

ブラックホールによる宇宙のリサイクルは可能か？

大下 翔誉 (東京大学大学院理学系研究科附属ビッグバン宇宙国際研究センター)

Abstract

inflation の機構は、scalar 場 ϕ が有限の真空のエネルギーを持つ不安定な状態から、安定な真空状態へ slow-roll することで生じると考えられている。この時、安定な真空状態がわずかにでも 0 でない真空のエネルギーを持つ場合 (つまり、de Sitter 時空の場合)、scalar 場 ϕ はある確率で再び、エネルギーの高い不安定な状態に相転移することが S.W.Hawking と I.G.Moss によって提唱された。本研究では、black hole が触媒の働きをすることによって生成される Hawking Moss instanton 解について考察し、black hole がこの bubble に相転移する確率と black hole の蒸発率を比較し、black hole による宇宙のリサイクルの可能性について議論した。

1 Introduction

inflation の機構は、scalar 場 ϕ が有限の真空のエネルギーを持つ不安定な状態から、安定な真空状態へ slow-roll することで生じると考えられている。この時、安定な真空状態がわずかにでも 0 でない真空のエネルギーを持つ場合 (つまり、de Sitter 時空の場合)、scalar 場 ϕ はある確率で再び、エネルギーの高い不安定な状態に相転移することが S.W.Hawking と I.G.Moss によって提唱された (S. W. Hawking and I.Moss 1983)。この相転移によって生じる宇宙の bubble 解を Hawking-Moss instanton と言う。この機構によって、宇宙はたとえ加速膨張によっていずればビッグリップを起こすとしても、いつかは必ず inflation 期に相転移し、宇宙は新しく生まれ変わることになる。J. Garriga と A. Vilenkin はこの描像を recycling universe と呼び、この機構を取り入れた場合の eternal inflation について議論している (J.Garriga and A.Vilenkin 1998)。一方で、false vacuum から true vacuum への相転移 (この相転移によって生じる bubble は true bubble と呼ばれる) 確率は black hole 周辺ではより大きくなること、W. A. Hiscock(W.A.Hiscock 1987) や Ruth Gregory(R.Gregory et al. 2014) らによって示されている。このことから black hole は true bubble 生成において触媒の役割を果たしており、Hawking Moss instanton においても同様の働きをすることが期待される。そこで、本研究では、まず、black hole が触媒の

働きをすることによって生成される Hawking Moss instanton 解を議論する。しかし、black hole を種とした宇宙の生成が起きる前に、black hole が蒸発してしまう場合もあり得る。そこで、black hole を種とした宇宙の相転移確率と black hole の蒸発率を比較し、black hole による宇宙のリサイクルが果たして可能か否かについても議論する。

2 effective potential around black hole

black hole 近傍では、量子補正を考慮することで真空のエネルギーが高くなることが示せる。この効果が著しい場合には、black hole 周辺に cosmological horizon(以下、BCH) が現れる。HM instanton は horizon の持つ熱によって生成される bubble の解に対応する。したがって、black hole horizon の持つ熱によっても、HM like な instanton を考えうることは可能である。以下、この instanton を black hole Hawking Moss instanton(BH-HM instanton) と呼ぶ。BH-HM は、BCH を伴わず、black hole の horizon によってのみ生成される場合に、生成率が black hole の evaporation rate を上回ることができる (ここではその詳細は割愛する)。この章では、BCH が形成されない条件を得るための準備として、black hole 近傍での effective potential を議論することにする。

de Sitter 時空中に black hole が存在する場合、背景計量は

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_2^2 \quad (1)$$

$$f(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{r^2}{l^2} \quad (2)$$

に従う。ここで、 M は black hole mass、 l は true vacuum での cosmological horizon の半径である。一方、one-loop まで考慮した scalar 場の effective potential $\Gamma[\phi]$ は以下で与えられる。

$$\Gamma[\phi] = \int d^4x [-\phi \square \phi + V(\phi)], \quad (3)$$

$$V(\phi) = V_0(\phi) + \frac{1}{2}\lambda \langle \phi^2 \rangle \phi^2, \quad (4)$$

$$V_0(\phi) = \frac{\lambda}{8} (\phi^2 - \phi_0^2)^2 + \rho_t, \quad (5)$$

ここで、 $\phi_0^2 = m^2/\lambda$ である。 m は scalar 場の mass である。これより、scalar 場の方程式は

$$\square \phi(x) = V'(\phi). \quad (6)$$

Eq.(6) は以下のように書き換えられる。

$$\left[f(r) \partial_r^2 + \left(f' + \frac{2}{r} f \right) \partial_r \right] \phi(r) = V'(\phi), \quad (7)$$

ここで、black hole を伴う Hawking Moss instanton は scalar 場の方程式の静的球対称な解と仮定した。最も重要な点は、Eq.(7) の potential 部分は one-loop 補正によって、true vacuum のエネルギーが上げられている点である。この事実は以下より明らかである。Eq.(4) において black hole 近傍では $\langle \phi^2 \rangle \simeq 1/256\pi^2 M^2$ だから (P. Candelas 1980)、

$$V(x) = \rho_t + \frac{\lambda}{8} (\phi^2 - \phi_0^2)^2 + \frac{1}{2}\lambda \frac{1}{256\pi^2 G^2 M^2} \phi^2 \quad (8)$$

よって、Eq.(8) の第 2 項は scalar 場の mass term の補正として効くことがわかる。対象とする black hole の温度 T_h が inflaton の mass scale よりも十分に小さい場合 $T_h \sim r_h^{-1} \ll m$ 、black hole 周辺 $r \sim r_h$ で、真空のエネルギーは以下で近似できる。

$$\rho_t^{(H)} \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{m}{16\pi GM} \right)^2. \quad (9)$$

3 BH-HM instanton

Schwarzschild de Sitter の計量部分

$$1 - 2GM/r - H_{(h)}^2 r^2 \quad (10)$$

の根から、black hole horizon r_h と cosmological horizon r_c を計算する。ここで、 $H_{(h)}^2 \equiv \frac{8\pi G}{3} \rho^{(H)}$ である。Eq.(9) より、Eq.(10) は

$$1 - \frac{1}{\tilde{r}} - \frac{1}{48\pi} \left(\frac{m}{M_P} \right)^2 \tilde{r}^2 \quad (11)$$

と記述できる。ここで、 $\tilde{r} \equiv r/2GM$ である。解は以下で記述される。

$$\tilde{r}_h = \frac{8\sqrt{\pi}}{m/M_P} \cos \frac{\pi + \psi}{3} \quad (12)$$

$$\tilde{r}_{\text{bch}} = \frac{8\sqrt{\pi}}{m/M_P} \cos \frac{\pi - \psi}{3} \quad (13)$$

ここで、 $\psi \equiv \cos^{-1} \left(\frac{3}{8\sqrt{\pi}} \frac{m}{M_P} \right)$ である。Eq.(11) より、

$$\begin{cases} r_h \lesssim r_{\text{bch}} & m \sim M_P \\ r_h \ll r_{\text{bch}} & m \ll M_P \end{cases} \quad (14)$$

であることがわかる。ところが、真空のエネルギーが $\rho_t^{(H)}$ であるのは、 $r \sim r_h$ の領域だけであり、 $r \gg r_h$ では、 $\langle \phi^2 \rangle \propto 1/r^2$ で量子補正は小さくなる (P. Candelas 1980)。したがって、 $m \ll M_P$ の場合には black hole 近傍に cosmological horizon は現れない (図 1)。重要な点は、上述の性質は m/M_P にのみ依存しており、black hole の mass には依存していないということである。

BCH を伴わない、BH-HM の生成率は以下で計算できる。

$$\Gamma_{\text{BH-HM}} \sim (GM)^{-1} \sqrt{\frac{B}{2\pi}} e^{-B} \quad (15)$$

$$B = -\frac{\pi r_c^2}{G} + \frac{\pi r_h^2}{G} \quad (16)$$

ここで、 r_c は potential top での真空のエネルギーに対応する horizon 長さである。potential top でのエネルギー密度は

$$\rho_{\text{top}} = \frac{m^4}{8\lambda}. \quad (17)$$

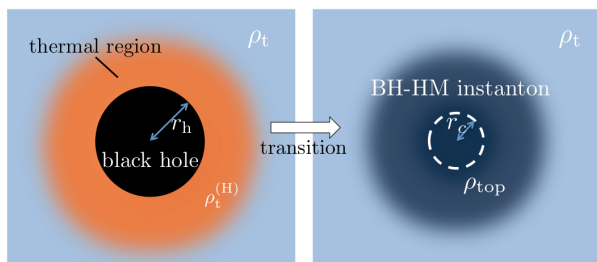


図 1: black hole 近傍では、その熱により真空のエネルギーは高くなる。 $m \ll M_P$ では、その真空のエネルギーによる cosmological horizon(BCH) は生じない。black hole の horizon のスケールで HM bubble が生じる。 $B > 0$ より、この bubble の中には ρ_{top} に対応する cosmological horizon が含まれている。したがって、bubble の内側にいる observer には、bubble の (thick) wall は観測できない。

また、Eq.(??) より、black hole の mass M が、

$$M = M_c, \quad \frac{M_c}{M_P} = \sqrt{\frac{3\lambda}{4\pi}} \frac{1}{(m/M_P)^2} \quad (18)$$

の値をとるときは、 $B = 0$ となり、instanton 解を考えることはできない。したがって、 $M > M_c$ の mass を持つ black hole に対して、BH-HM instanton の議論は適用できる。また、 $M \gtrsim M_c$ の場合では、 $\Gamma_{\text{BH-HM}}$ はオーダー 1 に近づいていき、生成しやすくなる。以下に、BH-HM instanton を考えた場合に、許される black hole の mass の制限をまとめた。太陽質量程度 (yellow line) の black hole が evaporation によって mass を失っていき、planck mass M_P に到達する前 (black hole が evaporation する前) に、相転移を起こし得るのは、 $\lambda = 10^{-10}$ の場合、 $m \lesssim 10^{-2.5} M_P$ の時である。 $m \sim 10^{-5} M_P$ で、 $V'' \sim H^2$ となり (green region)、この領域では HM instanton よりも、CDL instanton が dominant となる。

4 Discussion

この章では、まず前章で求めた BH-HM instanton を HM instanton と比較し、BH が相転移の触媒として働いていることについて議論する。また、black hole

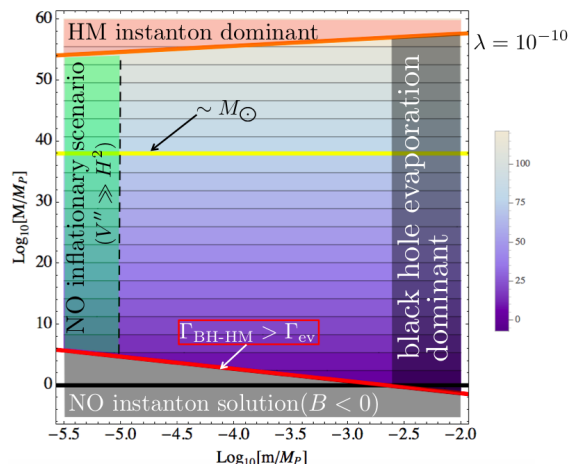


図 2: $\lambda = 10^{-10}$ の場合の、BH-HM instanton を考えた場合に、許される black hole の mass の制限。green region は、CDL instanton が dominant になる領域。red region は、cosmological horizon scale で、一斉に transition する、通常の HM instanton が dominant な領域。red line 上で、 $\Gamma_{\text{BH-HM}} > \Gamma_{\text{ev}}$ が実現する。

の evaporation rate と比較し、black hole が evaporation により、消失する前に、その black hole による相転移が生ずる確率について議論する。

4.1 comparison with HM instanton

HM instanton の生成率 Γ_{HM} は、

$$\Gamma_{\text{HM}} \sim H_t \sqrt{\frac{B}{2\pi}} e^{-B} \quad (19)$$

$$B = \frac{3}{8} \left(-\frac{1}{\rho_{\text{top}}} + \frac{1}{\rho_t} \right) \quad (20)$$

ここで、 $H_t^2 = 8\pi G \rho_t / 3$ である。 $\rho_t \ll \rho_{\text{top}}$ ならば、 Γ_{HM} はほぼ ρ_t で決まることになる。BH-HM instanton と HM instanton をオーダーで比較すると、

$$\begin{cases} \Gamma_{\text{BH-HM}} \sim M_P e^{-GM^2} & \text{BH-HM } r_h \gg l_P \\ \Gamma_{\text{HM}} \sim M_P e^{-(GH_t^2)^{-1}} & \text{HM} \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \ln [\Gamma_{\text{BH-HM}} / \Gamma_{\text{HM}}] &\simeq \frac{1}{GH_t^2} - GM^2 \\ &= \frac{(1/H_t)^2 - (GM)^2}{l_P^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

ここで、order estimate のために、細かい係数は除いた。Eq.(22) より、cosmological horizon l_t 中に、 $r_h \ll l_t$ の horizon をもつ black hole が局在するという、我々の宇宙のような描像の下では、black hole は HM transition において、触媒として働き得ることがわかる。

4.2 comparison with BH's evaporation rate

black hole の evaporation rate Γ_{ev} は、

$$\Gamma_{ev} \simeq 3.6 \times 10^{-4} (G^2 M^3)^{-1} \quad (23)$$

で与えられる [7]。したがって、

$$\Gamma_{BH-HM} / \Gamma_{ev} \sim 2.7 \times 10^3 \left(\frac{M}{M_P} \right)^2 \sqrt{\frac{B}{2\pi}} e^{-B}. \quad (24)$$

このとき、 $\lambda = 10^{-10}, 10^{-8}, 10^{-6}, 10^{-4}, 10^{-2}$ に対して $B = -\frac{\pi r^2}{G} + \frac{\pi r_h^2}{G} = 1$ になる瞬間の $\Gamma_{BH-HM} / \Gamma_{ev}$ を対数 plot した。

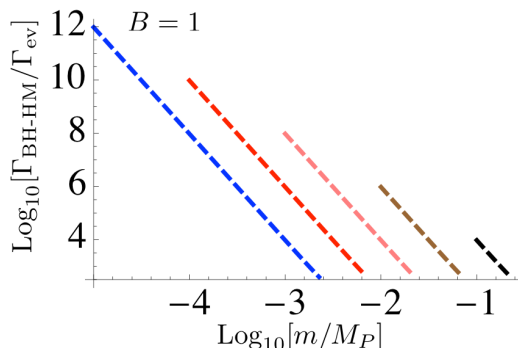


図 3: black hole の evaporation が進み、 $B = 1$ に到達した black hole に対する、BH-HM transition rate Γ_{BH-HM} と、evaporation rate Γ_{ev} の比。blue、red、pink、brown、black はそれぞれ、 $\lambda = 10^{-10}$ 、 10^{-8} 、 10^{-6} 、 10^{-4} 、 10^{-2} である。 m の値に対する plot range の lower limit の値は $V'' \gtrsim H^2$ 、upper limit は $M > M_P$ を条件に定めている。

5 Summary and Conclusion

black hole が transition の触媒として機能し得ることについては、既に Hiscock, Ruth Gregory らによって議論されてきた (W.A.Hiscock 1987), (R.Gregory et al. 2014)。しかし、それらの議論は全て thin wall を仮定し、CDL-type の true vacuum bubble に限って展開された。本研究では、black hole は true vacuum bubble から false vacuum bubble への相転移においても、触媒として機能し得るのか、という問題に取り組んだ。HM instanton は元来、cosmological horizon のスケールで、potential top へ熱的に相転移する解である。したがって、同じく熱的性質を持つ black hole horizon による HM-type の相転移が 0 でない確率で生ずる。この解を、ここでは BH-HM instanton と呼んでいる。この解が実現する場合のパラメーターの制限については、図 2、図 3 にまとめており、 λ が $10^{-10} \sim 10^{-2}$ で、inflation mass m が、 $10^{-5} \sim 10^{-1}$ 程度ならば、太陽質量程度より大きな black hole は、evaporation するまでの過程で、HM like な transition をすることが、明らかとなった。

Acknowledgement

基礎物理学研究所 (研究会番号: YITP-W-15-04) 及び国立天文台からのご支援に感謝いたします。本研究は、現在進捗段階にありますが、丁寧なご指導、および適切な助言を下されたビッグバン宇宙国際研究センターの横山順一教授、須山輝明助教に感謝申し上げます。また、同センター所属の山内大介研究員との議論は非常に有意義でした。この場を借りて感謝申し上げます。

Reference

- S. W. Hawking and I. Moss Nucl. Phys. **B224** 180 (1983).
- J. Garriga and A. Vilenkin Phys. Rev. **D57** 2230 (1998).
- W.A.Hiscock Phys. Rev. **D35** 1161 (1987)
- R.Gregory et al. **JHEP03** (2014) 081.
- P. Candelas Phys. Rev. **D21** 2185 (1980).