

ブラックホール近傍の強重力場による光度変化

大橋 洋平 (早稲田大学大学院 先進理工学研究科)

Abstract

本研究では、ブラックホールの重力レンズ効果による見かけの光度の変化の解析を行った。近い将来、影の観測により撮像が可能になると考えられているブラックホールに対し、数多くの光源モデルが提案され、撮像の予測が行われているが、重力場が測地線束の幾何に与える影響による変更を考慮したブラックホール像に関する議論は深く行われていない。本研究では、測地線束の発展を数値的に計算することによって、重力レンズ効果を解析した。ここでは簡単のため、光源は無遠方に一様に分布していると仮定した。その結果、ブラックホールの影と同程度のスケールの解像度で観測した場合でも、見かけの光度の変化が十分検出可能であることを示した。

1 Introduction

一般相対論は光の軌道が重力場によって曲げられることを予言している。代表的な強重力場源としてブラックホールがある。ブラックホールは光を発することはなく、他の天体のように電磁波による直接観測を行うことは出来なかった。しかし、ブラックホールの「影」を観測することは原理的に可能である。ブラックホールが観測者と光源の間に存在する場合、光の一部がブラックホールに吸収されることにより影が発生する。この影の形状とブラックホールの持つ物理量(質量, 自転)の関係が詳しく調べられている (Hioki & Maeda 2009)。

ブラックホールの直接撮像を実現するには、ブラックホールの影を観測することが重要である。撮像の期待がかけられているのは VLBI(超長基線電波干渉法)による観測である。VLBI は、我々の地球の各地に建設された電波観測施設の観測データを総合することによって、地球スケールの基線長を用いた観測を行う。VLBI の解像度は日々進歩しており、ブラックホール候補の中で最も影スケールが大きいいて座 A* の観測が有望である。いて座 A* は降着円盤やジェットなどを伴っていると予想されており、さまざまな光源モデルが提案され、それによってどのような像が観測されるであろうかについて活発に議論が行われている (Takahashi 2004)。それらの研究においては、ブラックホール周辺の見かけの光度が強重力場によりどのように変更を受けるかを解析する必要が

ある。

本研究では、光子がヌル測地線に沿って進むと仮定し、観測者に到達した測地線束の観測球面上における密度を調べることによって、観測される見かけの光度の視線方向依存性を解析した。

2 Methods

本研究では、光子はヌル測地線に沿って進むと仮定し、測地線方程式を数値的に解くことによって光の軌道を計算するレイトレーシング法に加え、測地線束の発展を記述する Matrix Jacobi 方程式を利用する。 λ を測地線のアフィンパラメータとし、測地線を $x^\alpha(\lambda)$ で表す。また、測地線の接ベクトルを k^α と置くと、測地線方程式は

$$\dot{k}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha k^\beta k^\gamma = 0 \quad (1)$$

$$k^\alpha(\lambda) = \dot{x}^\alpha(\lambda) \quad (2)$$

と表せる。ここで、 $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ はクリストッフェル記号を、上付きのドット記号は λ による微分を表す。

重力レンズ効果による見かけの光度の変化を調べるためには、測地線の発展だけでなく、測地線束の発展も計算する必要がある。これには測地線偏差の方程式から求められる Matrix Jacobi 方程式を使う (Perlick 2004)。測地線 $x^\alpha(\lambda)$ に沿った無限小測地線束 B を次で定義する：

$$B = \{c^A Y_A | c^1, c^2 \in \mathbb{R}, \delta_{ABC} c^A c^B \leq 1\} \quad (3)$$

ここで添字 A, B は 1 または 2 の値をとる。また、 δ_{AB} はクロネッカーのデルタを表す。ベクトル場 Y_A は測地線 $x^\alpha(\lambda)$ 上で次の方程式を満たすものとする：

$$\nabla_k \nabla_k Y_A^\alpha = R_{\beta\gamma\delta}^\alpha k^\beta k^\gamma Y_A^\delta \quad (4)$$

$$g_{\alpha\beta} k^\alpha Y_A^\beta = 0 \quad (5)$$

式 (4) が測地線偏差の方程式である。 $R_{\beta\gamma\delta}^\alpha$ は Riemann テンソルを表す。各点 $x^\alpha(\lambda)$ におけるベクトル $Y_A^\alpha(\lambda)$ は、 $x^\alpha(\lambda)$ の近傍の測地線上の点 $x'^\alpha(\lambda)$ を結ぶ“連結ベクトル”とみなすことができる。

無限小測地線束の幾何を議論するため、Sachs 基底を導入する (Perlick 2004)。Sachs 基底は $x^\alpha(\lambda)$ 上で k に直交する単位直交基底系であり、 $x^\alpha(\lambda)$ に沿って平行移動すると定義し、 E_A と表す。すなわち、

$$g_{\alpha\beta} E_A^\alpha E_B^\beta = \delta_{AB}, \quad g_{\alpha\beta} k^\alpha E_A^\beta = 0, \quad \nabla_k E_A^\alpha = 0 \quad (6)$$

である。Sachs 基底 E_A が張る 2 次元面は測地線束の“断面”と解釈することができる。

Y_A を E_A で分解することを考える。これらのベクトル場の上に次の関係式が成り立つ：

$$Y_A^\alpha = D_A^B E_B^\alpha + y_A k^\alpha \quad (7)$$

Jacobi 行列 $\mathbf{D} = (D_A^B)$ は測地線束の断面の形状を特徴づける量である。特に行列式 $\det(\mathbf{D})$ は測地線束の断面積を意味することが知られている。式 (4) より行列 \mathbf{D} は次の Matrix Jacobi 方程式を満たす：

$$\ddot{\mathbf{D}} = \mathbf{D}\mathbf{R} \quad (8)$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \Phi_{00} & 0 \\ 0 & \Phi_{00} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\psi_I & \psi_{II} \\ \psi_{II} & \psi_I \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\Phi_{00} = -\frac{1}{2} R_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta \quad (10)$$

$$\psi_I = -\frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma\delta} k^\beta k^\delta (E_1^\alpha E_1^\gamma - E_2^\alpha E_2^\gamma) \quad (11)$$

$$\psi_{II} = -\frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma\delta} k^\beta k^\delta (E_1^\alpha E_2^\gamma + E_2^\alpha E_1^\gamma) \quad (12)$$

式 (1), (6), (8) を数値的に解くことによって測地線束の発展を計算する。

上述のとおり測地線束の発展を計算するにはレイトレーシング法を利用する。計算量を小さく抑えるため、観測者へ届いた光を逆に過去方向へたどり、ブラックホールの地平線に達するか無限遠へ脱出するかを調べ、脱出したならば脱出角度と断面積を調べ

る。本研究では、Schwarzschild ブラックホールによる重力レンズ効果によって観測される像について研究を行った。Schwarzschild 座標系において計量は次のように表される：

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (13)$$

ここで M はブラックホールの ADM 質量である。簡単のため、角運動量が 0 の観測者を考える。そのような観測者の直交基底系は $e_1 \propto \partial_\theta$, $e_2 \propto \partial_\phi$, $e_3 \propto \partial_r$ で与えられる。観測者の天球座標系を (Θ, Ψ) で表す。観測者を出発する点におけるヌル測地線の接ベクトル k_0 は (Θ, Ψ) を用いて次のように表される：

$$k_0^\alpha = \sin \Theta \cos \Psi e_1^\alpha + \sin \Theta \sin \Psi e_2^\alpha + \cos \Theta e_3^\alpha + e_0^\alpha \quad (14)$$

基底系の自由度は、 k_0 の時間成分が負となり、 $\Theta = 0$ のとき内向き動径方向のヌル測地線に接するようになる。

光源は無遠の全球あるいは一部分に様に分布している場合を考える。光源が一様に分布しているとき、光源面上の表面積 A と、その表面積から発せられる光度 L は比例する。半径が無大の光源球を仮定するため、 A の代わりに、球の中心からの立体角 Ω を評価する。時空が平坦であれば、測地線束がある一点から立体角 Ω_0 の広がりを持って出発したとき、十分遠方で比が $\tilde{\omega} := \Omega/\Omega_0 = 1$ となるはずである。したがって、この比 $\tilde{\omega}$ の値を計算することによって、重力レンズ効果による見かけの光度の変化を調べることができる。

3 Results and Discussion

観測者のいる点の座標を $r = 50M, \theta = \pi/2, \phi = 0$ とする。簡単のため、 $\Psi = 0$ の場合のみを考える。これは赤道面上の測地線束の運動を考えることに相当する。光源の分布とブラックホールの影近傍における見かけの光度の関係を調べるため、赤道面上の光源の領域 S の大きさ ϕ_S を次で定義する：

$$S = \{\phi \in (0, 2\pi); \pi - \phi_S/2 \leq \phi \leq \pi + \phi_S/2\} \quad (15)$$

$\phi_S = 2\pi$ は全球に光源が分布する場合を意味する。
 Θ と $\tilde{\omega}$ の関係を図 1 に示す。この図は Θ の各値に

比べて大きな値をとっていることが分かる。

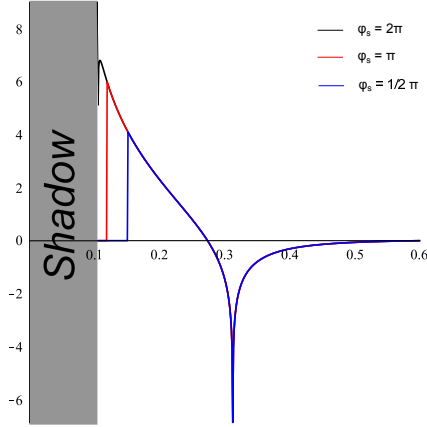


図 1: Θ と $\tilde{\omega}$ の関係

対応する無限小測地線束の断面積の関係を表した図である。ブラックホールの影の近傍で $\tilde{\omega}$ の値が大きくなる一方、ところどころに $\tilde{\omega}$ の値が 0 へ近づく点があることが分かった。ブラックホールの近傍を通過する測地線束が潮汐力により動径方向に引き伸ばされ、断面積が大きくなったことが $\tilde{\omega}$ の値が大きくなった原因であると考えられる。 $\tilde{\omega}$ が限りなく 0 に近づいた測地線束の脱出角度を調べた結果、 $\phi \approx 0$ または $\phi \approx \pi$ であった。これは観測者とブラックホールを結ぶ動径方向と平行な方向へ測地線が脱出した場合、見かけの光度が小さくなることを意味している。

実際に観測されるみかけの光度を見積もるため、有限の大きさを持つ測地線束の断面積の大きさを調べる。 $\tilde{\omega}$ を Θ の有限区間で積分した結果を表 1 に示す。 Θ の有限区間の大きさは、ブラックホールの影と同

4 Conclusion

測地線束の発展を数値的に計算することによって、ブラックホールの重力レンズ効果が見かけの光度に及ぼす影響を求めた。全球に光源が分布すると仮定した場合、ブラックホールの影と同等の解像度による観測においても、ブラックホール影の近傍における見かけの光度は影から離れたところとくらべて実に 100 倍以上もの大きさになるという結果が得られたことは特筆すべきことである。

簡単のため光源モデルに非現実的な仮定を課したが、計算に用いた手法はより一般的な光源に応用することが可能である。さらにより一般的な時空、例えば Kerr ブラックホールやブラックホール連星系による重力レンズ効果を解析することも、計算コストが増えるものの原理的には可能である。

Acknowledgement

基礎物理学研究所 (研究会番号: YITP-W-15-04) 及び国立天文台からのご支援に感謝いたします。

Reference

- K. Hioki and K. Maeda, Phys. Rev. D80 024042 (2009)
- R. Takahashi, Astrophys. J. 611 996 (2004)
- V. Perlick, Living Rev. Relativity 7 (2004), 9

表 1: 有限大測地線束の断面積

ϕ_S	$\Theta \in [0.11, 0.21]$	$\Theta \in [0.21, 0.31]$	$\Theta \in [0.31, 0.41]$	$\Theta \in [0.41, 0.51]$	$\Theta \in [0.51, 0.61]$
2π	11.96	0.2219	0.04793	0.08781	0.09798
π	6.903	0.2219	0.04793	0.08781	0.09798
$1/2\pi$	1.425	0.2219	0.04793	0.08781	0.09798

じスケールを選んだ。表 1 から分かるとおり、ブラックホールの影と同等の解像度による観測においても、ブラックホールの近傍の見かけの光度が、まわりと