

WPH 法による月形成シミュレーション

河瀬 哲弥 (京都大学宇宙物理学教室 M1)

Abstract

最も有力な月形成のモデルとしてジャイアント・インパクト説がある。この説では、原始地球に火星サイズの原始惑星が衝突したと考えられている。その結果、衝突天体のマントル物質が飛び散り、差動回転円盤が形成される。その後、この円盤物質が自己重力で集積し、合体成長することで月が誕生したとされる。この説は月のコアが他の太陽系天体のコアと比べて小さいなどのいくつかの観測事実をうまく説明できる。

実際にジャイアント・インパクト説で月形成が可能かどうかを確かめるため、月形成のシミュレーションが多く先行研究でなされてきた。しかし、それらはジャイアント・インパクトから円盤形成までを粒子法流体スキームの 1 つである SPH 法 (Smoothed Particle Hydrodynamics)、円盤内での月形成を N 体計算で行うといった 2 段階のものであった。このため、段階間で多くの仮定を必要とし、最終的な結果に不定性が残っている。ジャイアント・インパクトから月形成までの一貫とした流体シミュレーションが行われてこなかった理由は、差動回転円盤の長時間の計算に SPH 法が適していないからである。近年、この問題を克服した新しい粒子法流体スキームである WPH 法 (Weighted Particle Hydrodynamics) が開発された。これにより差動回転円盤の流体シミュレーションが長時間可能となった。

本研究では、 N 体計算で行われた円盤内での月形成を WPH 法で計算し、両者の結果を比較する事を目標とした。 N 体計算と同様の初期条件で WPH 法で計算した結果、一個の重い天体が形成されず、理由は分からないが円盤が拡散した。今後はその原因について考察、修正し、周地球円盤から月が形成されることを確認したい。

1 導入

月形成を考える上で最も欠かせない特徴は、コアが他の太陽系天体のコアと比べて小さいということである (Hood & Zuber 2000)。コアとは天体の中心部にある周囲よりも密度の高い金属で出来た領域のことを指す。地球のコアの半径は地球全体の半径に対し $\sim 50\%$ の大きさであると考えられているが、月のコアの半径比は $< 30\%$ と予想されており、地球と比べて小さい。

コアが小さいことがうまく説明できるのがジャイアント・インパクト説である (Hartmann & Davis 1975, Cameron & Ward 1976)。この説では、できたばかりの地球に火星サイズの原始惑星が衝突したと考えられている。その衝撃により、衝突天体のマントル物質が飛び散り、地球周りに差動回転円盤が形成される。その後、円盤物質が自己重力で集積し、衝突合体を繰り返すことで成長し、月が誕生したとされる。この場合、月の主成分は密度の低いマントル物

質となるため、月のコアが小さいということが説明可能である。

実際にジャイアント・インパクト説で月形成が可能かどうかを確かめるため、月形成のシミュレーションが多く先行研究でなされてきた。ジャイアントインパクトのシミュレーションは 2 段階あり、1 つは衝突から円盤が形成されるまで、もう一つは周地球円盤から月形成までの 2 段階に分けられる。1 段階目の、衝突から円盤形成は主に SPH 法 (Smoothed Particle Hydrodynamics) と呼ばれる手法で行われてきた (e.g., Benz et al. 1986)。その結果、地球に火星サイズの原始惑星が衝突すると、衝突物が破壊され、地球周りに円盤が形成されることが確認された。2 段階目の、円盤から月形成は主に N 体計算で行われてきた (e.g., Ida et al. 1997)。円盤には微衛星 (岩石の粒) が形成されたと仮定したところから計算を開始した。結果は、地球周りの微衛星の円盤において、微衛星が重力相互作用による衝突合体を繰り返

し、やがて 1 個の月が形成されることが確認された。

しかし、ここで大きな問題がある。2 段階目の N 体計算では微衛星が形成されたと仮定したが、円盤自体は非常に高温であるため、微衛星ができるかどうかは不明確である。したがって、1 段階目と 2 段階目の計算の間には多くの仮定 (物質の状態、面密度分布など) が必要となっている。多くの仮定を取り除くには流体スキームである SPH 法を用いて計算したいところであるが SPH 法には計算上のスキームの問題のため、流体計算を行うのは困難だった。

2 SPH 法の問題点

標準 SPH 法の大きな問題点は長時間の差動回転円盤の計算に適していないという点である。標準 SPH 法でケプラー回転、自己重力なし、圧力平衡の円盤の計算を行うと、本来なら定常であるはずの円盤が 10 周ほど計算すると円盤構造が壊れてしまう (図 1)。原因は未だ不明確であるが、理由は大きく分けて 2 説あり、人工粘性もしくは圧力勾配力が原因であると考えられている。

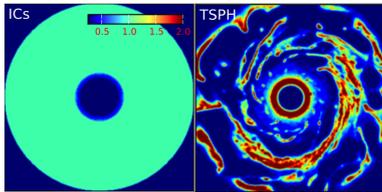


図 1: 標準 SPH で差動回転円盤を計算した図 (Hopkins 2014)。左の図: 初期条件、右の図: 標準 SPH で 10 回転計算した結果。

人工粘性とは衝撃波を解く上で必要なものである。一般的に SPH 法においては人工粘性は 2 粒子間の相互作用として以下のように与えられる (Monaghan & Gingold 1983)。

$$\Pi_{ij} = \frac{-\alpha\mu_{ij}c_{ij} + \beta\mu_{ij}^2}{\rho_{ij}} \quad (1)$$

ただし、 ρ_{ij}, c_{ij} はそれぞれ 2 粒子間の密度、音速の平均、 μ_{ij} は

$$\mu_{ij} = \frac{\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}}{h_{ij}(r_{ij}^2/h_{ij}^2 + \eta^2)} \quad (2)$$

と与えられる。ただし、 $\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} < 0$ の時のみ作用する。ここで、 $\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{v}_{ij}$ はそれぞれ 2 粒子の相対的な位置と距離を表し、 h_{ij} は 2 粒子のスミージング長の平均であり、しばしば $\eta^2 \sim 0.01$ を用いる。この場合、衝撃波の存在しないシア一流でも人工粘性が働いてしまい、円盤構造が崩れる原因と考えられる。

圧力勾配力が原因と考えられる理由は SPH 法は PU (Partition of Unity) を満たしていないからである。PU とは直感的に言うと流体が過不足無く表現出来ているかということである。SPH 法では物理量は以下のように表される。

$$f(\mathbf{x}) = \sum_j f_j \frac{m_j}{\rho_j} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \quad (3)$$

ここで、 m_j と ρ_j はそれぞれ各粒子の質量と密度、 f は任意の物理量、 W はカーネル関数である。ここで、 $f = 1$ を代入すると、

$$1 = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \quad (4)$$

しかし、一般的に SPH 法は (4) を満たさない。その結果、圧力勾配の離散化そのものに大きな誤差が生まれることが知られている (Dilts, 1999)。

回転円盤をある程度うまく計算できるように改良された SPH 法も様々あるが、月形成で必要な回転数 (約 1000 回転) まで安定して計算するには不十分である。

3 WPH 法について

近年、新しい粒子法流体スキームである WPH 法 (Weighted Particle Hydrodynamics) が開発された (Gaburov & Nitadori 2011)。標準 SPH 法では人工粘性もしくは圧力勾配力が原因で長時間の差動回転円盤の計算に適さなかった。しかし、WPH 法では人工粘性もしくは圧力勾配力の問題が軽減された。

Gaburov & Nitadori (2011) においては衝撃波を解く際にリーマンソルバーを用いているが、本研究では人工粘性は von Neumann 型人工粘性を入れる。

$$p \rightarrow p + q^{AV} \\ q^{AV} = -\alpha\rho ch(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \beta\rho h^2(\nabla \cdot \mathbf{v})^2 \quad (5)$$

ただし、 $\nabla \cdot \mathbf{v} < 0$ になったときのみ人工粘性を入れる。また c は音速、 h はスムージング長さである。したがって、衝撃波の生じないシア一流では人工粘性は働かない。

また、WPH 法は PU を満たす。WPH 法において物理量は以下のように与える。

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\sum_j f_j W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)}{\sum_k W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)} \quad (6)$$

$f = 1$ を代入すると

$$1 = \frac{\sum_j W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)}{\sum_k W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)} \quad (7)$$

(7) は明らかに成り立つ。

標準 SPH 法では 10 周ほどで円盤構造が崩れたが、実際に WPH 法で差動回転円盤の計算を行うと 10 周たっても円盤構造は安定に保っている (図 2)。したがって、今までは衝突から円盤形成、円盤から月形成の 2 段階に分けて行われたシミュレーションが、WPH 法により衝突から月形成まで一貫とした計算が行えるようになった。

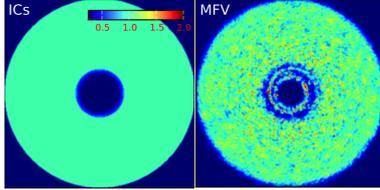


図 2: WPH 法で差動回転円盤を計算した図 (Hopkins 2014)。左の図: 初期条件、右の図: WPH で 10 回転計算した結果。

4 結果

本研究として、まず WPH 法のコードに自己重力を追加した。

$$\mathbf{F}_i = - \sum_{j \neq i} \frac{G m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (8)$$

ただし、 \mathbf{r}_i , m_i , \mathbf{F}_i はそれぞれ、 i 番目の WPH 粒子の位置、質量、自己重力による力を表す。その後、円盤から月形成の N 体計算のシミュレーションである

Ida et al. (1997)、Kokubo et al. (2000) の初期条件を参考にして WPH 法で流体計算を行い、円盤から月が形成されるのかを確認することを目標においた。

初期条件については円盤の質量を $M_{\text{disk}} = 0.03 M_{\oplus}$ と置いて、各粒子は等質量とした。ここで、 M_{\oplus} は地球質量である。さらに、円盤の面密度分布は $\Sigma(a) \propto a^{-1.5}$ と仮定し (a は粒子の軌道長半径)、 a の範囲を $R_{\oplus} < a < a_R$ と置いた。ただし、 a_R はロッシュ限界半径で

$$a_R = 2.456 \left(\frac{\rho}{\rho_{\oplus}} \right)^{-1/3} R_{\oplus} = 2.9 R_{\oplus} \quad (9)$$

であり、これより内側で月ができるかと潮汐破壊される半径である。ここで、 R_{\oplus} は地球半径、 ρ_{\oplus} は地球の密度 (5.5 g cm^{-3})、 ρ は現在の月の密度 (3.3 g cm^{-3})。また、粒子の軌道離心率 e と軌道傾斜角 i は Rayleigh 分散を仮定し、 $\langle e^2 \rangle^{1/2} = \langle i^2 \rangle^{1/2} = 0.3$ と置いた。 e と i を与えた後、WPH 粒子が地球の周りを楕円運動するような速度で与える。状態方程式は理想気体とし、圧力は自己重力に比べて無視できるほど微小な値とするため、我々の単位系 ($M_{\oplus} = 1$, $a_R = 1$, $\Omega_K^{-1} \equiv \sqrt{a_R^3 / GM_{\oplus}} = 1$) で内部エネルギーを一様に 10^{-7} と置いた。また、粒子数は $N = 10,000$ とした。結果は、理由はよくわからないが、おそらく非物理的な作用で円盤が拡散し、月はできなかった (図 3)。ただし、図 3 において $T_K = 2\pi\Omega_K^{-1}$ 、カラーバーは密度 (g cm^{-3}) である。

円盤が拡散するため、自己重力が働いているかどうかを確認することができない。そこで、円盤の質量を 10 倍 ($M_{\text{disk}} = 0.3 M_{\oplus}$) にして再び計算し、自己重力が働いているかどうかを確認した (図 4)。結果は、自己重力によりいくつかの粒子のクランプが形成された。おそらく自己重力は働いているものと考えられる。

5 議論 & 今後の課題

N 体計算と同じ初期条件で計算したところ、月はできず、円盤が拡散した。おそらく計算上の非物理的な作用が起こっていると考えられる。まずはその原因解明することが最優先される。

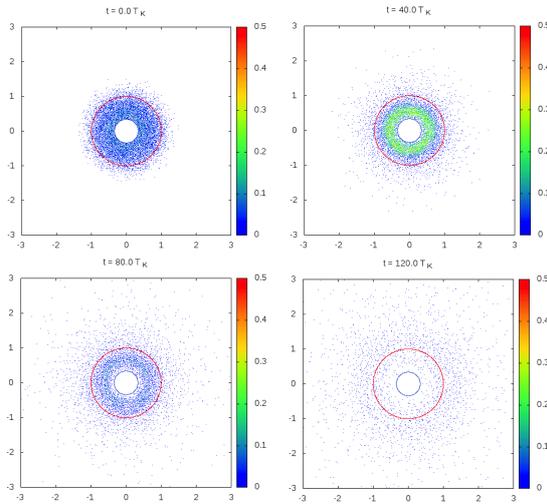


図 3: $M_{\text{disk}} = 0.03M_{\oplus}$ で計算した結果。 T_K は $a = 1$ でのケプラー周期、カラーバーは密度 (g cm^{-3})。 $t = 40T_K$ までは自己重力により円盤の密度が上昇したが、 $t = 120T_K$ になると円盤が拡散した。

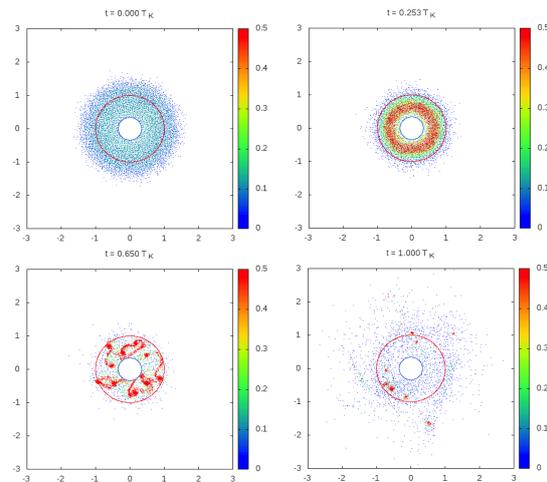


図 4: $M_{\text{disk}} = 0.3M_{\oplus}$ にした結果。円盤の自己重力によりいくつかのクランプが形成された。

今後の方針として、まず粒子数を多くして再計算する予定である。現在は 10,000 粒子で計算しているが、100,000 粒子とすることで円盤の振る舞いどう変わるかを確認したい。もし、粒子を増やしても同じように円盤が拡散するならば、計算のコードにおいて何らかの修正点があるか、もしくは WPH 法に何か問題点がある可能性があると考えられる。反

対に拡散するタイムスケールが長くなれば、解像度低すぎたことが原因となる。

さらに、今回は状態方程式を理想気体として計算したが、実際の円盤は岩石物質が主成分のため、系は理想気体として振舞わないと考えられる。また、初期状態は岩石の蒸気であるが、最終的な結果は 1 個の固体の天体となるため、相転移を考慮する必要がある。したがって、これらを考慮した状態方程式を用いた計算を行いたい。

以上のことを考慮して、地球周りの円盤から月形成のシミュレーションが成功すれば、最終的な目標としてジャイアント・インパクトから月形成までの一貫としたシミュレーションを行いたい。

6 まとめ

N 体計算の初期条件を参考にして WPH 法で流体計算を行い、円盤から月が形成されるのかを確認しようとした。しかし、理由が現在は不明であるが円盤が拡散し、月はできなかった。まずは円盤が拡散する原因を究明したい。原因が分かれば、円盤から月が形成されるのかを確認したい。

Reference

- Hartmann, W. K., & Davis, D. R. 1975, *Icarus*, 24, 504
- Cameron, A. G. W., & Ward, W. R. 1976, *Lunar and Planetary Science Conference*, 7, 120
- Hood, L. L., & Zuber, M. T. 2000, *Origin of the Earth and Moon*, 397
- Benz, W., Slattery, W. L., & Cameron, A. G. W. 1986, *Icarus*, 66, 515
- Ida, S., Canup, R. M., & Stewart, G. R. 1997, *Nature*, 389, 353
- Kokubo, E., Ida, S., & Makino, J. 2000, *Icarus*, 148, 419
- Monaghan, J. J., & Gingold, R. A. 1983, *Journal of Computational Physics*, 52, 374
- Dilts, G. A. 1999, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44, 1115
- Gaburov, E., & Nitadori, K. 2011, *MNRAS*, 414, 129
- Hopkins, P. F. 2014, *Astrophysics Source Code Library*, 1410.003