Galileon Theory に基づく，インフレーションに代わる初期宇宙シナリオ

藤林 翔*

概 要

Galileon の理論に基づいて，インフレーションに代わる新しい初期宇宙のモデルを紹介する．通常，インフレーションと呼ばれる宇宙の指数関数的膨張の時期を作り出すモデルは，Null Energy Condition という条件を満たす枠内で考えられている．一方，Null Energy Condition を破りさえすれば加速膨張を自然に起こすことができる．多くの場合，Null Energy Condition を破る系は不安定であることが分かっているが，Galileon Theory に基づくことで Null Energy Condition を破りながらも安定な初期宇宙のモデルを作ることが出来る．本公演のモデルに基づくシナリオでは従来のインフレーション宇宙のシナリオとは異なり，過去に向かうにつれて時空が漸近的に Minkowski になる．しかもこのモデルの解はアトラクタとなっており，初期条件にあまり依らないことが分かる．これは [2],[3],[4] などを参考にした [1] のレビューである．

1 Introduction

インフレーションとは，初期宇宙の加速膨張期のことである．インフレーション期が十分長く続けば現在の宇宙の平坦性問題，一様性問題を解決することができる．そのため，初期宇宙におけるインフレーション期の存在は広く信じられている．しかし，インフレーションを起こす機構については良く分かっていない．

平坦性問題・一様性問題を解決するには宇宙を加速膨張させれば良い．例として，インフレーションによって加速膨張を起こす最も単純なモデルである，Single field・Slow roll のモデルを考える．

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - V(\phi)\right]^1 \tag{1}$$

フリードマン方程式は

$$H^2 = \frac{1}{3M_{\rm Pl}^2}\rho^2 \tag{2}$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2M_{\rm Pl}^2}(\rho + p) \tag{3}$$

*京都大学 天体核研究室 M1

[1]計量 $g_{\mu\nu}$ の固有値の符号は $(-,+,+,+)$ を用いる

である[2]．一様・等方な状況 $\phi = \phi(t)$ を考えると，Slow roll 条件と呼ばれる条件 $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$, $|\ddot{\phi}| \ll |V'(\phi)|$ を満たせば $H \simeq \sqrt{V(\phi)/3M_{\mathrm{Pl}}^2} \simeq$ Const. となり，スケールファクターは近似的に指数関数的増加を示す.

インフレーション以外の方法であっても，加速膨張の時期を作り出すことさえ出来れば平坦性・一様性問題を解決することが出来る．今回はその可能性について紹介する．インフレーション以外の加速膨張期を作り出すヒントが，次に述べる Null Energy Condition という条件である．

2 Null Energy Condition

Null Energy Condition というのは次の条件である．

Null Energy Condition

$T_{\mu\nu}$:エネルギー運動量テンソルと，任意の future-directed な null ベクトル k^μ について

$$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0 \tag{4}$$

この条件を宇宙論で仮定される一様・等方な時空で考えてみよう．このとき，エネルギー運動量テンソルは

$$(T^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} -\rho & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ & & & p \end{pmatrix} \tag{5}$$

となり[3]，Null Energy Condition は

$$\boxed{\rho + p \geq 0} \tag{6}$$

となる．

Null Energy Condition が破れている状況を考えよう．この時フリードマン方程式 (3) から，$\rho + p < 0$ ならば $\dot{H} > 0$ となり，加速膨張が実現する．よって Null Energy Condition を破りさえすれば，加速膨張を起こすことができる事がわかる．

3 No-Go Theorem

実は，Null Energy Condition を破る系を作ることは難しい．例えば，一般のスカラー場の作用 (1) を考えると $\rho + p = \dot{\phi}^2 \geq 0$ となり，Null Energy Condition を破ることは出来ない．更に，Null Energy Condition を破れるかについての言及が [2] によってされている．主張は以下のとおりである：

---

[2] $M_{\mathrm{Pl}}^2 = (8\pi G)^{-1}$

[3] $(T^\mu{}_\nu)$ は，(μ,ν) 成分が $T^\mu{}_\nu$ である行列を表す.

No-Go theorem

スカラー場の理論について，Lagrangian が 2 階以上の高階微分項を含まないときには，Null Energy Condition を破る等方な系には負エネルギーの一粒子状態が存在する[4].

これによると高階微分項を含まなければ，宇宙論で仮定される等方な状況では Null Energy Condition を破ることが出来ない．この定理の仮定から外れるために，Lagrangian に 2 階以上の微分項を加えるとする．するとスカラー場の運動方程式には 3 階以上の高階微分が現れる可能性があり，系に Ghost が現れる可能性がある．Ghost を回避するために用いるのが，次に述べる Galileon Theory というものである．

4 Galileon Theory

作用が

$$\pi(x) \to \pi(x) + b_\mu x^\mu + c \tag{7}$$

という変換に対して不変となるように組まれたスカラー場 π を Galileon[5] と呼ぶ [4]．Galileon の特徴は，Lagrangian に高階微分項が入っていても運動方程式には 3 階以上の微分が入らないことである．これを用いれば，No-Go Theorem の仮定を外して Ghost の現れない作用を作ることが可能となる．

このような作用の例として

$$S = \int d^4x (\partial\pi)^2 \Box\pi \; (g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}) \tag{8}$$

を考えてみる．この作用は変換 (7) で不変であることが確かめられる．π についての運動方程式は

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\pi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\pi)} + \partial_\mu\partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu\pi)} \\ &= -2\partial_\mu(\partial^\mu\pi\Box\pi) + \Box(\partial\pi)^2 \\ &= -2\partial^\mu\pi(\partial_\mu\Box\pi) + 2\partial^\mu\pi(\Box\partial_\mu\pi) + (\text{terms up to 2nd derivatives}) \end{aligned} \tag{9}$$

となり，1,2 項目において 3 階微分の項はキャンセルして消えることが分かる．

今回使うのは，より一般化された Galileon である[6]．

5 シナリオ

前章の Galileon Theory にもとづいて組んだ作用が

$$S_\pi = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ f^2 e^{2\pi} (\partial\pi)^2 + \frac{f^3}{\Lambda^3} (\partial\pi)^2 \Box\pi + \frac{f^3}{2\Lambda^3} (\partial\pi)^4 \right\} \tag{10}$$

[4] 負エネルギーの粒子が存在すると，真空から負エネルギーの粒子と正エネルギーの粒子が対生成してしまう．すなわち，真空が不安定となる．

[5] ”Galileon”という名前は, 変換 (7) が Galilei 変換 $x \to x + vt + x_0$ と似ていることから来ている．

[6] ここで用いるのは [4] に基づくものである．最も一般的なものは [5] で与えられている．

である[7].

π についての運動方程式は

$$
\begin{aligned}
0 =& (\partial\pi)^2 e^{2\pi} - \nabla_\mu (e^{2\pi}\partial^\mu \pi) \\
&+ \frac{2}{3H_0}\left[-\nabla_\mu((\partial\pi)^2\partial^\mu\pi) - (\Box\pi)^2 + R_{\mu\nu}\partial^\mu\pi\partial^\nu\pi + \nabla_\mu\partial_\nu\pi\cdot\nabla^\mu\partial^\nu\pi\right]
\end{aligned}
\tag{11}
$$

となり，確かに場の 2 階微分までになっている[8].

一様・等方の状況 $\pi = \pi(t)$ で，まずはフラットな時空 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ での解を考えると，

$$
e^{\pi_{\rm dS}} = -\frac{1}{H_0 t} \quad (-\infty < t < 0) \tag{12}
$$

を満たす解 $\pi(t) = \pi_{\rm dS}(t)$ が存在することが分かる．

エネルギー運動量テンソルを計算して，エネルギー密度と圧力は

$$
\rho = -f^2\left\{e^{2\pi}\dot\pi^2 - \frac{1}{H_0^2}\left(\dot\pi^4 + 4H\dot\pi^3\right)\right\} \tag{13}
$$

$$
p = -f^2\left\{e^{2\pi}\dot\pi^2 - \frac{1}{3H_0^2}\left(\dot\pi^4 - \frac{4}{3}\frac{d}{dt}\dot\pi^3\right)\right\} \tag{14}
$$

となるが，$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$，$\pi(t) = \pi_{\rm dS}(t)$ で計算すると

$$
\rho_{\rm dS} = 0 \tag{15}
$$

$$
p_{\rm dS} = -\frac{2f^2}{H_0^2}\frac{1}{t^4} \tag{16}
$$

となり，$\rho_{\rm dS} + p_{\rm dS} < 0$ すなわち，この解は Null Energy Condition を破っていることが分かる．

この解 $\pi = \pi_{\rm dS}$ と $H = 0$ を $t \to -\infty$ での初期条件として，フリードマン方程式を摂動的に解く．すると

$$
\pi = \pi_{\rm dS} - -\frac{1}{2}\frac{f^2}{M_{\rm Pl}^2}\frac{1}{H_0^2 t^2} + O(M_{\rm Pl}^{-4}) \tag{17}
$$

$$
H = -\frac{1}{3}\frac{f^2}{M_{\rm Pl}^2}\frac{1}{H_0^2 t^3} + O(M_{\rm Pl}^{-4}) \tag{18}
$$

となり，加速膨張が実現していることが分かる．

ここまでのシナリオをまとめると以下のようになる．まず，宇宙は $t \to -\infty$ で Minkowski 時空で始まる[9]．そして徐々に負の圧力が生まれ，宇宙は膨張を始める．

最後に，この解に摂動を与えた時の挙動について述べる．

$$
\pi = \pi_{\rm dS} - \frac{1}{2}\frac{f^2}{M_{\rm Pl}^2}\frac{1}{H_0^2 t^2} + \delta\pi(t) \tag{19}
$$

---

[7] これは変換 (7) でもはや不変ではない．

[8] 運動方程式が 2 階微分までで収まる一般的な理論の事を，"Generalized Galileon"と呼ぶ．

[9] 同時にエネルギー密度は 0 であり，宇宙は"静かに"始まることになる．

という摂動を与える．$\delta\pi$ と $O(M_{\rm Pl}^{-2})$ の項の大小で摂動方程式が変わるので場合分けが必要である．

まず，$\delta\pi$ と $O(M_{\rm Pl}^{-2})$ の項にくらべて大きい時は，重力の補正を無視してよく，その時の摂動方程式の解は

$$t^4, 1/t \tag{20}$$

となる．次に $\delta\pi$ と $O(M_{\rm Pl}^{-2})$ の項にくらべて小さい時は解は

$$t, 1/t \tag{21}$$

となる．

t の正のベキである摂動 t, t^4 に関しては $t \to -0$ で徐々に消えて行くので，時間発展で無摂動の解に至る．一方，$1/t$ に比例する摂動は時間発展でどんどん大きくなるように思えるが，実は $\pi'_{\rm dS}(t) = -1/t$ であるので

$$\pi_{\rm dS}(t) - \epsilon \cdot 1/t = \pi_{\rm dS}(t) + \epsilon \cdot \pi'_{\rm dS}(t) \simeq \pi_{\rm dS}(t+\epsilon) \tag{22}$$

のように，$\pi_{\rm dS}$ に吸収させることができ，摂動を最初からなかったことにできる．よって，この無摂動の解はアトラクタになっている事がわかる．

6 Conclusion

ここでは，Null Energy Condition を破れば,（比較的）簡単に加速膨張期が作れそうだということを確認した．一般に Null Energy Condition を破ると系が不安定となるが，高階微分項を Galileon Theory に基いて入れればそれも回避できた．その結果，遠い過去に Minkowski 時空から始まるという，新しい初期宇宙のシナリオを作ろことが出来た．しかも，その無摂動の解はアトラクタになっており，初期条件に（あまり）依らずに加速膨張が実現することも確認できた．

参考文献

[1] P. Creminelli, A. Nicolis and E. Trincherini ”Galilean Genesis: an alternative to inflation”

[2] S. Dubovsky, T. Gregoire, A. Nicolis and R. Rattazzi, ”Null energy condition and superluminal propagation”

[3] A. Nicolis, R. Rattazzi and E. Trincherini, ”Energy ’s and amplitudes’ positivity”

[4] A. Nicolis, R. Rattazzi and E. Trincherini, ”The Galileon as a local modi?cation of gravity”

[5] T. Kobayashi, M. Yamaguchi, and J. Yokoyama, ”Generalized G-inflation: Inflation with the most general second-order field equations”