境界を持つ時空におけるCausal Dynamical Triangulation

名古屋大学　QG 研　D1　引地 貴之

1　量子重力理論

一般に、初期宇宙やブラックホール蒸発の最終段階での Planck スケールと呼ばれる高エネルギーの領域では、一般相対論は破綻し重力の量子効果が重 要になると考えられている。この Planck スケールの物理を記述する理論を量子重力理論と呼ぶ。今回は簡単のため 3 次元の量子重力について考える。

2　波動関数の経路積分表示

経路積分によって重力を量子化することを考える。重力の経路積分は計量による汎関数積分であり、これは様々な時空について足し合わせることを意味する。波動関数は経路積分によって

$$\Psi(h_{ij}) = \int \mathcal{D}g\, e^{iS^{\mathrm{EH}}[g_{\mu\nu}(x)]}, \tag{1}$$

と表される。ただし $S^{\mathrm{EH}}[g_{\mu\nu}(x)]$ は境界項を含む Einstein-Hilbert 作用

$$S^{\mathrm{EH}}[g_{\mu\nu}(x)] = \frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} d^3x\sqrt{-g}(R-2\Lambda) + \frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} d^2x\sqrt{h}K, \tag{2}$$

である。Hartle と Hawking(1983) によれば、(境界部分を除いて)compact な Euclid 時空 について足し上げは基底状態の波動関数を与える。Euclid 化は以下のように定義する。

$$\tau_{\mathrm{E}} := it,\ S_E^{\mathrm{EH}} := -iS^{\mathrm{EH}}|_{t=-i\tau_E} \tag{3}$$

Euclid 化された波動関数は、

$$\Psi(h_{ij}) = \int \mathcal{D}g\, e^{-S_E^{\mathrm{EH}}[g_{\mu\nu}(x)]}, \tag{4}$$

で与えられる。ただし、この式は「形式的」な式であり、具体的に計算するには正則化等の作業をする必要がある。

3　Causal dynamical triangulation

Causal Dynamical Triangulation（CDT）は重力の経路積分の離散正則化の手法の一つである。時空を下記の図 1 の simplex と呼ばれる基本格子を用いて区切ることで正則化を行う。CDT にでは、simplex の辺を時間的な辺と空間的な辺に区別し、下記の図 2 のように time slice 構造を持つように時空を構成しする。図 1 の simplex において、空間的スライス上に存在する赤線が空間的な辺であり、２つのスライス間を結ぶ黒線が時間的な辺である。空間的な辺の長さの２乗は $l_{\mathrm{SL}}^2 = a^2$ と定義し、時間的な辺の長さの 2 乗はその $-\alpha$ 倍の $l_{\mathrm{TL}}^2 = -\alpha a^2$ と定義する。ただし α は正の実数とする。また、CDT における Euclid 化は

$$\alpha \ \to\ -\alpha, \tag{5}$$

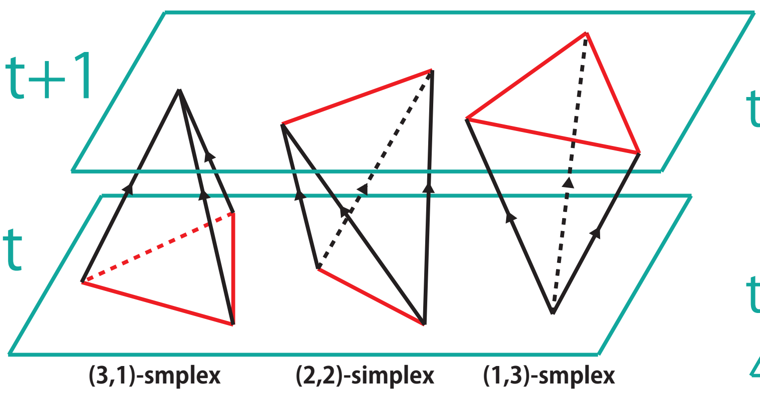

図 1: 3-simplex

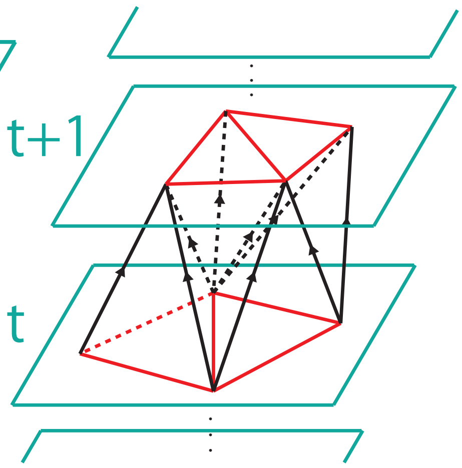

図 2: time slice 構造

と定義される。CDT による離散化によって Einstein-Hilbert 作用は以下の Regge 作用に、経路積分は和に変換される [1]。

$$S_E^{\mathrm{Regge}} = -\kappa_0 N_0 + \kappa_3 N_3 + \kappa_b N_2^b, \tag{6}$$

$$\Psi(h_{ij}) = \int \mathcal{D}g\, e^{-S_E^{\mathrm{EH}}[g_{\mu\nu}(x)]} \to \sum_T e^{-S_E^{\mathrm{Regge}}[T]}. \tag{7}$$

κ_0 は重力定数に、κ_3 は宇宙定数に対応し、κ_b は境界項の結合定数である。N_0 は離散時空中の頂点の総数で、N_3 は 3-simplex の総数で時空体積に対応し、N_2^b は境界における三角形の総数で境界の空間体積に対応する。

4　数値計算の結果

我々は $N_3 = 32000$、$\kappa_0 = 0.4$ で N_2^b がそれぞれ $(200, 1000, 2000)$ の N_2^b の値のみを変えた 3 つのシミュレーションを行った。今回の計算では境界項の体積を固定したため、境界項は定数項となり経路積分には効かないため κ_b の価は設定していない。一般的に量子論は古典論を内包していなければならない。しかし、CDT とは違い time slice 構造に関係なく simplex で時空を分割する Dynamical Triangulation（DT）で現れた時空は古典的時空には似ても似つかないものであった。一方、compact 時空における CDT では空間体積のダイナミクスの期待値はは de Sitter instanton に従うことが分かっている [2]。今回は境界を持つ時空について同様に空間体積が de Sitter instanton に従うかをしらべた。次ページの図がその結果である。

参考文献

[1] S. Warner, S. Catterall, R. Renken, Phase diagram of three- dimensional dynamical triangulations with a boundary, Phys. Lett. B 442 (1998) 266—272, hep-lat/9808006.

[2] J. Ambjørn, A. Görlich, J. Jurkiewicz and R. Loll, The nonperturbative quantum de Sitter universe, Phys. Rev. D 78 (2008) 063544 [0807.4481, hep-th].

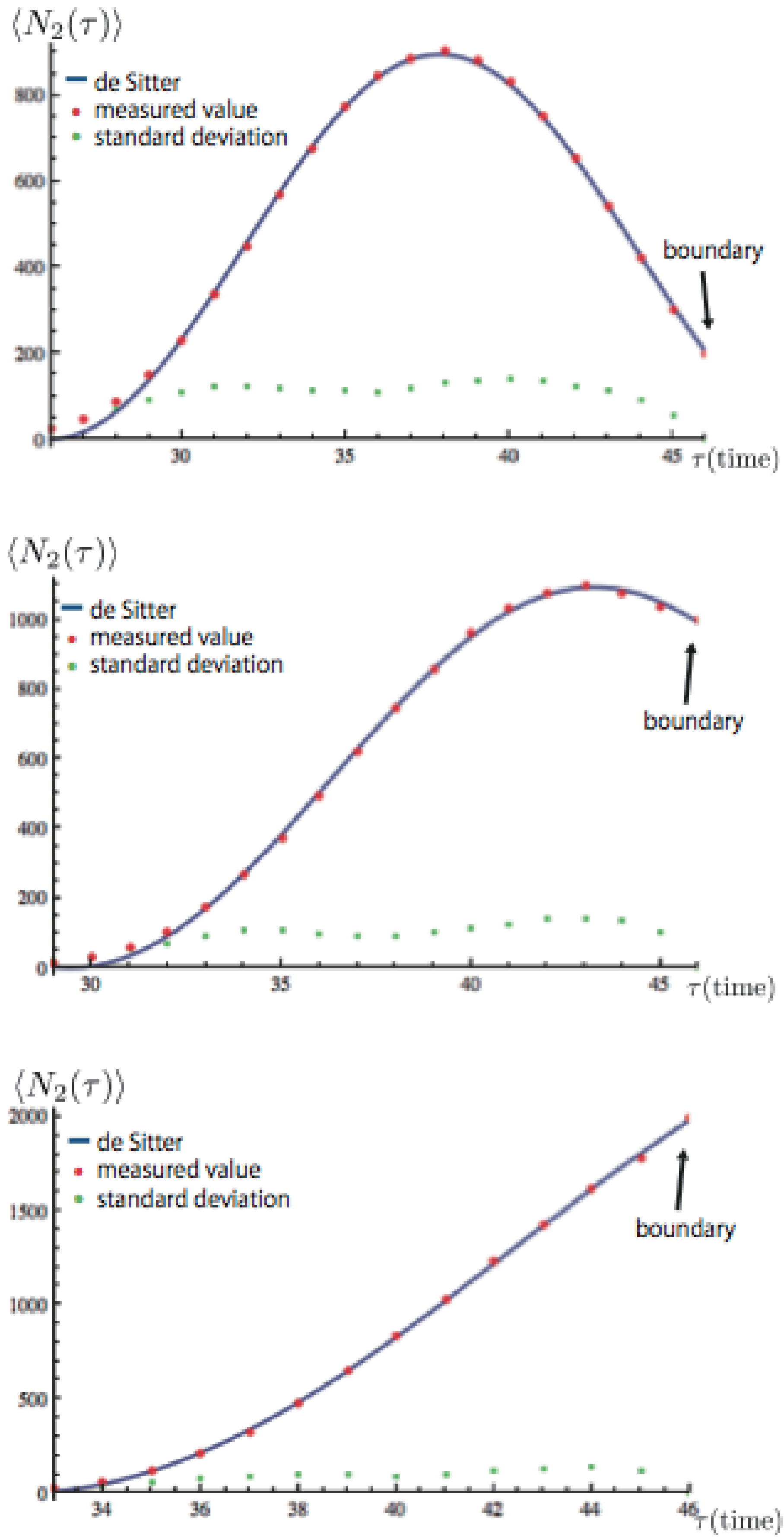

図 3: 上から $N_2^b = 200, 1000, 2000$ の結果