Reissner-Nordstrom 時空のBSW collision

立教大学M1
国分隆文

目的

Banados,Silk,Westによると、Kerr-Blackhole(BH)のhorizon付近で２つの粒子を衝突させると、２粒子の重心系のエネルギーを任意に高くすることができる。本発表ではこのような衝突をBSW collisionと呼ぶことにする。

ZaslavskiiはReissner-Nordstrom　BH（RNBH）へ動径方向に運動する2つの荷電粒子を入射することを考え、この状況でもBSWcollisionが起こることを示した。そこで今回私はZaslavskiiの論文を基に、RN時空ではどのような状況でBSWが起こるかを発表する。

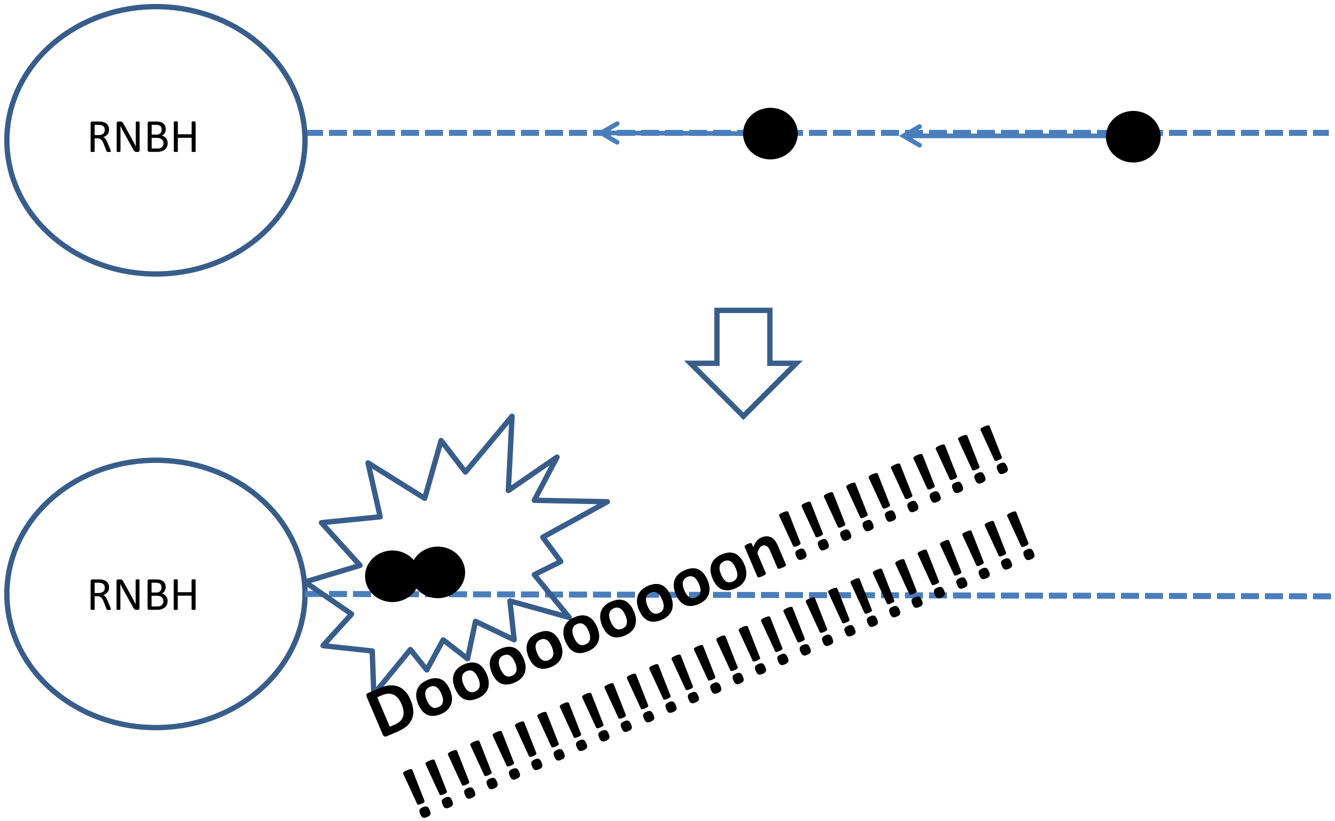


fig1．RNBHのhorizon付近で衝突する2つの荷電粒子

問題設定

RNBHの線素は次式。

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/f(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \quad , f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \qquad (1)$$

Q、M : BHの電荷、質量

Horizon: $r_{\substack{H \\ C}} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2} \qquad (0 \leq Q \leq M)$

電荷q、質量mの粒子のラグランジアンL:

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} + qA_{\mu}\dot{x}^{\mu} \qquad (\cdot \equiv \frac{d}{d\lambda}, A_{\mu} = (-\frac{Q}{r}, \vec{0})) \qquad (2)$$

(2)式はt,φを含まないので保存量として次を定義→ $E \equiv -p_t = f(r)\dot{t} + \dfrac{qQ}{r}$ (3) $L \equiv p_\varphi = r^2 \sin^2\theta\dot{\varphi}$ (4)

粒子の軌道: $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ (5)

粒子１，２の４元速度: $u^\mu_{(i)} \equiv \dot{x}^\mu_{(i)} \quad (i = 1,2)$

重心系のエネルギー:$E_{cm} = m\sqrt{2(1 - u^\mu_{(1)} u_{(2)\mu})}$ (6)

(3)~(6)より

$$\frac{E_{cm}^2}{2m^2} = 1 + \frac{X_1 X_2 - Z_1 Z_2}{m^2 f} - \frac{L^2}{r^2} \qquad (7)$$

$$(X_i \equiv E_i - \frac{q_i Q}{r_i}, Z_i \equiv \sqrt{X_i^2 - m^2 f})$$

★E_{cm} の発散

(7)で$r \to r_+$とすると

$$E_{cm} \approx 1+\frac{1}{2}\left(\frac{q_{1(H)}-q_1}{q_{2(H)}-q_2}+\frac{q_{2(H)}-q_2}{q_{1(H)}-q_1}\right)^{-1}-\frac{L^2}{r^2} \qquad (8)$$

$$(q_{i(H)} \equiv E_i - \frac{qQ}{r_H})$$

ここで$q_1 = q_{1(H)}(1-\delta), \delta \ll 1$ 、$q_2 \neq q_{2(H)}$

$$\downarrow$$

$$E_{cm} \approx 1+\frac{1}{2}\left(\frac{q_{2(H)}-q_2}{q_{1(H)}\delta}-\frac{q_{1(H)}\delta}{q_{2(H)}-q_2}\right)-\frac{L^2}{r_H^2}$$

$$\therefore E_{cm} \propto \frac{1}{\sqrt{\delta}} \qquad \therefore \lim_{\substack{r\to r_H \\ q_1 \to q_{1(H)}}} E_{cm} = \infty$$

よってどちらかの粒子がcritical（$q_1 = E_1 - \frac{q_1 Q}{r_H}$）で,
衝突する点がhorizonに近いほど E_{cm}は大きくなる。

→ではそもそもcritical粒子はhorizonに近づけるか？

①nonextremal($0 < Q < M$)の場合
②extremal($Q = M$)の場合
でhorizon付近のV_{eff}を調べる。

★有効ポテンシャル

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}=-m^2 \quad (9)$$

(3)～(5)と(9)より

$$\boxed{\dot{r}^2+V_{eff}=0 \quad (10)}$$

$$\boxed{V_{eff}\equiv-(E-\frac{qQ}{r})^2+f(r)(\frac{L^2}{r^2}+m^2) \quad (11)}$$

粒子の運動範囲: ｉ）、ⅱ）を満たすr

ｉ）$V_{eff}(r)\leq 0 \ (\because (10))$

ⅱ）forward-in-time condition $E\geq\frac{qQ}{r} \ (\because (3))$

①nonextremal $(0 < Q < M)$の場合

$$V_{eff}(r) = -E^2(1-\frac{r_H}{r})\left\{(1-\frac{r_H}{r}) - \frac{1}{E^2}(1-\frac{r_c}{r})(\frac{L^2}{r^2}+m^2)\right\}$$

$$V_{eff}(r_H) = 0 \quad (12)$$

$$\frac{dV_{eff}(r_H)}{dr} = \frac{1}{r_H}\left(1-\frac{r_c}{r_H}\right)\left(\frac{L^2}{r_H^2}+m^2\right) \geq 0 \quad (13)$$

(12),(13)よりfig.2

↓

horizonに近づけない

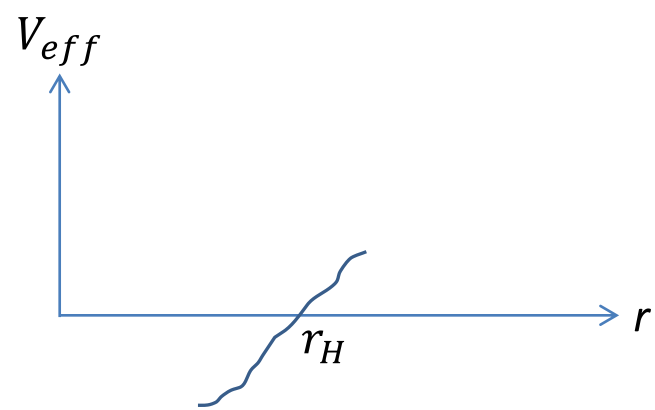


Fig.2

②extremal$(Q = M = r_H)$の場合

Critical:$E = \frac{qQ}{r_H} = q$

$$V_{eff} = \left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 \left(-E^2 + \frac{L^2}{r^2} + m^2\right)$$

$$V_{eff}(r_0) = 0 \leftrightarrow E > M : r_0 = \frac{|L|}{\sqrt{E^2 - m^2}}, M$$

$E = M : L \neq 0 \rightarrow$ 解なし$, L = 0 \rightarrow r_0 = \forall r$

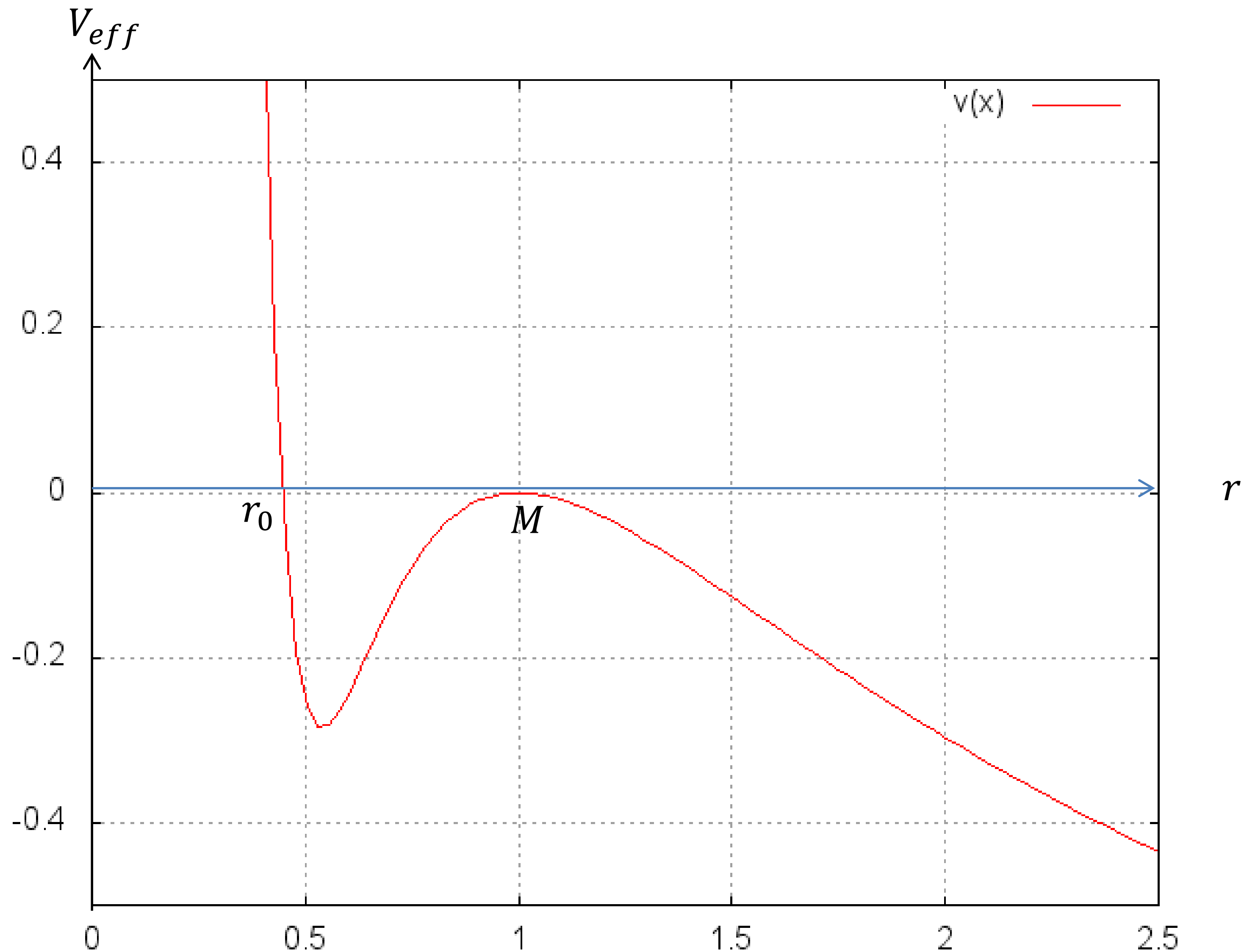
$E < M$： 解なし

$$\frac{dV_{eff}(M)}{dr} = 0$$

$$\frac{d^2V_{eff}(M)}{dr^2} = \frac{2}{M^2}\left(-E^2 + \frac{L^2}{M^2} + m^2\right) \quad (14)$$

(14)より$\frac{d^2V_{eff}(M)}{dr^2} \leq 0 \leftrightarrow E \geq \sqrt{\frac{L^2}{M^2} + m^2}$であればcritical particleはhorizonに近づける。

このとき$r_0 = \frac{|L|}{\sqrt{E^2 - m^2}} \leq M$　(fig.3)



$fig.3$

まとめ

RNBHでBSW（Dooooooooooon!!!!!!!!!!!!!!!!!）を起こすには

・BHがextremal

・粒子１がcritical

・粒子１が$E \geq \sqrt{\frac{L^2}{M^2} + m^2}$

である必要がある。

Reference

- M. Banados, J. Silk, S.M. West, Phys. Rev. Lett. 103, 111102 (2009).
- O. B. Zaslavskii,JETP Lett.9,92(2010).