Orbits in Kerr metric Kruskal coordinates

立教大学修士1年 押賀弘行

KerrBHの場合にもhorizon内部の時空構造を見る方法としてKruskal coordinates によるMaximal extensionがある。KerrBHの質量はM、角運動量は$J = aM$で表され、aは角運動量を決めるパラメータである。aの取りうる値は$0 < a < M$と$a = M$で各aの値に分けてこの方法を適用してみた。以下ではその結果とKruskal座標における粒子の軌道を報告する。

Kerr metric (Boyer-Lindquist coordinates)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right)dt^2 + \frac{4Mar\sin^2\theta}{\rho^2}dtd\varphi + \frac{\Sigma\sin^2\theta}{\rho^2}d\varphi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2,\quad \rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta,\quad \Delta = (r - r_+)(r - r_-),\quad \Sigma = (r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta \quad \cdots(1)$$

ここでは軸方向のみを考え$\theta = 0$とし、ヌル座標(u, v)に座標変換すると(1)は

$$ds^2 = -f\,du\,dv \cdots (2)$$

$$f = \frac{\Delta}{r^2 + a^2},\quad u = t - r^*,\quad v = t + r^*,\quad r^* = \int \frac{dr}{f}$$

● $0 < a < M$ の場合

Kerrはevent horizonが二層に分かれているため $0 \le r_- \le r_1,\ r_1 < r_+ \le r_2$ の2つの範囲に分けてKruskal座標(U,V)に変換する。$0 \le r_- \le r_1$では、r_-付近での近似より

$$f \approx -f'(r_-)(r - r_-) = -2\kappa_-(r - r_-)$$

$$\Rightarrow r^* = \int \frac{dr}{f} \approx -\frac{1}{\kappa_-}\ln|\kappa_-(r - r_-)| \cdots (3)$$

(3)より

$$f \approx \mp e^{\kappa_-(u-v)} \cdots (4)$$

Kruskal座標を以下のように導入すると(2)は(6)となる

$$U_- = \mp e^{\kappa_- u},\quad V_- = -e^{-\kappa_- v},\quad U_- = \frac{\kappa_-(r - r_-)}{V_-} \cdots (5)$$

$$ds^2 \approx -\kappa^{-2}dU_-dV_-\ (<0) \cdots (6)$$

$r_1 < r_+ \le r_2$ でも同様の手順で計算できる。

$$U_+ = \mp e^{\kappa_+ u},\quad V_+ = e^{-\kappa_+ v},\quad U_+ = -\frac{\kappa_+(r - r_+)}{V_+} \cdots (7)$$

以下のfig1では $T_\pm = \frac{V_\pm + U_\pm}{2}$, $R_\pm = \frac{V_\pm - U_\pm}{2}$ である。

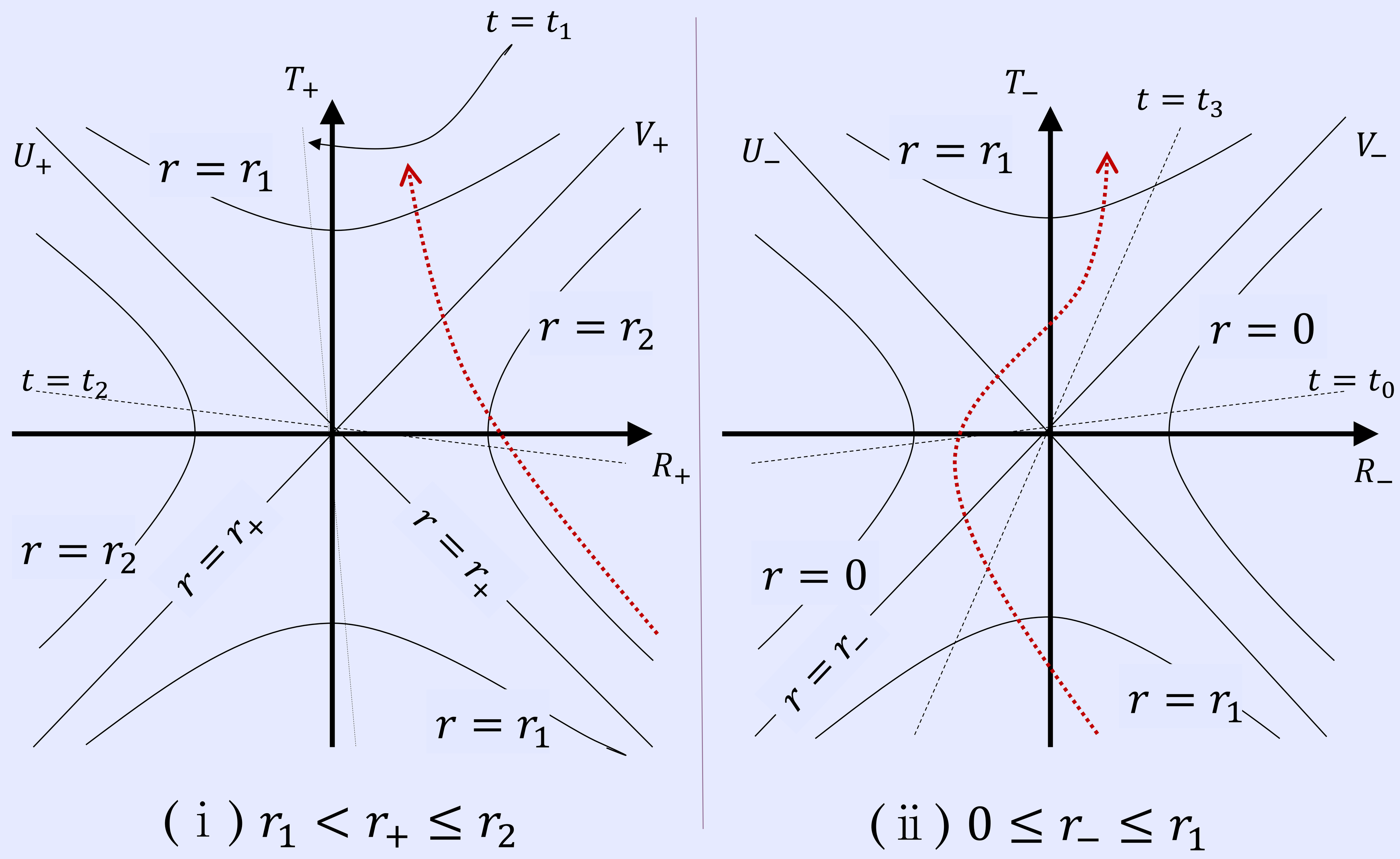

Fig1;Maximal Extension for the Kerr metric ($0 < a < M$)

Fig1中の各点線は、時間 t の一定面であり次のように計算される。

Fig1-(ii)

$$\begin{cases} T_- = -\tanh(\kappa_- t)\,R_-, & U_-V_- < 0 \\ R_- = -\tanh(\kappa_- t)\,T_-, & U_-V_- > 0 \end{cases} \cdots (8)$$

Fig1-(i)

$$\begin{cases} T_+ = \tanh(\kappa_+ t)\,R_+, & U_+V_+ < 0 \\ R_+ = \tanh(\kappa_+ t)\,T_+, & U_+V_+ > 0 \end{cases} \cdots (9)$$

$T_\pm = +R_\pm$, $T_\pm = -R_\pm$ となる線はそれぞれ event horizon $r = r_\pm$ を表しヌル面である。光はこの線に平行な軌道をとり光円錐を形成し、粒子はその中を通る。またfig1中の双曲線はr=一定面である。

● $a = M$の場合 ($r_\pm = a = M$)

$$r^* = \int \frac{dr}{f} = \int \frac{r^2 + a^2}{(r - a)^2}dr = 2a\ln\left|\frac{r - a}{2a}\right| + \frac{r^2 - 2ar - a^2}{r - a} \cdots (10)$$

Kruskal座標を以下のように導入すると(2)は(12)となる

$$U = \mp e^{-\frac{u}{4a}},\quad V = e^{\frac{v}{4a}},\quad UV = -\frac{r - a}{a}e^{g(r)} \cdots (11)$$

$$g(r) = \frac{r^2 - 2ar - a^2}{2a(r - a)}$$

$$ds^2 = 32a^3\frac{r - a}{r^2 + a^2}e^{-g(r)}dUdV \cdots (12)$$

以下のfig2では $T = \frac{V+U}{2}$, $R = \frac{V-U}{2}$ である。

Fig1より
角運動量が最大でない場合は
event horizon 内部に入っても
再び外部へ抜け出せる。

Fig2より
$a = M$のときはevent horizon
内部からは脱出は不可。

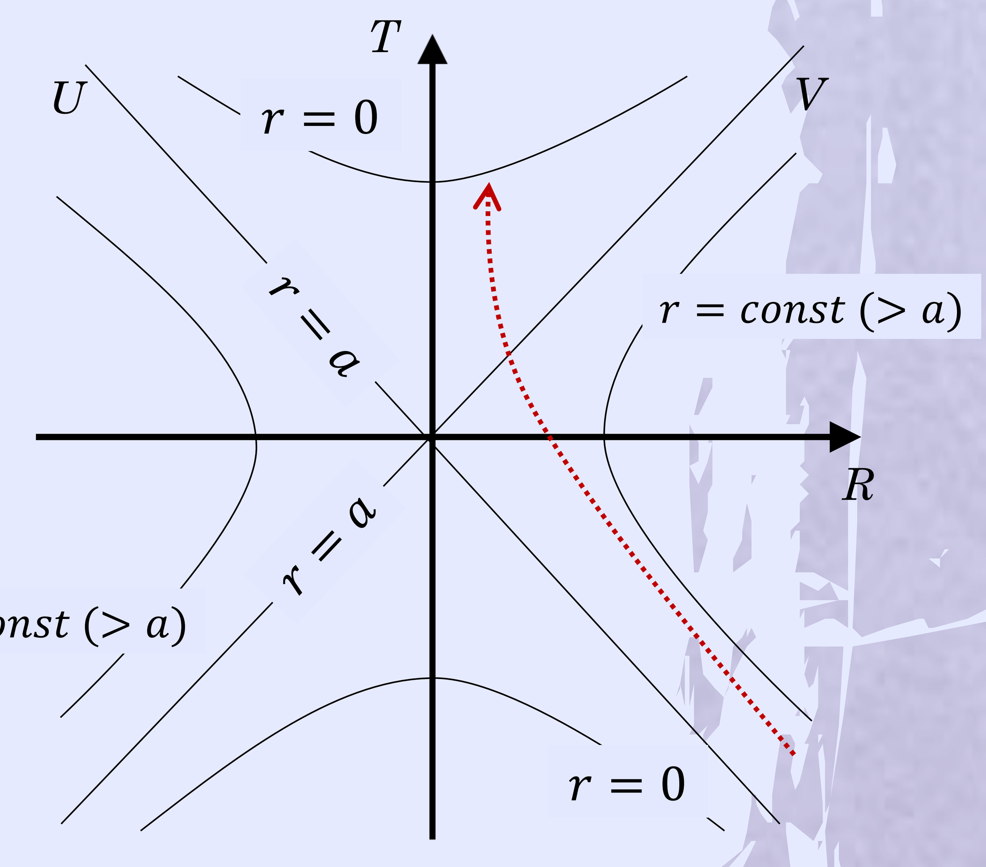

Fig2;Maximal Extension ($a = M$)

References

・R.G Gautreau, IL Nuovo Cimento, 50A, 120 (1967)

・Eric Poisson. 2004. A Relativist's Toolkit. Cambridge. (5.3.9)