Lovelock Black Hole 上のスカラー場の Quasi-Normal Modes

吉田　大祐 (神戸大学大学院 理学研究科 M1)

Abstract

現在、近く観測が予想される重力波について、そのソースにはどのようなものがあるか。例えば、超重力天体の連星の合体や超新星爆発によるブラックホール（以下、BH）生成がある。このような事象において誕生した BH は、一般に、球対称な重力波を放射し、その波動は、離散的な複素固有振動数からなる減衰振動を行うことが知られている。この固有振動状態を Quasi-Normal Mode(以下、QNM）といい、その各振動数を Quasi-Normal Frequency(以下、QNF) という。また、高次元における修正重力理論の一つとして Lovelock 理論がある。この理論は、一般座標変換に対して不変で、かつ、運動方程式が二階微分までを含む、という利点がある。この理論は四次元において、アインシュタインの一般相対論を自然に再現する。加えて、この理論には静的球対称解が存在し、静的な球対称 BH においても四次元の場合と同様に QNF を計算することができる。今回は、新たに任意次元の静的球対称解の QNF を計算する手法を与え、4〜10 次元の QNF を３次の WKB 近似を用いて計算を行い、様々な QNF を得た。また計算できる範囲において、その近似の精度についても検証を行った。

1　Introduction

超重力天体の連星の出す重力波は、どのようになっているのだろうか？一般に、連星が回転している状態の重力波は、周期的であり、post-Newtonian 近似によって近似計算される。次に連星の形が崩れ、一つの BH になるまでは、数値相対論による大規模なシミューレションによって計算される。その後、生成した BH は QNM と呼ばれる振動を行う。この振動は減衰振動で、離散的な複素振動数をもつ QNM の重ね合わせからなる。各複素振動数を QNF と呼ぶ。QNF は背景時空となった BH の質量、電荷、角運動量にのみ依存するため、観測によって BH についての情報を得ることができる。

Schwarzschild によって発見された Schwarzschild BH は Einstein 方程式の静的球対称解である。この時空における計量の摂動について、計算を行うと、動径方向についての摂動方程式を得る。この方程式は発見者にちなんで Regge-Wheeler 方程式、Zerilli 方程式 [1] と呼ばれる。これらは Schrödinger 型の二階線型微分方程式である。一般に、BH を背景時空にした Scalar 場 (Klein-Gordon eq) や Vector 場 (Maxwell eqs) も動径方向について、二階の線型微分方程式になる。これら、重力等の場の動径方向の微分方程式を、Master 方程式と呼ぶ。重力についての Master 方程式が意味するところは重力波であり、BH の QNM を記述するのである。

では、その QNF を如何にして計算するのか？それには様々な方法があるが、Master 方程式が Schrödinger 型の微分方程式であることは利点である。量子力学におけるテクニックをそのまま応用し、WKB 近似を用い、複素振動数を与える方法が既に B.F.Schutz,C.M.Will,S.Iyer によって確立されている。

次に、高次元の場において、Master 方程式はどうなっているのだろうか？Einstein の理論は四次元であるが、高次元における重力理論にも様々なものがある。今回は、その一つである Lovelock 理論に注目した。この理論には静的球対称解が存在し、これを背景時空とした Master 方程式を得ることができる。すなわち、高次元 BH の観測に関わる量について計算を行うことができる。問題となるのは、BH 計量を決定する方程式が、数学的に解くことが不可能なことである [2]。そのため、従来の方法では一般の次元において QNF を計算することが現実的には不可能

[1] これらは球面調和関数のパリティによって分類される。

[2] １０以上の高次元において

であった。

今回は、Lovelock 理論のイントロから始め、WKB 近似のレビューをし、Lovelock 理論における QNF の困難の解決と、任意次元における Lovelock BH が背景時空の Scalar 場の QNF の計算方法を与え、10 次元までの Scalar 場の QNF を三次の WKB 近似で得た。仮定として、一般の BH は角運動量をもつが、今回は、角運動量が 0 で、電荷を持たない静的球対称 BH とした。

2 Lovelock Theory

ここでは Lovelock 理論について簡単な説明を行う [3)]。Lovelock 理論において特徴的な量として m 次の Lovelock ラグランジアン $\mathcal{L}_{(m)}$ が次のように定義される。

$$\mathcal{L}_{(m)} \equiv \delta^{\lambda_1\sigma_1\cdots\lambda_m\sigma_m}_{\rho_1\kappa_1\cdots\rho_m\kappa_m} R^{\rho_1\kappa_1}{}_{\lambda_1\sigma_1}\cdots R^{\rho_m\kappa_m}{}_{\lambda_m\sigma_m} \quad (1)$$

この m 次の Lovelock 項を次のように足し上げる。

$$\mathcal{L}_D \equiv -2\Lambda + \sum_{m=1}^{k} \frac{a_m}{m\cdot 2^{m+1}}\mathcal{L}_{(m)} \qquad \left(k \equiv \left[\frac{D-1}{2}\right]\right) \quad (2)$$

これを D 次元の重力場のラグランジアンとし、Lovelock ラグランジアンと呼ぶ。係数 a_m は、Lovelock Term の結合定数（自由パラメータ）で、簡単のため、$a_1 \equiv 1, a_m > 0$ ととる。このラグランジアンは明らかに一般座標変換に対して不変である。

次に、このラグランジアンの計量について変分を行い、得られる運動項は、次の m 次の Lovelock 項

$$\mathcal{G}^{(m)\,\nu}_{\mu} = -\frac{1}{2}\delta^{\nu\lambda_1\sigma_1\cdots\lambda_m\sigma_m}_{\mu\rho_1\kappa_1\cdots\rho_m\kappa_m} R^{\rho_1\kappa_1}{}_{\lambda_1\sigma_1}\cdots R^{\rho_m\kappa_m}{}_{\lambda_m\sigma_m} \quad (3)$$

の和

$$\mathcal{G}^{L\,\nu}_{\mu} \equiv \Lambda\delta^{\ \nu}_{\mu} - \sum_{m=1}^{k}\frac{a_m}{m\cdot 2^{m+1}}\mathcal{G}^{(m)\nu}_{\mu} \quad (4)$$

と求まる。この運動項は四次元の時、Einstein Tensor である。また、5 次元、6 次元においては Einstein-Gauss-Bonnet 理論の運動項である。また具体的に運動項を計算することで、二階以上の微分を含まないことも確認できる。

3 BH solutions

Lovelock 理論に現れる静的球対称解は四次元において Schwarzschild BH である。一般の次元 D において、計量は次のように与えられる。

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2\gamma_{ij}dx^i dx^j \quad (5)$$
$$\quad\;\; = g_{AB}dx^A dx^B + r^2\gamma_{ij}dx^i dx^j \quad (6)$$

ここで g_{AB} は 2 次元空間の計量であり、γ_{ij} は $n \equiv D-2$ 次元の最大対称空間の計量である。また、この計量における真空中の Lovelock Tensor は、

$$\psi(r) \equiv K - r^2 f(r) \quad (7)$$

とおくと、$\psi(r)$（すなわち $f(r)$）を決定する次の方程式を得る。

$$\sum_{m=2}^{k}\left[\frac{a_m\left\{\Pi_{p=1}^{2m-2}(n-p)\right\}}{m}\psi^m\right] + \psi - \frac{2\Lambda}{n(n+1)} = \frac{\mathcal{M}}{r^{n+1}} \quad (8)$$

$\mathcal{M}$ は Lovelock BH の ADM 質量である。以降、左辺を $\mathcal{P}(\psi)$ と書くことにする。

代数的方法による五次以上の代数方程式の解の公式は存在しない [4)]。また、得た解 $\psi(r)$ から $f(r)$ が asymptotic flat となるものを選ばなければならず、手順が煩雑となる。この根本的な問題の解決策として、この方程式を解かずに、$r \to \psi$ の変数変換の公式として利用することにより、QNF の計算を行うことができる。今回は球対称時空 $(K=1)$ を選ぶ。

4 Master Equation

Master 方程式は主に三つのタイプの方程式から得られる事が知られている。重力の場合、計量の一次の摂動による線形化方程式。ベクトル場の場合、一般の空間における Maxwell 方程式。スカラー場の場合、一般の空間における Klein-Gordon 方程式であ

3) 以下、ギリシャ文字は全次元 D を走り、大ローマ字は (t,r) 空間、小ローマ字は最大対称空間の添字と定義する。

4) 楕円モジュラー理論においては五次の解の公式が存在するが、詳細には触れない。

る。これらを動径方向について変数分離し、適切な座標系

$$\frac{dx}{dr} = \frac{1}{f} \tag{9}$$

を選べば、一般的な形として

$$\begin{cases} \ddot{\Phi}(x) - Q(x)\Phi(x) = 0 \\ Q(x) \equiv \omega^2 - V(x) \end{cases} \tag{10}$$

になることが知られている。ドット $\cdot$ は x の微分、ダッシュ$'$ は r の微分とする。今回の Lovelock BH 上のスカラー場の Master 方程式は

$$\ddot{\Phi} + \left[\omega^2 - f\left(m^2 + f\frac{n(n-2)}{4r^2} + f'\frac{n}{2r} + \frac{l(l+n-1)}{r^2}\right)\right]\Phi = 0 \tag{11}$$

となる。

これは Schrödinger 型の方程式であるから、適切な境界条件を課すことにより、微分方程式の固有値を決定することができる。その固有値こそが QNF である。次に、境界条件について述べる。

5 QNF の境界条件

そもそも QNM は BH に特有の重力波放射についての考察を発端としている。一般的には、他の Master 方程式の QNF を計算する際は、以下の波動の境界条件を課す。有効ポテンシャルの頂点の位置を x_0 とし、領域を二つに分け、$0 < x < x_0$ を領域 (I)、$x_0 < x < \infty$ を領域 (II) とし、x_0 へ進行する波動を in-going、遠ざかるものを out-going と呼べば、各領域において波の一般解は

$$\begin{cases} \Phi_I = Z_I^{in}\phi_I^{in} + Z_I^{out}\phi_I^{out} \\ \Phi_{II} = Z_{II}^{in}\phi_{II}^{in} + Z_{II}^{out}\phi_{II}^{out} \end{cases} \tag{12}$$

である。仮定として、重力波源が BH の準固有振動のみであるならば、horizon 近傍 $(x \to 0)$ においては、因果律により、$+x$ 軸方向の波動は存在し得ない。また、BH から無限遠に離れた観測者は $(x \to \infty)$ においては、外部から入射する波動は存在しない、よって、課される境界条件は、

$$\begin{cases} Z_I^{out} = 0 \\ Z_{II}^{in} = 0 \end{cases} \tag{13}$$

の二つの境界条件である。よって、あとは散乱行列を計算し、上の境界条件を満たす波動について考えれば良い。

6 WKB 近似（放物線近似）

その波動を決定するために WKB 近似を適用する。一般に、QNF はポテンシャルの頂点から無限遠の波動関数を近似する方法、すなわち、放物線近似を用いる。この時、近似の精度を任意に選べる N 次の放物線近似が C.M.Will と S.Iyer によって定式化されている。具体的には、ポテンシャルを

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\Phi(x)}{dx^2} - Q(x)\Phi(x) = 0 \\ Q(x) \equiv \displaystyle\sum_{l=0}^{2N} \frac{1}{l!} Q^{(l)}(x_0)(x-x_0)^l \\ \left.\dfrac{dQ(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = Q_0^{(1)} = 0 \end{cases} \tag{14}$$

として、波動関数の解を求める方法である。これを計算し、散乱行列を計算すれば、境界条件より、$n_{tone} \in \mathbb{Z}$ による、次の離散的な振動数を得ることができる。

$$\omega = \sqrt{V_0 - i\sqrt{\frac{Q_0^{(2)}}{2}}\left(n_{tone} + \frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{N-1}\Lambda_l\right)} \tag{15}$$

Λ_l は WKB 近似の変数変換の際に生じる定数項である。一般的に n_{tone} が大きいとより早く減衰する。重力場の QNF において、観測について重要となるのは n_{tone} の小さいモードである。

7 変数変換とその変域

(8) を用いて $r \to \psi$ に変数変換をし、asymptotic flat 条件から、ψ について、

$$\begin{cases} r \to \infty \Rightarrow f \to 1 \Rightarrow \psi \to 0 \\ r \to horizon \Rightarrow f \to 0 \Rightarrow \psi \to \dfrac{1}{r^2} = \sqrt[\frac{n+1}{2}]{\dfrac{\mathcal{P}(\psi)}{\mathcal{M}}} \end{cases}$$

と決定される。horizon の ψ は数値解で十分である。

8 Results

以下では具体的な QNF を載せる。$\mathcal{M} = 2.0, a_m = 10^{1-m}, n_{tone} = 0, \Lambda = 0$ とした。

8.1 $D = 4$ の場合の Exact $f(r)$ との比較

WKB の三次における結果の比較を行う。ここでは

$$f(r) = 1 - \frac{M}{r} \tag{16}$$

である。f の解析解のものと、表 1 の結果まで一致した。

表 1: $D = 4$ の場合の振動数

l	ω
0	$0.10464681 - 0.11519675i$
1	$0.29111412 - 0.09800136i$
2	$0.48321103 - 0.09680486i$
3	$0.67520618 - 0.09651211i$
10	$2.02131429 - 0.09625594i$
100	$19.3412961 - 0.0962254i$

次に $D = 5$ の場合の、WKB の三次までの近似における結果の比較を行う。ここでは

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{2a_2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4a_2 M}{r^4}}\right) \tag{17}$$

である。この結果も同様に、f について求めたものと比較し、表 3 の結果まで一致した。

表 2: $D = 5$ の場合の振動数

l	ω
0	$0.34665811 - 0.278893379i$
1	$0.712673083 - 0.249850314i$
2	$1.071826098 - 0.247341696i$
3	$1.427565719 - 0.246457136i$
10	$3.915897002 - 0.245391217i$
100	$35.93732275 - 0.245229064i$

8.2 D=6〜10 の Psi 変数による結果

最後に三次の WKB 近似による $l = 0$ の場合の $D = 6$〜10 までの結果を載せる。

表 3: $D = 6$〜10 の場合の振動数

D	ω
6	$0.641661067 - 0.394006337i$
7	$0.961540915 - 0.463980178i$
8	$1.295469156 - 0.496098211i$
9	$1.644136289 - 0.493324854i$
10	$2.002097690 - 0.442436715i$

9 Discussion & Conclusion

今回は Lovelock BH 外部のスカラー場の QNF について計算した。結果によれば、この方法は QNF の計算に対し、有効であることが確認できた。また、この方法の最も強力な点は、f についての多項式処理をせず、考える次元、近似の精度を任意に変更できる点にある。また、高次元におけるスカラー場の QNF を求めた結果、振動数の虚部が負であることは減衰振動を意味するが、この値の絶対値が小さくなることが興味深い。これらの値は Lovelock 項の係数に大きく依存するため、これらの係数の決定についての議論も必要である。今後の目標としては、一般相対論に対する深い知識を身につけ、高次元における Lovelock 理論の重力場の QNF について計算を行い、その振る舞いについて調べたい。

Acknowledgement

基礎物理学研究所 (研究会番号：YITP-W-15-04) 及び国立天文台からのご支援に感謝いたします。また、神戸大学の支援に加え、日々議論をしていただいている早田教授をはじめ、先輩方、同僚達に深く感謝いたします。

Reference

T.Regge & J.A.Wheeler (1957), Phys.Rev.108.1063

B.F.Schutz & C.M.Will (1985), Astrophys.J.291.L33-L36

S.Iyer & C.M.Will(1987), Phys.Rev.D35.3621

T.Takahashi & J.Soda (2009), Phys.Rev.D79.104025