。その熱運動によって、ニュートリノは凝縮した構造から脱出してしまい、構造形成を遅らせる。この影響を実際の宇宙の観測と比較することで、ニュートリノのエネルギー密度に制限を掛けることができる。

3 Methods

Mixed Dark Matter(MDM) モデルは CDM・バリオンに加えニュートリノを含んだ宇宙モデルである。これらの成分の密度の摂動は二流体近似：

$$\delta_m = f_{cb}\delta_{cb} + f_\nu \delta_\nu \quad (1)$$

で与えられる。δ は各物質の規格化された密度摂動、f は matter のエネルギー密度分率である。ニュートリノの密度分率は、総質量を元に

$$f_\nu = \frac{m_{\nu,tot}/eV}{94.1\Omega_{m0}h^2} \quad (2)$$

と表せる。各物質のパワースペクトルを $P(k)$ で表すと、全物質のパワースペクトルは、

$$P_m(k) = f_{cb}^2 P_{cb}(k) + 2f_{cb}f_\nu P_{cb,\nu}^L(k) + f_\nu^2 P_\nu^L(k) \quad (3)$$

で与えられる。$P^L(k)$ は線形パワースペクトル、$P\ L_{cb,\nu}$ は線形クロスパワースペクトルである。$f_\nu = O(0.01)$ と小さいため、の項のみ 1-loop の非線形の摂動を計算する:

$$P_{cb}(k;z) = P_{cb}^L + P_{cb}^{(13)} + P_{cb}^{(22)} \quad (4)$$

但し、1-loop 計算の結果[1]

$$
\begin{aligned}
P_{cb}^{(22)}(k;z) &= \frac{k^3}{98(2\pi)^2}\int_0^\infty drP_{cb}^L(kr;z) \\
&\times\int_{-1}^{1} d\mu P_{cb}^L(k\sqrt{1+r^2-2r\mu};z) \\
&\times\frac{(3r+7\mu-10r\mu^2)^2}{1+r^2-2r\mu^2} \qquad (5) \\
P_{cb}^{(13)}(k;z) &= \frac{k^3P_{cb}^L(k;z)}{252(2\pi)^2}\int_0^\infty drP_{cb}^L(kr;z) \\
&\times[\frac{12}{r^2}-158+100r^2-42r^4 \\
&+\frac{3}{r^3}(r^2-1)^3(7r^2+2)ln|\frac{1+r}{1-r}|]
\end{aligned}
$$

である。この全物質パワースペクトル $P_m(k)$ を f_ν=0.01,0.02 について計算した。これは、ニュートリノの総質量が 0.12eV,0.24eV の場合に対応する。赤方偏移 z は 3 とし、線形スペクトルの入力には計算ライブラリ (A. Lewis et al. 2000) を用いた。

4 Results

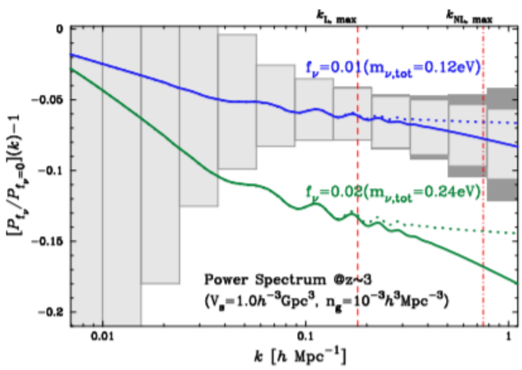

図 1: Shun Saito et al. (2008) の図 1

図 1、図 2 ともに横軸が波数依存性、縦軸がニュートリノ分率が 0 の場合に対する密度の減少割合である。青線がニュートリノ分率 $f_\nu=0.01$、緑線がニュートリノ分率 $f_\nu=0.02$ を表している。点線が摂動論を用いない場合（線形理論）、実線が 1-loop 摂動論で計算した場合である。図 1 中の $k_{L,max}$ は線形理論

[1](Shun Saito et al. 2008) の (3) 式と一部相違があるがこの発表資料が正しい。

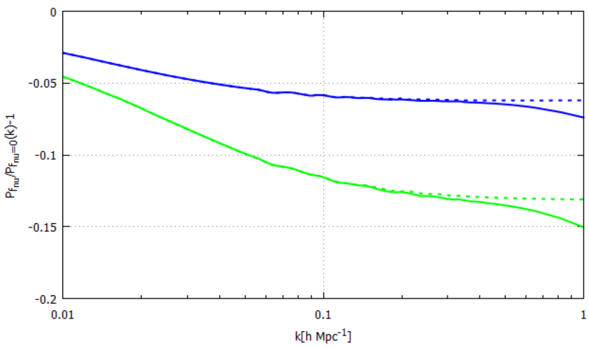

図 2: 今回再現した図

が N 体シミュレーションの結果と一致しなくなる周波数、$k_{NL,max}$ は摂動論が N 体シミュレーションの結果と一致しなくなる周波数を表している。

5 Discussion

・線形理論の場合は、小スケール (k が大きい場合) では構造形成の抑制率は波数依存性が殆どなかったが、摂動計算ではニュートリノの自由流スケールよりも小さい構造が消されることをよりよく扱える。また、摂動計算では、N 体シミュレーションの結果をよく再現する波数の範囲が増加する。

・将来的には Wide-Field Multi-Object Spectrograph (WFMOS) などのより精度の高い観測で、ニュートリノ質量にさらなる制限を掛けることができる。その比較の際に、今回の摂動論での計算結果を用いることができる。図 1 中の網掛け部分は $f_\nu=0.01(m_{\nu,tot}=0.12eV)$ を仮定した場合に、WFMOS の観測で想定される誤差である。誤差を含めても 0 から有意に外れているので、もし観測でこのようなパワースペクトルのスケール依存性が観測されなかった場合、ニュートリノ質量に上限をかけることができる。

・図 1 より、バリオン音響振動 (BAO) の影響は小さく、観測との比較を邪魔しないことが分かる。

・図 2 は図 1 と BAO の大きさが異なること以外はよく一致した。BAO の大きさの違いについては原因が不明だが、考えられる要因としては線形スペクトルを計算する際のコードの入力が若干異なることなどが挙げられる。

6 Conclusion

非線形理論を使用した計算で、ニュートリノの質量の効果をよりよく含めたパワースペクトルが計算できた。この結果を将来の観測と比較することでニュートリノの質量についてより厳しい制限が可能になる。

Acknowledgement

丁寧な指導をしてくださった東京大学宇宙理論研究室の大里健様、および天文・天体物理若手の会、後援の企業・個人の皆様に厚く御礼申し上げます。

Reference

Shun Saito, Masahiro Takada, & Atsushi Taruya 2008, Phys. Rev. Lett. 100, 191301

A. Lewis, A. Challinor & A. Lasenby, Astrophys. J. 538, 473

PBH を用いた原始重力波の制限

三浦 大志 (京都大学大学院 理学研究科)

Abstract

Primordial Black Holes（PBH）は宇宙初期に密度ゆらぎが重力崩壊して形成されるブラックホールであり、様々な観測から PBH の量は制限されている。本講演は、(T. Nakama & T. Suyama 2015) のレビューを行い、PBH の量の観測による制限から原始重力波の振幅を制限する方法を紹介する。初期テンソル摂動の振幅が大きいと、それらの 2 次の効果により密度ゆらぎが誘起される。誘起された密度ゆらぎがホライズンに入ったときに大きすぎると、形成される PBH の量が多くなり観測の上限を超えてしまう。この方法により様々な波長領域で原始重力波の振幅に対する制限が得られ、特に短波長領域でビッグバン元素合成 (BBN) や宇宙マイクロ波背景放射（CMB）から得られた制限より厳しい制限が得られた。

1 Introduction

初期宇宙では原始重力波が形成されたと考えられている。原始重力波のパワースペクトルはハッブルパラメータなどのインフレーションの情報を反映しているため、原始重力波を調べることは宇宙論的に重要である。

原始重力波の振幅を様々な波長領域で適応できる制限方法として、軽元素の現在量から BBN の時期を調べる方法と、CMB の異方性から光子脱結合の時期を調べる方法がある。これらの方法では、原始重力波の寄与をニュートリノ世代数 N_ν からの補正 $\Delta N_{\rm GW}$ として取り入れる。他の物理機構もニュートリノ世代数への補正に寄与するので、それを $\Delta N_{\rm other}$ と呼ぶ。このときニュートリノ有効世代数 $N_{\rm eff}$ は、

$$N_{\rm eff} = N_\nu + \Delta N_{\rm GW} + \Delta N_{\rm other}, \tag{1}$$

と表される。CMB や BBN から N_ν への補正の上限が得られるので、$\Delta N_{\rm other}$ が負である物理機構がないと仮定すると $\Delta N_{\rm GW}$ に上限が得られる。しかし原理的には N_ν への補正が負になることは可能であり、例としてブレーンワールドが挙げられる。したがって、この仮定に依らないような原始重力波の振幅に対する制限方法が必要である。

本講演では上記の仮定に依らない方法として、PBH が多量に存在しない条件から原始重力波を制限する方法を述べる。PBH とは宇宙初期に密度ゆらぎが重力崩壊して形成されるブラックホールである。質量 M の PBH の量は、通常その PBH が形成された時刻での全エネルギー密度に対する割合

$$\beta(M) = \frac{\rho_{\rm PBH}(M)}{\rho_{\rm tot}}, \tag{2}$$

で表される。$M < 10^{15}$g の PBH は、Hawking 輻射によって現在までに蒸発してしまったと考えられる。$M < 10^{15}$g の PBH への制限は、主にその残存物が宇宙論的に影響を及ぼすとして行われている。また $M > 10^{15}$g の PBH への制限は、主にコンパクト天体の量への制限として行われている。

もし原始重力波が非常に大きければ、密度ゆらぎが原始重力波の 2 次の効果により誘起される。その結果 PBH も大量に生成され、観測結果と矛盾してしまう。この制限方法より、特に短波長領域において CMB や BBN を用いた制限方法よりも厳しい結果が得られる。

2 宇宙論的摂動論

本節では、宇宙論的摂動論を考えることにより原始重力波の振幅と密度ゆらぎとの関係を求める。スカラー摂動の初期パワースペクトルは無いとし、テンソル摂動の 2 次とスカラー摂動の 1 次まで残してアインシュタイン方程式を解く。スカラー摂動の初期パワースペクトルがある場合は、その効果でより

多くの PBH が形成されるので、より厳しい制限が得られる。また放射優勢期に密度ゆらぎが重力崩壊して形成されるような PBH のみを考える。

平坦な Friedman-Lemaître-Robertson-Walker 計量からの摂動を考え、共動ゲージにゲージを固定する。

$$ds^2 = a^2[-(1+2\Phi)d\eta^2 + 2B_{,i}d\eta dx^i + (1-2\Psi)\delta_{ij} + 2h_{ij}dx^i dx^j]. \quad (3)$$

ただし、$h^{\;\;i}_{ij;} = h^i_i = 0$ である。また、状態方程式は $p = c_{\rm s}^2\rho$ に従い、放射優勢期では $c_{\rm s}^2 = 1/3$ である。ρ と p も背景と摂動に分解する。

$$\rho(\eta,\boldsymbol{x}) = \rho_0(\eta) + \delta\rho(\eta,\boldsymbol{x}),$$
$$p(\eta,\boldsymbol{x}) = p_0(\eta) + \delta p(\eta,\boldsymbol{x}). \quad (4)$$

アインシュタイン方程式をスカラー摂動の 1 次、テンソル摂動の 2 次まで残す。h_{ij} の 1 次の方程式は

$$h''_{ij} + 2\mathcal{H}h'_{ij} - \Delta h_{ij} = 0, \quad (5)$$

と求められる。ただし $'$ は η についての微分であり、$\mathcal{H} = a'/a$ である。h_{ij} の 2 次の方程式は

$$\begin{aligned}
&\Delta\Psi - 3\mathcal{H}(\Psi' + \mathcal{H}\Phi) - \mathcal{H}\Delta B + S_1 = 4\pi G a^2\delta\rho,\\
&(\Psi' + \mathcal{H}\Phi + S_2)_{,i} = 0,\\
&\Psi'' + \mathcal{H}(2\Psi + \Phi)' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi\\
&\quad + \frac{1}{2}\Delta(\Phi - \Psi + B' + 2\mathcal{H}B) + S_3 + S_4\\
&\qquad\qquad = 4\pi G a^2\delta p,\\
&(\Phi - \Psi + B' + 2\mathcal{H}B - 2S_5)_{,ij} = 0, \quad (6)
\end{aligned}$$

と書き下せる。$S_1 \sim S_5$ は h_{ij} の 2 次の項であり、以下の式を満たす。

$$\begin{aligned}
S_1 \equiv& -\frac{1}{4}h'_{ij}h'^{ij} - 2\mathcal{H}h_{ij}h'^{ij} + h_{ij}\Delta h^{ij}\\
&-\frac{1}{2}\partial_j h_{ik}\partial^k h^{ij} + \frac{3}{4}\partial_k h_{ij}\partial^k h^{ij},\\
\Delta S_2 =& \partial^i(-h^{jk}\partial_k h'_{ij} + \frac{1}{2}h'^{jk}\partial_i h_{jk} + h^{jk}\partial_i h'_{jk}),\\
S_3 \equiv& \frac{3}{4}h'_{ij}h'^{ij} + h_{ij}h''^{ij} + 2\mathcal{H}h_{ij}h'^{ij}\\
&-h_{ij}\Delta h^{ij} + \frac{1}{2}\partial_j h_{ik}\partial^k\partial^{ij},\\
\Delta S_4 =& \frac{1}{2}(\Delta S^i_i - \partial^i\partial^j S_{ij}),\\
\Delta^2 S_5 =& \frac{1}{2}(3\partial^i\partial^j S_{ij} - \Delta S^i_i), \quad (7)
\end{aligned}$$

ここで S_{ij} は以下のように定義する。

$$\begin{aligned}
S_{ij} \equiv& -h'^k_i h'_{jk} - h_{ik}h''^k_j - 2\mathcal{H}h^k_i h'_{jk} + h^{kl}\partial_k\partial_l h_{ij}\\
&+h^k_i\Delta h_{jk} - h^{kl}\partial_l\partial_i h_{jk} - h^{kl}\partial_l\partial_j h_{ik}\\
&-\partial_k h_{jl}\partial^l h^k_i + \partial_l h_{jk}\partial^l h^k_i\\
&+\frac{1}{2}\partial_i h_{kl}\partial_j h^{kl} + h^{kl}\partial_i\partial_j h_{kl}. \quad (8)
\end{aligned}$$

この方程式系から、密度ゆらぎ $\delta = \delta\rho/\rho_0$ は

$$\delta = \frac{1+c_{\rm s}^2}{c_{\rm s}^2\mathcal{H}}(\Psi' + S_2), \quad (9)$$

で与えられる。また、Ψ はフーリエ空間で以下の方程式を満たす。

$$\Psi'' + 2\mathcal{H}\Psi' + c_{\rm s}^2k^2\Psi = S. \quad (10)$$

ここで

$$S \equiv c_{\rm s}^2 S_1 - S_3 - \hat{k}^i\hat{k}^j S_{ij} + 2c_{\rm s}^2\mathcal{H}h_{ij}h'_{ij}, \quad (11)$$

とした。方程式 (10) は形式的に遅延グリーン関数 g_k を用いて以下のように書ける。

$$\begin{aligned}
\Psi(\eta,\boldsymbol{k}) =& a^{-1}(\eta)\int_0^\eta d\tilde{\eta}g_k(\eta,\tilde{\eta})a(\tilde{\eta})S(\tilde{\eta},\boldsymbol{k}),\\
g''_k +& \left(c_{\rm s}^2k^2 - \frac{a''}{a}\right)g_k = \delta(\eta - \tilde{\eta}). \quad (12)
\end{aligned}$$

放射優勢期での g_k は $\eta \geq \tilde{\eta}$ で

$$g_k(\eta,\tilde{\eta}) = \frac{1}{c_{\rm s}k}\sin(c_{\rm s}k(\eta - \tilde{\eta})), \quad (13)$$

と書くことができる。したがって、方程式 (9) と (12) から δ と h_{ij} の関係が得られる。

ここでテンソル摂動の初期パワースペクトルを導入する。

$$\langle h^r(\boldsymbol{k})h^{s*}(\boldsymbol{K})\rangle = \frac{2\pi^2}{k^3}\delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{K})\delta_{rs}\mathcal{P}_h(k). \quad (14)$$

この制限方法では、以下のデルタ関数型パワースペクトルを仮定する。

$$\mathcal{P}_h(k) = \mathcal{A}^2k\delta(k - k_p). \quad (15)$$

したがって、振幅が $\mathcal{A}$ である波長 k_p の原始重力波がどのような密度ゆらぎを誘起させるかを求めることができる。

3 PBH の形成と密度ゆらぎ

PBH の量と密度ゆらぎを関係づけるために Press-Schechter 理論を用いる。中心 $\boldsymbol{x}$、全質量 M の球内で密度ゆらぎを平均化する。

$$\delta_M(\eta, \boldsymbol{x}) = \int W_R(\boldsymbol{x'} - \boldsymbol{x})\delta(\eta, \boldsymbol{x})d^3x',$$
$$W_R(\boldsymbol{x'} - \boldsymbol{x}) = \frac{3}{4\pi R^3}\Theta\left(1 - \frac{|\boldsymbol{x'} - \boldsymbol{x}|}{R}\right). \quad (16)$$

ただし平均化した球内の全質量は $M = \frac{4}{3}\pi(aR)^3\rho$ で平均化した球の半径 R と結びついている。$\delta_M(\eta, \boldsymbol{x})$ はフーリエ空間での揺らぎと以下の関係にある。

$$\delta_M(\eta, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \hat{W}(kR)\delta(\eta, \boldsymbol{k})\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}d^3k,$$
$$\hat{W}(kR) = \int W_R(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}d^3x. \quad (17)$$

ゆらぎがホライズンに入ったときに、ホライズン内で平均化されたゆらぎ $\delta_M(\eta, \boldsymbol{x})$ がある下限 δ_c よりも大きければ重力収縮して PBH が形成される。ここでは $\delta_\mathrm{c} = 0.4$ を仮定する。(A. G. Polnarev & I. Musco 2007) この条件を用いて、質量 M の PBH が形成された時の割合 $\beta(M)$ は以下のように書ける。

$$\beta(M) = \int_{\delta_\mathrm{c}}^{\infty} P(\delta_M - \langle\delta\rangle)d(\delta_M - \langle\delta\rangle). \quad (18)$$

ここで $P(\delta_M - \langle\delta\rangle)$ は密度ゆらぎの確率密度関数（PDF）である。つまり P を求めれば $\beta(M)$ の $\mathcal{A}$ との関係がわかり制限をつけることができる。テンソル摂動の PDF を Gaussian であると仮定しよう。このときテンソル摂動の 2 次から誘起された密度ゆらぎは non-Gaussian になる。そのためにモンテカルロ法を用いて密度ゆらぎの PDF を求めると図 1 のようになる。

次に、PBH の質量と PBH が形成された時刻との関係を求める。まず、あるモード k_1 の密度ゆらぎがいつ PBH を形成するか見積もる。平均化した密度ゆらぎの標準偏差は

$$\sigma_M(\eta) = (\langle\delta_M(\eta, \boldsymbol{x})^2\rangle - \langle\delta(\eta, \boldsymbol{x})\rangle^2)^{1/2}$$
$$= \left(\int \frac{dk}{k}\hat{W}(kR)\mathcal{P}_\delta(\eta, k)\right)^{1/2}, \quad (19)$$

である。ここで $\mathcal{P}_\delta(\eta, x)$ は密度ゆらぎのパワースペクトルである。モード k_1 のゆらぎがホライズンに入るときその標準偏差は $M_1 = \frac{4}{3}\pi(ak_1^{-1})^3\rho$ として $\sigma_{M_1}(k_1^{-1})$ と表される。この量は図 2 からわかるように $k_1 \sim 0.7k_p$ でピークを持つ。つまりこの時刻に PBH は一番効率的に生成されるから、PBH はこの時刻に形成されるものとする。これより PBH の質量と PBH が形成された時刻の関係は

$$M = \frac{4}{3}\pi(ak^{-1})^3\rho \simeq 2.2\times10^{13}M_\odot\left(\frac{0.7k_p}{1\mathrm{Mpc}^{-1}}\right)^{-2}, \quad (20)$$

となる。

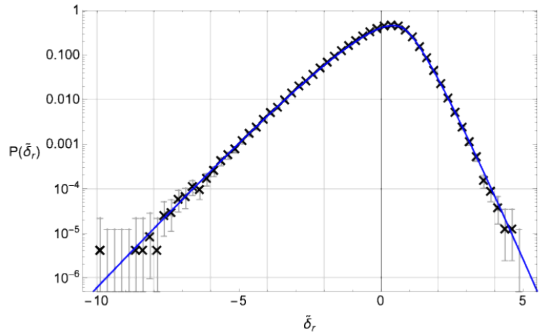

図 1: 密度ゆらぎの PDF。ただし $\tilde{\delta_r} = \delta_M - \langle\delta\rangle/\mathcal{A}^2$ である。T. Nakama & T. Suyama (2016) より引用。

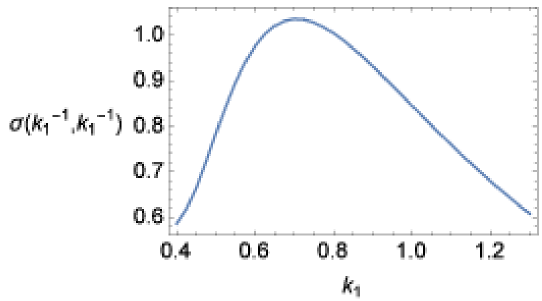

図 2: k_1 モードのホライズンに入る時刻での密度ゆらぎの標準偏差。$\sigma(k_1^{-1}, k_1^{-1}) = \sigma_{M_1}(k_1^{-1})$ で、$\mathcal{A} = 1$、$k_p = 1$ とした。T. Nakama & T. Suyama (2016) より引用。

4 Results

宇宙論的摂動論で密度ゆらぎと原始重力波の振幅との関係を、Press-Schechter 理論で密度ゆらぎと PBH の量との関係を求めることで、PBH の量から原始重力波の振幅への制限を行った。結果を図 3 に示す。PBH

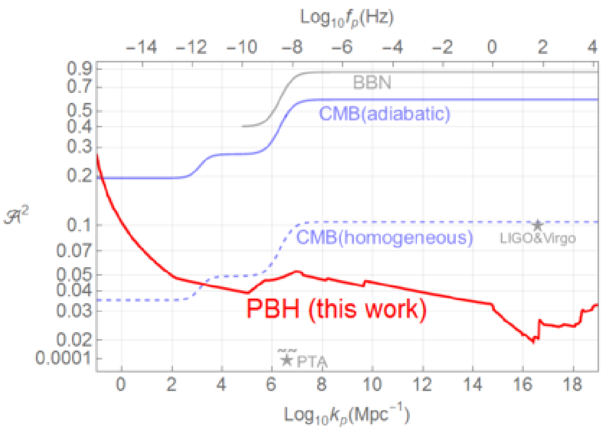

図 3: PBH を用いた原始重力波の振幅 $\mathcal{A}^2$ への制限。T. Nakama & T. Suyama (2016) より引用。

の量への制限は (B. Carr at el. 2010) の結果を用いた。PBH を用いた制限は、$k_p \geq 10^7\mathrm{Mpc}^{-1}$ で BBN、CMB(adiabatic) よりも、約 1 桁厳しく制限をつけられている。また CMB(homogeneous) よりも 1/2 程度厳しく制限をつけられている。ここで adiabatic と homogeneous は原始重力波の初期条件の違いを表している。さらに限られた波長領域についての制限方法とも比較をする。LIGO と Virgo による制限と比較すると、PBH を用いた結果は約 1 桁厳しい制限を与えている。また Pulsar Timing Arrays(PTA) を用いた結果は、PBH を用いた制限よりも 2 桁以上厳しく制限されている。

5 Summary

PBH の量への制限を用いることで、$\Delta N_{\mathrm{other}} \geq 0$ であるという仮定に依らないような原始重力波の振幅への制限方法を確立することができる。その方法としては、まず宇宙論的摂動論においてアインシュタイン方程式をスカラー摂動の 1 次、テンソル摂動の 2 次まで書き下す。その方程式を解くことで、密度ゆらぎと原始重力波の振幅との関係を求めることができる。ここではテンソル摂動の初期パワースペクトルはデルタ関数型を仮定した。

また Press-Schechter 理論により密度ゆらぎを平均化し、その値と PBH が形成されるための密度ゆらぎの大きさの下限を用いることで、質量 M の PBH の割合 $\beta(M)$ を密度ゆらぎの PDF で表せることができる。密度ゆらぎの PDF は non-Gaussian であることに注意をしてモンテカルロ法を用いて求めることができる。したがって $\beta(M)$ と振幅 $\mathcal{A}$ の関係を求めることができる。

結果として得られた制限は、様々な波長領域に適用できる他の制限方法である BBN や CMB を用いた方法よりも厳しい上限を与える。

6 Acknowledgements

基礎物理学研究所 (研究会番号：YITP-W-15-04) 及び国立天文台をはじめとし、ご支援をいただいた全ての皆様に感謝申し上げます。

Reference

T. Nakama, & T. Suyama 2015, Phys. Rev. **D92** 121304

T. Nakama, & T. Suyama 2016, Phys. Rev. **D94** 043507

A. G. Polnarev, & I. Musco 2007, Class. Quant. Grav. **24** 1405

B. Carr, K. Kohri, Y. Sendouda & J. Yokoyama 2010, Phys. Rev. **D81** 104019

インフレーションに伴う non-gaussianity

中塚 洋佑 (東京大学大学院 宇宙線研究科)

Abstract

インフレーションに対しては様々なシナリオが提案されており、それらの多くは標準模型を超える理論 (BSM) の要素を含んでいる。インフレーションモデルの決定は素粒子・宇宙論の分野にまたがった重要な問題である。インフレーションモデルを区別する観測量の一つとしてゆらぎの non-gaussianity が提案されている。non-gaussianity は重力やインフラトンの非線形性を反映した相互作用に由来しており、インフレーションモデルによっては大きな値を持ちうる。ゆらぎの non-gaussianity で重要な観測として三点関数 $\langle\zeta_1\zeta_2\zeta_3\rangle$ と四点関数 $\langle\zeta_1\zeta_2\zeta_3\zeta_4\rangle$ が計算され、また観測的に調べられている。
私はインフレーションに伴って生成される量子ゆらぎの高次相関についての先駆的な研究の一つである論文 (J. M. Maldacena 2003) の Review を行った。私は Maldacena の論文に沿って single scalar canonical inflation に対して作用の高次展開、及び三点関数の計算を行い、non-gaussianity を評価した。また三点関数 $\langle\zeta_1\zeta_2\zeta_3\rangle$ の計算には in-in formalism(S. Weinberg 2005) を用いた。Weinberg は一般的な相互作用に対して三点関数を計算する方法を整備し、また相互作用によるゆらぎの変化がゆらぎの Horizon crossing で主要な寄与を持つことを明示的に示した。single scalar canonical inflation では非ガウス性はスローロールパラメーターで抑えられており、観測することは難しいという結論が得られる。

1 Introduction

インフレーションシナリオの決定は宇宙論的にも素粒子論的にも重要な問題である。現在、モデルへの強力な制限として spectral index: n_s と tensor to scalar ratio: r が理論的・実験的に調べられている (Planck Collaboration 2016)。これらは宇宙背景輻射 (CMB) 二点相関を通じて決定される。インフレーションについて更なる情報を得るために、二点以上の高次相関を調べる方法が知られている。CMB 高次相関を調べることで、ゆらぎの種となるインフレーション中の量子ゆらぎの高次相関が求まる。

インフレーション中に作られるゆらぎは、ゼロ点振動の量子的ゆらぎが起源となっている。量子ゆらぎを求めるためには、作用をインフレーション解周りの微小ゆらぎで展開して量子化を行う。これは曲がった背景場の上の場の理論として計算することができ、Hawking 輻射や Unruh 効果と同様な扱いとなる。微小量の二次までの項を残す場合、作用は自由場であり高次相関 $\langle\zeta_1\zeta_2\zeta_3...\rangle$ はすべてプロパゲータ $\langle\zeta\zeta\rangle$ の積に展開される。この性質は確率変数における gaussianity に相当する。一方、微小量の 3 次以上の項を残す場合、作用は重力やインフラトンの非線形性を反映した相互作用を含む。この場合、高次相関はプロパゲータ $\langle\zeta\zeta\rangle$ 以外に相互作用の効果で変化する。この場合にゆらぎは non-gaussianity な性質を持つと呼ばれる。特に重要な量として三点関数 $\langle\zeta_1\zeta_2\zeta_3\rangle$ と四点関数 $\langle\zeta_1\zeta_2\zeta_3\zeta_4\rangle$ が計算され、また観測的に調べられている。

non-gaussianity の大きさはインフレーションモデルに依存するため、観測からモデルを区別するための指標となる。特に、k-インフレーションと呼ばれるタイプのインフレーションモデルでは大きな non-gaussianity を持ちうることが知られている。k-インフレーションは弦理論の低エネルギー有効理論として現れることがあり、この種のモデルに対する指標として non-gaussianity は強力な制限になる。

また non-gaussianity は物質ゆらぎの分布の Tail に効くため、原始ブラックホール (PBH) の生成量に密接に関わる。PBH を用いたレプトジェネシスを考える場合などに PBH 生成量の評価が重要になる (T. Fujita et al. 2014)。

私はインフレーションに伴って生成される量子ゆら

ぎの高次相関についての先駆的な研究の一つである論文 (J. M. Maldacena 2003) の Review を行った。私は Maldacena の論文に沿って single scalar canonical inflation に対して作用の高次展開、及び三点関数の計算を行い、non-gaussianity を評価した。

また三点関数 $\langle\zeta_1\zeta_2\zeta_3\rangle$ の計算には in-in formalism(S. Weinberg 2005) を用いた。Weinberg は一般的な相互作用に対して三点関数を計算する方法を整備し、また相互作用によるゆらぎの変化がゆらぎの Freezing に反しないことを明示的に示した。

single scalar canonical inflation では非ガウス性はスローロールパラメーターで抑えられており、観測することは難しいという結論が得られる。逆に非ガウス性が観測されると、インフレーション理論を決定する強力な指針となる。

2 非ガウス性の定義

確率変数 x=$\{x_i\}$(i=1,2,,) が Gauss 分布を持つ、とは変数が正規分布 $P(x)$=$\prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}}\exp\left(-\frac{(x_i-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)$ に従うことを指す。確率平均 $\langle\rangle$ を

$$\langle O\rangle = \int\prod_i \mathrm{d}x_i P(\{x\})O \tag{1}$$

で定義すると次の性質が成り立つ。

$$\begin{aligned}\langle x_i x_j\rangle = \delta_{ij} \quad , \quad \langle x_i\rangle = 0 \quad , \\ \langle x_{i_1},,,x_{i_n}\rangle = \sum_m \langle x_{i_1}x_{i_m}\rangle\langle x_{i_2},,,\check{x}_{i_m},,,x_{i_n}\rangle\end{aligned} \tag{2}$$

ただし $\check{x}_{i_m}$ は x_{i_m} を除くことを意味する。この性質は、場の理論における自由場の相関関数が持つ性質と同じ形をしている。そこで、確率平均を量子平均 $\langle O\rangle := \langle 0|O|0\rangle$ で置き換えた量についても上記でガウス的という性質を定義する。ただし 2 点関数に関してはモード関数 ϕ_k^s が比例係数として掛かり $\langle\phi_k\phi_{k'}\rangle = (2\pi)^3\,\delta^3(k-k')\phi_k^{s*}\phi_k^s$ となる。

非ガウス的性質はパラメータ f_{NL} で見ることができる。ガウス的な場 $\zeta_g(x)$ を用いて

$$\zeta = \zeta_g - \frac{3}{5}f_{NL}\zeta_g^2 \tag{3}$$

という場 ζ を作ると三点関数が後述の計算と同様に求まり

$$\begin{aligned}&\langle in|\zeta_{k_1}\zeta_{k_2}\zeta_{k_3}|in\rangle \\ &= -\frac{3}{5}f_{NL}\frac{H_*^8}{\dot{\phi}_*^4}(2\pi)^3\,\delta^3(\textstyle\sum_i \boldsymbol{k}_i)\left(\frac{1}{4k_1^3k_3^3}+(cyclic)\right)\end{aligned} \tag{4}$$

となる。これを f_{NL} の定義とみなして、以下では非ガウス性を評価していく。

3 作用の ADM 分解

single field canonical inflation の作用は

$$S = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left[R-(\nabla\phi)^2-2V(\phi)\right] \tag{5}$$

と書ける。インフレーションを起こすため、ポテンシャルはスローロール条件を満たしていると仮定する。

ゆらぎの自由度はインフラトンに起因するスカラー自由度 1 つと重力子のテンソル自由度が 2 つ存在する。物理的な自由度のみを扱うためにはメトリックの余分な成分をゲージ固定し、また unphysical な自由度を Lagrange multiplier として除去する必要がある。アインシュタイン作用に対して ADM 分解

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int\sqrt{-g}R = \frac{1}{2}\int\sqrt{h}\left[NR^{(3)}+N^{-1}\left(E_{ij}E^{ij}-E^2\right)\right] \quad , \\ \mathrm{d}s^2 =: -N^2\mathrm{d}^2t + h_{ij}\left(\mathrm{d}x^i+N^i\mathrm{d}t\right)\left(\mathrm{d}x^j+N^j\mathrm{d}t\right) \quad , \\ E_{ij} := \frac{1}{2}\left(\dot{h}_{ij}-\nabla_iN_j-\nabla_jN_i\right) \quad , \quad E := E_i^i\end{aligned} \tag{6}$$

を行い、Lagrange multiplier として N, N_i を除去する。(A. Golovnev 2013)

またゲージ固定として comoving gauge を採用するとゆらぎの変数 ζ,γ は

$$\begin{aligned}\delta\phi = 0 \quad , \quad h_{ij} = a^2e^{2\zeta}\left(e^{\gamma_{ij}}\right)_{ij} \quad , \\ \gamma_{ij,i} = 0 \quad , \quad \gamma_{ii} = 0\end{aligned} \tag{7}$$

と書ける。今回はスカラーゆらぎ ζ に絞って解析していく。

4 作用の展開

Eq(14) を微小量の 3 次まで計算すると、

$$S = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\mathrm{d}^3x \frac{\dot{\phi}^2}{\dot{\rho}^2}\left(e^{3\rho}\dot{\zeta}^2 - e^{\rho}\zeta_{,i}^2\right) + S_3 \tag{8}$$

及び

$$\begin{aligned} S_3 &= 4a^5 H\epsilon^2\dot{\zeta}^2\Delta^{-1}\dot{\zeta} + f(\zeta)\frac{\delta L_2}{\delta\zeta} \quad , \\ f(\zeta) &= -\frac{1}{H}\dot{\zeta}\zeta + \frac{1}{4a^2H^2}\zeta_{,i}^2 + 2a^3\dot{\zeta}\Delta^{-1}\dot{\zeta}\frac{1}{2\epsilon a} \\ &- \frac{1}{2}\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}H}\zeta^2 - \frac{1}{4}\epsilon\zeta^2 - \frac{1}{2}\epsilon\Delta^{-1}(\zeta\Delta\zeta) \\ &- \frac{\epsilon}{2H}\Delta^{-1}\left(\zeta\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,ij}\right)_{,ij} + a^3\Delta^{-1}\left(\dot{\zeta}^2\right)\frac{1}{2\epsilon a} \\ &- \frac{1}{4a^2H^2}\Delta^{-1}\left(\Delta\zeta^2 + \zeta_{,ij}^2 + 2\Delta\zeta_{,i}\zeta_{,i}\right) \end{aligned} \tag{9}$$

となる。ただしスローロール近似の最低次までを残している。L_2 は作用の 2 次項を表す。$\frac{\delta L_2}{\delta\zeta}$ が掛かった項は変数変換で除去することができる。私はこの展開を Mathematica 上で半自動的に行えるような手法を考案して実行した。

5 in-in formalism

背景場が時間とともに変化するために、インフレーション中のゆらぎに対しては自明な真空が存在しない。そこで $t_0 \to -\infty$ で定義された真空 $|in\rangle$(BD 真空) を用いて相関関数を

$$\begin{aligned}\langle O(t)\rangle = \langle in|\left[\bar{\mathrm{T}}\exp\left(i\int_{t_0}^{t} H^I(t)\mathrm{d}t\right)\right] \\ \times O^I(t)\left[\mathrm{T}\exp\left(-i\int_{t_0}^{t} H^I(t)\mathrm{d}t\right)\right]|in\rangle\end{aligned} \tag{10}$$

として定義する。ここで $\bar{\mathrm{T}}$ は逆順序積である。O^I 添字は相互作用表示に移ったことを意味する。通常の場の理論と違って、$\bar{\mathrm{T}}$ と T は明確に異なった相互作用 Vertex を作り出すことに注意が必要である。

場の理論と同様に exp を展開してファインマンダイアグラムで項を分類することができる。Fig.(1) に三点関数を計算する場合の典型的なダイアグラムを記載する。external term として $\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ が存在する場合に、それらが right vertex と縮約されていることを表している。注意点としては、曲がった空間上で運動量表示のプロパゲータを構成することは一般に難しいため、運動量表示のファインマンルールを用いるよりも位置表示で時間順序に沿って計算を進める場合が多い。今回の相互作用項 Eq(9) に対して計

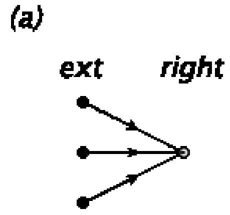

図 1: 典型的な三点関数の Diagram

算を行うと

$$\begin{aligned} &\langle\zeta_{k_1}(t')\zeta_{k_2}(t')\zeta_{k_3}(t')\rangle \\ &\sim i(2\pi)^3\frac{1}{8\prod_i k_i^3}\delta^3(\textstyle\sum \boldsymbol{k}_i)k_1^2k_2^2 \\ &\quad\times\int_{-\infty}^{t'}\mathrm{d}t\frac{H^6}{\dot{\phi}^2}\frac{1}{a}e^{i\eta(k_1+k_2+k_3)} + (cyclic) + c.c. \end{aligned} \tag{11}$$

と求まる。時間積分において主要な効果を持つ因子は $a \propto e^{Ht}$ と振動項 $e^{i\eta(k_1+k_2+k_3)}$ である。前者は被積分関数として、早い時間ほど大きな寄与となる。一方後者は、ゆらぎが Horizon crossing するまで激しく振動しているため、Freezing 以前の寄与を滑らかにする。よってそれぞれの効果がもっとも主要に効く時間として Horizon crossing 付近でのみ相互作用の主な寄与が現れてくる。この傾向はループも含めた一般的なダイアグラムに関して示すことができ、この意味で相互作用によるゆらぎの変化と、因果律から要請されるゆらぎの Freezing out は両立する。

時間積分を処理すると、

$$\begin{aligned} &\langle\zeta_{k_1}(t')\zeta_{k_2}(t')\zeta_{k_3}(t')\rangle \\ &\sim 4(2\pi)^3\frac{1}{\dot{\phi}_*^2}\frac{H_*^6}{8\prod_i k_i^3}\delta^3(\textstyle\sum \boldsymbol{k}_i)\frac{\sum_{i>j}k_i^2k_j^2}{\sum_i|\boldsymbol{k}_i|} \end{aligned} \tag{12}$$

という項に書ける。更に残りの相互作用 $f(\zeta)\frac{\delta L_2}{\delta\zeta}$ も取り入れ、Eq(4) と比較することで single field canonical inflation での非ガウス性の効果 f_{NL} として

$$f_{NL}(k_1,k_2) = -\frac{15\epsilon - 10\eta_V}{12} - \frac{10}{3}\epsilon\frac{\sum_{i>j} k_i^2 k_j^2}{\sum_i |\boldsymbol{k}_i| \sum_i k_i^3} - \frac{5}{12}\epsilon\frac{\sum_{i\neq j} k_i k_j^2}{\sum_i k_i^3} \tag{13}$$

という表式が得られる。この式から single field canonical inflation では f_{NL} はスローロールパラメータで抑えられており、観測が難しいということが分かる。

6 Conclusion

以上が single field canonical inflation に対する三点関数の計算となる。実用的な意義としては、ダイアグラムを用いた一般的な方法で非ガウス性を計算する方法が定式化できた。また理論的な意義として、ゆらぎの Freezing out とゆらぎの相互作用が矛盾せずに両立することがわかった。

例として計算した single field canonical inflation は non-gaussianity が小さい典型的なモデルである。一方で、non-gaussianity が強い例として、例えば DBI モデル

$$S = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left[R - \sqrt{1-2f(\phi)X}/f(\phi) + 1/f(\phi) - V(\phi)\right]$$
$$X = -\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi/2 \tag{14}$$

では $f_{NL}^{equil} \sim O(10^1)$ が達成される (A. De Felice and S. Tsujikawa 2011)。このように non-gaussianity の存在はインフレーションが単純なモデルとは異なることを示唆する。

現状の観測においては、Planck から次のように non-gaussianity は制限されている。

$$f_{NL}^{local} \sim 0.8 \pm 5.0 \quad , \quad f_{NL}^{equilateral} \sim -4 \pm 43 \quad ,$$
$$f_{NL}^{orthogonal} \sim -26 \pm 21 \tag{15}$$

この条件から、幾つかの k-inflation モデルに対しては既に制限が掛かっている。今後の測定精度の向上でインフレーション理論の決定における強力な測定量になると考えられる。

Acknowledgement

夏の学校における自然科学研究機構 国立天文台、京都大学基礎物理学研究所をはじめ、多くの機関、企業、個人の方々からの援助・支援に感謝いたします。

Reference

Planck Collaboration, P. A. R. Ade et al., 2016, Astron. Astrophys. 594 (2016) A13.

J. M. Maldacena, 2003, JHEP 05,013.

T. Fujita, M. Kawasaki, K. Harigaya, and R. Matsuda, Phys. Rev. D89 no. 10, (2014) 103501.

S. Weinberg,Phys. Rev. D72 (2005) 043514.

A. Golovnev, Modern Mathematical Physics. Proceedings, 7th Summer School: Belgrade, Serbia, September 9-19, 2012, pp. 171-179. 2013.

A. De Felice and S. Tsujikawa, Phys. Rev. D84 (2011) 083504.

超対称アクシオンモデルにおけるドメインウォール問題

園元 英祐 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

標準理論で解決できていない大きな問題として、strong CP problem と hierarchy problem がある。前者の有力な解決方法は、標準理論に新たに U(1) Peccei-Quinn 対称性を課すことであり、その U(1) 対称性の破れに伴う擬南部ゴールドストーボゾンとしてアクシオンが現れる。しかし、アクシオンはドメインウォール問題と等曲率ゆらぎの問題を引き起こすことが知られている。そこで本研究では、後者の階層性問題の解決策として有力視されている超対称性を組み合わせた超対称アクシオンモデルを用いて、ドメインウォール問題が生じるかを検証した。その結果、Peccei-Quinn 対称性が破れるエネルギースケールを F_a として、Peccei-Quinn 場の初期の大きさが $F_a \times 10^3$ 以下の場合、ドメインウォール問題が生じないことを示した。

1 Introduction

まず、超対称アクシオンモデルを導入する動機である標準理論における 2 つの問題について説明する。

1.1 Strong CP problem

標準理論は $\mathrm{SU}(3)_C \times \mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$ の対称性を持つ理論として定義されている。このうち、SU(3) 対称性を満たす項を考えると、

$$L \in \frac{g^2}{32\pi^2}\theta G^a_{\mu\nu}\tilde{G}^{a\mu\nu} \equiv \frac{g^2}{64\pi^2}\theta\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}G^a_{\mu\nu}G^a_{\rho\sigma}.$$

の存在が許されている。しかし、実際には中性子の双極子モーメントの観測により、$\theta < \mathcal{O}(10^{-11})$ であることがわかっており、この項の効果は現実にはほとんど観測されていない。この項は CP 変換によって -1 倍されるため強い相互作用の CP 対称性を破る項とないる。それに由来して、この問題は strong CP problem と呼ばれている。

1.2 Hierarchy problem and SUSY

標準理論において、ヒッグス粒子に対する質量補正を考えると、理論の紫外発散のスケール程度の質量補正が予言される。もし標準理論のプランクスケール程度まで有効であるとする場合、このスケールはプランク程度になるが、一方でヒッグス粒子の質量は $\mathcal{O}(10^2)$ GeV でしかない。この質量の大きな隔たりは、hierarchy problem(fine tuning problem) と呼ばれている。

この解決策として有力視されているのが、標準理論の全ての粒子に超対称性パートナーの存在を仮定する超対称模型である。超対称性パートナーとは、標準理論におけるボソン・フェルミオンのそれぞれの粒子に対し、新たに導入されるフェルミオン・ボゾンのことである。これによりヒッグス粒子の質量に対する量子補正をキャンセルすることで、hierarchy problem を回避することができる。

2 Cosmological problems of axion

Strong CP problem の最も有力な解決法は、標準理論に Peccei-Quinn 対称性と呼ばれる U(1) 対称性 (以下、PQ 対称性) を新たに課すことである。PQ 対称性が、あるエネルギースケール F_a で破れた場合、アクシオン場を a として、

$$L \in \frac{g^2}{32\pi^2}\left(\theta - \frac{a}{F_a}\right)G^a_{\mu\nu}\tilde{G}^{a\mu\nu}.$$

なる項が現れる。従って、アクシオン場が $a = \theta F_a$ なる値をとるとき、strong CP problem は自然に解決されることがわかる。実際、effective potential を考えると、

$$\begin{aligned}
\exp\left[-\int d^4x V(a)\right] &= \int DA_\mu \exp\left[-\int d^4x \left\{\frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + i\frac{g^2}{32\pi^2}\left(\theta - \frac{a}{F_a}\right)G^a_{\mu\nu}\tilde{G}^{a\mu\nu}\right\}\right], \\
&\leq \int DA_\mu \exp\left[-\int d^4x \left\{\frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\right\}\right], \\
&= \exp\left[-\int d^4x V(a = \theta F_a)\right].
\end{aligned}$$

となっており、ポテンシャルの大きさを最小にするアクシオン場の値が強い相互作用の CP を不変に保つ配位に対応することで、自然に strong CP problem を解決できることがわかる。

以下では、新たに導入されたこのアクシオンが引き起こす宇宙論的問題について、PQ 対称性が破れる時期に応じて生じる問題を説明する。

2.1 Domain wall problem

ドメインウォール問題は、PQ 対称性がインフレーションの後に破れた場合に生じる問題である。QCD の格子シミュレーションによると、アクシオンは QCD phase transition の際、非摂動効果によってその PQ 電荷に応じた周期的なポテンシャルを獲得することが知られている。

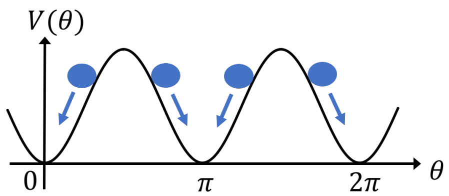

図 1: アクシオンの周期的ポテンシャルの例

これにより、宇宙にドメインウォールが生成されるが、もし安定なドメインウォールが生成された場合、ドメインウォールのエネルギー密度がすぐに宇宙で優勢となり、現在の宇宙を説明することができなくなってしまう。一方、不安定なドメインウォールが生成された場合でも、その崩壊で放出されるアクシオンの量が現在の暗黒物質量を超えてはいけないという強い制限が必要になる。これらの問題をまとめてドメインウォール問題 (P. Sikivie 1982) と呼んでいる。

2.2 Isocurvature problem

等曲率ゆらぎの問題は、PQ 対称性がインフレーションの中に破れた場合に生じる問題である。インフレーション期にアクシオンが存在することによって、アクシオン場由来の等曲率ゆらぎが生じる。しかし、等曲率ゆらぎによって生じるパワースペクトラムは、現在の CMB 観測から厳しく制限されており、等曲率ゆらぎの問題と呼ばれる。(M. S. Turner & F. Wilzcek 1991)

3 Model

2 章で述べた問題は、PQ 場がインフレーション中に M_{pl} 程度の大きな値をとることで、回避できるとされてきた (A. D. Linde 1991)。しかし、その後レゾナンスという機構 (L. Kofman et al. 1994) が見つけられたことにより、インフレーション後に PQ 場のゆらぎが大きくなることによってドメインウォール問題が再び生じる可能性が指摘されてきた。

そこで今回は、超対称アクシオンモデルを用いて、レゾナンスによってドメインウォール問題が再び起きるのかどうかを検証した。超対称アクシオンモデルとしては、以下のスーパーポテンシャルを持ちいた。

$$W = (\Psi_+\Psi_- - F_a^2)\Psi_0.$$

ここで、Ψ_+, Ψ_-, Ψ_0 はそれぞれ PQ 電荷 $+1, -1, 0$ のカイラル超場である。このとき、ポテンシャルは、

$$V_{SUSY} = h^2|\Phi_+\Phi_- - F_a^2|^2 + h^2(|\Phi_+|^2 + |\Phi_-|^2)|\Phi_0|^2.$$

であり、SUSY breaking term まで考慮すると、

$$V = V_{SUSY} + m_+^2|\Phi_+| + m_-^2|\Phi_-| + m_0^2|\Phi_0|.$$

ここで、m_+, m_-, m_0 はそれぞれ Φ_+, Φ_-, Φ_0 の SUSY breaking mass term であり、$\mathcal{O}(100)$ GeV 程度である。一般に、質量項にはラグランジアン由来のものとハッブル由来のものがあるが、今回は Hubble induced mass が SUSY breaking mass term より十分小さいモデルを仮定した。

このポテンシャルにおいて、

$$\Phi_+\Phi_- = F_a^2, \quad \Phi_0 = 0.$$

の条件を満たす場の配位はポテンシャルの最低エネルギーに対応しており、自由度を持つことから flat direction と呼ばれる。このモデルでは、インフレーション期には M_{pl} 程度にいた PQ 場が、その後安定な flat direction 方向に落ち込み、さらに SUSY breaking mass term によって振動を始める。この振動により引き起こされるレゾナンスによって、アクシオン場のゆらぎがどの程度大きくなるのかを確かめるため、格子シミュレーションを行った。ただし、簡単のため、今回は $\Phi_0 = 0$ かつ $m_+ = m_-$ を仮定した。また、初期条件として、

$$\langle \mathrm{Re}\Phi_+\rangle_i = A \times F_a, \ \langle \mathrm{Re}\Phi_-\rangle_i = \frac{1}{A} \times F_a.$$

$$\langle \mathrm{Im}\Phi_+\rangle_i = 0, \ \langle \mathrm{Im}\Phi_-\rangle_i = 0.$$

とし、ゆらぎとして大きさ 10^{-6} の一様ゆらぎを用いた。

4 Results

$A = 10^3$ として得られた結果が、図 2 である。レゾナンスが強くなり、アクシオン場のゆらぎが大きくなっていることがわかる。

しかし、アクシオンの空間分布を考え、$-\pi < \theta < \pi$ を 100 等分し、その頻度の時間発展をプロットすると図 3 となる。アクシオンがドメインウォールを生成する時期は、ハッブル H がアクシオンの質量 ($\sim \mathcal{O}(10^{-4})$ eV) 程度になるときであり、レゾナンスが起きる時期 ($H \sim m_+$) よりも十分遅い。従って、上の図よりレゾナンスの十分後では各ハッブルパッチの中のアクシオン場は初期値の 0 に戻っていることがわかるため、ドメインウォール問題が生じないことがわかる。

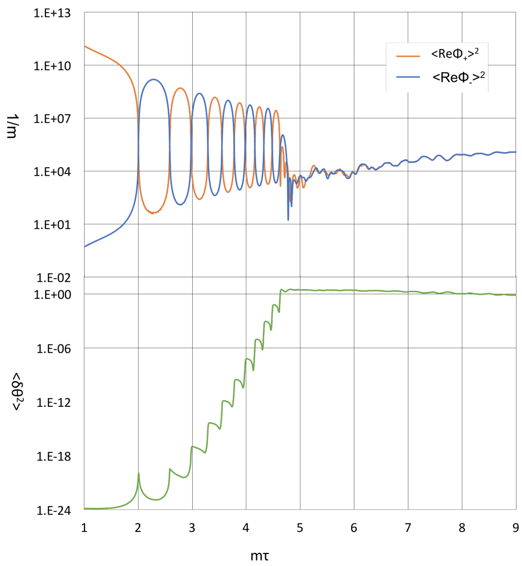

図 2: $\langle \mathrm{Re}\Phi_+\rangle_i = 10^3 \times F_a$ において、$\langle \mathrm{Re}\Phi_+\rangle$, $\langle \mathrm{Re}\Phi_-\rangle$(上) とアクシオン場の分散 $\langle \delta\theta^2\rangle$(下) をプロットした

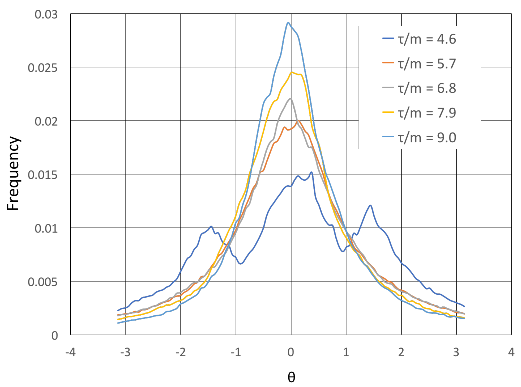

図 3: アクシオン場 $\langle\theta\rangle$ の空間分布の時間発展を空間分布

5 Discussion and Conclusion

以上の研究により、PQ 場の初期値が $|\Phi_+|_i \leq F_a \times 10^3$ のときは、ドメインウォール問題が生じないことがわかった。

ただし、観測より $F_a \sim 10^{12}$ GeV とされているため、今回の数値計算では $|\Phi_+| \sim M_{pl} \times 10^{-3}$ 程度の初期値でしかドメインウォール問題が起きないことを確認することができなかった。レゾナンスは、レ

ゾナンスを引き起こす粒子の振幅が大きくなればなるほどその効果が大きくなるので、アクシオン場の分布はより一様になると考えられる。もっともレゾナンスが強くなった時のアクシオン場の分布がほぼ一様となることで、各ハッブルパッチごとにアクシオン場が様々な値をとる場合、ドメインウォール問題が生じると考えられる。この現象を確かめるには、より詳細な数値計算が必要である。

\includegraphics[width=3cm,clip]{pic.eps} で同じディレクトリにある"pic.eps"という画像ファイルを指定します。オプションで画像の大きさを指定します。

Acknowledgement

天文・天体物理若手夏の学校をご支援下さった皆様に感謝申し上げます。また、日々の議論などを通じご指導いただきました先生方、先輩方にこの場を借りて御礼申し上げます。

Reference

P. Sikivie, Phys Rev. Lett. 48 (1982) 1156

M. S. Turner and F. Wilzcek, Phys Rev. Lett. 66 (1991) 5.

A. D. Linde, Phys. Lett. B 259 (1991) 38.

L. Kofman, et al., Phys. Rev. Lett. 73 (1994) 3195.

非可換幾何学と Planck scale での時空の構造

渡邊　慧 (東京学芸大学大学院)

Abstract

ごく初期の宇宙のような、量子重力の効果が顕著となる高エネルギー時空は非可換時空となる可能性が指摘されている。非可換時空について研究することは、ごく初期の宇宙の構造を知る手掛かりとなる。
[1] では、非可換時空の一例である κ-Minkowski 非可換時空における 2 つの点源間のポテンシャルのふるまいが調べられ、Planck scale では 2 つの点源が近づいてもポテンシャルは発散することなく有限の値に収束することが示されている。このポテンシャルの収束は有効的な次元の減少の兆候であると考えることができる。本発表では [1] に基づき、時空の非可換性とその影響について考察する。

1　Introduction

ごく初期の宇宙は、非常に小さな時空に現在の宇宙の質量がすべて集まっている非常に高エネルギーな状態になっていると考えられる。この高エネルギー時空では、時空の座標同士の交換関係がゼロにならない非可換時空となる可能性がある。非可換時空の概念は量子重力理論の最も有力な候補の一つである超弦理論を研究するための指導原理となっている。非可換幾何学からごく初期の宇宙の構造を調査することは、量子重力理論の発展において重要であるといえる。そうした高エネルギー時空の構造はスペクトル次元の解析によって研究されており、近年大変興味を集めている。

本発表でレビューを行う [1] では、そうした非可換時空の一例である κ-Minkowski 非可換時空における 2 つの点源間のポテンシャルのふるまいを調査し、分かったことが述べられている。ごく初期の宇宙のスケールとして Planck scale を考える。ポテンシャルのふるまいの調査により、κ-Minkowski 非可換時空において Planck scale ではこの 2 点源間のポテンシャルは発散することなく有限の値で収束することが分かった。このようなポテンシャルの振る舞いは高エネルギー時空の有効的な次元の減少の兆候であることがわかっている。本発表では [1] に基づいて非可換時空での 2 点源間のポテンシャルがどのように導き出されるのかを説明し、時空の非可換性とその影響についてレビューを行う。

2　κ-Minkowski 非可換時空

[1] で考えている κ-Minkowski 非可換時空について述べる。
非可換空間とは空間の座標同士に

$$[x, y] = i\theta \tag{1}$$

という交換関係が成り立つことを条件に課した空間のことである。θ は非可換パラメータとよばれるものであり、空間に最小の単位を与えるものである。この非可換空間の条件は量子力学の交換関係

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \tag{2}$$

と類似している。つまり非可換空間では量子力学の位置と運動量の関係と同じように、位置 x と位置 y の間に不確定性関係 $\Delta x \Delta y \geq \frac{\theta}{2}$ が成り立ち、空間の座標を同時に正確に測定できないようなぼやけた空間になっていることが言える。(1) で条件づけられる空間では、空間の座標同士の交換関係についてのみ考え、時間と空間の交換関係は考慮しない。

本発表で review する論文では、リー群 AN_3 によって書き下される交換関係によって条件づけられる、$\frac{1}{\kappa^2}$ の曲率を持った κ-Minkowski 非可換時空を考える。ここで κ^2 は、リー群 AN_3 の多様体である 2 次元 de Sitter 空間に含まれる定数である。この定数は Planck energy として特徴づけられるエネルギースケールと同一視できる。κ-Minkowski 非可換時空は時間と空間のの座標に AN_3 群によって

$$[X_0, X_a] = \frac{i}{\kappa} X_a, [X_a, X_b] = 0;\ a = 1, ..., 3 \tag{3}$$

という交換関係が成り立つことを条件づけられた時空である。この条件からわかるように、κ-Minkowski 非可換時空は空間座標同士には非可換性は課されていないが、時間と空間の間に非可換性が課されている時空であることがわかる。この時空での時間の順序が適当な平面波は非可換代数の指数関数として

$$e_k = e^{-i\vec{k}\cdot\vec{X}} e^{ik_0 X_0} \tag{4}$$

と書ける。ここで $k_0, \vec{k}$ は bicrossproduct 座標として知られる、AN_3 運動量空間の座標パラメータである。そしてこの座標パラメータは５次元 Minkowski 空間と対応させることができ

$$\begin{aligned} p_0 &= \kappa \sinh\left(\frac{k_0}{\kappa}\right) + \frac{1}{2\kappa} e^{\frac{k_0}{\kappa}} \vec{k}^2 \\ \vec{p} &= e^{\frac{k_0}{\kappa}} \vec{k} \\ p_4 &= \kappa \cosh\left(\frac{k_0}{\kappa}\right) - \frac{1}{2\kappa} e^{\frac{k_0}{\kappa}} \vec{k}^2 \end{aligned} \tag{5}$$

と書ける。ただちに

$$-p_0^2 + \vec{p}^2 + p_4^2 = \kappa^2, p_0 + p_4 > 0 \tag{6}$$

となることがわかり、このことは AN_3 群の多様体を４次元 de Sitter 空間の部分多様体として定義する。

3 κ-Minkowski 非可換時空における２点源間のポテンシャルの導出

以上のような性質を持った κ-Minkowski 非可換時空上にある２つの点状な源の間のポテンシャルのふるまいを調べる。ポテンシャルは場の歪みとして考えることができる。よって、２点源間のポテンシャルのふるまいを調べることによって２点源間の場の構造がわかる。ポテンシャルのふるまいを調べるためのツールとして

$$\begin{aligned} Z[J] =& \frac{1}{Z[0]} \int D\phi \exp\Big(\frac{i}{2} \int d^4x (\partial_\mu \phi(x) \star \partial_\mu \phi(x) \\ &+ \phi(x) \star J(x) + J(x) \star \phi(x))\Big) \end{aligned} \tag{7}$$

という生成汎関数を用いる。ここでスター積 $\star$ は

$$\psi \star \phi \equiv \psi \sqrt{1 - \frac{\Box}{\kappa^2}} \phi + totalderivative \tag{8}$$

で定義される。κ-Minkowski 非可換時空ではフーリエ変換は

$$\tilde{\phi}(P) = \frac{p_4}{\kappa} \int d_4 x e^{-ipx} \phi(x) \tag{9}$$

とできる。ここで e^{-ipx} は可換な平面波である。そして逆変換は

$$\phi(x) = \int_{AN_3} \frac{d\mu(p)}{(2\pi)^4} e^{ipx} \tilde{\phi}(p) \tag{10}$$

となる。ここで $d\mu(p)$ は

$$d\mu(p) = d^5 p \delta(-p_0^2 + \vec{p}^2 + p_4^2 - \kappa^2) \theta(p_0 + p_4) \tag{11}$$

であり、$\mathbb{R}^{4,1}$ 上のルベーグ測度を意味する。

すべての場 ϕ の積分は一般的なガウス積分により計算され、$C(p) = p_0^2 - \vec{p}^2$ を用いて

$$Z(J) = Z(0) exp\Big(-\frac{i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{J(-p)J(p)}{p_4 C(p)}\Big) \tag{12}$$

となる。

$$Z(J)/Z(0) = e^{iW(J)} \tag{13}$$

により定義される $W(J)$ は２点源間にある場 $J(p)$ で交換されるエネルギーに比例する。

それぞれ q_1, q_2 のチャージを持っている源が $\vec{x_1}, \vec{x_2}$ に存在するとき、場 $J(x)$ は

$$J(x) = J_1(x) + J_2(x) = q_1 \delta(\vec{x} - \vec{x_1}) + q_2 \delta(\vec{x} - \vec{x_2}) \tag{14}$$

となる。フーリエ変換を用いると

$$J_i(p) = q_i \frac{p_4}{\kappa} \delta(p_0) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x_i}}, i = 1, 2 \tag{15}$$

となり、これより $W(J)$ は

$$W_{ij}(J) = \frac{1}{2\pi^2 r} \frac{q_i q_j}{2} T \int dp \sqrt{1 - p^2/\kappa^2} \frac{\sin(pr)}{p} \tag{16}$$

とわかる。ここで $T = \delta(0)$ であり、時間順序を表す。２点源間のポテンシャルエネルギーを表す式は $W_{ij}(J)$ を用いた以下の式

$$V(r) = -\frac{2W_{ij}(J)}{T} \tag{17}$$

から計算することができる。これによって

$$\begin{aligned} V(r) = -\frac{q_1 q_2}{8\pi r} [& J_1(r\kappa)(-2 + \pi r\kappa H_0(r\kappa)) \\ &+ r\kappa J_0(r\kappa)(2 - \pi H_1(r\kappa))] \end{aligned} \tag{18}$$

を得る。ここで J_n は Bessel J 関数、H_n は Struve H 関数である。

4 結果

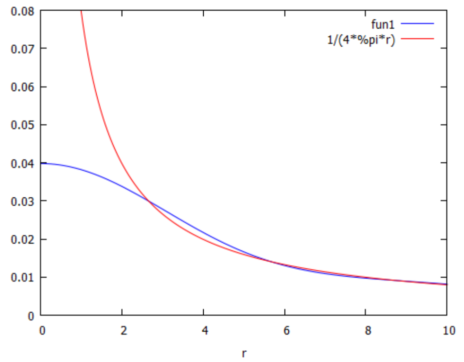

図 1: V(r) のふるまい

(18) よりわかる 2 点源間のポテンシャルの最大の特徴は、2 点源間の距離 r $\to 0$ でポテンシャルが発散しないことである。一般的な空間では 2 点源間のポテンシャルは $V(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi r}$ でかけるから、$r \to 0$ でポテンシャルは発散する。この違いは図 1 を見るとすぐにわかる。図 1 では (18) で表される κ-Minkowski 非可換時空上のポテンシャル $V(r)$ のふるまいを青線、一般的な空間での 2 点源間のポテンシャル $V(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi r}$ のふるまいを赤線で示した。ここでは便宜上 $\kappa = 1$ としている。

5 考察

一般の空間での 2 点源間のポテンシャルと異なり、κ-Minkowski 非可換時空での 2 点源間のポテンシャルは Planck scale で一定の値に収束することがわかった。これが本発表で review する論文 [1] の最も重要な結果である。ポテンシャルの収束は非可換時空が最小単位を持った時空であることが影響していると考えられる。時空が最小単位を持てばそれ以下の距離に 2 つの点源が近づいてもそこでのポテンシャルの様子は厳密にはわからない。スター積を計算に導入することで厳密にはよくわからない領域を考慮した場合のポテンシャルの振る舞いを計算できるようになる。これにより、一定の値に収束するような振る舞いをするポテンシャルの式を導くことができる。一般的に D 次元の定常ポテンシャルのスケールは $V_D(r) \sim 1/r^{D-3}$ と表せる。κ-Minkowski 非可換時空上の Planck scale ではポテンシャルが $r \to 0$ で一定値に収束することから、Planck scale では κ-Minkouski 非可換時空の次元は 3 次元であると考えられる。ポテンシャルがある値への収束することは、κ-Minkowski 非可換時空において Planck scale での時空の有効的な次元の減少の兆候であると考えられる。

6 今後の課題

時空の座標どうしに非可換性を課した時空での重力理論を一般に非可換重力と呼ぶ。空間の座標同士に非可換性を課した理論の特徴的な解はいくつか発見されている。非可換重力を考えるときには時間と空間を平等に扱わなければならないが、解の発見されている非可換空間を条件づける交換関係は時間を考えた交換関係となっていない。このままでは時間と空間を平等に扱うことができていない状態であるといえる。それに対し、本発表でレビューを行った [1] では時間と空間に非可換性を課した κ-Minkowski 非可換時空について議論がなされている。時間と空間に最小の単位を与えることによって非可換性が課された非可換時空は、時間と空間を同時に確定できないようなぼやけた空間となっている。時間に関する非可換性があることから、因果関係があいまいになるような領域が存在する。今後はこの時間と空間に非可換性のある時空についてさらに研究していきたいと考えている。例えば、考える時空の次元を変化させ、どのような時空の次元においても 2 点源間のポテンシャルが収束するような振る舞いをするのかを考えていくべきである。

Acknowledgement

夏の学校運営にご支援くださった機関・個人の方々に感謝いたします。

Reference

[1]M.Arzano&J.K.Glikman,Phys.Lett.B771(2017)222-226

Schwarzschild Black Hole の正準量子化

長島　正剛 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

今日までの量子重力理論の試みは、例えば摂動論的なアプローチの超弦理論においては、余剰次元などの多くの過程が要求される。あるいは他のアプローチにおいても時空の対称性が高い場合に限定されるなど、どのアプローチにおいても何かしらの問題点を持つ。本稿は球対称ブラックホール時空を正準量子化し、時空の状態汎関数が Schwarzschild 質量の重ね合わせで書けるということを示した [1] のレビューである。

1 Introduction

自然界の力のうち、重力は量子論が確立していない。これまでの量子重力理論の試みのうち、例えば摂動論的なアプローチの超弦理論においては、余剰次元などの多くの過程が要求される。あるいは他のアプローチにおいても時空の対称性が高い場合に限定されるなど、どのアプローチにおいても何かしらの問題点を持つ。

このように量子重力理論は未だ確立していないが、私は正準量子化からのアプローチに関心がある。本稿は球対称ブラックホール時空を正準量子化し、時空の状態汎関数が Schwarzschild 質量の重ね合わせで書けるということを示した [1] のレビューである。

[1] では ADM 分解したときの 3 次元誘導計量の成分を配位変数としてを ADM 作用を作る。そこからもとの Schwarzschild 計量との比較からキリング時間や Schwarzschild 質量との関係式を得て、何段階か経てこれらを正準変数とするように正準変換する。系の状態は状態汎関数が指定するが、得られるハミルトン拘束条件と運動量拘束条件から、状態汎関数の自由度が Schwarzschild 質量のみになる。すなわち系の状態は質量のみで決まり、時間発展がない。

2 Schwarzschild 時空

Einstein 方程式の静的球対称時空の真空解は

$$ds^2 = -F(R)dT^2 + F^{-1}(R)dR^2 + R^2 d\Omega^2 \tag{1}$$

で与えられる。ここで

$$\begin{aligned} d\Omega^2 &= d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 && (2)\\ F(R) &= 1 - 2M/R && (3) \end{aligned}$$

である。$c = G = 1$ の自然単位系を用いる。ベクトル場 $\partial/\partial T$ は (1) の時空のキリングベクトル場である。$\partial/\partial T$ はキリング時間 $T(r) = \mathrm{const.}$ の超曲面と直行している。

3 球対称時空の正準形式

ADM 分解するにあたって、空間的超曲面を、球対称三次元空間 (Σ, g) とし、その座標系を $x^a = (r, \theta, \phi)$ とする。Σ 上の線素 $d\sigma$ は

$$d\sigma^2 = \Lambda^2(r)dr^2 + R(r)d\Omega^2 \tag{4}$$

として、2 つの関数 $\Lambda(r), R(r)$ によって表される。ラプス関数 N とシフト関数 N^i 並びに三次元計量 g_{ab} と外的曲率 K_{ab} を用いてアインシュタイン-ヒルベルト作用を表し、$\Lambda(r), R(r)$ を使って作用を書くと、

$$S = S_\Sigma[R, \Lambda; N, N^r] + (\text{surface term}) \tag{5}$$

となる。これを正準変数で表す。ハミルトン拘束を H、運動量拘束を H_i とする。球対称性からシフト関数は N^r だけ残る。これらの拘束条件は正準変数を

用いて、

$$\begin{aligned} H := & - & R^{-1}P_R P_\Lambda + \frac{1}{2}R^{-2}\Lambda P_\Lambda^2 \\ & + & \Lambda^{-1}RR'' - \Lambda^{-2}RR'\Lambda' \\ & + & \frac{1}{2}\Lambda^{-1}R'^2 - \frac{1}{2}\Lambda \end{aligned} \tag{6}$$

$$H_r := P_R R' = \Lambda P'_\Lambda \tag{7}$$

と表される。また、球対称性から作用の角度変数の積分が出来るので t, r の積分だけ残る。このときの被積分関数 $\mathcal{L}_\Sigma$ は

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_\Sigma \quad [R, \Lambda, P_\Lambda, P_R; N, N^r] \\ = & \left(P_\Lambda \dot{\Lambda} + P_R \dot{R} - NH - N^r H_r\right) \end{aligned} \tag{8}$$

となる。境界項 $S_{\partial\Sigma}$ は (1) の時空は最大拡張すると境界の寄与が 2 つあるので、ADM エネルギーを $E_\pm$ とし、それぞれのラプス関数を $N_\pm$ とすると、

$$S_{\partial\Sigma} = -\int dt\,(N_+(t)E_+(t) + N_-(t)E_-(t)) \tag{9}$$

となる。また、Schwarzschild BH の ADM エネルギーを $E_\pm =: M_\pm(t)$ と表すことにする。

3.1 境界項を伴う議論

漸近的平坦性から計量の $r \to \pm\infty$ での振る舞いが決まり、

$$\Lambda(t, r) = 1 + M_\pm |r|^{-1} + O(|r|^{-(1+\epsilon)}) \tag{10}$$

である。したがって Λ の変分は無限遠で

$$\delta\Lambda_\pm = \delta M_\pm |r|^{-1} + O(|r|^{-2}) \tag{11}$$

となる。

境界項が無いと、拘束条件中の Λ の変分から $N_\pm = 0$ となって無限遠での時間発展を消してしまう。この項を打ち消すために境界項が必要だが、その結果 $\delta_N S = -\int dt(M_+(t)\delta N_+(t) + M_-(t)\delta N_-(t))$ という変分が残る。すなわちラプス関数の無限遠での振る舞いを固定しないと $M_\pm = 0$ という条件式が出てきてしまう。これは BH の解がなくなり、平坦時空しか解が無いことを意味する。ゆえにラプス関数の無限遠での関数形は指定しなければならない。

ただし、無限遠でラプス関数をパラメトライズすることで関数形の指定を避けることが出来る。以下ではそれを見る。無限遠方における固有時を $\tau_\pm$ とする。漸近的平坦性から $N^r_\pm = 0$ なので、

$$N_\pm(t) = \pm\dot{\tau}_\pm(t) \tag{12}$$

と書ける。

無限遠での $N_\pm$ と $\dot{\tau}_\pm$ の関係は指定したが、固有時自体は自由に動くので実質的にラプス関数を固定したわけではない。この式を作用に入れ、$\tau_\pm$ で変分すると $\dot{M}_\pm = 0$ となり、無限遠方では質量が保存することが出てくる。また、先程の場合と違ってラプス関数の無限遠での変分を許しつつも平坦時空以外の解の存在も許している。また、この場合の Λ の変分は (12) を導くだけで、$N_\pm = 0$ を導かない。このようにしてラプス関数のパラメトライズによって境界項を加えつつ、ラプス関数の変分を許すことが出来る。

4 正準変数の変更

(1) を ADM 分解し、前述した (Σ, g) との対応から Schwartzschild 質量と T と正準変数の関係を調べる。まず $T = T(r, t), R = R(t, r)$ として (1) を $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$ で表す。このようにして得た ds^2 と (4) を用いて ADM 形式で表した ds^2 を比較するとラプス関数やシフト関数と T, R の関係式が出て来る。これらと共役運動量の定義式を用いると

$$-T' = R^{-1}F^{-1}\Lambda P_\Lambda \tag{13}$$

$$M = \frac{1}{2}R^{-1}P_\Lambda^2 - \frac{1}{2}\Lambda^{-2}RR'^2 + \frac{1}{2}R \tag{14}$$

が得られる。

この 2 つの物理量 $M, -T'$ は共役な変数のペアになっている。これらは Schwarzschild 解を用いたので Einstein 方程式から得たものだが、導出のことは忘れ、これらの物理量を新たな正準変数として見なす。$-T'(r) =: P_M(r)$ とする。M, P_M は R とのポアソン括弧はゼロだが、P_R とのポアソン括弧はゼロにならない。そこで P_R とのポアソン括弧がゼロになるように変換したい。そのような変換を $R \to \mathcal{R}$ とす

る。ただし、$\mathcal{R}=R$ となるようにしたい。そのようにして変換するには $P_{\mathcal{R}}$ は

$$P_{\mathcal{R}}(r)=P_R-\frac{1}{2}R^{-1}\Lambda P_\Lambda-\frac{1}{2}R^{-1}F^{-1}\Lambda P_\Lambda \\ -R^{-1}\Lambda^{-2}F^{-1}\left((\Lambda P_\Lambda)'(RR')-(\Lambda P_\Lambda)(RR')'\right) \quad (15)$$

と、変換する。この $P_{\mathcal{R}}$ は拘束条件を用いて

$$P_{\mathcal{R}}=F^{-1}(R^{-1}P_\Lambda H+R'\Lambda^{-2}H_r) \quad (16)$$

として表せられる。ところで (14) から M' も (16) のように拘束条件の線形結合で表すことが出来る。ここで、

$$M'(r)=0,\quad P_{\mathcal{R}}(r)=0 \quad (17)$$

を $(\Lambda,R)\to(M,\mathcal{R})$ の変換後の拘束条件とする。

5 変数変換による理論の変換

前節の変換で、作用は次式のようになる。

$$\begin{aligned} S_\Sigma[M,P_M,\mathcal{R},P_{\mathcal{R}};N,N^r]= & \int dt\int_{-\infty}^{\infty}dr\left(P_M(r)\dot{M}(r)+P_{\mathcal{R}}\dot{\mathcal{R}}\right) \\ - & \int dt\int_{-\infty}^{\infty}dr\left(N^M(r)M'(r)+N^{\mathcal{R}}(r)P_{\mathcal{R}}(r)\right) \end{aligned} \quad (18)$$

ここで $N^M,N^{\mathcal{R}}$ はラグランジュ未定定数である。

Schwarzschild 時空の漸近平坦性から変数の無限遠での振る舞いが指定される。その際 $r\to\infty$ で、

$$H(r)=\mp M'(r)+O(|r|^{-(2+\epsilon)}) \quad (19)$$

となる。また、N,N^M は

$$N^M_\pm(t)=\mp N_\pm(t) \quad (20)$$

という関係である。ADM エネルギーの値は無限遠での $M(r)$ の値であるから、$E_\pm=M_\pm$ である。(9) は変数変換で、

$$S_{\partial\Sigma}=-\int dt(N_+M_++N_-M_-) \quad (21)$$

よって

$$\begin{aligned} S & \quad [M,P_M,\mathcal{R},P_{\mathcal{R}};N^M,N^{\mathcal{R}}] \\ = & \quad S_\Sigma[M,P_M,\mathcal{R},P_{\mathcal{R}};N^M,N^{\mathcal{R}}] \\ & \quad +S_{\partial\Sigma}[M;N^M] \end{aligned} \quad (22)$$

となる。

無限遠での作用のパラメトライズすることによって $N(t,r)$ の漸近的振る舞いが固定されなくなるから、

$$S_{\partial\Sigma}[M;N^M]=-\int dt(M_+\dot{\tau}_+M_-\dot{\tau}_-) \quad (23)$$

以上より、

$$\begin{aligned} S & \quad [M,P_M,\mathcal{R},P_{\mathcal{R}};\tau_+,\tau_-;N^M,N^{\mathcal{R}}] \\ = & \quad S_\Sigma[M,P_M,\mathcal{R},P_{\mathcal{R}};N^M,N^{\mathcal{R}}] \\ + & \quad S_{\partial\Sigma}[M;\tau_+,\tau_-] \end{aligned} \quad (24)$$

となる。

更に、正準 1 形式が正準変換において不変であることを利用して、パラメーター $\tau_\pm$ と正準変数を組み合わせ、新たな正準変数を作る。

まず、正準 1 形式 Θ を以下で定義する：

$$\Theta:=\int_{-\infty}^{\infty}drP_M(r)\delta M(r)-(M_+\delta\tau_+-M_-\delta\tau_i) \quad (25)$$

質量 $M(r)$ を $r\to-\infty$ の極限での質量を m とし、質量密度を $\Gamma(r)$ とすると、

$$M(r)=m+\int_{-\infty}^{r}dr'\Gamma(r') \quad (26)$$

これを (25) に入れて計算したあとで Θ の中の被積分関数を比較すると、

$$m = M_- \quad (27)$$

$$p = (\tau_+-\tau_-)+\int_{-\infty}^{\infty}dr'P_M(r') \quad (28)$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma(r) &= M'(r) \qquad (29)\\
P_\Gamma(r) &= \tau_+ - \int_{-\infty}^{r} dr' P_M(r') \qquad (30)
\end{aligned}
$$

を得る。ここで、$P_M = -T'$ だったので、(30) は T そのものである。また自明な正準変換 $(\Gamma, P_\Gamma) \to (P_\Gamma, -\Gamma) = (T, -\Gamma)$ から、$-\Gamma = P_T$ とする。以上より、(24) は

$$
\begin{aligned}
S[m,p;T,P_T,R,P_R;N^T,N^R] = \int dt \Big(p\dot{m} + \int_{-\infty}^{\infty} dr \left(P_T(r)\dot{T}(r) + P_R(r)\dot{R}(r) \right) \\
- \int dt \int_{-\infty}^{\infty} dr \left(N^T(r)P_T(r) + N^R(r)P_R(r) \right) \Big) \qquad (31)
\end{aligned}
$$

と書き換えることが出来る。

6　量子化

作用 (31) から、量子論に移行する。ここで、配位空間は関数 $T(r), R(r)$ および m のからなる。$T(r), R(r)$ が指定されると hypersurface が決まる。m は Schwarzschild BH の自由度である。拘束条件から、

$$P_T(r) = 0, \quad P_R(r) = 0 \qquad (32)$$

である。また、この系のハミルトニアン h は 0 である。

$T(r), R(r), t$ で指定される BH の状態は状態汎関数 $\Psi(m,t;T,R]$ （m, t については関数、T, R については汎関数）で表される。

各配位変数に対する、共役運動量演算子は

$$
\begin{aligned}
\hat{p} &= -i\frac{\partial}{\partial m}, \quad \hat{P}_T(r) = -i\frac{\delta}{\delta T(r)},\\
\hat{P}_R &= -i\frac{\delta}{\delta R(r)} \qquad (33)
\end{aligned}
$$

で表される。

演算子としての拘束条件は次式のようになる。

$$\hat{P}_T(r)\Psi(m,t;T,R] = 0, \quad \hat{P}_R\Psi(m,t;T,R] = 0 \qquad (34)$$

これは状態汎関数が T, R に依らないことを意味する。さらに $h = 0$ から、

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{h}\Psi = 0 \qquad (35)$$

であるから、Ψ は t にも依らないので、結局状態汎関数は、

$$\Psi(m,t;T,R] = \Psi(m) \qquad (36)$$

となる。

以上より、Schwarzschild BH 時空の状態関数は BH の質量の重ね合わせだけで表されている。つまり、その状態関数は T, R に依存しないことから、hypersurface をどのように決めても、同じ状態である。さらに t にも依存しないことから一度状態が決まれば BH の状態が遷移しないということが言える。

Acknowledgement

夏の学校運営様、並びにスポンサーとなった団体の方々にお礼申し上げます。また、これまで議論や相談に乗っていただいた皆様にも深く感謝しております。

Reference

[1]Karel V. Kuchar “Geometrodynamics of Schwarzschild black holes” Phys. Rev. D (1994)

[2]T. Regge and C.Teitelboim “Role of Surface Integrals in the Hamiltonian Formulation of General Relativity” Phys. (N.Y.) 88, 286(1974).

[3]Carlo Rovelli “Quantum Gravity’ Cambridge monographs on mathematical physics(2007)

de Sitter 時空におけるエンタングルメントエントロピー

川 大揮 (東京工業大学大学院 宇宙論研究室山口研)

Abstract

現在，我々がいる宇宙は 138 億年前のインフレーションによってできたと考えられている．このインフレーションが起きた時期に宇宙は，とても小さく重力と量子効果が支配的であったと考えられる．また，そこでは量子的な相関が生成されていたと期待される．本ポスターでは，このインフレーション期の時空に近似的に近い de Sitter 時空について考え，曲がった時空の場の理論を展開した．また，量子相関の良い尺度だと思われる　エンタングルメントエントロピーを導入した．最後に de Sitter 時空を superhorizon サイズの曲面で 2 つに分割し，それらの間の量子相関 (エンタングルメントエントロピー) を評価をした．

1 Introduction

本ポスターでは，de Sitter 時空における量子場の理論のエンタングルメントエントロピーについて議論する．エンタングルメントエントロピーは、純粋状態の長距離間相関をみる便利な道具であることは、よく知られている。量子情報理論や凝縮系物理などでの応用例などが見られるが、量子場の理論における真空の長距離相関などを特徴づける際にも便利な指標となりうる。

その例として、宇宙の膨張にともなって生成される superhorizon 程度の量子相関について今回議論した。とくに、インフレーション期の de Sitter 時空に関する相関を計算することは、インフレーションが量子揺らぎから生成されたかどうかや、superhorizon の物理など有益な情報を獲得できると期待できる。

初めに、de Sitter 時空を 2 つのレジョンに分割するために、時間一定面での 2 次元球を考える。このときの球面の半径は、superhorizon の相関をみるために、de Sitter 時空半径、あるいは horizon のスケール R_{dS} よりも十分大きくなるようにとる。このセットアップでフォンノイマンエントロピーを計算し、外側の領域をトレースアウトすることで、エンタングルメントエントロピが求められる。

2 Methods

2.1 純粋状態とエンタングルメントエントロピー

純粋状態とは，量子状態 $|\phi\rangle$ が非自明な確率混合で準備できない状態である．すなわち，Density Matrix が,

$$\rho = |\phi\rangle \langle\phi| \tag{1}$$

の形で与えられる場合である．(1) 式から，純粋状態であれば,

$$\rho^2 = \rho \tag{2}$$

が成立する．純粋状態 $|\phi\rangle$ が，エンタングルしてないすなわち，セパラブル (separable) であるときは,

$$|\phi\rangle = (|+\rangle_A + |+\rangle_B)(|-\rangle_A + |-\rangle_B) = |A\rangle \otimes |B\rangle \tag{3}$$

のように，２つの系全体の量子状態が部分系 A, B の直積として表現できるときである．これにたして，エンタングルしている状態としては,

$$|\phi_{Bell}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_A |+\rangle_B + |-\rangle_A |-\rangle_B) \tag{4}$$

のように直積で書くことのできない状態である．(4) 式にあげた例は，Bell 状態と呼ばれる量子状態でエンタングルメントエントロピー $S(\rho)$

$$S(\rho_A) = -\mathrm{Tr}(\rho_\mathrm{A} \ln \rho_\mathrm{A}) \tag{5}$$

が最大になり，ベルの不等式を最大で破っている場合になっている．ただし，ρ_A は，Density Matrix で B について Partial Trace を取ったもので,

$$\rho_A = \mathrm{Tr_B}\rho \tag{6}$$

で定義される．このように，純粋状態は，片方の状態を Partial Trace をとることでエンタングルメントエントロピーが計算でき，エンタングルしているかどうかを判定することができる．

3 Results

上で述べた手法を曲がった時空の場の理論に適応することで，de Sitter 時空におけるエンタングルメントエントロピーを求めることができる．下図は，massive なスカラー場のエンタングルメントエントロピーの質量依存性を表すグラフである．ここで，ν は，スカラー粒子の質量 m とハッブルパラメータ H_{dS} によって表されて,

$$\nu = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{m^2}{H^2}} \tag{7}$$

で表される．

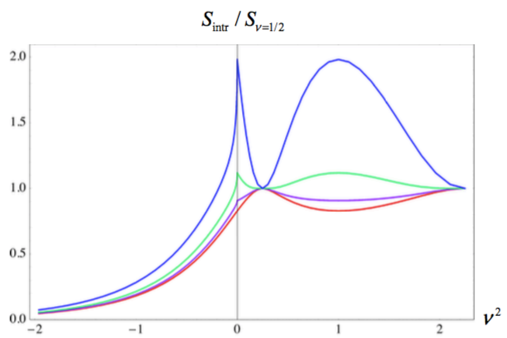

図 1: エンタングルメントエントロピー

4 Conclusion

以上の解析により，場の理論におけるエンタングルメントエントロピーの解析の方法を構築できた．また，長距離離間のエンタングルメントが質量に依存することがわかった．

Reference

Juan Maldacena Guilherme L . Pimentel 2013 , JHEP

Sugumi Kanno,a Jeff Murugan,a Jonathan P. Shocka and Jiro Sodab 2014, JHEP

BHT Massive Gravity における重力の斥力的効果について

中司　桂輔 (東京学芸大学大学院)

Abstract

本発表では、(2+1) 次元の massive gravity である、BHT massive gravity におけるブラックホール解の周りでの massless 粒子の測地線を解析した結果を発表する。我々は、このブラックホール周りの massless 粒子に対して重力が斥力として働くことを発見した。さらに、我々はこの斥力的な重力に対してニュートン力学的な類推から解釈を与え、これまでに知られている静的なブラックホール (Schwarzschild (AdS)BH、BTZBH、Reissner-nordström BH) と比較し、それらのブラックホールでは、重力が斥力的に働くことがないということを確認した。

1 Introduction

massive gravity は現在の宇宙の加速膨張や、量子重力の観点から、近年盛んに研究がなされている。その中で今回用いた理論は、2009 年に Bergshoeff、Hohm、Townsend によって提唱された BHT massive gravity(BHTMG)(Bergshoeff et al. 2009) である。この理論は (2+1) 次元時空での理論で、ゴーストフリーなことが知られている。(2+1) 次元重力の性質を調べることは、(3+1) 次元重力、特に量子重力の観点からも注目されている。

これまで、Einstein 重力では、漸近的平坦な (2+1) 次元でのブラックホール解は 1992 年に発見された BTZ ブラックホールしか存在しなかった。しかし、BHTMG では、BTZ ブラックホールのほかにも静的なものや、回転しているもの、更に角度依存性のある解 (black flower 解) が存在することが知られている。本発表では、BHTMG での静的なブラックホール周りでの massless 粒子の測地線を解析した。その中で、エネルギーの低い粒子に対して、ブラックホールから斥力的な効果が働くことが分かった。このブラックホールは電荷は帯びていないブラックホールでこの斥力的な効果は、重力の効果である。

一方で、repulsive 重力は Villata によって、粒子-反粒子の相互作用が斥力的になる可能性が示唆されている。また、Kerr ブラックホールでの重力の斥力効果も Villata により示唆されている。

2 BHT Massive Gravity

BHT massive gravity は 2009 年に Bergshoeff、Hohm、Townsend により提唱された、(2+1) 次元時空での重力理論である。その作用は

$$S = \frac{1}{16\pi G_3}\int d^3x\sqrt{-g}(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{3}{8}R^2) \tag{1}$$

で与えられ、eom は

$$\begin{aligned}2\Box R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\nabla_\mu\nabla_\nu R - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + 4R_{\mu\rho\nu\sigma}R^{\rho\sigma} \\ -g_{\mu\nu}R_{\rho\sigma}R^{\rho\sigma} - \frac{3}{2}RR_{\mu\nu} + \frac{3}{8}g_{\mu\nu}R^2 = 0\end{aligned} \tag{2}$$

となる。BHTNG では、漸近的局所的平坦なブラックホール解が存在することが知られており (Olive et al. 2009)、そのメトリックは、

$$ds^2 = -(br-\mu)dt^2 + \frac{dr^2}{br-\mu} + r^2d\phi^2 \tag{3}$$

であることが知られている。ここで、b と μ はそれぞれ質量と gravitational hair のパラメーターである。このブラックホールのホライゾンは $r = \frac{\mu}{b}$ に位置し、この時空のスカラー曲率は、

$$R = -\frac{2b}{r} \tag{4}$$

となる。特異点は $r = 0$ に存在し、$r \to \infty$ で $R \to 0$ であり、漸近的局所的に平坦であることが分かる。

3 Effective Potential and Geodesic for massless particle

この時空では、2 本のキリングベクトル ∂_t と ∂_ϕ が存在し、エネルギ E と角運動量 L が保存する。E と L はそれぞれ、

$$E = -g_{\mu\nu}\xi^\mu u^\nu = (br-\mu)\dot{t} \tag{5}$$
$$L = g_{\mu\nu}\Phi^\mu u^\nu = r^2\dot{\phi} \tag{6}$$

で定義される。ここで ξ^μ と Φ^μ はそれぞれ $(\partial/\partial t)^\mu$ と $(\partial/\partial\phi)^\mu$ で u^μ は粒子の 4 元運動量である。この E と L を用いると、動径方向の測地線方程式は

$$\dot{r}^2 = E^2 - (br-\mu)\frac{L^2}{r^2} \tag{7}$$

となり、effective potential V_{eff} を以下のように定義する。

$$V_{eff}^2(r) = (br-\mu)\frac{L^2}{r^2} \tag{8}$$

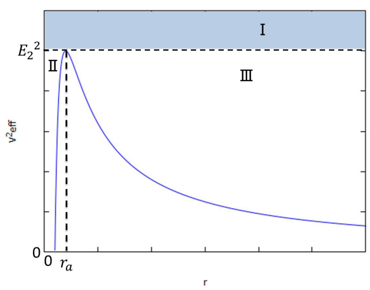

図 1: massless 粒子に対する Effective potentialV_{eff}

この測地線方程式は積分することができて、解析的な解が存在する。

$$r_I(\phi) = \frac{2\mu}{b+2\mu\kappa\sinh(\pm\sqrt{\mu}\phi+\beta)} \tag{9}$$
$$r_{II}(\phi) = \frac{2\mu}{b+2\mu\kappa\cosh(\pm\sqrt{\mu}\phi+\beta)} \tag{10}$$
$$r_{III}(\phi) = \frac{2\mu}{b-2\mu\kappa\cosh(\pm\sqrt{\mu}\phi+\beta)} \tag{11}$$

添え字の I, II, III は図 1 の領域 I, II, III にそれぞれ対応している。図 2 にそれぞれの領域での massless 粒子の軌道を示す。

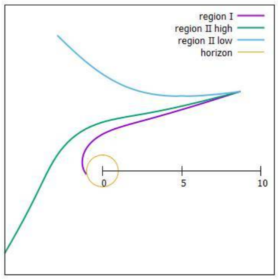

図 2: Effective potential V_{eff} の各領域での massless 粒子の軌道

図 2 を見てわかるように、領域 III のエネルギーの低い massless 粒子は、ブラックホールから斥力的な効果を受けていることが分かる。次の節で我々は、この斥力的な効果についての解釈を与える。

4 Interpretation of Repulsive Gravity and Comparison with Other Black Holes

ここでは、前節でのブラックホールからの斥力的効果について議論する。今回のブラックホールは電荷を帯びていないので、前節で現れた斥力的な効果はブラックホールからの重力的な効果であると考えられる。我々はこれに対し、ニュートン力学の類推から動径方向の eom を作る。つまり、

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}. \tag{12}$$

を構成する。そうすると、この時空での動径方向に働く力を解析することができる。これを実際に計算すると、

$$F_r^{BHT} = L^2\left(-\frac{\mu+1}{r^3} + \frac{b}{2r^2}\right). \tag{13}$$

とな bf 第 2 項の符号が正になっていることから、この時空では斥力が働くことが分かる。この斥力が働く領域はホライゾンの外側にあり、さらに重力が引

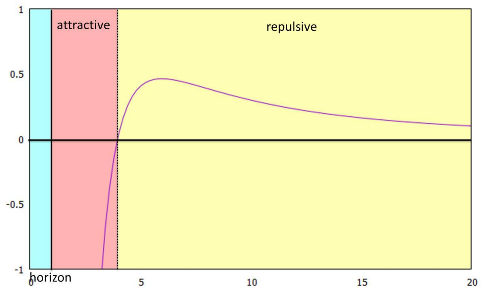

図 3: BHTMG の静的球対称ブラックホールでの repulsive region

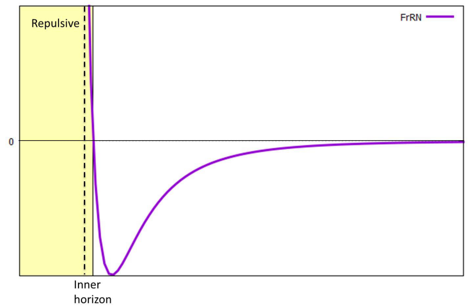

図 4: RN ブラックホールの repulsive 条件とインナーホライゾンの関係

力的に働く領域よりも外側に存在する。

このニュートン力学的な類推はより一般的な静的なブラックホール時空にも拡張できる。メトリックの dt^2 の前の関数を $f(r)$ とすると、

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = \frac{L^2}{2r^3}\{-f'(r)r + 2(f(r)-1)\} \tag{14}$$

となる。これを repulsive 条件と呼ぶ。これを用いれば、他の球対称静的な時空での動径方向の力を解析することができ、今考えているブラックホール時空と比較することができる。

4.1 Reissner-Nordström Black Hole

RN ブラックホールの場合は、インナーホライゾンの中では斥力が働くことが知られている。この斥力はブラックホールの持つ電荷による効果である。我々の repulsive 条件ではこの電荷による斥力についても解析することができる。RN ブラックホールの $f(r)$ は

$$f(r) = 1 - \frac{2MG_4}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \tag{15}$$

となり、repulsive 条件を計算すると、

$$F_r^{RN} = L^2\left(-\frac{3MG_4}{r^4} + \frac{2Q^2}{r^5}\right). \tag{16}$$

となり、RN ブラックホールの場合では、電荷により斥力の効果が現れることが分かる。さらに、斥力が働く領域は、アウターホライゾンの外には出てこず、インナーホライゾンの内側であることが分かる。

4.2 Schwarzschild(AdS) Black Hole

(3+1) 次元の球対称静的なシュバルツシルト (AdS) ブラックホールと比較する。今の場合は $\theta = \pi/2$ の面で解析する。この場合の $f(r)$ は

$$f(r) = 1 - \frac{2MG_4}{r} - Schwarzschild \tag{17}$$

$$f(r) = 1 - \frac{2MG_4}{r} + \frac{r^2}{l^2} - SchwarzschildAdS \tag{18}$$

となるので、repulsive 条件を計算すると、Schwarzschild の場合も Schwarzschild-AdS の場合も等しい結果になり、

$$F_r^{SCH} = -\frac{3MG_4L^2}{r^4} \tag{19}$$

となる。よって Schwarzschild(AdS) ブラックホール時空では、重力が斥力的に働くことはない。

4.3 BTZ Black Hole

最後に、(2+1) 次元時空でのブラックホールである BTZ ブラックホールについても同様の議論をする。BTZ ブラックホールの $f(r)$ は、

$$-8MG_3 + \frac{r^2}{l^2} \tag{20}$$

であり、BTZ ブラックホールに対する repulsive 条件は、

$$F_r^{BTZ} = -\frac{L^2}{r^3}(8MG_3 + 1) \tag{21}$$

となる。BTZ ブッラックホールの場合も repulsive 条件の符号が負符号のみなので、重力は引力的にしか作用しないことがわかる。

以上のことから、Einstein 重力での静的球対称なブラックホールでは重力が massless 粒子に対して斥力的に作用することはなく、引力的にしか座ようしないことが確かめられた。

5 Conclusion

我々は BHTMG での静的球対称なブラックホール周りでの massless 粒子の測地線を解析し、解析的な解を得た。その中で、低エネルギーの massless 粒子に対してこの時空では、重力が斥力的に働くことを発見した。また、我々はニュートン力学からの類推から、動径方向の力を解析することで、この重力の斥力的な効果に対して解釈を与えた。さらにこの動径方向の力の考え方をより一般的な静的球対称なブラックホール時空にも応用し、repulsive 条件を得た。この repulsive 条件を Schwarzschild ブラックホールや、RN ブラックホール、BTZ ブラックホールに適用し、これらのブラックホール時空では重力が斥力的に働くことはないという結論に至った。

Reference

E. A Bergshoeff, O. Hohm and P. K. Townsend, "Massive Gravity in Three Dimensions," Phys. Rev. Lett. **102**. 201301 (2009).

J. Oliva, D. Tempo and R. Troncoso, "Three-dimensional black holes, gravitational solitons, kinks and wormholes for BHT massive gravity," JHEP **0907**, 011 (2009).

宇宙定数問題への Nonlocal Approach

福田　巧未 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙定数とは Eintstein 方程式に含まれるに任意のパラメータ Λ である。その宇宙定数 Λ は真空エネルギー V_{vac} を counterterm のように繰り込み、観測値 Λ_{ren} を求める働きがある。
ここでは宇宙定数が重力方程式から宇宙定数が消えるモデルを二つ考える。一つは、通常の Einstein 作用に物質 Lagrangian と 4-form field を含む作用を考え、さらにそれに時空で定数である η をかけたものを考える。二つ目は、Sequestrring Model という物を考える。二つのモデルの違いなど議論し、宇宙定数問題への解決となっているか、について考える。

1 Introduction

Abstruct でのべたように $\Lambda_{ren} = \Lambda + V_{vac}$ という関係式がある。観測から $\Lambda_{ren} \sim (meV)^4$ が要求される。一方、$V_{vac} \sim 10^{60}(meV)^4$ である。この大きな値を counterterm としてどのように繰り込むのかという fine tune 問題がまずある。ほかにもまだあり、radiative instability 問題というものがある。これは、繰り込みの際に 1 ループ、2 ループ、3 ループと無限に続くループを繰り込む際に高次のループでも cunterterm のオーダーが小さくならない問題である。その場合、高次のループを次々と繰り込みをしても収束しないのである。そのような問題がある可能性があるため、実際にループ計算をして繰り込みをするというアプローチではなく、古典的に重力方程式からループによる真空エネルギーの寄与を排除する、というアプローチをとる。

2 Methods

まず、一つ目のアプローチについてのべる。このモデルでは作用は次のようなものを考える。

$$S = \eta \int d^4x\sqrt{-g}[\frac{1}{16\pi G}(R-2\Lambda) + \mathcal{L}_m - \frac{1}{48}F_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{1}{6}\nabla_\mu(F^{\mu\nu\rho\sigma}A_{\nu\rho\sigma})] \tag{1}$$

ここで $F_{\mu\nu\rho\sigma} = (dA)_{\mu\nu\rho\sigma} = 4\nabla[_\mu A_{\nu\rho\sigma}]$ である。Λ は宇宙定数であり、物質場による宇宙定数への寄与は Λ の定義として吸収してあるので $\mathcal{L}_m$ は真空で 0 となる。
さらに η の運動方程式は $\int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L} = 0$ となる。この条件は $\int d^4x\sqrt{-g} = V$ として

$$\frac{1}{V}\int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L} =< \mathcal{L} >= 0 \tag{2}$$

と書き直せる。つまり

$$\frac{1}{16\pi G}(< R > -2\Lambda) + < \mathcal{L}_m > - \frac{1}{48} < F_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu\rho\sigma} > + \frac{1}{6} < \nabla_\mu(F^{\mu\nu\rho\sigma}A_{\nu\rho\sigma}) >= 0 \tag{3}$$

となる。A の方程式は $\nabla_\mu F^{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ より $F_{\mu\nu\rho\sigma} = \theta\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ となる。θ は定数である。これをもちいると、(3) は

$$\frac{1}{16\pi G}(< R > -2\Lambda) + < \mathcal{L}_m > - \frac{1}{2}\theta^2 = 0 \tag{4}$$

つぎに $g_{\mu\nu}$ の方程式を求めると

$$\frac{1}{16\pi G}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}T_{\mu\nu} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}\theta^2 = 0 \tag{5}$$

(4) と (5) より宇宙定数をけして

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \frac{1}{2} < R > g_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - < \mathcal{L}_m > g_{\mu\nu}) \tag{6}$$

このような機構で宇宙定数を重力の方程式から消すことができた。
つぎに、Sequestring Model について考える。このモ

デルではつぎのような作用を考える。

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}[\frac{M_{Pl}^2}{2}R - \Lambda - \lambda^4\mathcal{L}(\lambda^{-2}g^{\mu\nu}, \Phi)] + \sigma(\frac{\Lambda}{\lambda^4\mu^4}) \tag{7}$$

Λ、λ は力学変数としてこの変分による方程式を考える。σ は滑らかな関数で積分されてない形として加えてある。これは、Λ による方程式によって 4 次元体積が 0 とならないようにするためである。さらに、ここでの重力は準古典的で物質のループによる真空エネルギーのみを考える。$\mathcal{L}$ の物質場を繰り込んだとき、物理的に観測される質量 m_{phys} は $\mathcal{L}$ の中のパラメータ m に対して、$m_{phys} = \lambda m$ のようにスケールされることがわかる。このことが、重力方程式からループによる真空を消去するために重要なこととなっている。
このスケールのされ方はスカラー場の Lagrangian をためしに見てみればわかる。

$$\begin{aligned} \lambda^4\mathcal{L}(\lambda^{-2}g^{\mu\nu}, \Phi) &= \frac{1}{2}\lambda^4[\lambda^{-2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + m^2\phi^2] \\ &= \frac{1}{2}[g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + m_{phys}^2\phi^2] \end{aligned} \tag{8}$$

ここで $\varphi = \lambda\phi$、$m_{phys} = \lambda m$ である。
さて、Λ、λ の変分による方程式を求める。

$$\frac{\sigma'}{\lambda^4\mu^4} = \int d^4x\sqrt{-g} \tag{9}$$

$$4\Lambda\frac{\sigma'}{\lambda^4\mu^4} = \int d^4x\sqrt{-g}T^\mu_\mu \tag{10}$$

(9)、(10) より

$$\Lambda = \frac{1}{4} < T^\mu_\mu > \tag{11}$$

ここで $< Q >= \int d^4x\sqrt{-g}Q / \int d^4x\sqrt{-g}$ は 4 次元体積の平均をあらわす。$g_{\mu\nu}$ による変分から方程式を求めて Λ を消去すると

$$M_{Pl}^2 G^\mu_\nu = T^\mu_\nu - \frac{1}{4}\delta^\mu_\nu < T^\alpha_\alpha > \tag{12}$$

$T^\mu_\nu = -V_{vac}\delta^\mu_\nu + \tau^\mu_\nu$ と真空エネルギーとそれ以外に分けた時 (12) は

$$M_{Pl}^2 G^\mu_\nu = \tau^\mu_\nu - \frac{1}{4}\delta^\mu_\nu < \tau^\alpha_\alpha > \tag{13}$$

(13) をみてわかるように方程式に真空の寄与がすべて消えてる。さらに $\Lambda_{ren} = \Lambda + V_{vac}$ から

$$\Lambda_{ren} = \frac{1}{4} < \tau^\mu_\nu > \tag{14}$$

となる。真空エネルギーの寄与は取り除かれていることが重要である。さらに、Λ_{ren} は 4 次元体積平均であらわされているので大きくて古い宇宙なら自動的に小さくなる。

3 Discussion

最初に考えたモデルについて違う方向から考えてみる。作用を Sequester model のような形に変形して真空ループが本当に消えているかどうかを考える。(1) を少し変えた形で書くと

$$\begin{aligned} S = \eta\int d^4x\sqrt{-g}[&\frac{M_{pl}^2}{2}R - \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}(g^{\mu\nu}, \varphi) \\ &-\frac{1}{48}F_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{1}{6}\nabla_\mu(F^{\mu\nu\rho\sigma}A_{\nu\rho\sigma})] \end{aligned} \tag{15}$$

$\mathcal{L}_0 \to \mathcal{L}_0 + \frac{\theta^2}{2}$、としさらに、$-\eta\mu^2\sigma(\theta\int d^4x\sqrt{-g} - \int F$ を加えると

$$\begin{aligned} S = \eta\int d^4x\sqrt{-g}[&\frac{M_{pl}^2}{2}R - \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}(g^{\mu\nu}, \varphi) \\ &+\frac{1}{2}\mu^4\sigma^2] + \eta\mu^2\sigma\int F \end{aligned} \tag{16}$$

さらに $F \to F/\mu^2$、$\Lambda = -\frac{1}{2}\mu^4\sigma^2$ として

$$\begin{aligned} S = \eta\int d^4x\sqrt{-g}[&\frac{M_{pl}^2}{2}R - \Lambda - \mathcal{L}(g^{\mu\nu}, \varphi) \\ &+\eta\sigma(\frac{\Lambda}{\mu^4})\int F \end{aligned} \tag{17}$$

$\mathcal{L}_0$ は $\mathcal{L}$ の中に吸収した。さらに、$g^{\mu\nu} \to g^{\mu\nu}/\eta$、$F \to F/\eta$、$\Lambda \to \Lambda/\eta$ とリスケールして $\lambda = \eta^{-1/4}$、を定義すると

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}[\frac{M_{Pl}^2}{2}R - \Lambda - \lambda^4\mathcal{L}(\lambda^{-4}g^{\mu\nu}, \Phi)] + \sigma(\frac{\Lambda}{\lambda^4\mu^4})\int F \tag{18}$$

これは (7) の作用と形が似ていて物質の Lagrangian の計量のリスケールの違いしかない。しかし、このときループによる真空エネルギーは消去されない。というのも、$\mathcal{L}$ 部分での真空エネルギーは $\lambda^4 V_{vac}$ のように λ^4 でスケールされている。しかしこの時 λ^8 でスケールされている。つまり、$\mathcal{L}$ と Λ のなかに含まれる真空エネルギーは λ のスケールのされ方が λ^4、λ^8 と違っていて消去されないことがわかる。実際に、Sequester model で行ったように Λ、λ、$g^{\mu\nu}$ でそれぞれ変分をとって方程式を導出するとどこかで λ が残ってきて方程式から真空エネルギーの寄与が消えてくれない。Sequester model で上で述べたような λ のスケールのされ方を考えると Λ のほうだけが変わって λ^4 でスケールされるのでループによる真空エネルギーの寄与が消える。

4 Conclusion

このように二つの Nonlocal で宇宙定数を方程式から消すモデルを考えたわけなのだが、片方は実際にはループによる真空エネルギーの寄与が消えていないことがのちに指摘された。ここでは、Nonloca なモデルを紹介したのだが、最近ではほとんどが Nonlocal でなく Local で考えられている。このアプローチではそれぞれのループの寄与がどのようになっているのかを全く考えずにすべてまるごと消えるようにしているのだが、実際には、それぞれのループで繰り込んで Counter term をいれて Λ_{ren} を求めるというのが直接的な宇宙定数問題へのアプローチであろう。そのときには、Λ_{ren} は理論で求まる値ではなく検束で決まる値でしかない。だが、そのアプローチはとても困難ためそれに代わる別の方法がいろいろと考えられている。さらに、重力と宇宙定数への関連についてまだまだ的確には述べられていないようなきがしている。Sequester では重力はただ単に真空エネルギーの絶対値を観測する必要性を課しているだけである。量子重力を考えたときもどのような計算をするべきなのか、何ができればいいのかを考えなければいけないと思われる。とにもかくにも、古典論ではおそらく解決にはつながらないであろう問題だと考えられる。まず、量子重力を完成させてから考えなければいけない問題かもしれない。この先は、今主流の Local なアプローチを考えていく必要がとりあえずありそうである。

Reference

N.Kaloper and A.Padilla,Phys.Rev.Lett.112,091304(2014)

N.Kaloper and A.Padilla,Phys.RevD90 no.8,084023(2014)

S.M.Carroll and G.N.Remmen,arXiv:1703.09715[hep-th]

Guido D'Amico et al,arXiv1705.08950[hep-th]

Sequestering Mechanism の Scalar-Tensor 理論への応用

塚本 拓真 (名古屋大学大学院 理学研究科 QG 研)

Abstract

宇宙定数を真空のエネルギーとみなすとき、場の量子論を用いた理論値と観測から得られる実験値との間には大きな差があることが知られている. これは宇宙定数問題と呼ばれ, なぜ観測値が小さくなるのかはわかっていない. 今回の発表では, 宇宙項問題を解決するモデルとして近年提唱された Sequestering Mechanism に Scalar-Tensor Theory を導入したモデルを用いて宇宙定数が現在の値をとり得るかを見る. このモデルでは, 物質場からくる真空の寄与を, Einstein 重力の action の中に global constraint を導入することで打ち消している. そうすることで, 観測の値に近い値となることが期待される. だがこのモデルでは宇宙の発展を予想する必要があり, 今回の発表では幾つかの簡単な宇宙の発展のモデルを用いて宇宙項が現在の値をとり得るかを見る.

1 Introduction

アインシュタインによって提唱された一般相対性理論は多くの観測結果をパスしており, 成功を収めている. 相対性理論によると, 時空の幾何学的な性質と物質の分布との関係はアインシュタイン方程式で表現される. 宇宙の観測によって我々の宇宙は一様等方性が強く, 現在加速膨張していることが知られており, 一様等方性をアインシュタイン方程式に課すことで FRW 方程式が導かれる. FRW 方程式において我々が知っているような物質を用いて宇宙の膨張を調べると減速膨張する解となり, 加速膨張が説明できない. 加速膨張を起こすような物質の簡単なものとして FRW 方程式へ導入された定数が宇宙項である. 観測には, 現在の宇宙の観測結果を再現するとして ΛCDM モデルが用いられており, Λ のエネルギー密度が観測によりわかっている. また Λ は一定の基本定数であり, 真空にも一定の有限なエネルギー密度を与えると考えられる. 宇宙項のエネルギー密度は真空のエネルギー密度とみなすことができ, 場の理論を用いて真空のエネルギー密度を計算すると, 観測から得られる Λ に対して何十桁も大きな値になる. この, Λ の値が両者で大きく異なってしまうことは宇宙定数問題と呼ばれている. 宇宙項の値を観測の方と一致させるにはこの何十桁もの差を正確に打ち消すような機構が必要となってしまうが, 未だその機構は分かってはいない. 宇宙項をダークエネルギーとする代わりに, 重力理論を一般相対論に変更を加え, 他のダークエネルギーの候補を導入する修正重力理論がある. 各理論によって宇宙項にあたる項は計算されているが, 多くのモデルでは宇宙項の値を小さくするように手で課すことになる. これは fine tuning problem と呼ばれている. そのため, 宇宙項の起源は何なのかという疑問への解決には至っていない. 本研究では Kaloper 等によって提唱された Sequestering Mechanism を用いて, fine tuning をすることなく, 宇宙項問題の解決を試みる.

2 Sequestering Mechanism

この章では Sequestering Mechanism についての紹介を行う.[[1], [2], [3]] Sequestering Mehanism は一般相対論の作用に関数 : σ を導入した作用を用いる.

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2\kappa}R - \Lambda - \lambda^4\mathcal{L}_m\left(\lambda^{-2}g^{\mu\nu}, \Phi\right)\right] + \sigma\left(\frac{\Lambda}{\lambda^4\mu^4}\right) \quad (1)$$

$\mathcal{L}_m$ は物質のラグラジアン密度, Λ, λ は 座標に依らない変数 : global 変数 である.

この作用を各 global 変数について変分をとることで次のような方程式が得られる.

$$\frac{\sigma'}{\lambda^4\mu^4} = \int d^4x\sqrt{-g}, \quad 4\Lambda\frac{\sigma'}{\lambda^4\mu^4} = \int d^4x\sqrt{-g}\lambda^4\tilde{T}^\alpha_\alpha \quad (2)$$

$\tilde{T}_{\mu\nu}$ は共形変換：$\tilde{g}^{\mu\nu} = \lambda^{-2} g^{\mu\nu}$ を用いて定義したエネルギー運動量テンソルである.

ここで, 物理量 Q に対する "global average"：$\langle Q \rangle$ を

$$\langle Q \rangle \equiv \frac{\int d^4x \sqrt{-g} Q}{\int d^4x \sqrt{-g}} \tag{3}$$

で定義する.

式（2）で σ' を消去して Λ について解くと, $T_{\mu\nu} = \lambda^2 \tilde{T}_{\mu\nu}$ を用いて,

$$\Lambda = \frac{1}{4} \langle T^\alpha_\alpha \rangle \tag{4}$$

となる.

σ は計量に依らないため, 作用 (1) から得られる重力の方程式は, Λ を宇宙項としたアインシュタイン方程式である. Λ に上記の式 (4) を代入することで, アインシュタイン方程式は

$$\frac{1}{\kappa} G^\mu_\nu = \lambda^4 \tilde{T}^\mu_\nu - \delta^\mu_\nu \frac{1}{4} \langle T^\alpha_\alpha \rangle$$

となる.

ここで, エネルギー運動量テンソルが真空の寄与と物質の寄与について,

$$T^\mu_\nu \equiv V_{vac} \delta^\mu_\nu + \tau^\mu_\nu$$

と分離することができるとすると, アインシュタイン方程式内で真空の寄与が打ち消され

$$\frac{1}{\kappa} G^\mu_\nu = \tau^\mu_\nu - \frac{1}{4} \langle \tau^\alpha_\alpha \rangle \tag{5}$$

を得る.

この機構では大きい値となる真空のエネルギーが相殺することで式内に現れず, また Λ は物質のエネルギー密度のオーダーの値となることが期待される. また Λ の計算が行えるためには宇宙の発展の 4 次元体積が有限である必要があり, そのため宇宙がビッグバンから始まり, ビッグクランチを起こすような発展をするようなものを考える.

3 Sequestering Mechanism in Scalar-Tensor Theory

物質以外の寄与としてスカラー場を用いて, 宇宙が収縮するような発展を起こすことを考える. そこで Scaler-Tensor Theory[4] に Sequestering Mechanism を適用させることを考える.

作用は

$$\begin{aligned} S = \int d^4x \sqrt{-g} \Big[& \frac{1}{2\kappa} R - h(\phi) (\nabla\phi)^2 - V(\phi) \\ & -\Lambda + \lambda^4 \mathcal{L}_m \left(\lambda^{-2} g^{\mu\nu}, \Psi \right) \Big] + \sigma \left(\frac{\Lambda}{\lambda^4 \mu^4} \right) \end{aligned} \tag{6}$$

新たに導入したスカラー部分には global 変数は含まれていないため, 上記と同じ操作を行うことで Λ については同じ結果を得られる. 重力の方程式は,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\kappa} G^\mu_\nu - h \nabla^\mu \phi \nabla_\nu \phi + \frac{1}{2} h (\nabla\phi)^2 \delta^\mu_\nu + \frac{1}{2} V \delta^\mu_\nu \\ & + \frac{1}{4} \left\langle \frac{1}{2} \tau^\alpha_\alpha \right\rangle \delta^\mu_\nu - \frac{1}{2} \tau^\mu_\nu = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

となる. Scalar-Tensor Theory においても同様に真空からくる寄与は方程式内では現れない.

4 FRW 方程式

一様等方に広がる宇宙は FRW 計量によって記述され, この計量を重力の方程式に代入することで FRW が求まる. またスカラー場は時間にのみ依存することから, FRW 方程式は

$$\begin{aligned} H^2 = \frac{\kappa}{3} \rho - \frac{K}{a^2} + \frac{2\kappa}{3} \Big(& -\frac{1}{2} h \nabla^0 \phi \nabla_0 \phi \\ & + \frac{1}{2} V + \frac{1}{4} \left\langle \frac{1}{2} \tau^\alpha_\alpha \right\rangle \Big) \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} & 3H^2 + 2\dot{H} = -\kappa p - \frac{K}{a^2} \\ & + 2\kappa \left(\frac{1}{2} h \nabla^0 \phi \nabla_0 \phi + \frac{1}{2} V + \frac{1}{4} \left\langle \frac{1}{2} \tau^\alpha_\alpha \right\rangle \right) \end{aligned} \tag{9}$$

と求まる. FRW 方程式を用いて h, V について解くと

$$\begin{aligned} V(\phi) = \frac{3}{\kappa} H^2 + \frac{1}{\kappa} \dot{H} - \frac{1}{2} (\rho_m - p_m) \\ - \frac{1}{4} \langle \tau^\alpha_\alpha \rangle + \frac{2}{\kappa} \frac{K}{a^2} \end{aligned} \tag{10}$$

$$h(\phi) \dot{\phi}^2 = -\frac{1}{\kappa} \dot{H} - \frac{1}{2} (\rho_m + p_m) + \frac{1}{\kappa} \frac{K}{a^2} \tag{11}$$

が得られる.

ここで式 (9), (10) が

$$V(\phi) = \frac{3}{\kappa}f^2 + \frac{1}{\kappa}f' - \frac{1}{2}\rho_m - \frac{1}{4}\langle\tau^\alpha_\alpha\rangle + \frac{2}{\kappa}\frac{K}{a^2}$$
$$h(\phi) = -\frac{1}{\kappa}f' - \frac{1}{2}\rho_m + \frac{1}{\kappa}\frac{K}{a^2}$$

を満たすような h, V を選ぶと $f(\phi) = H, \phi = t$ となる.[5] ここで物質は完全流体で, 非相対論的なものを考えている.

5 Model

スケール因子として次の形を考える.

$$\begin{aligned} a(t) &= \left\{\alpha\left(\frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{2}t_1^2t^2 - \frac{1}{12}t_0^4 + \frac{1}{2}t_1^2t_0^2\right)\right\}^{1/n} \\ &= \left\{\alpha\left(\frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{2}t_1^2t^2 + C\right)\right\}^{1/n} \\ &\quad (-t_0 \le t \le t_0) \end{aligned} \tag{12}$$

ここで, t_1, n はパラメータ. $|t_0|(t_0 > 0)$ は宇宙がビッグバン (ビッグクランチ) を起こす時刻であり, t_0 は寿命に相当する.

C は, $y = \left(\frac{t_1}{t_0}\right)^2$ $(0 < y < 1)$ を定義すると,

$$\begin{aligned} \frac{C}{t_1^4} &= \frac{1}{2}\left(\frac{t_0}{t_1}\right)^2 - \frac{1}{12}\left(\frac{t_0}{t_1}\right)^4 \\ &= \frac{1}{12y^2}(6y-1) \end{aligned} \tag{13}$$

はじめに, このスケール因子の下で, スカラー場の運動項係数 $h(t)$ を計算すると,

$$\begin{aligned} h(t) &= -\frac{1}{\kappa}\dot{H} - \frac{1}{2}\rho_m + \frac{1}{\kappa}\frac{K}{a^2} \\ &= -\frac{H_0^2}{\kappa}a^{-3}\left(\frac{\dot{H}}{H_0^2} + \frac{3}{2}\Omega_{m0} + \Omega_{K0}\cdot a\right) \\ &= \frac{H_0^2}{\kappa}a^{-3}\Bigg[\frac{\alpha^2\{a_1\}^{3/n-2}}{36nH_0^2}\left\{G_1(X) + 36Ct_1^2\right\} \\ &\quad -\frac{3}{2}\Omega_{m0} - \Omega_{K0}\{a_1\}^{1/n}\Bigg] \end{aligned} \tag{14}$$

H_0 は現在のハッブルパラメータの値で, Ω_{m0}, Ω_{K0} はそれぞれ, 非相対論的物質と曲率の密度パラメータの現在の値.

また, a_1 を

$$\alpha\left(\frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{2}t_1^2t^2 - \frac{1}{12}t_0^4 + \frac{1}{2}t_1^2t_0^2\right) \tag{15}$$

と定義する.

$G_1(X)$ は, $X = \left(\frac{t}{t_0}\right)^2$ と定義して,

$$G_1(X) = X(X^2 - A_3X + A_4)$$
$$, \ A_3 = 3t_1^2, \ A_4 = 36t_1^4\left(\frac{1}{2} - \frac{C}{t_1^4}\right)$$

$0 < n < 3/2$ では, 時刻 $t = t_0$ で, $a_1 = 0$ となるため, $h(t)$ の [ ] 内の第 1, 3 項がゼロになり, 物質の項のみが残るため, 負になってしまう. $t \to t_0$ で, $h < 0$ とならないためには, 第 1 項が残っている必要がある. よって, 少なくとも $t \to t_0$ で $h < 0$ とならないためには,

$$n \ge \frac{3}{2} \tag{16}$$

である必要がある.

ここで, a_1 を書き換えると,

$$a_1 = \frac{\alpha t_1^4}{12y^2}\left\{1 - \left(\frac{t}{t_0}\right)^2\right\}\left\{6y - 1 - \left(\frac{t}{t_0}\right)^2\right\} \tag{17}$$

$\alpha > 0$ とすると, $0 < (t/t_0)^2 < 1$ より, $a_1 > 0$ が $-t_0 < t < t_0$ で常に成り立つには, $6y - 1 - (t/t_0)^2 > 6y - 2 > 0$ である必要があるため, y は

$$y \ge \frac{1}{3} \tag{18}$$

次に, スケール因子 $a(t)$ の時間発展について考える. 宇宙の発展が, 減速膨張期から加速膨張期になり, 再び減速膨張期を経て, 収縮期へ転換すると仮定する. この時, スケール因子の関数形は、転換時刻で対称な関数形であるとする. $3/2 \le n < 4$, $1/3 < y < 1$ で、スケール因子が今考えている変化をする条件は, $F(X_-) - 9Ct_1^2$ が正となる領域である.

$$F(X_-) - 9Ct_1^2 > 0 \tag{19}$$

$F(X_-) - 9Ct_1^2$ は

$$\begin{aligned} &F(X_-) - 9Ct_1^2 \\ &= \frac{t_1^6}{(4-n)^2}\frac{1}{ny^3}\Bigg[3n(4-n)(6y-1)y \\ &+(8-n)(4n^2 - 19n + 4)y^3 \\ &+\frac{1}{2}\left\{(-5n^2 + 20n + 16)y^2 - n(4-n)(6y-1)\right\}^{3/2}\Bigg] \end{aligned} \tag{20}$$

関数 $F(X_-) - 9Ct_1^2$ の符号は, 式 (20) の [ ] 内の符号で決まる (図 1).

図 (1) より, スケール因子 (12) は, 実現させたい関数形をとるパラメータ領域を持っている. また, 各 n に対して, 式 (19) を満たす y の領域の上限に制限がつく.

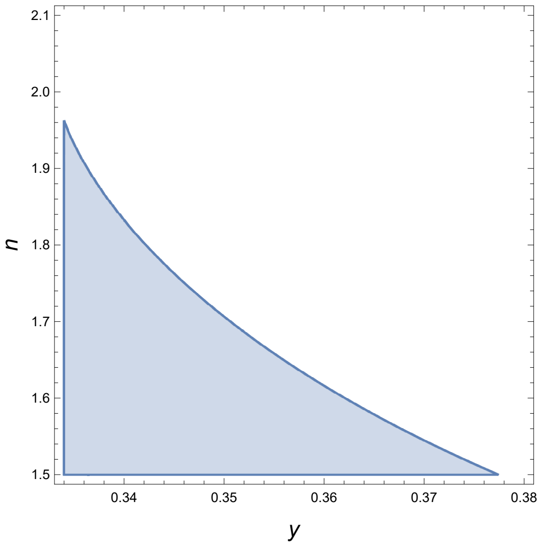

図 1: $3/2 < n < 4$ における、スケール因子が条件に合う領域をまとめた図。$0 < n < 3/2$ は、スカラー場の運動項係数 h が負になるため、n の領域には含まれない。

6 Conclusion

本研究では, fine-tuning 問題解決の方法の 1 つである Sequeatering Mechanism が, Scalar-Tensor 理論においても用いることができ, 真空エネルギーの量子補正からの大きな寄与を打ち消すことができた. Scalar-Tensor 理論の運動項係数とポテンシャルが, スケール因子で記述できる関数形を選んだが, この場合, スケール因子の関数形を仮定する必要がある.

また, スケール因子の具体例を用いて, スケール因子の時間発展や, スカラー場の運動項係数への条件を考えることで, 関数のパラメータ領域への制限を得た. このパラメータ領域において, $\langle \tau_\alpha^\alpha \rangle$ が取り得る値を考える必要がある.

Reference

[1] N. Kaloper, A. Padilla, D. Stefanyszyn and G. Zahariade, "Manifestly Local Theory of Vacuum Energy Sequestering," Phys. Rev. Lett. **116**, no. 5, 051302 (2016) doi:10.1103/PhysRevLett.116.051302 [arXiv:1505.01492 [hep-th]].

[2] N. Kaloper and A. Padilla, "Sequestering the Standard Model Vacuum Energy," Phys. Rev. Lett. **112**, no. 9, 091304 (2014) doi:10.1103/PhysRevLett.112.091304 [arXiv:1309.6562 [hep-th]].

[3] N. Kaloper and A. Padilla, "Vacuum Energy Sequestering: The Framework and Its Cosmological Consequences," Phys. Rev. D **90**, no. 8, 084023 (2014) Addendum: [Phys. Rev. D **90**, no. 10, 109901 (2014)] doi:10.1103/PhysRevD.90.084023, 10.1103/PhysRevD.90.109901 [arXiv:1406.0711 [hep-th]].

[4] Luca Amendola , Shinji Tsujikawa (2010) "Dark energy : theory and observations", USA, Cambridge University Press, New York.

[5] S. Nojiri and S. D. Odintsov, "Unifying phantom inflation with late-time acceleration: Scalar phantom-non-phantom transition model and generalized holographic dark energy," Gen. Rel. Grav. **38**, 1285 (2006) doi:10.1007/s10714-006-0301-6 [hep-th/0506212].

Generalized multi-Galileons, covariantized new terms, and the no-go theorem for non-singular cosmologies

赤間 進吾 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

近年、場の運動方程式が 2 階微分までに保たれる単一スカラー場理論では、特異点のない宇宙禁止定理が証明された。しかし、この段階では場が相互作用する場合などまだ網羅しきれていない状況がある。そこで今回の研究では、特異点のない宇宙禁止定理の拡張として、任意の個数の場が相互作用する包括的な理論へと拡張を行った。

1 Introduction

ビッグバン以前の初期宇宙には、宇宙の急激な加速膨張が起きたと考えられている。このシナリオは「インフレーション」と呼ばれ、これまで様々なモデルが構築されてきた。インフレーションは、標準ビッグバン宇宙論の問題点を解決でき、宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) の観測と整合的であることから支持されている。しかしこのシナリオでは、宇宙の始まりにエネルギー密度などの物理量が発散する点 (初期特異点) が予言されてしまう。そこで、インフレーションとは異なり初期特異点を回避するシナリオとして、宇宙はビッグバンまで収縮していたとする「バウンス」や、宇宙はミンコフスキー時空から始まりビッグバンへとつながったとする「ジェネシス」などが提唱されている。しかしながら、これらは初期特異点を回避できるという魅力的な特徴を持つものの、まともに考えられるようになったのは最近である。この理由として「時空が不安定になる」という問題点があった。

2 特異点のない宇宙

初期特異点を回避するには、光的エネルギー条件と呼ばれる「エネルギーの正値性に関する条件」を破らなければならない。標準的な理論では、このエネルギー条件を破ると必ず短波長の摂動が指数関数的に増幅し、一様等方時空が不安定になる (勾配不安定性)。一方、非標準的な理論 (ガリレオン模型) では、このエネルギー条件を破っても時空の安定性を保持できる。そこで、このガリレオン模型に基づいた理論では、バウンスやジェネシスに代表される「特異点のない宇宙のシナリオ」が実現できると考えられていた。しかし実際にエネルギー条件を破れるモデルを構築し、ビッグバンへとつながる過程など、宇宙全体のシナリオを調べてみると、必ず途中で時空が不安定になることが判明していた。近年では平坦な一様等方時空において、単一スカラー場と重力場の運動方程式が 2 階になる理論は特異点のない宇宙のシナリオで必ず勾配不安定性が生じることが証明された (特異点のない宇宙禁止定理)[1]。

3 特異点のない宇宙禁止定理

安定なモデルを許すようなモデル空間を限定し、特異点のない宇宙が実現できるかを検証することが本研究の目的である。本研究では、複数のスカラー場が相互作用する系を考慮することで「特異点のない宇宙禁止定理」の仮定を 1 つ緩め、定理の拡張を行った。

3.1 包括的なマルチスカラー・テンソル理論

モデル空間を限定するときに、個別のマルチスカラーモデルを検証していくのは非常に効率が悪い。そこで、包括的に議論をすることで「どのモデルでは不安定性を回避できるか」もしくは「モデルに依

らず不安定性を回避できないのか」を効率的に理解し、モデル空間を限定するのが望ましい。マルチスカラーを含み、場の運動方程式が２階になる一般的な理論は以下のラグランジアンで記述される [2]。

$$\mathcal{L} = G_2(X^{IJ}, \phi^K) - G_{3L}(X^{IJ}, \phi^K)\Box\phi^L + \cdots \quad (1)$$

ただし、$X^{IJ} := -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^I\partial_\nu\phi^J$ である。
これに含まれていない理論については近年、背景時空がミンコフスキー時空の下で網羅的に探査された [3]。より包括的な議論をするためには、これらの理論を任意の背景時空の下で再構築すれば良い。私はこれを行うことで、複数のスカラー場と重力場の運動方程式が２階になる既存のマルチスカラーモデルを全て網羅した包括的な理論を構築した [4]。

3.2 安定性の条件

ここでは、平坦な一様等方時空からの摂動を考えた時の安定性の条件を述べる。ラグランジアン (1) におけるテンソル摂動とスカラー摂動の２次の作用は以下のようになる。

$$S_h^{(2)} = \frac{1}{8}\int dtd^3x\, a^3 \left[\mathcal{G}_T\dot{h}_{ij}^2 - \frac{\mathcal{F}_T}{a^2}(\vec{\nabla}h_{ij})^2\right], \quad (2)$$

$$S_Q^{(2)} = \frac{1}{2}\int dtd^3xa^3\left[\mathcal{K}_{IJ}\dot{Q}^I\dot{Q}^J - \frac{1}{a^2}\mathcal{D}_{IJ}\vec{\nabla}Q^I\cdot\vec{\nabla}Q^J - \mathcal{M}_{IJ}Q^IQ^J + 2\Omega_{IJ}Q^I\dot{Q}^J\right], \quad (3)$$

ここで、Q^I は $\phi^I = \bar{\phi}^I(t) + Q^I(t, \vec{x})$ で定義される。ゴースト不安定性と勾配不安定性を避ける条件は、テンソル摂動については

$$\mathcal{G}_T > 0, \quad \mathcal{F}_T > 0, \quad (4)$$

また、勾配不安定性は摂動の短波長モードに着目すれば良いので、スカラー摂動に関する安定性の条件は (3) の３項目と４項目は考えずに $\mathcal{K}_{IJ}$ と $\mathcal{D}_{IJ}$ が正定値であるとすれば良い。

4 結果

結果として、ラグランジアン (1) の下では特異点のない宇宙で、勾配不安定性がモデルに依らず生じることを示した。また、今回新たに再構築した理論は、上記の安定性の議論には影響を及ぼさないため、ここでの結論は現時点で最も一般的なマルチスカラー・テンソル理論での結論である。

5 今後の課題

上述の結果を受け近年では、空間の高階微分の導入などにより禁止定理の条件を緩和させ、バウンスやジェネシスモデルが構築されている。しかし、まだどのような理論ではモデル構築ができるのかが限定できていない。そこで、モデル空間をどのように限定していくかについても議論する。

Acknowledgement

夏の学校運営にご支援くださった機関・個人の方々に感謝いたします。

Reference

[1]T. Kobayashi, Phys. Rev. D**94** (2017) 043511.

[2]A. Padilla, and V. Sivanesan, JHEP**1307**(2013)

[3]E. Allys, Phys. Rev. D**95**(2017)064051.

[4]S. Akama, and T. Kobayashi, Phys. Rev.D**95** (2017)064011.

Non-linear effect of higher-order scalar tensor theory on cosmological perturbation

平野　進一 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

近年盛んに研究されている修正重力理論の 1 つであるスカラーテンソル理論には、スカラー場の高階微分項を含み、その非線形性効果が効くことで、太陽系スケールでの重力実験の結果を再現し、かつ宇宙論的なスケールで宇宙の加速膨張を実現するものがある。本研究では、上記の理論を含む包括的な枠組みである Horndeski 理論をもとに、その自然な拡張である GLPV 理論である場合に、宇宙論的な密度揺らぎにどのような効果がみられるか見ていく。特に、非線形効果がみられると期待される物質のバイスペクトルに対する評価を行った。結果として、バイスペクトルの積分カーネルの波数依存性として新たな項が現れることはないものの、一般相対論や Horndeski 理論の場合にはない時間発展が導入される。その一方で、線形密度揺らぎの発展が著しく $\Lambda-$CDM モデルと異なる理論予言をもたらす場合があることが確認された。

1　Introduction

近年観測された宇宙の加速膨張を説明する、最も簡単な候補とされる宇宙項は、その起源を宇宙の真空期待値と捉えると観測との大きな矛盾を招く。この問題を解決する手法として、宇宙論的なスケールにおいて重力理論を修正する試みがなされている。特に、その修正の典型的なモデルとして、重力場の計量にスカラー場を加えた理論であるスカラーテンソル理論が知られている。例えば、超弦理論のような高エネルギーの究極理論があり、その低エネルギー有効理論としてスカラーテンソル理論を考えるならば、宇宙論的な時空は対称性が高いために、相互作用項が多岐にわたる。その理論が現在の宇宙を記述するためには、宇宙論的なスケールにおいて加速膨張を説明し、太陽系スケールのような小スケールでは一般相対論から予言される理論予言を回復するスクリーニング機構を備えていることが最低限必要である。このスクリーニング機構は、大まかにスカラー場のポテンシャル項を用いるものと微分項を用いたものがある。後者は、「Vainshtein 機構」[1] と呼ばれ、最近盛んに研究されている高階微分理論 (例えば、DHOST 理論 [2]) や disformal coupling のある理論に多く見られる性質であり、この機構の観測的な検証も多く議論されている。本研究では、上記のような Vainshtein 機構を備えたスカラーテンソル理論の宇宙論的な密度揺らぎ、特に物質バイスペクトルに現れる影響を見積もることで、Vaishtein 機構の兆しをみることができないか精査する。

用いる理論は、運動方程式が 2 階微分までを含む最も一般的な理論である Horndeski 理論、その自然な拡張である GLPV 理論 [3] である。これらには、スカラー場とその運動項の任意関数が含まれており、それを特定の形に選択することで、個々の既存のモデルに落ちる構造になっている。GLPV 理論に拡張されたことで加わった項は、物質の揺らぎの成長するサブホライズンスケールにおいて、密度揺らぎパラメータ δ の時間微分項と同じオーダーになる項や非線形オーダーで新たな時間依存性をもたらす項を吐き出す [4]。これらの項により、バイスペクトルに含まれる積分カーネルの時間発展が Horndeski 理論の場合とも異なる依存性となる一方、線形密度揺らぎの発展方程式が $\Lambda-$CDM モデルと著しく異なる理論予言となる場合があることを確認した。

本集録の構成は以下である。2 章で GLPV 理論の作用を導入する。3 章ではサブホライズンスケールにおける宇宙論的な密度揺らぎを考え、4 章では観測量であるバイスペクトルを計算し、GLPV 理論で現れる新たな影響をみていく。5 章で以上の議論をまとめる。

2 GLPV theory

G_5 と F_5 の項を考えない [1]、GLPV 理論 [3] の作用は

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\mathcal{L}_{\rm H} + \mathcal{L}_{\rm beyond} + \mathcal{L}_{\rm m}\right), \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\rm H} =& G_2(\phi, X) - G_3(\phi, X)\Box\phi + G_4(\phi, X)R \\ &+ G_{4X}(\phi, X)\left[(\Box\phi)^2 - \phi^2_{\mu\nu}\right] \qquad (2)\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{\rm beyond} = -\frac{1}{2}F_4(\phi, X)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu'\nu'\rho'\sigma}\phi^{\mu'}\phi_\mu\phi^{\nu'}{}_\nu\phi^{\rho'}{}_\rho \qquad (3)$$

である。G_2, G_3, G_4, F_4 はスカラー場 ϕ とその運動項 $X := (-1/2)(\nabla\phi)^2$ の任意関数である。$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ は完全反対称テンソルである。ϕ_μ や $\phi_{\nu\rho}$ は $\nabla_\mu\phi$ や $\nabla_\rho\nabla_\nu\phi$ をそれぞれ表している。$\mathcal{L}_{\rm m}$ は通常の物質の作用である。GLPV 理論は、Horndeski 理論の自由度勘定をする際に、それと無関係になる任意関数同士の関係式を緩めることで拡張をはかったものである。これにより高階微分項が導入されるが、その影響は顕に現れない。

3 Cosmological perturbation at sub-horizon scale

GLPV 理論において宇宙論的密度揺らぎを議論する。計量は空間的に平坦なフリードマン時空を背景時空としたニュートニアンゲージでの宇宙論的揺らぎを考える;

$$ds^2 = -(1+2\Phi)dt^2 + a^2(t)(1-2\Psi)d\boldsymbol{x}^2. \qquad (4)$$

スカラー場の揺らぎと密度揺らぎは以下のように定義する;

$$\phi(t,\boldsymbol{x}) = \phi(t) + \pi(t,\boldsymbol{x}), \qquad (5)$$

$$\rho(t,\boldsymbol{x}) = \rho(t)[1+\delta(t,\boldsymbol{x})]. \qquad (6)$$

更に、スカラー場の揺らぎは無次元化した $Q := H\pi/\dot{\phi}$ を用いる。

[1] 文献 [5,6] から、$G_{5X} \neq 0$ である理論は太陽系スケールで $\Phi, \Psi \propto 1/r$ の振る舞いを再現できず, G_5 をもつ理論の Vainshtein sol. は不安定であることがわかっている。F_5 の後に関しては、本質的に新たな項は得られず、宇宙論バックグラウンドの振る舞いをややこしくするのみなので、本集録では $G_5 = F_5 = 0$ の場合を議論する。

3.1 Expanding Lagrangian

上記の摂動量を用いて、サブホライズンにおいてラグランジアンを展開する。ϵ を摂動量とした時、準定常近似: $\ddot{\epsilon} \ll \partial^2\epsilon$ を用いると、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(2)} =& -aM^2(1+\alpha_T)\Psi\nabla^2\Psi + 2aM^2(1+\alpha_H)\Psi\nabla^2\Phi \\ &- aM^2\Big[\frac{1}{2M^2H^2}\Big\{\rho_m + p_m + 2(M^2H\alpha_B - M^2H\alpha_H)^\bullet\Big\} \\ &+ \frac{\dot{H}}{H^2} + (\alpha_B - \alpha_H) + (\alpha_T - \alpha_H)\Big]Q\nabla^2Q \\ &+ 2aM^2\left[\frac{1}{M^2H}\{M^2(1+\alpha_H)\}^\bullet + \alpha_H - \alpha_T\right]\Psi\nabla^2Q \\ &- 2aM^2(\alpha_B - \alpha_H)\Phi\nabla^2Q + 2aM^2\alpha_H\frac{\dot{\Psi}}{H}\nabla^2Q - a^3\rho_{\rm m}\Phi\delta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(\rm NL)} =& \frac{M^2}{2aH^2}\Big[-\frac{1}{M^2H}\{M^2(2+\alpha_G+\alpha_H)\}^\bullet\alpha_G \\ &- 3(\alpha_H - \alpha_T) + 4\alpha_B\Big]\mathcal{L}_3 + \frac{M^2}{2a^3H^4}(\alpha_G - \alpha_H + \alpha_T)\mathcal{L}_4 \\ &+ \frac{M^2}{2aH^2}(\alpha_G - \alpha_H)\Phi\mathcal{Q}^{(2)} + \frac{M^2}{2aH^2}\alpha_T\Psi\mathcal{Q}^{(2)} \\ &- \frac{2M^2}{aH^2}\alpha_H\nabla_i\Psi\nabla_jQ\nabla_i\nabla_jQ,\end{aligned}$$

となる [7]。ここで、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_3 &= -\frac{1}{2}(\nabla Q)^2\nabla^2Q, \\ \mathcal{L}_4 &= -\frac{1}{2}(\nabla Q)^2\mathcal{Q}^{(2)}, \\ \mathcal{Q}^{(2)} &= (\nabla^2Q)^2 - (\partial_i\partial_jQ)^2.\end{aligned}$$

ドットは宇宙時間における微分、ナブラは空間微分である。ここで非線形項を残したのは、状況に依っては、非線形項が優勢な寄与になり得るためである。太陽系のような高密度の領域においては、Vainshtein 機構を働かせることができる [4]。密度揺らぎの非線形オーダーにおいても、この非線形項が効いてくるため、バイスペクトルにその特徴が出る [8]。$M, \alpha_i (i = G, K, B, T, M, H)$ はそれぞれ理論の任意関数で書けていて [7,9]、線形揺らぎを物理的に特徴づけている。例えば、α_T は重力波の伝搬速度の c からのズレを表している。特に、Horndeski 理論を超えることで α_H が導入される。これが GLPV 理論固有のパラメータである。

3.2 First/ second-order solutions of matter fluctuation

摂動量 Φ, Ψ, Q に関して変分し、フーリエ展開した方程式を連立することで代数的に解くことができる。計算は幾分冗長であるため、ここでは結果のみを伝えていく。1 次の解は、

$$\Phi_1(t, \mathbf{p}) = -\frac{a^2H^2}{p^2}\left[\mu_\Phi \frac{\ddot{\delta}_1}{H^2} + \nu_\Phi \frac{\dot{\delta}_1}{H} + \kappa_\Phi \delta_1\right] \quad (7)$$

$$\Psi_1(t, \mathbf{p}) = -\frac{a^2H^2}{p^2}\left[\nu_\Psi \frac{\dot{\delta}_1}{H} + \kappa_\Psi \delta_1\right], \quad (8)$$

$$Q_1(t, \mathbf{p}) = -\frac{a^2H^2}{p^2}\left[\nu_Q \frac{\dot{\delta}_1}{H} + \kappa_Q \delta_1\right]. \quad (9)$$

である ($\delta_1 = \delta_1(t, \boldsymbol{p})$)。それぞれの係数は任意関数で書かれ、特に μ_i, ν_i は α_H に比例するため、これらが GLPV 理論において新たに現れた影響となる。この結果を、物質の連続の式とオイラー方程式に代入すると線形密度揺らぎの発展方程式が得られ、

$$\frac{\partial^2 \delta_1}{\partial t^2} + 2H(1+\beta_H)\frac{\partial \delta_1}{\partial t} - 4\pi G_{\rm eff}\rho_{\rm m}\delta_1 = 0 \quad (10)$$

となる。Horndeski 理論の範囲においては有効的に現れる重力定数 $G_{\rm eff}$ が変更を受けるのみであったが、摩擦項に新たな寄与 β_H が加わる。これにより、$f\sigma_8$ の観測結果により則した特殊なモデルも考えられる [10] が、$\Lambda-$CDM モデルから予言される線形密度揺らぎの理論予言から大きく外れるような可能性が考えられる。この方程式の解は、$1+\beta_H > 0$ である限り、成長解をもつ。スカラー場の寄与のない物質優勢期では、一般相対論の結果と同じ $D_+ = a$ が実現している ($\delta_1 = D_+(t)\delta_L(\boldsymbol{p})$, $\delta_L(\boldsymbol{p})$ は初期の波数依存性)。

次に非線形オーダー (2 次) を見ていく。1 次の場合と同様に代数的に解け、2 次の密度揺らぎの発展方程式は、

$$\frac{\partial^2 \delta_2}{\partial t^2} + 2H(1+\beta_H)\frac{\partial \delta_2}{\partial t} - 4\pi G_{\rm eff}\rho_{\rm m}\delta_2 = S_\delta(t, \boldsymbol{p}), \quad (11)$$

ここで、

$$S_\delta(t, \boldsymbol{p}) = \frac{D_+^2H^2}{1-\mu_\Phi}\Big[\Big(2f^2 - \frac{\kappa_\Phi}{1-\mu_\Phi} + \gamma_H\Big)\mathcal{W}_\alpha - \frac{f^2 - \tau_{\Phi\gamma}}{1-\mu_\Phi}\mathcal{W}_\gamma\Big], \quad (12)$$

$$\mathcal{W}_\alpha(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k_1 d^3k_2\, \delta^{(3)}(\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{p})\alpha_s(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2) \times \delta_L(\boldsymbol{k}_1)\delta_L(\boldsymbol{k}_2), \quad (13)$$

$$\mathcal{W}_\gamma(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k_1 d^3k_2\, \delta^{(3)}(\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{p})\gamma(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2) \times \delta_L(\boldsymbol{k}_1)\delta_L(\boldsymbol{k}_2), \quad (14)$$

$$\alpha_s(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2) = 1 + \frac{(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2)(k_1^2 + k_2^2)}{2k_1^2k_2^2}, \quad (15)$$

$$\gamma(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2) = 1 - \frac{(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2)^2}{k_1^2k_2^2}. \quad (16)$$

である ($\delta_2 = \delta_2(t, \boldsymbol{p})$)。$f := \dot{D}_+/D_+H$ は線形成長因子、GLPV 理論に拡張した効果は μ_Φ, γ_H に入っている。波数依存性に当たる W_α, W_γ は一般相対論でも登場する依存性である。初期揺らぎがガウシアンであることを仮定するならば、ソース項が 2 次の解に直接寄与する:

$$\delta_2(t, \boldsymbol{p}) = D_+^2(t)\left[\kappa(t)\mathcal{W}_\alpha(\boldsymbol{p}) - \frac{2}{7}\lambda(t)\mathcal{W}_\gamma(\boldsymbol{p})\right], \quad (17)$$

$$\kappa(t) = \frac{1}{D_+^2(t)}\int_0^t dT \frac{D_+(T)D_-(t) - D_+(t)D_-(T)}{W(T)} \times \frac{D_+^2H^2}{1-\mu_\Phi}\left(2f^2 - \frac{\kappa_\Phi}{1-\mu_\Phi} + \gamma_H\right), \quad (18)$$

$$\lambda(t) = \frac{7}{2D_+^2(t)}\int_0^t dT \frac{D_+(T)D_-(t) - D_+(t)D_-(T)}{W(T)} \times D_+^2(T)H^2(T)\frac{f^2 - \tau_{\Phi\gamma}}{1-\mu_\Phi}. \quad (19)$$

ここに現れた $\kappa(t), \lambda(t)$ は、バイスペクトルを特徴づける積分カーネルにも現れ、その時間発展を特徴づける。特に、κ に関しては一般相対論でも Horndeski 理論でも 1 になるが [8]、GLPV 理論に拡張されることでその値が時間発展する。

4 Bispectrum

宇宙の大規模構造の SPT(Standard Perturbation Theory) の notation を用いる [11]。密度揺らぎのパワースペクトル/バイスペクトルは、

$$\langle\delta(t,\boldsymbol{k}_1)\delta(t,\boldsymbol{k}_2)\rangle = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)P(t,k_1),$$
$$\langle\delta(t,\boldsymbol{k}_1)\delta(t,\boldsymbol{k}_2)\delta(t,\boldsymbol{k}_3)\rangle = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3) \times B(t,k_1,k_2,k_3).$$

である。Tree-level の 3 点相関関数は、

$$\langle\delta_1(\boldsymbol{k}_1)\delta_1(\boldsymbol{k}_2)\delta_2(t,\boldsymbol{k}_3)\rangle = 2(2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3) \times D_+^4(t)F_2(t,\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)P_{11}(k_1)P_{11}(k_2), \quad (20)$$
$$F_2(t,\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) = \kappa(t)\alpha_s(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) - \frac{2}{7}\lambda(t)\gamma(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2),$$

$P_{11}(k)$ は tree-level のパワースペクトル、F_2 が積分カーネルである。これを用いると、tree-level のバイスペクトルは

$$D_+^{-4}(t)B(t,k_1,k_2,k_3) = 2F_2(t,\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)P_{11}(k_1)P_{11}(k_2) + 2\text{ cyclic terms} \quad (21)$$

となる。最後に観測との比較にも用いられる reduced bispectrum は、

$$Q_{123}(t,k_1,k_2,k_3) = \frac{B(t,k_1,k_2,k_3)}{D_+^4(t)[P_{11}(k_1)P_{11}(k_2)+2\text{ cyclic terms}]} \quad (22)$$

である。具体的に、$k_1 = k_2, k_3 \approx 0$ のとき、GLPV 理論と $\Lambda-$CDM モデルとの比較をすると、

$$\frac{Q_{123}}{Q_{123}^{\Lambda}} \approx \frac{21\kappa - 8\lambda}{21-8\lambda_\Lambda} \quad (23)$$

となる。十分初期にはこの値は 1 になるが、スカラー場が優勢になるにつれ、この値はずれていく。

5 Summary

Vainshtein 機構を備えた Horndeski 理論の自然な拡張である GLPV 理論において密度揺らぎの発展を調べた。結果、線形レベルで $\Lambda-$CDM モデルの理論予言から大きくずれる可能性が示唆された。非線形レベルでは、新たな波数依存性は見られなかったものの、積分カーネルに一般相対論や Horndeski 理論にない時間発展がみられことが確認された。

Acknowledgement

夏の学校開催にご助力いただいた方々に感謝致します。著者は、JSPS 科研費 17J04865 の助成を受けています。

Reference

[1] A. I. Vainshtein, Phys. Lett. **39B** (1972) 393.

[2] D. Langlois and K. Noui, JCAP **1602** (2016) no.02, 034 , [arXiv:1510.06930 [gr-qc]].

[3] J. Gleyzes, D. Langlois, F. Piazza and F. Vernizzi, JCAP **1502** (2015) 018 , [arXiv:1408.1952 [astro-ph.CO]].

[4] T. Kobayashi, Y. Watanabe and D. Yamauchi, Phys. Rev. D **91** (2015) no.6, 064013 , [arXiv:1411.4130 [gr-qc]].

[5] R. Kimura, T. Kobayashi and K. Yamamoto, Phys. Rev. D **85** (2012) 024023 , [arXiv:1111.6749 [astro-ph.CO]].

[6] K. Koyama, G. Niz and G. Tasinato, Phys. Rev. D **88** (2013) 021502 ,[arXiv:1305.0279 [hep-th]].

[7] S. Hirano, et al. in preparation

[8] Y. Takushima, A. Terukina and K. Yamamoto, Phys. Rev. D **89** (2014) no.10, 104007 , [arXiv:1311.0281 [astro-ph.CO]].

[9] E. Bellini and I. Sawicki, JCAP **1407** (2014) 050 , [arXiv:1404.3713 [astro-ph.CO]].

[10] S. Tsujikawa, JCAP **1504** (2015) no.04, 043 , [arXiv:1412.6210 [hep-th]].

[11] F. Bernardeau, S. Colombi, E. Gaztanaga and R. Scoccimarro, Phys. Rept. **367** (2002) 1 , [astro-ph/0112551].

Vainshtein mechanism in Schwarzschild spacetime with matter

小川潤 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

Galileon タイプのスカラー・テンソル理論には、Vainshtein 機構と呼ばれる第 5 の力の抑制機構が存在すると考えられているが、軸対称のような対称性の低い場合において第 5 の力が抑制されるかは明らかではなかった。そこで、ディスク状に物質を配置した軸対称な系における Vainshtein 機構のはたらきを調べた。このような系では、Vaisnhtein 機構が第 5 の力を促進するはたらきを持つことが明らかとなった。

1 Introduction

一般相対論は、いまのところ適用範囲がもっとも広く、かつ理論的にもシンプルな重力理論である。しかし、一般相対論が予言する宇宙モデルは、これまでのところ現在の宇宙が加速膨張しているという観測事実を十分に説明できていない。この宇宙モデルにおいて、観測されている宇宙の加速膨張を物質場により説明するにはダークエネルギーと呼ばれる圧力が負となる物質の導入が必要となる。現時点では、この物質が実在する積極的な根拠は見つかっていない。この宇宙の加速膨張を説明するために、一般相対論は理論的に不完全であるという立場から、一般相対論を修正・拡張した重力理論 —修正重力理論— が提案されている。

ほとんどの修正重力理論は重力を記述するテンソル場にスカラー場の自由度を追加する理論 -スカラー・テンソル理論- によって実効的に記述できる。スカラー・テンソル理論の 1 つとして、スカラー場の自己相互作用 ($\Box\phi(\nabla\phi)^2$) 導入する Galileon 理論 [1] が知られている。新しく追加したスカラー自由度を Galileon と呼び、この自由度により宇宙の加速膨張を説明できると期待されている。一方で、Galileon は非相対論的物質と結合するため第 5 の力を伝播してしまう。このような力は太陽系スケールでの重力テストでは発見されていない。そのため、Galileon 理論は Vainshtein 機構 [2] と呼ばれる、自己相互作用項の非線形効果によって物質と重力との結合が弱くなる機構を備えている必要がある。このような機構がはたらくかどうかは、球対称や平面対称といった対称性が高い場合でしか調べられていない。

本研究では、有限な大きさのディスク状に物質を分布させた軸対称な系における Vainshtein 機構のはたらきを調べた。具体的には、Galileon が物質と結合する場合を考え、Galileon の運動方程式を数値的に解くことにより Galileon のふるまいを調べた。このとき、Vainshtein 機構が第 5 の力を抑制するのではなく、むしろ促進するはたらきを持つことが明らかになった。この原因は、時空の曲がり方に依存せず、物質分布の形状にあることを突き止めた。

2 Theory

2.1 Field equations

今回の解析では、Einstein frame における Cubic Galileon 作用を考える:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{M_p^2}{2}R + \sum_{i=2}^{3}\frac{c_i}{2}\mathcal{L}_i\right] + S_m[\Psi; A^2(\phi)g_{\mu\nu}], \tag{1}$$

ここで、Planck 質量を $M_p := (8\pi G)^{-1/2}$ と定義した。(1) 式の第 2 項は Galileon 場の振る舞いを決める項で、c_i は無次元の定数であり、また

$$\mathcal{L}_2 = (\nabla\phi)^2, \tag{2}$$

$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{M^3}\Box\phi(\nabla\phi)^2, \tag{3}$$

である。ただし、$(\nabla\phi)^2 = \nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi$, $\Box\phi = \nabla_\mu\nabla^\mu\phi$ である。さらに、M は質量の次元を持っており、$M^3 := M_{\rm p}H^2$ である (H は FRLW universe の Hubble 定数). (1) 式の第 3 項は、物質場 Ψ の作用を

表している。Jordan 計量と $\tilde{g}_{\mu\nu}$ Einstein 計量とは, $\tilde{g}_{\mu\nu}=A^2(\phi)g_{\mu\nu}$ という関係にある。

この作用を計量 $g_{\mu\nu}$ と Galileon ϕ で変分を取ると, 重力場と Galileon の運動方程式が得られる:

$$G_{\mu\nu}=\kappa\left(T^{(m)}_{\mu\nu}+\sum_{i=2}^{3}c_iT^{(i)}_{\mu\nu}\right), \tag{4}$$

$$\sum_{i=2}^{3}c_i\xi^{(i)}=0. \tag{5}$$

ただし、

$$\xi^{(i)}:=-\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\partial_\mu\frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}_i}{\partial(\partial_\mu\phi)}-\frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}_i}{\partial\phi}\right), \tag{6}$$

$$\xi^{(2)}=-\Box\phi, \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\xi^{(3)}=&\frac{1}{M^3}[R_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi\\&+(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)(\nabla^\mu\nabla^\nu\phi)-(\Box\phi)^2],\end{aligned} \tag{8}$$

$$T^{(2)}_{\mu\nu}=-\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla\phi)^2 \tag{9}$$

$$\begin{aligned}T^{(3)}_{\mu\nu}=&-\frac{1}{M^3}(\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi\Box\phi+g_{\mu\nu}\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi\nabla^\alpha\nabla^\beta\phi\\&-\nabla^\lambda\nabla_{\{\mu}\phi\nabla_{\nu\}}\nabla_\lambda\phi)\end{aligned} \tag{10}$$

である。このとき、$[\nabla_\alpha,\nabla_\beta]\nabla_\gamma\phi=R^\lambda{}_{\gamma\alpha\beta}\nabla_\lambda\phi$, $\{A,B\}=AB+BA$ を用いた。今回の解析では物質と Galileon の結合を

$$A(\phi)=e^{\beta\phi/2M_p}, \tag{11}$$

とする。ただし、β は Galileon と物質との結合定数とする。これらの仮定より、Galileon の運動方程式は

$$c_2\xi^{(2)}+\frac{c_3}{M^3}\xi^{(3)}=\frac{\beta}{2M_p}\rho, \tag{12}$$

となる。ただし、Einstein frame で保存されるエネルギー密度 $\rho:=-A^{-1}T_m$ を定義した。

2.2 Vainshtein 機構の振る舞い

これらの物質と Galileon の結合により、Galileon の分布 (正確には Galileon の微分項) に比例する第 5 の力が生じる。たとえば、質量 m の粒子が感じる第 5 の力は

$$\vec{F}_\phi=-\frac{\beta}{M_p}m\vec{\nabla}\phi. \tag{13}$$

と書ける。そのため、第 5 の力を計算するには、物質の周りの Galileon の分布を求める必要がある。

Laboratory や太陽系スケールでの重力のテストにより、このような第 5 の力の伝播 (存在) は強く制限されている。そのため Galileon 理論は、これらの第 5 の力が局所領域 (高密度領域) で隠されるような機構を有している必要がある。このような領域では、Galileon 理論に含まれる非線形項によって物質と Galileon が弱く結合するようになる。このような機構を Vainshtein 機構と呼ぶ。(12) 式の第 2 項は非線形項を表しており、高密度領域ではこの項が支配的となる。つまり、$c_3=0$ とすると Vainshtein 機構がはたらかなくなる。

本解析では、ディスク状に物質を分布させたときの Vainshtein 機構のはたらきを調べる。このとき、Vainshtein 機構がはたらく場合 ($c_3\neq0$) とそうでない場合 ($c_3=0$) の $\nabla\phi$ を調べることによって、Vainshtein 機構のはたらき (非線形項の強さ) を調べられる。すなわち、

$$Q=\frac{|\nabla\phi|_{c_3\neq0}}{|\nabla\phi|_{c_3=0}} \tag{14}$$

をプロットすることによって Vainshtein 機構の振る舞いを調べる。

3 Galileon profile with disk-like matter

3.1 Numerical set up

本解析では、物質分布を

$$\rho(r,\theta):=\rho U(r-r_1)U(r_2-r)U(\theta_1-\theta) \tag{15}$$

とする。このとき、disk の内径を r_1、外径を r_2 とし、さらに

$$U(x)=\begin{cases}1 & (x>0)\\0 & (x<0)\end{cases} \tag{16}$$

である。ここで、便宜上、物質とスカラー場が時空に与える影響を無視できるものとする。すなわち、背景時空は Minkowski 時空とする。また、この Galileon

は宇宙の加速膨張を引き起こしていると考えると、Galileon 場の時間変化は宇宙時間スケールとなる。すなわち、今回考えているような局所領域では時間変化を無視できるとする。さらに、物質は静的であるとし、これらの運動によって生じる熱力学的・流体力学的な影響を全て無視することにする。

数値計算を行う上で、変数をそれぞれ典型的なスケールで無次元化する:

$$\bar{\phi} = \frac{\phi}{c_2 M^3 r_0^2}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \bar{r} = \frac{r}{r_0}, \quad \bar{\xi}^{(3)} = \frac{\xi^{(3)}}{c_2^2 M^6} \tag{17}$$

これらの無次元化変数を (12) 式に代入すると

$$c_2 \bar{\xi}^{(2)} + c_3 \bar{\xi}^{(3)} = \frac{\mu}{2} \bar{\rho}. \tag{18}$$

となる。ただし、

$$\mu := \frac{\beta \rho_0}{c_2^2 M^3 M_{\mathrm{pl}}} \tag{19}$$

と定義した。数値計算を行う上で、境界条件を

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta}|_{\theta=0} = \frac{\partial \phi}{\partial \theta}|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0, \tag{20}$$

$$\phi(L, \theta) = 0 \tag{21}$$

課す。ただし、L は考えている領域の大きさである。以上の設定のもと (14) 式を計算する。

3.2 Result

Minkowski 時空において、$\mu \sim 36$、$r_1 = 3, r_2 = 30$ に物質を分布させたときの (14) 式をプロットすると図 1 となる。図 1 より、物質をディスク上に配置すると、空洞部分の直上において第 5 の力が顕著となることが分かる。つまり、Vainshtein 機構 (非線形項) はスカラー場の存在を抑制するどころか、促進するはたらきを持っていることが分かる。具体的には、2 倍程度の第 5 の力があらわれる。平面状に物質を配置すると Vainshtein 機構が全くはたらかないことが示されており [3]、空洞部分以外の領域ではその結果を再現している。物質の近傍では Vainshtein 機構のはたらきにより、第 5 の力が伝播しにくくなっていることが分かる。

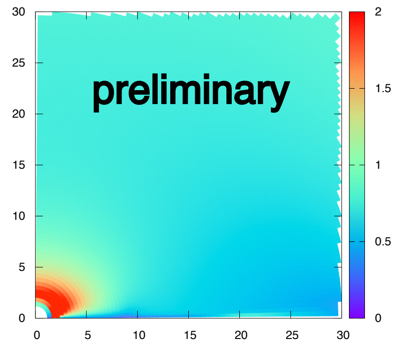

図 1: Minkowski 時空において、物質を $r_1 = 3, r_2 = 30$ に分布させ、$\mu \sim 36$ のときの Q をプロットした図 (disk の断面図、横軸に物質を配置)。Vainshtein 機構はスカラー場を促進するようにはたらく。

4 Conclusion

物質の形状によって、Vainshtein 機構のはたらきが顕著にかわることが、今回の解析によって判明した。今後 Vainshtein 機構を持つ理論を考えるときの 1 つの指針を与えたことになる。より現実的な系 (例えば、Schwarzschild 時空の場合) についての解析や、非線形項の振る舞いを定性的に理解する方法については、本講演時に発表予定である。

Acknowledgement

天文天体物理若手夏の学校を運営・支援をして下さった皆様に感謝致しております。この場を借りて厚く御礼申し上げます。

Reference

[1] A. Nicolis, R. Rattazzi and E. Trincherini, Phys. Rev. D **79**, 064036 (2009) doi:10.1103/PhysRevD.79.064036 [arXiv:0811.2197 [hep-th]].

[2] A. I. Vainshtein, Phys. Lett. **39B**, 393 (1972).

[3] J. K. Bloomfield, C. Burrage and A. C. Davis, Phys. Rev. D **91**, no. 8, 083510 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.91.083510 [arXiv:1408.4759 [gr-qc]].

軸対称時空における Einstein-Vlasov 系

松本 龍哉 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙物理学において、重力相互作用のみをする無衝突粒子の振る舞いを記述する self-gravitating Vlasov 系が有用である事は示されてきて、一般相対論においても良い物質モデルである。その有用性のため Vlasov 系と Newton 重力を組み合わせた Vlasov-Poisson(VP) 系と Einstein 重力を組み合わせた Einstein-Vlasov(EV) 系のそれぞれについて数値計算による球対称解の解析が行われてきた。[1,2]

[3] では EV 系を軸対称時空で考えており、数値計算によって解いて得られる物質分布は様々な形や性質を持っている。形状はトーラス形、ディスク状、紡錘形などがある上に、これらを生み出す分布関数を組み合わせることも可能で spindle-torus といったものも解として存在する。また、特徴的な性質の一つに Einstein-Vlasov 系で初めて ergoregion を持つものがある。これは解が相対論的である示唆しており、非自明な性質を持っていて興味深い結果となっている。

1 Introduction

宇宙物理学ではそのスケールの大きさから完全流体によって近似することが多く、相互作用が重力のみの Vlasov 系はいいモデルであり、一般相対論においても良い物質モデルである。しかし、計算の複雑さから Newton 重力と組み合わせた Vlasov-Poisson 系 [] や Einstein 重力との Einstein-Vlasov 系 [] のどちらでも球対称での研究が多く、軸対称時空における解はほとんど知られていない。そこで、Vlasov 系の分布関数の引数が 2 つの保存量のみに依存するという仮定を置くことで計算する方法が行われている [3]。これにより測地線に沿って分布関数が保存するという Vlasov 方程式が自明に成り立ち、Einstein 方程式のみを解けばいい形になり計算が簡略化される。今回の発表では [3] の review を行い、軸対称の self-gravitating Vlasov 系の解を数値計算によって作られることを紹介する。さらに、その解の中には今まで存在しなかった ergoregion を含むような相対論的な解が存在することについても述べる。

2 Model and Methods

粒子の作り出す Einstein 重力のみによって相互作用する無衝突粒子の振る舞いを考えるために、モデルは物質が分布関数 $f : P \to [0, \inf[$ によって記述される。分布関数は mass-shell と呼ばれる時間向き付けされたローレンツ多様体 (M, g) の接束の補集合として定義される。簡単化のために全ての粒子は同質量でその質量を 1 とする。解くべき方程式は以下の Einstein 方程式と Vlasov 方程式 (無衝突ボルツマン方程式) である。(ラテンの添字は 0,1,2,3 を取る)

$$Ric(g)_{ij} - \frac{1}{2}R(g)g_{ij} = 8\pi T(g,f)_{ij} \tag{1}$$

$$p^i\partial_{x^i} f - \Gamma^k_{ij}(g)p^ip^j\partial_{p^k} f = 0 \tag{2}$$

さらに、static な解 $f_0(x,p)$ を数値的に求める事とし、分布関数の ansatz を

$$f_0 = K\Phi(E, L_z) \tag{3}$$

とする。K は規格化定数、E, L_z は粒子のエネルギーと対称軸周りの角運動量である。E, L_z は保存量であり、この仮定により Vlasov 方程式 (2) は常に満たされ Einstein 方程式のみを解けばいい。

また、軸対称時空を考えるため、円筒座標 (t, ρ, z, ϕ) を取る。

$$g = -e^{2\nu}dt^2 + e^{2\mu}d\rho^2 + e^{2\mu}dz^2 + \rho^2B^2e^{-2\nu}(d\phi - \omega dt)^2$$

ν, μ, B, ω は ρ, z のみに依存する未知関数である。また、簡単化のため

$$v^0 = e^\nu p^0, v^1 = e^\mu p^1, v^2 = e^\mu p^2, v^3 = \rho Be^{-\nu}(p^3 - \omega p^0)$$

という変数変換をしておくと、エネルギー運動量テンソルは

$$T_{ij}(\rho,z,\phi)=\int_{\mathbb{R}^3}p_ip_jf_0(\rho,z,\phi,v^1,v^2,v^3)\frac{d^3v}{\sqrt{1+|v|^2}}$$

と書くことができる。エネルギー E と z 軸周りの角運動量 L_z は

$$E = -g(\partial_t,p^i)=e^{\nu}\sqrt{1+|v|^2}+\omega L_z \quad (4)$$
$$L_z = g(\partial_\phi,p^i)=\rho Be^{-\nu v^3} \quad (5)$$

である。これらの式を用いて Einstein 方程式を書き下すことができ、ν,μ,B,ω は ρ,z に対する方程式を得られる。ν に対する方程式のみあらわに表すと

$$\Delta\nu=4\pi(\Phi_{00}+\Phi_{11}+(1+(\rho B)^2e^{-4\nu}\omega^2)\Phi_{33}$$
$$+2e^{-4\nu}\omega\Phi_{03})-\frac{1}{B}\nabla B\cdot\nabla\nu+\frac{1}{2}e^{-4\nu}(\rho B)^2\nabla\omega\cdot\nabla\omega$$

となる。ここで、$\Phi_{00}=e^{2\mu-2\nu}T_{00},\Phi_{11}=T_{\rho\rho}+T_{zz},\Phi_{33}=(\rho B)^{-2}e^{2\mu+2\nu}T_{\phi\phi},\Phi_{03}=e^{2\mu+2\nu}T_{0\phi}$ である。分布関数の ansatz を置いて、これら ν,μ,B,ω は ρ,z の 4 つの方程式を数値計算で解くことで物質の振る舞いを見る。

また、解を特徴付ける量として以下の全質量を用いる。

$$M=2\pi\int_{\mathbb{R}^2}w(\rho,z)d\rho dz \quad (6)$$

ここで、

$$w\equiv e^(2\mu-2\nu)\rho BT_{00}+(T_{\rho\rho}+T_{zz})+\frac{e^{2\mu+2\nu}}{\rho B}T_{\phi\phi}$$
$$-e^{2\mu-2\nu}\rho B\omega^2T_{\phi\phi}$$

3 Results

3.1 Toroidal Solutions

まず、良く知られた polytropic ansatz を生成する ansatz を示す。

$$\phi(E)=\begin{cases}(E_0-E)^k, E\le E_0\\ 0, \qquad E>E_0\end{cases} \quad (7)$$

$$\psi(L_z)=\begin{cases}(|L_z|-L_0)^l,|L_z|>L_0\\ 0, \qquad |L_z|\le L_0\end{cases} \quad (8)$$

E_0 はカットオフエネルギー、L_0 はカットオフ角運動量である。$L_0=0$ の時に polytropic 解になるため一般化された polytropic と言える。4 つのパラメータの典型的な取り方を 4 種類として GP-A($k=l=L_0=0$),GP-B($k=1,l=L_0=0$),GP-C($k=l=1,L_0=0$),GP-D($k=l=L_0=1$) の結果を示すと、図 1 のような Z=0 での空間密度と半径との関係が得られる。GP-A,B は角運動量が等しく重み付けされていて球対称分布を得られ、GP-B は GP-A に対して高エネルギーの粒子が制限されているためにより中央に分布している事が分かる。また、GP-C,D のように L_z 依存性がある場合は球対称性が破れており、GP-C はリング状に GP-D はトーラス形になっている。これは、角運動量が小さい粒子は少ないので軸付近に分布する事が出来ないからである。特に、GP-D は $\rho\approx 2.25$ で密度はなくなっている。

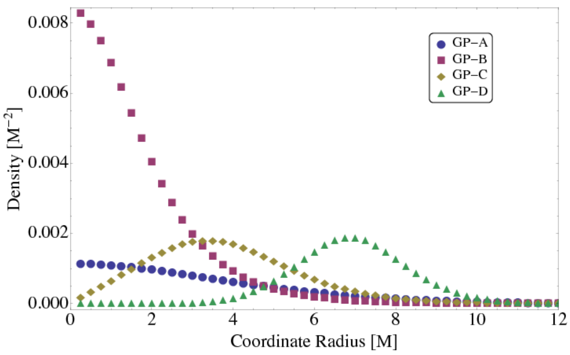

図 1: z=0 における動径方向 ρ と密度分布の関係

3.2 Thin Toraidal Solutions

今までの軸対称解は球対称でニュートン解に近いものが知られているため、相対論的な解を調べる。セクション (3.1) の一般化された形でエネルギーの分布式 (7) と角運動量の形が

$$\psi(L_z)=\begin{cases}(L_z-L_0)^l,L_z>L_0\\ 0, \qquad L_z\le L_0\end{cases} \quad (9)$$

である。セクション (3.1) と違い正味の角運動量を持っている。$L_0=0.8,k=l=0$ のパラメータを固定したまま E_0 を減らしていった時の密度分布が図 2 である。E_0 が小さくなるほどに高いエネルギーを持

つ粒子が制限されて、外側の領域を回れずにトーラスが内側に寄ってきている。また、最も相対論的な解は $E_0 = 0.58, L_0 = 0.8, k = l = 0$ である。球対称の場合にコンパクト性 $2M/R_0$ は解がどれだけ相対論的かの尺度で、今回の場合は $2M/R_0 = 0.82$ であり球対称の限界値 8/9 に近い値になっている。さらに、一連の解が相対論的であるという強く示唆しているものは ergoregion の存在である。KerrBH などで見られる領域であるが、ここでは完全に正則である。$E_0 = 0.65$ 付近で形成され始め、物質全体を覆うように大きくなる (図 3)。

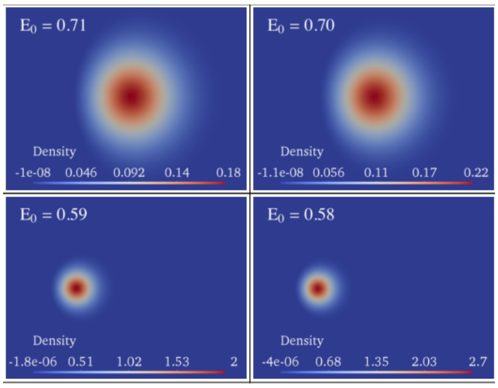

図 2: 対称軸 (z 軸) と動径方向の平面での密度分布 ($L_0 = 0.8, k = l = 0$)。赤いほうが多く、青いほうが少ない分布である。

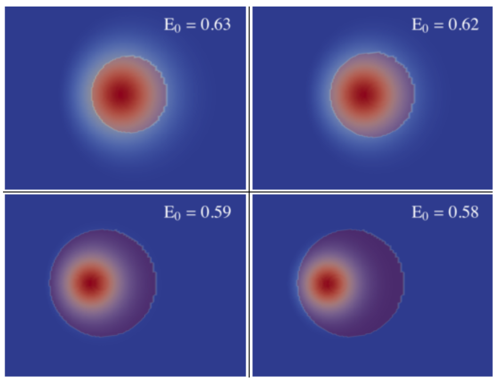

図 3: 対称軸 (z 軸) と動径方向の平面での密度分布 ($L_0 = 0.8, k = l = 0$)。ergoregion は物質周りの薄い赤い領域である。

3.3 Spindle-torus

今の手法の強みの一つに新しい分布関数を他の形を組み合わせることで作られるということがある。複合的な分布関数として

$$\Phi(E, L_z) = C_s \Phi_{spindle} + C_t \Phi_{torus}(E, L_z) \quad (10)$$

を考える。Φ_{torus} は 3.1 の torus 形である ansatz で、$\Phi_{spindle}$ は 3.1 のエネルギー分布関数 $\phi(E)$ と

$$\psi(L_z) = \begin{cases} (1 - Q|L_z|)^l, |L_z| < 1/Q \\ 0, \qquad |L_z| \geq 1/Q \end{cases} \quad (11)$$

である。spindle の分布関数 (11) は L_z に上限を決めており、対称軸に spindle を形成するものである。今回のシュミレーションでは $E_0 = 0.940$、spindle は $C_s = 0.5, Q = 2, k = 1, l = 0$、torus は $C_t = 1.0, k = 1, l = 1$ で L_0 を 1.8 から 1.3 まで変化させている。この解は $2M/R_0 = 0.82$ が大きくないという点において相対論的な解ではない。密度分布は図 4 のようになっており、中心にバルジがあって外側にトーラスがある構造になっている。特に対称軸に沿った方向から $L_0 = 1.6$ の解を描画すると図 5 のようになる。こういった天体が宇宙に存在していて、Hoag's object などが知られている。そういった複合的な構造を持つ天体を再現する能力を持っている。

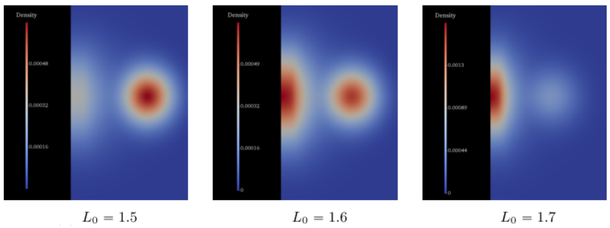

図 4: 対称軸 (z 軸) と動径方向の平面での密度分布 ($E_0 = 0.94$,$C_s = 0.5, Q = 2, k = 1, l = 0$ for spindle,$C_t = 1.0, k = 1, l = 1$ for torus)

4 Summary

計算結果の通り、ここで行っている手法は Einstein-Vlasov 系の軸対称時空に対する数値計算解を生み出

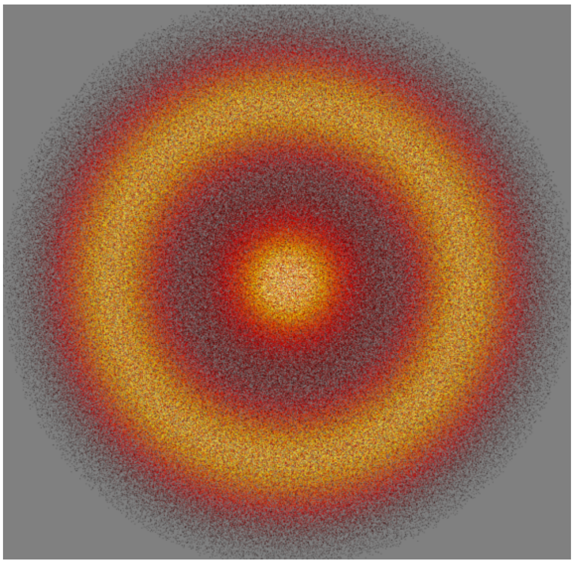

図 5: 対称軸に沿った方向から見た密度分布 ($E_0 = 0.94$,$C_s = 0.5, Q = 2, k = 1, l = 0$ for spindle,$C_t = 1.0, L_0 = 1.6, k = 1, l = 1$ for torus)

し、分布関数を組み合わせて複合的な形の物体も形成することが特徴的である。構成される解には ergoregion を含むような初めて示された解もある。

5 References

[1]Binney J and Tremaine S 2011 Galactic dynamics (Princeton university press)

[2]Andréasson H 2011 Living Reviews in Relativity 14

[3]Ames E,Andréasson H and Logg A 2016 Class. Quantum Grav. 33

ネルソンの確率力学における量子跳ね返り時間のシミュレーションと重力系への応用可能性

高木 かんな (東京学芸大学大学院)

Abstract

本研究では、透過側のポテンシャルの高さ（バイアス）を変化させてシミュレーションをし、跳ね返り時間への影響を調べていくことを目的とした。そこでネルソンの確率力学を用いて個々の粒子の軌道を計算し、反射する粒子のみを集めて平均をとることで、波束の軌道を求めた。その波束の軌道と古典力学的な粒子の軌道を比較することで跳ね返り時間を求め、透過側のポテンシャルの高さとの関係を計算した。更にネルソンの確率力学をホーキング輻射の計算へ応用し、ブラックホールの蒸発過程を詳細に調べる手がかりを考えたい。

1 Introduction

古典力学的な粒子は、自身の運動エネルギーよりも大きなエネルギーのポテンシャル障壁を越えることができないのに対し、量子力学的な粒子は障壁内に侵入あるいは通過することができる。この現象をトンネル効果といい、実証されている。しかしながら、ポテンシャル障壁内を通過している時間（トンネル時間）は、理論的にも実験的にもよく分かっていない。一方で、先行研究により障壁内に侵入している分だけ、量子力学的な粒子が古典力学的な粒子よりも跳ね返りに時間がかかることが分かっている。そこでこの差分を跳ね返り時間と呼び、本研究で扱うこととした。また先行研究では、箱型ポテンシャルの幅や高さを変化させると、跳ね返り時間も変化することが分かっている。

本研究では、透過側のポテンシャルの高さ（バイアス）を変化させてシミュレーションをし、跳ね返り時間への影響を調べていくことを目的とした。跳ね返り時間を求めるにはエーレンフェストの定理より、量子波束の重心の運動を粒子の軌道として考え、計算するアプローチがある。しかし本研究で扱うポテンシャルでは、ポテンシャル障壁内に反射波と透過波が混在する。従って、反射波だけを取り出すことができず、正確な跳ね返り時間を計算することができない。そこで本研究ではネルソンの確率力学を用いて、反射する粒子の軌道だけを取り出し、跳ね返り時間を計算することとした。

2 Theory

2.1 Biased rectangular potential barrier

本研究ではポテンシャルを次のように定義し、一次元の運動について考える。

$$V = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ V_0 & (0 < x < a) \\ -V_1 & (x > a) \end{cases}$$

各領域での波動関数$\psi_E(x)$ は以下のようになる。

$$\psi_E(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-ikx} & (x < 0) \\ He^{sx} + Ie^{-sx} & (0 < x < a) \\ Te^{iqx} & (x > a) \end{cases}$$

ただし

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{1}$$

$$s = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \tag{2}$$

$$q = \frac{\sqrt{2m(E + V_1)}}{\hbar} \tag{3}$$

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{(ik-s)(iq+s)e^{-sa}-(ik+s)(iq-s)e^{sa}}{(ik+s)(iq+s)e^{-sa}-(ik-s)(iq-s)e^{sa}} \\
I &= \frac{2ik(s-iq)e^{sa}}{(ik+s)(iq+s)e^{-sa}-(ik-s)(iq-s)e^{sa}} \\
H &= \frac{2ik(s+iq)e^{-sa}}{(ik+s)(iq+s)e^{-sa}-(ik-s)(iq-s)e^{sa}} \\
T &= \frac{4ikse^{-iqa}}{(ik+s)(iq+s)e^{-sa}-(ik-s)(iq-s)e^{sa}}
\end{aligned}
$$

である。

粒子の波動関数にガウス型の重みをかけて k で積分し、作成した波束の波動関数が次の式である。

$$
\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\ \exp[-\frac{1}{2\sigma^2}(k-k_0)^2]\psi_E(x) \times\ \exp[-ikx_0 - i\omega t] \quad (4)
$$

2.2 Nelson's stochastic mechanics

ミクロな粒子の運動は、確率的な予言しかできない。その原因をネルソンは、世界にエーテルとよぶべきものが満ちていて、絶え間なく微かにランダムに動いているからだと考えた。そこでネルソンはエーテルの突き動かしまで考慮すれば、ミクロな粒子の運動はニュートンの運動方程式で説明できるようになると考え、ミクロな粒子の運動を

$$
x(t+\Delta t) = x(t) + b(x(t),t)\Delta t + \Delta w \quad (5)
$$

という確率微分方程式で記述することにした。ただし Δw のランダムさ加減はガウス分布で与えられ、ドリフト速度 $b(x(t),t)$ は以下のように書くことができる。

$$
b(x(t),t) = \frac{\hbar}{m}\frac{\partial}{\partial x}\left[Re[\ln\psi(x,t)] + Im[\ln\psi(x,t)]\right] \quad (6)
$$

ネルソンの確率力学における力学的条件式は

$$
\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial x} \quad (7)
$$

であり、運動学的条件式は

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x} \quad (8)
$$

である。(4) 式と (5) 式よりシュレディンガー方程式

$$
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\psi(x,t) \quad (9)
$$

を導出することができる。また、確率微分方程式で計算した粒子の位置の分布関数$\rho(x,t)$ と、波動関数で表される確率密度 $|\psi(x,t)|^2$は等しくなる。以上より確率力学は量子力学と等価であることが分かる。

2.3 Reflective time

ポテンシャル障壁に向かって粒子を入射するとき、粒子の進行方向が転回する点を跳ね返り点と呼ぶこととする。跳ね返り点に到達する時刻を、古典力学的粒子では t_{cl}、量子力学的粒子では t_qとおき、跳ね返り時間を次のように定義する。

$$
\Delta t = 2(t_q - t_{cl}) \quad (10)
$$

右辺を 2 倍しているのは、往復分を考えているからである。

3 Results

以下のパラメーターでシミュレーションを行った。$k_0 = 5, \sigma = 0.5, \hbar = 1, m = 1, \omega_0 = (k_0 + 3\sigma)^2/2, E_{max} = \hbar\omega_0, V_0 = 1.1E_{max}, a = 0.3, dt = 0.0005, x_0 = -25.$

3.1 Quantum mechanics and stochastic mechanics

「$2.2 Nelson's\ stochastic\ mechanics$」で述べたように、量子力学と確率力学は結びついている。そのことを数値的に確認するために、$V_1 = 18$での粒子の位置の度数分布と、$|\psi(x,t)|^2$で表される確率密度のシミュレーションを行った。粒子の位置の度数分布は、確率密度に比例していると考えられるため、確率密度をスケール調整してプロットした。図 1 のように、ほぼ一致する結果が得られた。

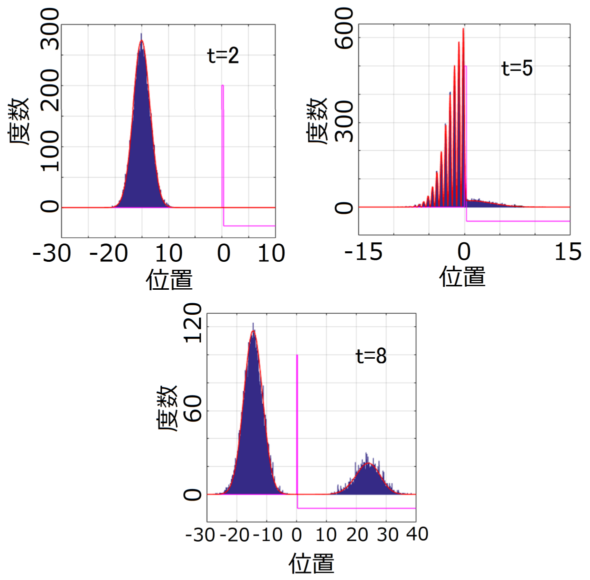

図 1: 量子力学と確率力学の関係（赤：確率密度、青：度数分布、マゼンダ：ポテンシャル) 粒子数 (標本軌道数)N=20000

3.2 Transmittance and reflectance

確率力学の計算の精度を調べるために、透過側のポテンシャルと透過率・反射率との関係を調べた。平面波の透過率と反射率は図 2 のようになる。透過側のポテンシャルは $-V_1$ とし、入射側のポテンシャルと同じ高さが 0 になるようにとってある。

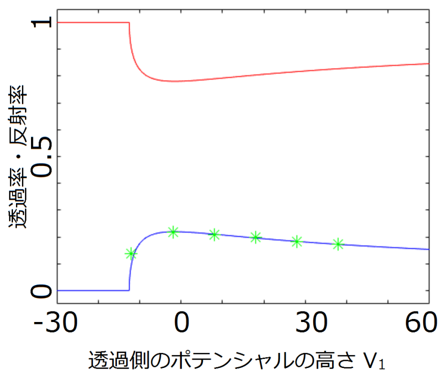

図 2: 反射率・透過率と透過側のポテンシャルの関係（赤：反射率、青：透過率、緑:確率力学の結果）

図 2 より透過率に注目すると、V_1 がおよそ -2 のときに透過率が極大値をとった。また V_1 を大きくする、つまり透過側のポテンシャルを深くするにつれて透過率が小さくなった。また透過側のポテンシャルが自身のエネルギーよりも大きくなると、透過率は 0 となり完全に反射するようになった。

3.3 Reflective time

$V_0 = 1.1E_{max}, a = 0.3$ とし、V_1 が -12 から 10 刻みで 38 までの 6 点に対して、跳ね返り時間のシミュレーションを行った。(図 3)

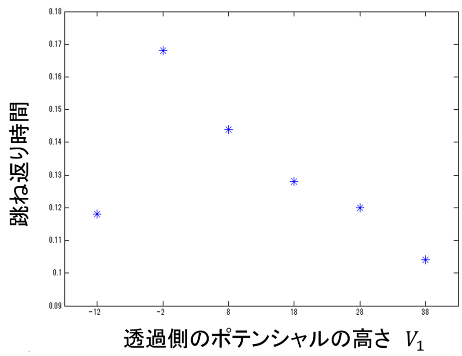

図 3: 跳ね返り時間と透過側のポテンシャルの関係

シミュレーションの結果、V_1 が-2 のときに跳ね返り時間が最大値をとった。図 2 と図 3 を見比べてみると、透過率が大きくなると跳ね返り時間も大きくなっていることが分かる。しかし $V_1 = 8$ のとき、$V_1 = 18$ のときよりも跳ね返り時間が小さくなり、透過率の傾向と一致しなかった。

4 Conclusion

確率力学によって、バイアスのかかった箱型ポテンシャルに入射した個々の粒子の軌道を追うことができた。そして跳ね返り点の時刻を古典力学的な粒子と比較することで、跳ね返り時間をシミュレーションすることができた。

平面波の透過率と反射率の計算において、バイアスのかかった箱型ポテンシャルでは、透過側のポテンシャルの高さ V_1 がある値で、透過率が極大値をとることが分かった。その値よりも V_1 が大きくなる、つまりポテンシャルが深くなるにつれて、透過率は小さくなっていく。これは透過側のポテンシャルが深くなるとエネルギーが大きくなり激しく振動することから、境界での繋がり (マッチング) が難しくなることが原因だと考えられる。

跳ね返り時間のシミュレーションにおいては、透過側のポテンシャルの高さを変化させたとき、跳ね返り時間と透過率との間には同じような傾向が見られた。これは透過率が大きくなると、ポテンシャル障壁内により沈み込むようになり、跳ね返りに時間がかかるようになることが原因だと考えられる。跳ね返り時間には理論がないので、定量的な関係を見つけること、ネルソンの確率力学をホーキング輻射の計算へ応用し、ブラックホールの蒸発過程を詳細に調べる手がかりを見つけることが今後の課題である。

Reference

Y.Ezawa, "Butsurigaku No Shiten=Rikigaku Kakuritsu Ryoushi," Baihuukan (2009)

K.Parikh, & F.Wilczek, " Hawking radiation as tunneling," Phys. Rev. Lett. 85.5042 (2000)

グラフェンと BTZ ブラックホールの Zermelo Optical メトリック

佐土原 和隆 (東京学芸大学大学院 教育学研究科)

Abstract

グラフェン内の電子のふるまいは、(2+1) 次元時空における質量を持たないフェルミ粒子が従うディラック方程式で記述できることがよく知られている。グラフェンの形状を変化させることによって、理論的に考えられた (2+1) 次元時空をグラフェンの表面に再現することができる。このことを用いて、観測や実験が難しい高エネルギー理論の様々な現象をグラフェン上で観測することが期待されている。今回は、特定の形状のグラフェンが (2+1) 次元 BTZ ブラックホール時空を模倣することに注目した。これによって、実際には実験することのできないブラックホールを用いた実験や、疑似的なホーキング輻射やウンルー効果の観測ができる可能性がある。

1 Introduction

グラフェンとは炭素の同素体で、その厚さは原子一つ分であり、自然の中で最も二次元に近い物質である。この物質の理論は 1947 年に P. R. Wallace によって提唱され、2004 年に A. Geim らが初めて合成に成功した。グラフェン中の炭素は、ハニカム (蜂の巣) 構造と呼ばれる正六角形を隙間なく並べた結晶構造をしている。この構造を持つために、グラフェンの電子構造は通常の二次元電子系と大きく異なり、フェルミエネルギー近傍の電子状態は質量ゼロ形式のディラック方程式によって記述される。通常のディラック粒子は、真空中を光速に近い速度で運動する電子やニュートリノなど、我々の日常生活のエネルギースケールとはかけ離れた粒子である。しかし、グラフェン中の電子はそれと同じ運動方程式に従って運動するため、様々な分野から注目を集めている。

このグラフェンの特異な性質を利用し、高エネルギー理論で現れる効果をグラフェン上で観測する試みがなされている。大きな興味が持たれている試みの一つが、ホライゾンを持つ時空が示すと予測される、ホーキング輻射・ウンルー効果の観測である。これらは、現在ではホライゾンの議論に欠かせない存在となっているが、1970 年代に発表されて現在に至るまで、直接的な観測はされていない。これらの疑似的な効果をグラフェン上で観測するための第一歩として、ホライゾンを持つ時空をグラフェンで再現する必要がある。本発表では、(1) に基づき、グラフェンで (2+1) 次元 BTZ ブラックホール時空を模倣する原理と、このブラックホール時空をマッピングできるグラフェンの形状について説明したい。

2 Dirac field description of deformed graphen

グラフェン内の炭素原子は、四つの電子のうち三つを σ 結合に使っており、その強い結合によりハニカム構造を形作っている。残りの一つの電子は π 結合という弱い結合に使われる。π 結合のエネルギーバンドはフェルミエネルギーで節点 (ディラックポイント) を持つため、ディラックポイント近傍の電子は結晶内を自由に移動することができる。グラフェンの電気的な特性はこの電子によるものである。

グラフェンには格子が二種類あり、それぞれについてディラックポイント近傍で成り立つ方程式を求めると、質量のないディラック方程式に形式が一致する。電子の移動速度 (フェルミ速度) は光速の 300 分の 1 程度だが、グラフェン内をこれ以上の速さで移動することはできないので、この速さをグラフェン中の「光速」ということができる。

3 Curved graphene and QFT in curved spacetimes

グラフェン内を伝わる電子が曲がった時空中の場の量子論 (QFT) で記述されるという前提から、実験可能な理論を構成する。ディラックポイントにおいて、強結合近似したハミルトニアンは以下で表される。

$$H = -iv_F \int d^2x(\psi_+^\dagger \vec{\sigma} \cdot \vec{\partial}\psi_+ + \psi_-^\dagger \vec{\sigma}^* \cdot \vec{\partial}\psi_-) \quad (1)$$

ここで、$\vec{\sigma} \equiv (\sigma_1, \sigma_2), \vec{\sigma}^* \equiv (-\sigma_1, \sigma_2)$ であり、$\psi_\pm$ は二成分のディラックスピノルである。これを、QFT に拡張するために相対論的な表記として時間を加える。すると、作用は以下のようになる。

$$A = iv_F \int d^3x \bar{\psi_+} \gamma^\alpha \partial_\alpha \psi_+ \quad (2)$$

ここで、$x_0 \equiv v_F t, \gamma^0 = \sigma_3, \gamma^1 = i\sigma_2, \gamma^2 = -i\sigma_1$ である。ψ_- についても同様の作用が考えられる。

グラフェン上のメトリックは時間成分が非相対論的なので、グラフェン時空のメトリックは以下で表される。

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{ij} \end{pmatrix} \quad (i, j = 1, 2) \quad (3)$$

(2) 式の作用がブラックホール時空とグラフェン時空で形を変えなければいいので、この二つの間が以下のような共形変換で結ばれていればよい。

$$\phi^2 g_{\mu\nu}^{\mathrm{graphen}} = g_{\mu\nu}^{\mathrm{BH}} \quad (4)$$

ここで、ϕ は共形因子を表しており、2 つのメトリックはそれぞれ、グラフェンとブラックホール時空を表す。

4 BTZ black hole and beltrami spacetime

我々が住む時空より低次元の (2+1) 次元時空を考えることで、ブラックホールの本質を捉えようという多くの試みがされている。その代表例である静止した (2+1) 次元 BTZ ブラックホール時空は以下の線素で表される。

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + F(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (5)$$

$$F(r) = -M + \frac{r^2}{l^2} \quad (6)$$

これを、我々の住む 3 次元ユークリッド空間中にある (2+1) 次元時空 (グラフェン) にマッピングする。

(4) 式の様な共形変換を用いるためには、グラフェン時空のガウス曲率が $K = 0$ となる必要がある。その最も単純な時空として、ここでは Beltrami 擬球を考える。2 次元 Beltrami 空間の線素は以下のように表される。

$$dl^2 = du^2 + c^2 e^{2u/\alpha} dv^2 \quad (7)$$

c と α は任意定数である。

BTZ ブラックホール時空の線素を式変形すると (4) 式は、

$$\begin{aligned} &\phi^2\{-dt^2 + du^2 + c^2 e^{2u/\alpha} dv^2\} \\ &\quad = F(r)\{-dt^2 + F(r)^{-2}dr^2 + F(r)^{-1}r^2 d\phi^2\} \end{aligned} \quad (8)$$

となる。このグラフェンはユークリッド時空に埋め込まれたものであるから、ユークリッド時空 (x, y, z) との関係を見ると、

$$x = ce^{u/\alpha}\cos\phi \quad (9)$$

$$y = ce^{u/\alpha}\sin\phi \quad (10)$$

$$z = c(\sqrt{1 - e^{2u/\alpha}} - \mathrm{arctanh}\sqrt{1 - e^{2u/\alpha}}) \quad (11)$$

となり、グラフェンの形状が以下のようになることが分かる。

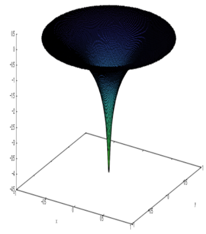

図 1: Beltrami 時空を用いたグラフェンの形状

5 Conclusion

グラフェンで (2+1) 次元 BTZ ブラックホール時空を模倣する原理と、ブラックホール時空をマッピングできるグラフェンの形状の一つが分かった。この研究分野では、グラフェンの他の形状の考案や、電磁場を加えることで回転する時空を表す手法が発表されている。これらの手法を用いて、一般相対性理論に留まらない様々な理論で考えられるブラックホール時空の再現を、グラフェンを用いて行いたいと考えている。

Reference

[1] A. Iorio & G. Lambiase, Physical Review D 90, 025006 (2014)

[2] M. Cvetic & G. W Gibbons, Annals Phys. 327 (2012) 2617-2626

シュワルツシルト時空上の有質量ベクトル場

上田 航大 (近畿大学大学院 一般相対論・宇宙論研究室)

Abstract

ブラックホール時空上の有質量ベクトル場（プロカ場）のダイナミクスに関する基礎研究 (W. Press & S. Teukolsky 1972) のレビューを行う。この研究では、最も基本的なブラックホールとしてシュワルツシルト時空を考え、対称性を利用して場の変数分離とパリティの偶奇による分類を行う。次に、プロカ場の運動方程式が、パリティ偶奇のそれぞれで独立な一次元マスター方程式へと帰着できないことを示す。そして、それらの結合した連立微分方程式の解を解析的に求める技術が開発されている。スカラー場と違ってベクトル場が有質量の場合には、そのダイナミクスを解く上でどのような技術的困難があるのか、またどうすれば物理的帰結が得られるのか、そうした議論の一端を紹介したい。

1 Introduction

2015 年に重力波天文学の幕が開けたことにより、今後さらに様々な情報を含んだ重力波が観測できる事が予想される。重力波は一般的にコンパクト連星合体や超新星爆発といった大規模な天体現象から観測される。このような重力波源の一つであるブラックホールは極端に強い重力を生み出す天体なので、強重力場特有の現象や新し現象の検証にもっとも役立つと期待されているため、素粒子論や一般相対論の見地からすれば、ブラックホールは良い実験装置とみなすことができる。従って、重力波の観測精度が向上するにつれ、ブラックホールから新しい物理が発見できることが期待される。

一般に宇宙に無数に存在するブラックホールは回転している。このようなカーブラックホールにはいくつかの興味深い現象が起こる事が知られている。一つ目はスーパーラディアンスである。これはある範囲内の振動数の波をカーブラックホールに入射させると、波がエネルギーを増幅させて反射し、ブラックホールから回転エネルギーを引き抜く現象である。二つ目は ”black hole bomb” と呼ばれる現象である。これは不安定なスーパーラディアンス束縛状態の事を表している。超軽量ボソン場がカーブラックホール周りに存在することを仮定すると、ブラックホールの半径がボソン場のコンプトン波長と同程度の時、スーパーラディアンスによってボソン場のエネルギーが繰り返し増大する事が知られている (W. Press & S. Teukolsky 1972)。またこういったブラックホール周りの超軽量ボソン場が銀河ハローのダークマターの候補の一つとされている。ブラックホールからの重力波の観測精度が向上すれば、このような超軽量ボソン場が検証できる可能性がある。

以上の動機からカーブラックホール周りでの有質量ベクトル場、つまりプロカ場の振る舞いを調べることは重要であるといえる。しかし、カー時空上のプロカ場は、計量の複雑さのため、数値的に解く方法は見つかっているが (P. Pani et al. 2012)、解析的に解く方法はまだ発見されていない。そこで、比較的計量が単純であるシュワルツシルト計量でのプロカ場を解析的に解く研究 (J. Rosa & S. Dolan 2012) を紹介する。

2 シュワルツシルト時空とプロカ方程式

真空中の電磁場を記述するマクスウェル方程式は、電磁テンソルを用いて以下のように表される。

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0 \tag{1}$$

ただし $F_{\mu\nu} \equiv \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ であり、∇_μ は共変微分を表す。このときゲージ粒子の質量は 0 である。ここで、ゲージ粒子に質量 μ を与えた場（プロカ場）を仮定すると、プロカ場を記述する方程式は以下の形

をとる。

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \mu^2 A^\nu \tag{2}$$

これをプロカ方程式と呼び、マクスウェル方程式の右辺に質量項が加わった式となっている。この項の存在により、方程式のゲージ不変性は失われる。従ってマクスウェル場が自由度が 2 の横波成分のみであることに対し、プロカ場は自由度が 3 であり、縦波成分が存在している。またこの式はローレンツ条件 $\nabla_\nu A^\nu = 0$ を含んでいる。シュワルツシルト計量は、

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{3}$$

(ただし、$f(r) \equiv 1 - 2M/r$) と表される。この時空上でプロカ方程式を解いてゆく。

3 変数分離から得られる方程式

プロカ方程式を解くために、シュワルツシルト計量の球対称性を用いて解を以下のように変数分離する。

$$A_\mu(t,r,\theta,\phi) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{4}\sum_{l,m} c_i u_{(i)}^{lm}(t,r) Z_\mu^{(i)lm}(\theta,\phi) \tag{4}$$

$$\left(c_1 = c_2 = 1,\ c_3 = c_4 = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\right)$$

ここで、角度成分 $Z_\mu^{(i)lm}(\theta,\phi)$ は球面調和関数、球面調和ベクトルから構成される基底であり、

$$Z_\mu^{(1)lm}(\theta,\phi) = [1,0,0,0]Y^{lm} \tag{5}$$

$$Z_\mu^{(2)lm}(\theta,\phi) = [0,f^{-1},0,0]Y^{lm} \tag{6}$$

$$Z_\mu^{(3)lm}(\theta,\phi) = \frac{r}{\sqrt{l(l+1)}}[0,0,\partial_\theta,\partial_\phi]Y^{lm} \tag{7}$$

$$Z_\mu^{(4)lm}(\theta,\phi) = \frac{r}{\sqrt{l(l+1)}}\left[0,0,\frac{1}{\sin\theta}\partial_\phi,-\sin\theta\partial_\theta\right]Y^{lm} \tag{8}$$

と記述される。$Y^{lm} \equiv Y^{lm}(\theta,\phi)$ は球面調和関数である。式（5）～式（7）は偶パリティ、式（8）は奇パリティに対応している。よって解も次のように偶パリティと奇パリティに分類できる。

(i) 偶パリティ

$$A_0 = \frac{1}{r}u_{(1)}Y^{lm} \tag{9}$$

$$A_1 = \frac{1}{fr}u_{(2)}Y^{lm} \tag{10}$$

$$A_i = \frac{1}{l(l+1)}u_{(3)}S_i^{(even)} \tag{11}$$

(ii) 奇パリティ

$$A_i = -\frac{1}{l(l+1)}u_{(4)}S_i^{(odd)} \tag{12}$$

$$\left(S_i^{(even)} = \left[\partial_\theta,\partial_\phi\right]Y^{lm}\ ,\ S_i^{(odd)} = \left[\frac{\partial_\phi}{\sin\theta},\sin\theta\partial_\theta\right]Y^{lm}\ ,\ i,j=\theta,\phi \right)$$

これらをプロカ方程式に代入すれば、未知変数 $u_{(1)}, u_{(2)}, u_{(3)}, u_{(4)}$ に関する方程式が得られる。それらは、

(i) 偶パリティ

$$\hat{\mathcal{D}}_2 u_{(1)} + \left[\frac{2}{r^2}\left(\dot{u}_{(2)} - u'_{(1)}\right)\right] = 0 \tag{13}$$

$$\hat{\mathcal{D}}_2 u_{(2)} - \frac{2f}{r^2}\left(1-\frac{3}{r}\right)(u_2 - u_3) = 0 \tag{14}$$

$$\hat{\mathcal{D}}_2 u_{(3)} + \left[\frac{2fl(l+1)}{r^2}u_{(2)}\right] = 0 \tag{15}$$

(ii) 奇パリティ

$$\hat{\mathcal{D}}_2 u_{(4)} = 0 \tag{16}$$

(iii) ローレンツ条件

$$-\dot{u}_{(1)} + u'_{(2)} + \frac{f}{r}\left(u_{(2)} - u_{(3)}\right) = 0 \tag{17}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ただし、}\ \dot{u} \equiv \frac{\partial u}{\partial t}\ ,\ u' \equiv \frac{\partial u}{\partial r_*}\ ,\ dr_* \equiv \frac{1}{f}dr \\ \hat{\mathcal{D}}_2 \equiv -\partial_t^2 + \partial_{r_*}^2 - f\left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \mu^2\right] \end{array} \right)$$

で与えられる。

4 偶/奇パリティモード

得られた方程式を解ける形に近付けるために次のような変数変換を施す。

$$x \equiv \frac{r}{2M} - 1 \tag{18}$$

するとその結果は、

(i) odd parity モードについて

$$\left[x^2(x+1)^2\partial_x^2 + x(x+1)\partial_x + V(x)\right]u_{(4)} = 0 \quad (19)$$

$$\left(V(x) \equiv 4(x+1)^4\omega^2 - 4\mu^2 x(x+1)^3 - \lambda^2 x(x+1)\right)$$

(ii) even parity モードについて

$$[x^2(x+1)^2\partial_x^2 + x(x+1)\partial_x + V(x)]u_{(2)} = x(2x-1)(u_{(2)} - u_{(3)}) \quad (20)$$

$$[x^2(x+1)^2\partial_x^2 + x(x+1)\partial_x + V(x)]u_{(3)} = -2\lambda^2 x(x+1)u_{(2)} \quad (21)$$

となる。ここで、動径成分のみの固有値方程式、つまり、

$$\left[-\frac{d^2}{dr_*^2} + V_e(r)\right]R(r) = \omega^2 R(r) \quad (22)$$

の形で書ける方程式をマスター方程式と呼ぶ。式（19）～式（21）から、奇パリティはマスター方程式に帰着する事がわかる。しかし、偶パリティは 2 つの未知変数が結合した連立微分方程式の系をなしており、マスター方程式に帰着されない。これは有質量場に特有な現象であり、無質量場よりも解析が難しくなる。これらを解析できる形にするため、方程式をブラックホールのホライズン近傍、遠方の別々の領域での解を求める。その後にそれらを中間領域で連続にする。

5 奇パリティの解

今回、ブラックホール周りの超軽量ボソン場についての振る舞いが知りたいため、プロカ場の質量は極小と考える。ブラックホールのホライズン近傍は $\mu x \ll 1, \omega x \ll 1$、遠方領域は $x \gg 1$ と表されるため、この条件で偶/奇パリティの方程式をそれぞれ近似すると、系は以下のようにそれぞれ解析できる形に帰着される。

(i) 近傍での奇パリティ解

$$\left[x^2(x+1)^2\partial_x^2 + x(x+1)\partial_x - \lambda^2 x(x+1)\right]u_{(4)}^{near} = 0 \quad (23)$$

するとこの方程式の一般解は、

$$u_{(4)}^{near} = A_{(4)}x^{-2i\omega}(x+1)^{1+\delta} \times {}_2F_1(-l-2i\omega+\delta, l+1-2i\omega+\delta, 1-4i\omega, -x) \quad (24)$$

$$\left({}_2F_1(a,b,c,z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!},\ (a)_n \equiv \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!}\right)$$

として求めることができる。${}_2F_1(a,b,c,z)$ をガウス型超幾何関数と呼ぶ。なお、ブラックホール近傍の境界条件より、解はブラックホールへと入射する波の項のみ残しており、ブラックホールから出ていく外向きの波に対応する項は消去している。

(ii) 遠方での奇パリティ解

$$\left[x^2\partial_x^2 - 4q^2x^2 + 4q\nu x - \lambda^2\right]u_{(4)}^{far} = 0 \quad (25)$$

$$\left(q \equiv \sqrt{\mu^2 - \omega^2},\ \nu \equiv \left(\omega^2 - q^2\right)/q\right)$$

この方程式の一般解は、

$$u_{(4)}^{far} = e^{-z/2}[C_{(4)}z^{l+1}M(l+1-\nu, 2l+2, z) + D_{(4)}z^{-l}M(-l-\nu, -2l, z)] \quad (26)$$

$$\left(M(a,b,z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!},\ z \equiv 4qx\right)$$

と表される。$M(a,b,z)$ を第一種合流超幾何関数と呼ぶ。よって遠方と近傍どちらの一般解も超幾何関数を用いて表すことができる。

6 中間領域での解の接続

ブラックホール近傍と遠方の中間領域で解を接続する。近傍における中間領域 $(x \gg 1)$ は、式（24）を線形近似すれば次のようになる。

$$u_{(4)}^{near} \simeq A_{(4)}\Gamma[1-4i\omega] \times \left[\frac{\Gamma[2l+1]}{\Gamma[l+1-2i\omega+\delta]\Gamma[l+1-2i\omega-\delta]}x^{l+1} + \frac{\Gamma[-2l-1]}{\Gamma[-l-2i\omega+\delta]\Gamma[-l-2i\omega-\delta]}x^{-l}\right] \quad (27)$$

遠方における境界条件として、内向きの波だけを残せば束縛状態、外向きの波だけを残せば準固有振動

を表す解となる。今回、例として束縛状態の中間領域の接続を紹介する。束縛状態の一般解は、

$$u^{bound}_{(4)} = \widetilde{C}_{(4)} e^{-z/2} z^{l+1} U(l+1-\nu, 2l+2, z) \tag{28}$$

$$\left(U(a,b,z) \equiv \frac{\Gamma[1-b]}{\Gamma[a-b+1]} M(a,b,z) + \frac{\Gamma[b-1]}{\Gamma[a]} z^{1-b} M(a-b+1, 2-b, z) \right)$$

$U(a,b,z)$ は第二種合流超幾何関数である。するとこの解における中間領域 ($z \ll 1$) も、同様に式（28）を線形近似すれば以下のように求まる。

$$u^{bound}_{(4)} \simeq \widetilde{C}_{(4)} \frac{(4q)^{l+1}\pi}{\sin(2l+2)\pi} \left[\frac{x^{l+1}}{\Gamma[-l-\nu]\Gamma[2l+2]} - \frac{(4q)^{-2l-1} x^{-l}}{\Gamma[l+1-\nu]\Gamma[-2l]} \right] \tag{29}$$

よって遠方、近傍両方の領域からの中間領域が得られた。そこで式（27）と式（29）のべきの指数が一致している項の係数を比較すれば、

$$\frac{\Gamma[-l-\nu]\Gamma[2l+2]}{\Gamma[l+1-\nu]\Gamma[-2l]} = -(4q)^{2l+1} \frac{\Gamma[-2l-1]}{\Gamma[2l+1]} \times \frac{\Gamma[l+1-2i\omega+\delta]}{\Gamma[-l-2i\omega+\delta]} \frac{\Gamma[l+1-2i\omega-\delta]}{\Gamma[-l-2i\omega-\delta]} \tag{30}$$

として接続条件が求められる。

7 偶パリティの解

偶パリティの場合、系が連立微分方程式を成しているため、解析が単純にはならない。そこでまず、

$$\psi \equiv u'_{(3)} - \frac{\lambda^2}{2(x+1)} u_{(2)} \tag{31}$$

と定義すれば、式（20）と式（21）を変形して、

$$[x^2(x+1)^2\partial_x^2 + x(x+1)\partial_x + V(x)]\psi = 4\mu^2 x(x+1) u_{(3)} \tag{32}$$

$$[x^2(x+1)^2\partial_x^2 + x(x+1)(2x+1)\partial_x + V(x)] u_{(3)} = -2x(x+1)^2\psi \tag{33}$$

が得られる。、これを遠方とホライズン近傍で考える。すると遠方領域では系が対角化できるため、一般解は

$$u_{(2,3)}(z) = \sum_{S=\pm1} c^S_{(2,3)} u_{(S)}(z) \tag{34}$$

と書け、この方程式は、以下のような超幾何方程式の形となる。

$$\left[x^2\partial_x^2 - 4q^2x^2 + 4q\nu x - j(j+1) \right] u_{(s)} = 0 \tag{35}$$

すると遠方での一般解は、奇パリティでの遠方領域の場合と同様、

$$u^{far}_{(S)} = e^{-z/2}[C_{(S)} z^{j+1} M(j+1-\nu, 2j+2, z) + D_{(4)} z^{-j} M(-j-\nu, -2j, z)] \tag{36}$$

と求まる。次に、近傍領域について考えると、ψ についての一般解は式（32）より、奇パリティの場合と同じ形に帰着される。従って、

$$\psi^{near}_{(4)} = A_\psi x^{-2i\omega}(x+1)^{1+\delta} \times {}_2F_1(-l-2i\omega+\delta, l+1-2i\omega+\delta, 1-4i\omega, -x) \tag{37}$$

が得られる。またさらに $\psi = 0$ と設定することで、式（33）より $u_{(3)}$ についてのみの方程式となるため、この場合の一般解は、

$$u^{near}_{(3)} = A_{(3)} x^{-2i\omega}(x+1)^{2i\omega}\, {}_2F_1(-l, l+1, 1-4i\omega, -x) \tag{38}$$

と導くことができる。以降の中間領域での接続の議論は、奇パリティでの場合と比べればより複雑ではあるが、奇パリティと同様の方法で進めることができる。

8 まとめ

マクスウェル場と違い、プロカ場では、自由度が一つ増えることで、偶パリティがマスター方程式に帰着しないなど、系が複雑になるが、偶パリティで系を対角化し、また解をホライズン近傍と遠方の領域に分けるなどの工夫をすることにより、方程式は超幾何方程式に帰着でき、従って一般解は超幾何関数で表される事が分かった。また、ホライズン近傍と遠方それぞれの領域からの中間領域の接続条件を求めることで、これらの解を連続にできることが確認できた。

Reference

J. Rosa, & S. Dolan 2012, Phys. Rev. D**85** 044043

W. Press & S. Teukolsky 1972, Nature **238**, 211

P. Pani, V. Cardoso, L. Gualtieri, E. Berti, & A. Ishibashi 2012, Phys. Rev. Lett. **109**, 131102