PBH bias

多田 祐一郎 (東京大学カブリ数物連携宇宙研究機構)

Abstract

原始ブラックホール (primordial black hole: PBH) は放射優勢期に過密度領域が重力崩壊することで形成され得る理論的ブラックホールである。一方構造形成の文脈では、そのような崩壊天体は背景密度ゆらぎに沿うように分布することが知られており、これをバイアス効果という。我々はこのバイアス的描像を PBH に適用し、特に初期曲率ゆらぎにわずかでも非ガウス性があると、大スケールに PBH 分布のゆらぎができることを示した。さらにそのような PBH 密度ゆらぎは物質の等曲率ゆらぎとして寄与することから、$|f_{\rm NL}| \sim \mathcal{O}(0.01)$ の非常に小さな非ガウス性においても、PBH が暗黒物質の主成分である可能性が棄却されることを示した [1]。

1 Introduction

暗黒物質 (dark matter: DM) の正体は科学界の最大の謎の 1 つである。多くの候補が提唱されてきたが、未だなお明らかになっていない。一方で原始ブラックホール (primordial black hole: PBH) [2] は放射優勢期に過密度領域が重力崩壊することで形成されうると理論的に示唆される BH であり、DM の候補の 1 つとして長年研究されてきた。PBH-DM シナリオは特に、DM として未知粒子を加える必要がない点で非常に魅力的である。

しかしながら PBH の存在量には多くの研究によって強く制限がかけられてきており [3]、近年 Kepler 望遠鏡によってついに全ての質量領域で、1 種類質量の PBH が DM の主成分たりうる可能性は棄却されてしまった [4, 5]。しかしまだ、ある種の制限観測は不定性が大きく議論中であるし、PBH 質量が広く分布している可能性も残っている。そこで本集録では、PBH の大規模分布に注目することで、新たな視点からほぼ質量に依らない PBH 量への制限を議論する。

構造形成の文脈では、ハローや銀河などの重力崩壊天体の大規模構造形成がよく研究されてきた。例えば Bardeen *et al.* [6] はそのような崩壊天体は、背景物質密度が高い場所に集中的に形成されることを示した。初期曲率ゆらぎがガウス分布に従うとき、崩壊天体の分布は背景物質密度ゆらぎに定数倍で比例し、これを**スケール不変バイアス効果**と呼ぶ。一方で初期曲率ゆらぎに非ガウス性があると、比例係数 (バイアス因子) にスケール依存する成分が入り、これを**スケール依存バイアス効果**と呼ぶ。スケール依存バイアスは初期曲率ゆらぎの非ガウス性を探る強力な武器として活発に研究されている (例えば [7] など)。

PBH もまた重力崩壊天体であるので、そのようなバイアス効果が期待される。しかし Chisholm [8] は PBH のスケール不変バイアスを議論し、バイアス因子自体は大きくても、宇宙背景放射 (cosmic microwave background: CMB) 観測スケールなどの大スケールにおいては PBH の密度ゆらぎはほとんど生成されないことを明らかにした。近年の他の文献 [9] 等もその結果に同意している。これは、PBH はホライズンサイズの過密度領域が崩壊することによってできる天体であり、その形成は、より大きい超ホライズンスケールのゆらぎに不感であるためである。

本集録ではこうした先行研究を踏まえ、初期曲率ゆらぎにわずかな局所型非ガウス性を仮定することで、スケール依存バイアスの効果を考える。そして PBH が DM の主成分であると、PBH の密度ゆらぎは物質等曲率ゆらぎとして振舞い、CMB 観測から強く制限されるから、我々は初期曲率ゆらぎにわずかでも非ガウス性があると PBH-DM シナリオは棄却されることを明らかにした。

2 Bias effect for PBH

本集録では最も単純な、ある 1 つの場のゆらぎが CMB 温度ゆらぎと PBH 形成の両方を説明するという場合について議論する。共動スライス上で定義さ

れる初期断熱曲率ゆらぎを $\mathcal{R}$ と書こう。$\mathcal{R}$ の大きさは CMB スケールでは 10^{-5} 程度であることがわかっているが、より小さいスケールでは大きくなって過密度領域が多く生成され、十分な量の PBH を形成する可能性がある。そして $\mathcal{R}$ はわずかに局所型の非ガウス性を持つことを仮定する:

$$\mathcal{R}(\mathbf{x})=g(\mathbf{x})+f_{\rm NL}(g^2(\mathbf{x})-\langle g^2\rangle),\ f_{\rm NL}\gtrsim\mathcal{O}(0.01). \quad (1)$$

ここで g はガウス場である。本集録では特に具体的なインフレーション模型は仮定せず、単に $\mathcal{R}$ が上述の局所非ガウス性を持ち、小スケールで $\mathcal{R}$ の振幅が大きくなることで十分な量の PBH が生成されることのみを仮定する。

PBH 形成は Press-Schechter 理論 [10] に則って議論する。PBH の大規模構造に関してはピーク背景分離描像 [6] を用いて考えよう。つまり我々はあるスケール R 程度の領域内の PBH 数密度を数えたいが、その領域がより大きなスケール R_l のゆらぎに乗っていた場合、R 内の PBH 数密度はどのように影響を受けるかを考える。

文献 [9] に依れば、PBH 形成の閾値を議論するためには $\mathcal{R}$ ではなく、共動スライスでの密度ゆらぎ δ を用いなければならない。そのような密度ゆらぎのフーリエ成分は、放射優勢期のポアソン方程式から超ホライズンスケールで以下のようになる。

$$\delta(\mathbf{k})=\frac{4}{9}\left(\frac{k}{aH}\right)^2\mathcal{R}(\mathbf{k}). \quad (2)$$

Press-Schechter 理論ではこれを PBH スケール R_s で粗視化した密度ゆらぎ $\delta_s(\mathbf{x})$ が、ある閾値 δ_c を超えるような点は重力崩壊するとされる。従って δ_s がほぼガウス分布に従うとすると、PBH 形成の確率は、

$$\begin{aligned}P_1(>\nu)&=\frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_s^2}}\int_{\delta_c}^{\infty}\mathrm{d}\delta_s\exp\left(-\frac{\delta_s^2}{2\sigma_s^2}\right)\\&=\mathrm{erfc}\left(\frac{\nu}{\sqrt{2}}\right)\simeq\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\nu}\mathrm{e}^{-\nu^2/2}, \quad (3)\end{aligned}$$

と計算される。ここで $\nu=\delta_c/\sigma_s$ であり σ_s^2 は領域 R 内の δ_s の分散 $\sigma_s^2=\langle\delta_s^2\rangle_R$ である。(3) 式では崩壊天体の合体や吸収などの効果を含めるために、Press-Schechter 理論の慣習的な係数 2 を含めた。また最後の等号には、PBH は非常に稀な天体でなければならないことから、$\nu\gg1$ の極限を用いた。

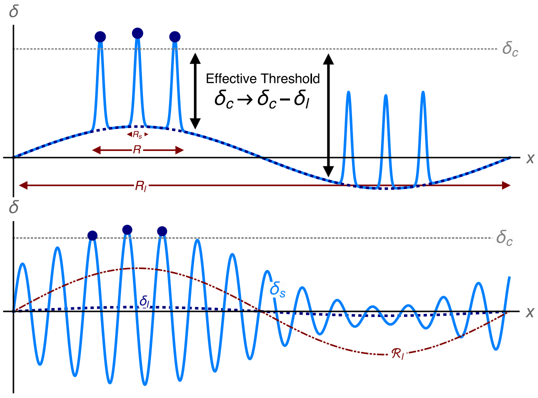

図 1: バイアス効果の模式図。灰色の点線が PBH 形成の閾値 δ_c を表し、濃い青点が PBH になる領域を示している。上の図から短波長成分 δ_s にとって閾値が実効的に $\delta_c-\delta_l$ に下がっていることがわかる。従って PBH は δ_l が正の領域に出来やすく、これがスケール不変バイアス効果である。しかし実際には下の図が示すように、δ_l は因子 $(kR_s)^2$ によって強く抑えられてしまい、スケール不変バイアスの効果はほとんど無視されてしまう。そのような場合でも $f_{\rm NL}$ が零でなければ、δ_s の振幅自体が非ガウス性を通じ $\mathcal{R}_l$ に直接比例することで、PBH 数密度が長波長成分に比例することができる。これがスケール依存バイアス効果である。

さて、もし今考えている領域が長波長密度ゆらぎ δ_l に乗っている場合、閾値 δ_c が実効的に $\delta_c-\delta_l$ に下がるので、PBH が出来やすくなる (図 1 参照)。従ってこの効果による PBH 密度のゆらぎは、

$$\begin{aligned}\delta_{\rm PBH}(\mathbf{x})&:=\frac{P_1(>\nu|\delta_l(\mathbf{x}))}{P_1(>\nu)}-1\\&\simeq\frac{\partial\delta_c}{\partial\delta_l}\frac{\partial\log P_1}{\partial\delta_c}\delta_l(\mathbf{x})\simeq\frac{\nu}{\sigma_s}\delta_l(\mathbf{x}). \quad (4)\end{aligned}$$

この係数 $b_0:=-\frac{\partial\log P_1}{\partial\delta_c}\simeq\frac{\nu}{\sigma_s}$ のことを**スケール不変バイアス因子**と呼ぶ。

以上より、初期曲率ゆらぎがガウス場の場合、PBH の密度ゆらぎ $\delta_{\rm PBH}$ は大スケールでは $\delta_{\rm PBH}\simeq\frac{\nu}{\sigma_s}\delta_l$ で与えられることがわかった。しかし実は、バイアス係数 ν/σ_s が 1 より十分大きくても、CMB スケールでは $\delta_{\rm PBH}$ は $\mathcal{R}$ に比べ非常に小さい。なぜなら、CMB スケール $k_{\rm CMB}^{-1}$ は PBH スケール R_s よりはるかに大きく、(2) 式中の因子 $(k_{\rm CMB}R_s)^2$ によって背景密度ゆらぎ δ_l 自体が強く抑えられてしまうからである。この結果は文献 [8, 9] の主張とも整合している。

しかしスケール依存バイアスの効果を考慮すると結果が劇的に変わりうるというのが、本集録の主張である。後述するが、初期曲率ゆらぎが (1) 式のよ

うな非ガウス性を持っていると、それを通じて短波長成分と長波長成分に相関が出る。従って長波長ゆらぎ δ_l は単に閾値を下げるだけでなく、短波長ゆらぎの振幅 σ_s 自体にも影響を与える。よってバイアス係数 $b = \left.\frac{\mathrm{d}\log P_1}{\mathrm{d}\delta_l}\right|_{\delta_l=0}$ は、もう 1 つの成分、

$$\Delta b = \left.\frac{\partial \log \sigma_s}{\partial \delta_l}\frac{\partial \log P_1}{\partial \log \sigma_s}\right|_{\delta_l=0}, \tag{5}$$

も持つことになる。これを**スケール依存バイアス**と呼ぶ。以降はこれを評価しよう。

(1) 式から、$\mathcal{R}(\mathbf{x})$ は次のように長波長成分と短波長成分にわけることができる。

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\mathbf{x}) = g_l(\mathbf{x}) + f_{\mathrm{NL}}(g_l^2(\mathbf{x}) - \langle g_l^2\rangle) \\ + g_s(\mathbf{x}) + f_{\mathrm{NL}}(2g_l(\mathbf{x})g_s(\mathbf{x}) + g_s^2(\mathbf{x}) - \langle g_s^2\rangle).\end{aligned} \tag{6}$$

この式で 1 行目は短波長成分 g_s に依らないので $\mathcal{R}$ の長波長成分だとみなせ、2 行目が $\mathcal{R}$ の短波長成分を表していることになる。短波長成分のうち g_s の 2 次の項は長波長成分を含んでいないので、バイアスには f_{NL} の高次の効果しか与えないので無視する。すると、スケール R の領域内では $g_l(\mathbf{x})$ はほぼ定数だということに注意すると、分散 σ_s^2 は以下のように定数倍増幅されることがわかる。

$$\sigma_s(\mathbf{x}) = (1 + 2f_{\mathrm{NL}}g_l(\mathbf{x}))\bar{\sigma}_s. \tag{7}$$

ここで $\bar{\sigma}_s^2$ は全宇宙で平均した δ_s の分散である。従って $\mathcal{R}_l(\mathbf{x}) \simeq g_l(\mathbf{x})$ の近似のもと、σ_s のフーリエ成分の δ_l 依存性は大スケールで、

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial \log \sigma_s(k)}{\partial \delta_l(k)}\right|_{\delta_l(k)=0} &\simeq \left[\frac{4}{9}\left(\frac{k}{aH|_{\mathrm{PBH}}}\right)^2\right]^{-1}\frac{\partial \log \sigma_s(k)}{\partial g_l(k)} \\ &= 2f_{\mathrm{NL}}\left[\frac{4}{9}\left(\frac{k}{aH|_{\mathrm{PBH}}}\right)^2\right]^{-1},\end{aligned} \tag{8}$$

となる。ここで PBH スケール R_s は PBH 形成時のホライズンスケール $(aH|_{\mathrm{PBH}})^{-1}$ とほぼ同じであることを用いた。一方で P_1 は ν のみの関数であったことから、b_0 の定義を用いて、

$$\frac{\partial \log P_1}{\partial \log \sigma_s} = \sigma_s\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\sigma_s}\frac{\mathrm{d}\log P_1}{\mathrm{d}\nu} = -\delta_c\frac{\partial \log P_1}{\partial \delta_c} = \delta_c b_0, \tag{9}$$

を得る。以上よりスケール依存バイアス係数は、

$$\Delta b(k) = 2f_{\mathrm{NL}}\delta_c b_0\left[\frac{4}{9}(kR_s)^2\right]^{-1}, \tag{10}$$

と求まる。注目すべきなのはスケール依存バイアスが $(kR_s)^{-2}$ の因子を持っていることである。この因子が δ_l 中の $(kR_s)^2$ を打ち消すので、スケール依存バイアスによる δ_{PBH} は大スケールでも断熱曲率ゆらぎ $\mathcal{R}$ に対し無視できない大きさを持ちうることになる。これは、スケール不変バイアスが δ_l に比例するのに対し、スケール依存バイアスは非ガウス性を通して $\mathcal{R}$ に直接比例するためであり、実際スケール依存バイアスによる PBH のゆらぎは、

$$\Delta b(k)\delta_l(k) \simeq 2f_{\mathrm{NL}}\delta_c b_0\mathcal{R}(k), \tag{11}$$

と $\mathcal{R}$ に定数で比例する。

3 Isocurvature perturbation

DM の主要成分が PBH だとすると、物質等曲率ゆらぎは PBH 密度ゆらぎと断熱密度ゆらぎとの差で与えられる。

$$S_m = \delta_{\mathrm{PBH}} - \frac{3}{4}\delta. \tag{12}$$

従って (11) 式より、CMB スケールでの等曲率ゆらぎのパワースペクトル $\mathcal{P}_S = \frac{k^3}{2\pi^2}|S(\mathbf{k})|^2$ は、断熱曲率ゆらぎのパワースペクトル $\mathcal{P}_\mathcal{R}$ を用いて、

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_S(k_{\mathrm{CMB}}) &\simeq (2f_{\mathrm{NL}}\delta_c b_0)^2\mathcal{P}_\mathcal{R}(k_{\mathrm{CMB}}) \\ &\simeq (2f_{\mathrm{NL}}\nu^2)^2\mathcal{P}_\mathcal{R}(k_{\mathrm{CMB}}),\end{aligned} \tag{13}$$

と与えられる。一方で大スケールでの等曲率ゆらぎは CMB 観測から強く制限されている。完全相関、または完全反相関、つまり $S \propto \mathcal{R}$ または $S \propto -\mathcal{R}$ の場合において等曲率ゆらぎの制限は、95% C.L. で

$$\frac{\mathcal{P}_S}{\mathcal{P}_S + \mathcal{P}_\mathcal{R}} \lesssim \begin{cases} 0.0025 & (\text{完全相関},\ f_{\mathrm{NL}} > 0), \\ 0.0087 & (\text{完全反相関},\ f_{\mathrm{NL}} < 0), \end{cases} \tag{14}$$

である [11]。従って (13) 式より、

$$|f_{\mathrm{NL}}|\nu^2 \lesssim \begin{cases} \frac{\sqrt{0.0025}}{2} = 0.025, & (f_{\mathrm{NL}} > 0), \\ \frac{\sqrt{0.0087}}{2} = 0.047, & (f_{\mathrm{NL}} < 0), \end{cases} \tag{15}$$

が満たされなければならない。

ここで PBH 質量がほぼ 1 種類であるという近似のもとでは、PBH の現在量は次式で与えられる [3]。

$$\Omega_{\mathrm{PBH}} \sim 0.86 \times 10^8 P_1\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1/2}. \tag{16}$$

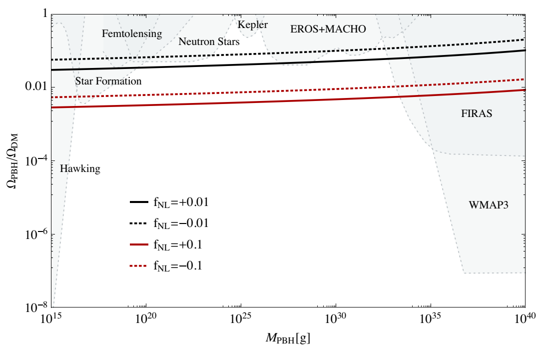

図 2: PBH 割合 $\Omega_{\rm PBH}/\Omega_{\rm DM}$ の上限のプロット。影部は既存の制限である [4, 5]。黒実線と点線がそれぞれ $f_{\rm NL} = 0.01, -0.01$ の場合の上限であり、赤実線と点線が $f_{\rm NL} = 0.1, -0.1$ の場合の制限である。

$M_\odot$ は太陽質量 $\sim 2 \times 10^{33}$ g である。従ってもし DM が PBH で構成されており $\Omega_{\rm PBH} = \Omega_{\rm DM} = 0.31$ [12] であるならば、逆に P_1 は次の関係を満たさなければならない。

$$P_1 \sim 0.36 \times 10^{-8} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{1/2}. \tag{17}$$

さらに (3) 式から、ν は P_1 を用いて表せる。

$$\nu = \sqrt{2} {\rm erfc}^{-1}(P_1). \tag{18}$$

ここで ${\rm erfc}^{-1}$ は相補誤差関数の逆関数である。${\rm erfc}^{-1}(x)$ は単調減少関数であることに注意すれば、PBH が 10^{40} g より軽いとすると、以下の関係を得る。

$$\nu^2 \gtrsim 2\left[{\rm erfc}^{-1}\left(0.36\times 10^{-8}\left(\frac{10^{40}}{2\times 10^{33}}\right)^{1/2}\right)\right]^2 \simeq 20. \tag{19}$$

これは $|f_{\rm NL}| \gtrsim \mathcal{O}(0.01)$ のもとでは明らかに制限 (15) と整合しない。

結果として、初期曲率ゆらぎに非ガウス性があると、それがわずかであっても等曲率ゆらぎの制限を満たすことは難しいことがわかり、従って PBH-DM シナリオと非ガウス性は整合しないことが言えた。これが本集録の主結果である。PBH 量のより具体的な制限は図 2 に示した。この図からも $|f_{\rm NL}| \gtrsim \mathcal{O}(0.01)$ のもとで、PBH 量が十分制限されることがわかる。

4 Conclusions

本集録ではバイアス効果による PBH の CMB スケールでの構造を考察した。CMB スケールと PBH 形成時のホライズンスケールには大きな隔たりがあるので、基本的に PBH 分布はバイアスされない。しかし初期曲率ゆらぎが局所型非ガウス性を持つと、たとえそれが小さくても、CMB スケールに無視できない PBH 数密度のゆらぎが生じることを明らかにした。もし PBH が DM の主要成分だとそのようなゆらぎは物質等曲率ゆらぎそのものであり、CMB 観測から厳しく制限されていることから、たとえ $f_{\rm NL} \gtrsim \mathcal{O}(0.01)$ の小さな非ガウス性でも、PBH-DM シナリオとは矛盾することを示した。PBH 量のより具体的な制限は図 2 に示してある。

Acknowledgement

基礎物理学研究所 (研究会番号：YITP-W-15-04) 及び国立天文台からのご支援に感謝いたします。

Reference

[1] Y. Tada and S. Yokoyama, Phys. Rev. D **91**, no. 12, 123534 (2015) [arXiv:1502.01124 [astro-ph.CO]].

[2] B. J. Carr, Astrophys. J. **201**, 1 (1975).

[3] B. J. Carr, K. Kohri, Y. Sendouda and J. Yokoyama, Phys. Rev. D **81**, 104019 (2010) [arXiv:0912.5297 [astro-ph.CO]].

[4] K. Griest, A. M. Cieplak and M. J. Lehner, Phys. Rev. Lett. **111**, 181302 (2013) [arXiv:1307.5798 [astro-ph.CO]].

[5] F. Capela, M. Pshirkov and P. Tinyakov, Phys. Rev. D **87**, no. 12, 123524 (2013) [arXiv:1301.4984 [astro-ph.CO]].

[6] J. M. Bardeen, J. R. Bond, N. Kaiser and A. S. Szalay, Astrophys. J. **304**, 15 (1986).

[7] N. Dalal, O. Dore, D. Huterer and A. Shirokov, Phys. Rev. D **77**, 123514 (2008) [arXiv:0710.4560 [astro-ph]].

[8] J. R. Chisholm, Phys. Rev. D **73**, 083504 (2006) [astro-ph/0509141].

[9] S. Young, C. T. Byrnes and M. Sasaki, JCAP **1407**, 045 (2014) [arXiv:1405.7023 [gr-qc]].

[10] W. H. Press and P. Schechter, Astrophys. J. **187**, 425 (1974).

[11] P. A. R. Ade *et al.* [Planck Collaboration], arXiv:1303.5082 [astro-ph.CO].

[12] P. A. R. Ade *et al.* [Planck Collaboration], Astron. Astrophys. (2014) [arXiv:1303.5076 [astro-ph.CO]].