相対論的ラグランジュ摂動法による面対称時空におけるゆらぎの解析

早稲田大学前田研究室　M1津田　陽

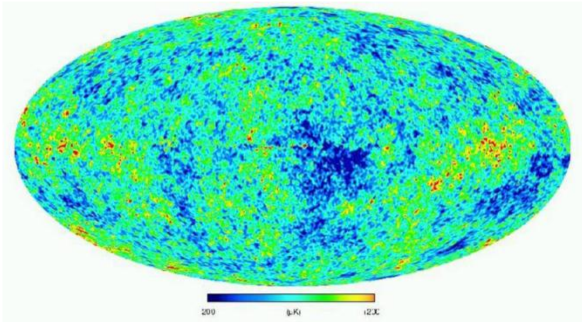
キーワード
- 宇宙の大規模構造
- ボイド
- 重力不安定性理論
- CMB　密度ゆらぎの発展
- 摂動論
- 相対論的ゼルドヴィッチ近似

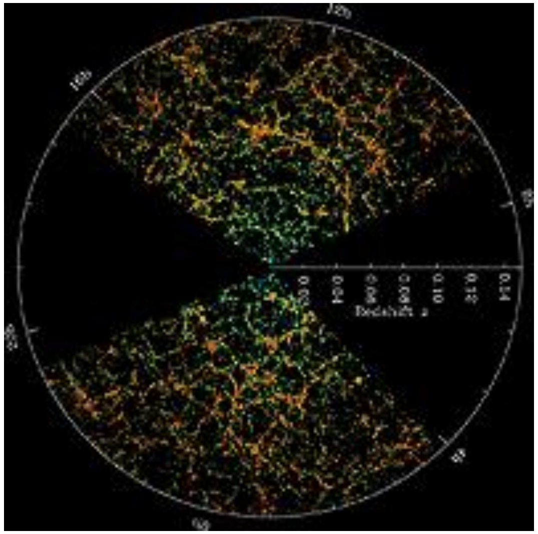
イントロ① ～重力不安定性理論～

現在、宇宙には様々な構造が満ちあふれている。

宇宙マイクロ波背景放射の観測により、初期の宇宙はほとんど等方的であったが、微小な温度のゆらぎが発見された。この温度ゆらぎは物質密度のゆらぎを示唆する。その**密度ゆらぎが重力によって成長し、現在の宇宙構造が形成**されたと考えられている。

これを**重力不安定性**による**構造形成理論**と呼び、現在、標準的な考え方になっている。





イントロ② ～ラグランジュ摂動法～

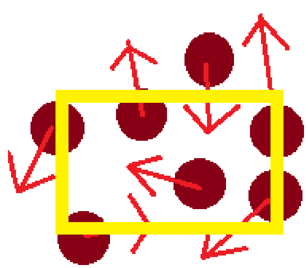
ゆらぎの発展を非線形領域まで解析することは複雑で困難であるため、厳密な解析的取り扱いは難しい

そこで、コンピュータを用いた大規模シミュレーションを行うか、近似的に非線形の成長を記述する**解析的なアプローチ**が用いられる

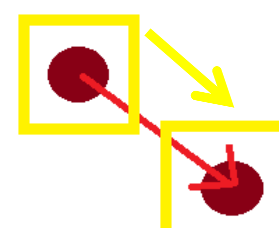
解析的アプローチとしては、通常のオイラー的摂動論より、良い近似法が提案されている。それは**ラグランジュ的見方に基づく摂動論**で、摂動論ではあるが、**非線形領域のゆらぎの成長も記述可能**である

ニュートン重力理論に基づき、摂動の一次までを取り込んだラグランジュ的摂動論は**ゼルドヴィッチ近似**と呼ばれ、宇宙論的数値シミュレーションの初期条件の決定などにも、応用されている

オイラー的見方
観測者は
各場所に固定



ラグランジュ的見方
観測者は各粒子と
共に動く



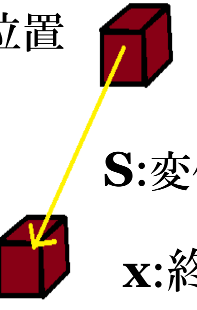
ニュートン重力理論に基づくラグランジュ摂動法

オイラー的摂動法では，密度ゆらぎδそのものを摂動量とし、
時間発展を追う ⇒ 密度ゆらぎδが大きくなれば近似が悪くなる

ラグランジュ摂動法では
バッググラウンドからの変位 **S**（一様等方宇宙からのずれ）を摂動量とする
密度ゆらぎは質量保存によって導かれる厳密な関係

$$\delta = \frac{1-J}{J} \qquad J = \left|\det\left[\mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{q}}\right]\right|$$

I:単位行列

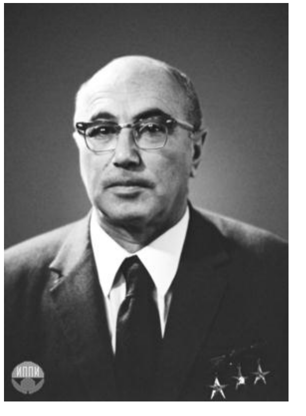


を用いて求める ⇒ ゆらぎそのものは摂動量ではない！
摂動の一次までのラグランジュ摂動法 ＝ ゼルドヴィッチ近似

先行研究

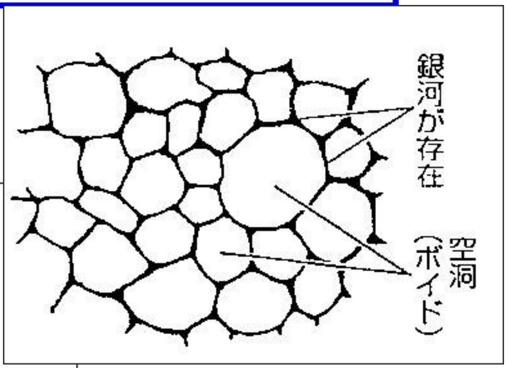
・この摂動法は非線形領域でもよりよい近似！
(Munshi, Sahni, Starobinsky 1994)

・ゼルドヴィッチ近似は面対称性を持つ場合、
近似法を使った解が結果的に厳密解 （Sunyaev & Zeldovich 1972)



相対論的ラグランジュ摂動法

①密度ゆらぎの波長がホライズンサイズ以上の場合は一般相対論が必要2
②ニュートン重力理論ではどの場所の膨張則も等しいが、ボイドのような低密度な空間は膨張則が大きくなる



相対論に拡張！

相対論的ラグランジュ摂動法

先行研究

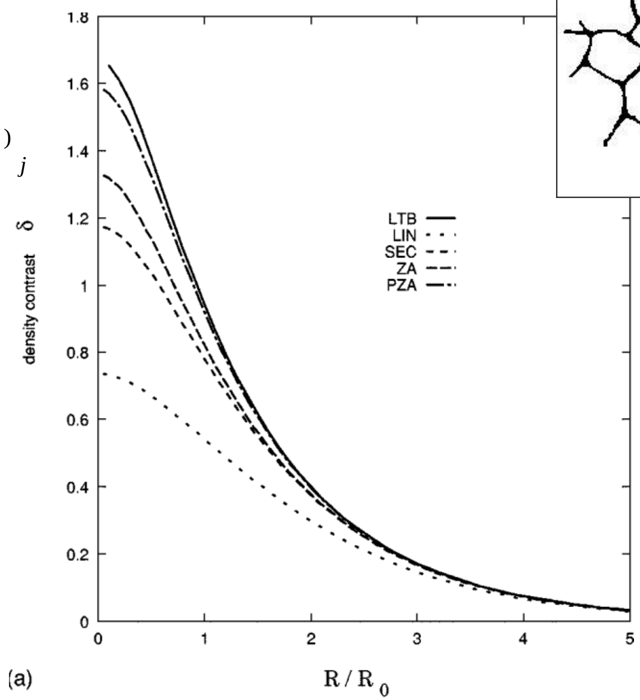
トライアド形式 $g_{ij} = a^2(t)\delta_{(a)(b)} e^{(a)}{}_i e^{(b)}{}_j$

を用いた理論 （Kasai　1995）

球対称モデルでの厳密解との比較

(Morita,Nakamura,Kasai　1998)

非線形領域でも良い近似



グラフ：球対称モデルでの密度ゆらぎの厳密解との比較
オイラー法よりもラグランジュ法の方が厳密解（実線）に近い値となっている

本研究の目的

摂動の一次までのラグランジュ摂動法（ゼルドヴィッチ近似）は面対称性を持つ場合、近似法を使った解が結果的に厳密解となっている

相対論的ラグランジュ摂動法は球対称モデルでの厳密解との比較により非線形領域でも良い近似であることが先行研究により分かっている

面対称性をもつ相対論的ゆらぎを

ラグランジュ的摂動法を用いて解析

オイラー的摂動法との比較により近似の精度を評価

研究方法

バックグランド:物質優勢の一様等方宇宙　$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$
物質:渦なしダスト

面対称な時空　$ds^2 = -dt^2 + A^2(t,z)(dx^2 + dy^2) + B^2(t,z)dz^2$

z方向に非一様、各zのxy平面は一様な時空

オイラー的摂動法　密度ゆらぎδ自体を摂動量としてδ摂動解を得る

ラグランジュ的摂動法

$a(t)$:スケールファクター

トライアド $e_i^{(l)}$ を摂動展開し

$g_{ij} = a^2(t)\delta_{(a)(b)} e^{(a)}{}_i e^{(b)}{}_j$

基礎方程式(一次の場合)

$$[a^3(\ddot{e}_i^{(l)} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{e}_i^{(l)} - 4\pi G\rho_b e_i^{(l)})]^{\cdot} = 0$$

を解き$e_i^{(l)}$の摂動解を得る

密度ゆらぎはエネルギー保存による厳密な関係

$$\boxed{\delta = \frac{\det[e_i^{(l)}(t_{in}, \mathbf{x})]}{\det[e_i^{(l)}(t, \mathbf{x})]} - 1}$$

に $e_i^{(l)}$ の摂動解を代入することで得る

各摂動法での密度ゆらぎδが変数分離でき, zの任意関数$\Psi(z)$で書ける

初期値を与えて$\Psi(z)$ 決定し時間発展させる

研究方法　初期ゆらぎ

求めた密度ゆらぎの近似式は以下の四つ

	摂動の一次まで	摂動の二次まで
オイラー	$\delta_{E1} = -t^{2/3}\Psi''$	$\delta_{E2} = -t^{2/3}\Psi'' + 5/9t^{2/3}(\Psi'^2 + 6\Psi\Psi'') + t^{3/4}\Psi''^2$
ラグランジュ	$\delta_{L1} = \dfrac{-t^{2/3}\Psi''}{1+10\Psi/9+t^{2/3}\Psi''}$	$\delta_{L2} = \left(1+\dfrac{5t^{2/3}\Psi''/9}{1+10\Psi/9}\right)^{-2}\left(1+\dfrac{t^{2/3}\Psi''+5t^{2/3}(\Psi'-4(\Psi\Psi''+\Psi'^2))}{1+10\Psi/9}\right)^{-1}-1$

初期をdecoupling time(赤方偏移 = 1100, t_{dec} =3.8×10^5年，)とし

初期ゆらぎは以下の3つの場合を考える

$\delta_{IN}(t_{dec},z) = \varepsilon \cdot \exp[-z^2/2\sigma^2]$

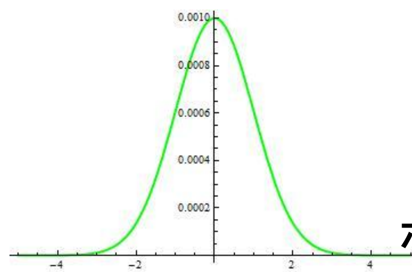
$\delta_{IN}(t_{dec},z) = \varepsilon \cdot (\sigma^2 - z^2)\exp[-z^2/2\sigma^2]$

$\delta_{IN}(t_{dec},z) = \varepsilon \cdot \cos(\sigma z)$

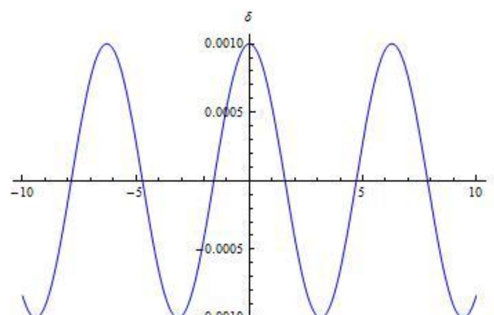
$\Psi(z)$ は　$\delta_{E1}(t_{dec}, z) = \delta_{IN}$

を満たすように決定

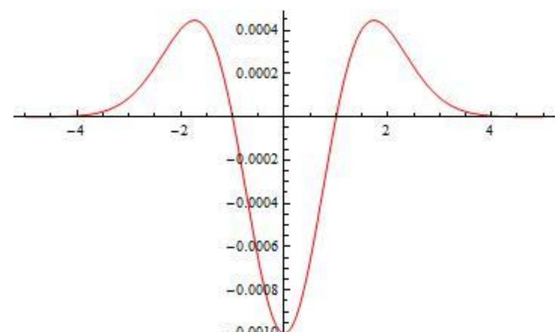
ガウス関数の形



コサインの形



ボイドのような形



密度の高低がある

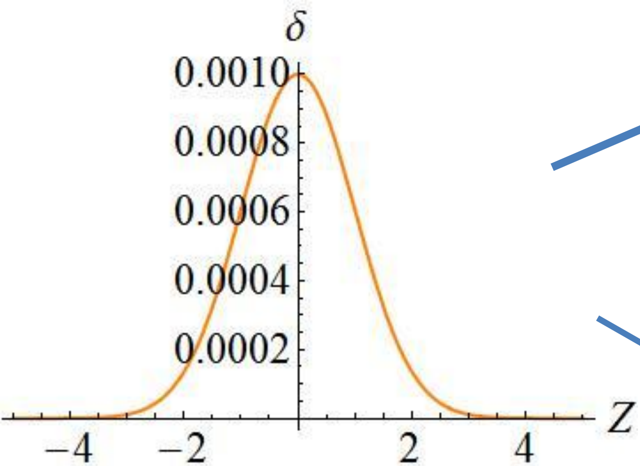
ボイド型やコサイン型を考える

ことで膨張率の違いを確かめられる

結果① ゆらぎの発展

初期ゆらぎ

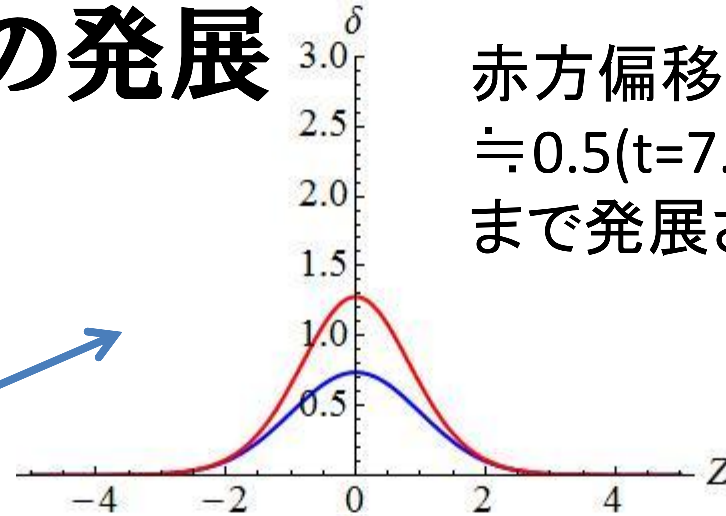
$\delta(t_{dec}, z) = 1.0 \times 10^{-3} \exp[-z^2/2]$



赤方偏移

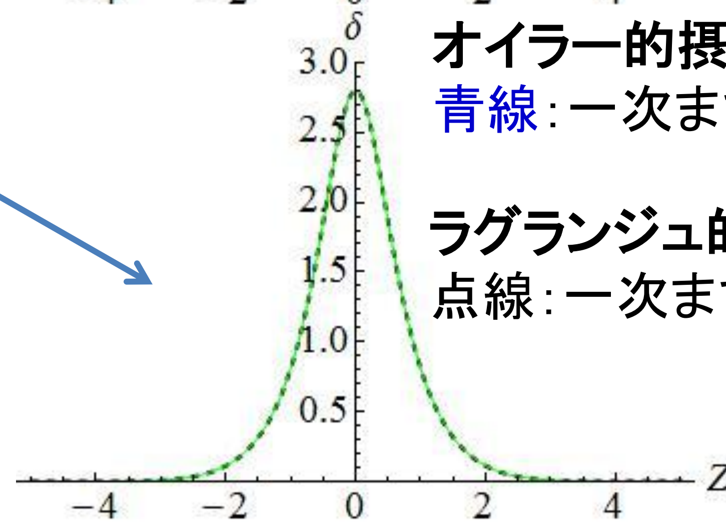
≒0.5($t = 7.6 \times 10^9$年)

まで発展させたゆらぎ



オイラー的摂動法 δ_{E1} δ_{E2}

青線：一次まで　赤線：二次まで



ラグランジュ的摂動法 δ_{L1} δ_{L2}

点線：一次まで　緑線：二次まで

$\delta_{E2} > 1$

➡ゆらぎが摂動量のため適用範囲外

$\delta_{E1} \neq \delta_{E2}$

➡ 摂動展開が収束していない

$\delta_{L1} \fallingdotseq \delta_{L2}$

摂動展開が十分収束

➡良い近似

他の初期ゆらぎでも同様の結果

結果②　物理的距離とゆらぎ

$$ds^2 = -dt^2 + A^2(t,z)(dx^2 + dy^2) + B^2(t,z)dz^2$$

各摂動法で得たメトリックのz方向成分Bを用いて

物理的距離Dを $\mathrm{D} \equiv \int_0^z B(z,t)dz$

とし，密度ゆらぎをDの関数としてプロットする

図は赤方偏移 ≒0(t ≒現在)

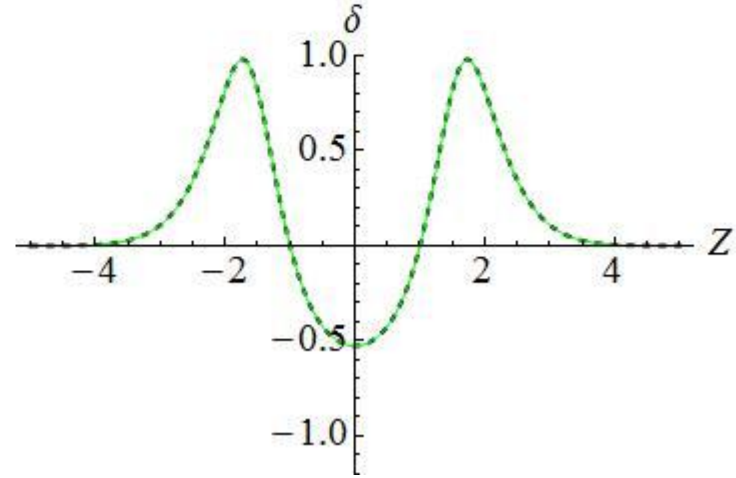
におけるラグランジュ摂動法による密度ゆらぎ

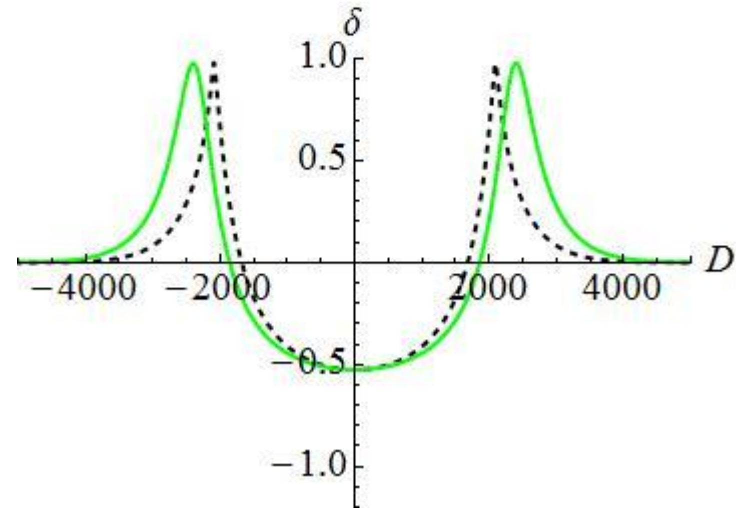
上図：変数zでのプロット

下図：物理的距離Dでのプロット

相対論的摂動法を用いたことで、

密度の低い部分の広がりが見て取れる





ラグランジュ的摂動法

点線：一次まで　緑線：二次まで

結論と今後の課題

結論

ニュートン重力理論の場合と同じく、面対称時空において、相対論的ラグランジュ摂動法は、オイラー的な摂動法よりも十分良い近似で非線形領域まで解析が可能

また、相対論的摂動法を用いたことにより，密度の低い場所の空間の広がりを確認できた

現在進行中の研究と今後の課題

空間の平均膨張率を各摂動法で比較

摂動法で求めたメトリックの近似式が、アインシュタイン方程式をどれだけ満たしているかを評価

面対象時空の厳密解と摂動法のゆらぎの発展の比較

最終的には実際のボイドのような構造の時間発展を扱えたら嬉しい・・・