

# 曲がった時空中の量子力学

根岸 宏行

## 1 Introduction

量子論は原子や原子核といったミクロな世界を記述する。一方で、重力は銀河や宇宙といったマクロな世界で重要となる。この二つの効果が交わる現象はブラックホールの特異点近傍や宇宙初期などの極限的状況でのみ量子重量や曲がった時空中での場の量子論として現れると考えられるが、必ずしもそうではない。量子力学にも重力の効果はあり、その効果はポストニュートンの効果まで扱えると考えられる。本ノートでは K-G eq を非相対論化することで曲がった時空中の量子力学を扱い、その効果について調べる。

## 2 曲がった時空中でのシュレディンガー方程式

シュレディンガー方程式に重力の効果を入れる方法として、Klein-Gordon(KG) 方程式を Post-Newton 展開する方法を用いる。時空が平坦場合を例に KG 方程式を Post-Newton 展開する方法を説明する。ミンコフスキー時空中の KG 方程式は

$$\partial_a \partial^a \phi + m^2 c^2 \phi = 0 \quad (1)$$

である。 $\phi$  について  $\phi = e^{-ime^2 t} \varphi$  とおくと

$$i \partial_t \varphi = -\frac{1}{2m} \partial_i \partial^i \varphi + \frac{\partial_t^2 \varphi}{2mc^2} \quad (2)$$

となる。さて相対論的粒子について粒子のエネルギーは

$$\omega^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (3)$$

と表される。これを量子力学に従って正準共役量を微分演算子で置き換え、量子化すると状態ベクトルは KG 方程式に従う。しかし、状態ベクトルの従う式は時間の一回微分でなければ確率解釈が成り立たないので相対論的粒子は量子力学の手法で量子化できない。しかし上の式を非相対論的極限をとると  $\frac{\partial_t^2 \varphi}{c^2}$  は十分小さいので無視でき、

$$i \partial_t \varphi = -\frac{1}{2m} \partial_i \partial^i \varphi \quad (4)$$

となり、これは自由粒子のシュレディンガー方程式である。

重力がある場合を考える。Kerr 時空を考える。ただし、重力の効果は弱いとする。このとき計量は

$$ds^2 = \left(1 - 2\frac{M'}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{4M'a}{r^3} (xdy - ydx) c dt - \left(1 + 2\frac{M'}{r}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (5)$$

となる。ここで  $M' = \frac{GM}{c^2}$ 、 $a$  は Kerr パラメーターである。星の上で回転している観測者の静止系に移ると計量は

$$ds^2 = \left[ 1 - 2\frac{M'}{r} + \frac{4M'ca}{r^3}\Omega^2(x^2 + y^2) - \left( 1 + 2\frac{M'}{r}\Omega^2(x^2 + y^2) \right) \right] c^2 dt^2 + \left[ \frac{4M'a}{r^3} - 2\left( 1 + 2\frac{M'}{r}\Omega \right) \right] (xdy - ydx)cdt - \left( 1 + 2\frac{M'}{r} \right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (6)$$

となる。曲がった時空中での KG 方程式は

$$g^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi + m^2c^2\phi = 0 \quad (7)$$

である。 $\Omega$  は星の角速度である。ミンコフスキー時空の場合と同様に Post-Newton 展開すると

$$i\partial_t\varphi = (H_0 + H_1 + H_2 + H_3)\varphi \quad (8)$$

$$H_0 = -\frac{1}{2m}\nabla^2 \quad (9)$$

$$H_1 = -\frac{GMm}{r} \quad (10)$$

$$H_2 = -\Omega L_z \quad (11)$$

$$H_3 = -\frac{2GMa}{cr^3}L_z \quad (12)$$

$$L_z = -i(x\partial_y - y\partial_x) \quad (13)$$

となる。ハミルトニアン各項は自由粒子、Newton ポテンシャル、星の回転、慣性系の引きずりの項である。

### 3 位相変化

重力による位相の変化を調べる。波動関数を次のようにおく。

$$\varphi = \varphi_0 e^{-i(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)} \quad (14)$$

$$i\partial_t\varphi_0 = H_0\varphi_0 \quad (15)$$

このとき  $\alpha_i$  は重力の効果による位相のズレを示す。準古典近似の範囲で  $\alpha_i$  は

$$\alpha_i = \int_C H_i dt \quad (16)$$

となる。ここで  $C$  は古典粒子の経路を示す。図のような中性子干渉計を用いて位相の変化をみる。Newton ポテンシャルの項について位相変化は

$$\begin{aligned} \alpha_{Newton} &= \alpha_1(ABD) - \alpha_1(ACD) \\ &= \frac{m^2 g d_1 d_2 \lambda}{2\pi} \end{aligned} \quad (17)$$

となる。ここで  $g$  は重力加速度で  $\lambda$  は中性子の波長である。この効果は Colella, Overhauser, Werner(1975) により観測されている。星の回転による位相の変化は

$$\begin{aligned}\alpha_{(sag)} &= \alpha_2(ABD) - \alpha_2(ACD) \\ &= m\Omega \cdot \int \mathbf{r} \times d\mathbf{r}\end{aligned}\quad (18)$$

となる。ここで  $\Omega$  は星の角速度である。慣性系の引きずりによる効果は

$$\begin{aligned}\alpha_{(drag)} &= \alpha_3(ABD) - \alpha_3(ACD) \\ &= \frac{1}{5} \frac{r_g}{R} \alpha_{(sag)} \frac{1}{\Omega \cdot \mathbf{A}} \Omega \cdot \left[ \mathbf{A} - 3 \left( \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}}{R} \frac{\mathbf{R}}{R} \right) \right]\end{aligned}\quad (19)$$

となる。ここで  $\mathbf{R}$  は星の中心からみた干渉計の位置を示し、 $\mathbf{A} = \frac{1}{2} \cdot \int \mathbf{r} \times d\mathbf{r}$ 、 $r_g$  はシュバルツシルト半径である。この効果は非常に小さくまだ観測されていない。

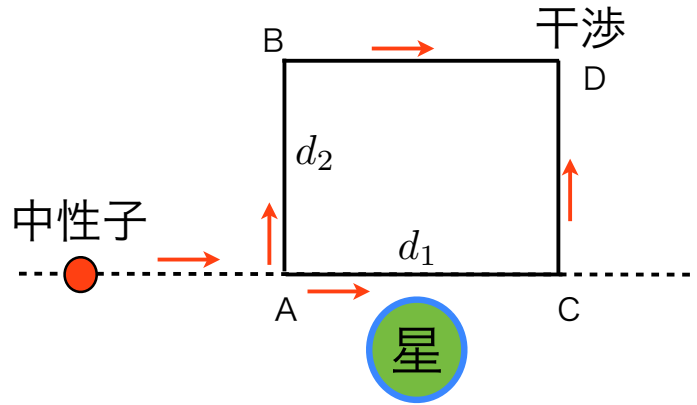


図1 干渉計

回転している星が磁場をもつ場合を考える。図のに星の磁場が一様な北極付近で考える。このときシュレディンガー方程式は

$$\begin{aligned}i\partial_t\varphi &= \left[ -\frac{1}{2m}\nabla^2 - \frac{GMm}{r} - \left( \frac{qB}{2m} + w(r) \right) L_z \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{q^2 B^2}{8m} + \frac{qB}{2} w(r) \right) \right] \varphi\end{aligned}\quad (20)$$

となる。ここで  $B$  は磁場の強さで、 $q$  は粒子の電荷、 $w(r) = \Omega - \frac{2GMa}{cr^3}$  ある。北極まわりで考えると  $r \approx R+z$  とおけるので

$$\begin{aligned}E\varphi &= \left[ -\frac{1}{2m}\nabla^2 + mU + mgz - \left( \frac{qB}{2m} + w(R) \right) L_z \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{q^2 B^2}{8m} + \frac{qB}{2} w(R) \right) \right] \varphi\end{aligned}\quad (21)$$

となる。ここで  $U = -\frac{GM}{R}$  である。波動関数とエネルギー固有値は

$$\varphi = Ai \left[ \left( (2m^2g)^{1/3} \left( z - \frac{K_n}{mg} \right) \right) \right] e^{ip_\theta\theta} r^l e^{-\frac{\beta}{2}r^2} L_{n'}^l(\beta r^2) \quad (22)$$

$$E = \frac{1}{2m} \left[ 4\beta \left( n' + \frac{l+1}{2} \right) - (qB + 2mw(R))l \right] + mU + K_n \quad (23)$$

となる。ここで  $Ai(x)$  はエアリー関数、 $L_{n'}^l(x)$  はラゲール陪関数であり、 $\beta = (q^2B^2 + mqBw(R))^{1/2}$ 、 $K_n = (mg^2)^{1/3}\lambda_n$ 、 $l, p^\theta$  は定数、 $n = 1, 2, 3, \dots$ 、 $n' = 1, 2, 3, \dots$  である。エネルギー固有値をみると磁場の効果によりエネルギーが離散化され、重力の効果によりその効果がズれている。また、波動関数も磁場の効果により束縛されている。重力によるエネルギー固有値のズレは非常に小さく現段階では観測にかからない。

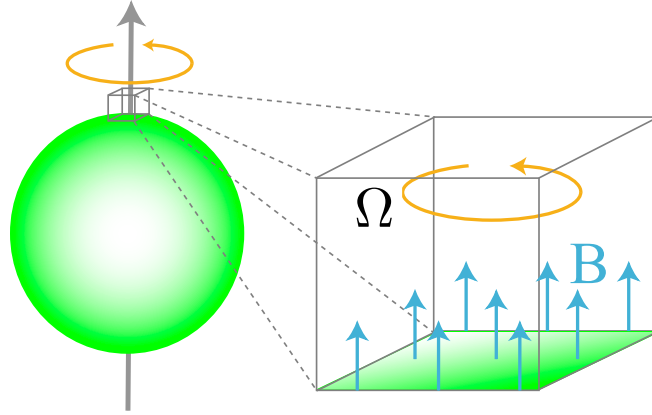


FIG. 1. Illustration of the polar region of a rotating star. We assume that the magnetic axis is aligned with the rotational axis.

図2 磁場を持つ回転する星

#### 参考文献

J. Kuroiwa, M. Kasai, and T. Futamase, Physics Letters A 182, 330 (1993)

K.Konno and R.Takahashi Phys Rev D. 85.061502