

インフレーション中の磁場生成と曲率ゆらぎ–磁場及び、 重力波–磁場の 3 点相関関数

名古屋大学宇宙論研究室 (C 研) M1 嵯峨承平

Abstract

インフレーション理論は、ビッグバンモデルの抱える問題を解決し、かつ、構造形成の種となる初期ゆらぎを生成する有力な理論である。しかし、インフレーションの物理機構は未解明な点が多い。宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) の温度ゆらぎや磁場の高次の相関を調べることで、インフレーションの多くの物理を知る手がかりとなることが期待されている。

一方で、近年銀河や銀河団といった大きなスケールで数 μG の磁場が観測されている。この起源の詳細は未だに解明されていないが、インフレーション中に生成されたと考えるモデルが有力な候補の 1 つである。ところが、通常の Maxell 理論の枠組みでは磁場は生成されない。磁場生成を可能にするためには、電磁場 $F_{\mu\nu}$ とインフラトン φ との相互作用の存在が必要である。この相互作用は高次元の素粒子理論により示唆されているモデルである。

本発表ではまず [1] をレビューする。[1] は、電磁場 $F_{\mu\nu}$ とインフラトン φ の相互作用によって曲率ゆらぎと磁場から作られる 3 点相関関数の波数依存性を示した。3 点相関の情報は、インフレーションモデルを区別することを可能にする。[1] の結果に加えて、私はインフレーション中に生成される重力波と磁場の 3 点相関の計算を行い、波数依存性を明らかにした。また、この 3 点相関が CMB に与える影響についての考察も行う。

1 Setting

磁場生成が可能となる action は、

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{M_{\text{pl}}^2}{16\pi} R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) - \frac{1}{4} g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} W(\varphi) F_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} \right] \quad (1)$$

である。ここで、 $M_{\text{pl}} = G^{-1/2}$ であり、また φ はインフラトンである。 $W(\varphi)$ のカップリングによって電磁場の conformal invariance が破れるので磁場生成が可能となる。 $W(\varphi)$ の時間発展は、

$$W(\varphi) = W_I \left(\frac{a}{a_I} \right)^{2n} \quad (2)$$

と仮定する。このベキの値によって生成された磁場の振舞が変化する。

1.1 磁場の見積もり

上記の action によって生成される磁場を見積もることが可能である。ベクトル場と磁場の関係は、

$$B_i(\mathbf{x}, \eta) = \frac{1}{a(\eta)} \eta_{ilm} \partial_l A_m(\mathbf{x}, \eta) \quad (3)$$

である。ここで、 η は conformal time であり、 η_{ilm} は $\eta_{123} = +1$ の反対称テンソルである。これを用いて、インフレーション終了時における磁場のスペクトルを求める。

$$\langle B_i(\mathbf{k}, \eta_I) B^j(\mathbf{k}', \eta_I) \rangle = (2\pi)^3 \frac{P_B(k)}{2} P_{ij}(\hat{\mathbf{k}}) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \quad (4)$$

ここで、 $P_{ij}(\hat{\mathbf{k}}) = \delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j$ は projection tensor である。また、現在の WMAP によるパラメータを用いると、 $P_B(k)$ と磁場のスケール依存性は、次のように書くことができる。

$$\frac{d}{d \ln k} \langle B_k^2 \rangle = \frac{k^3 P_B(k) a_I^4}{2\pi^2} \approx 10^{-22.8-22.5n_B} \frac{\Gamma(\frac{5-n_B}{2})^2}{W_I \Gamma(\frac{5}{2})^2} \left(\frac{k}{\text{Mpc}^{-1}} \right)^{n_B} \text{Gauss}^2 \quad (5)$$

ここで、 $n_B \equiv 4 - 2n/(1 - \epsilon)$ である。よって現在観測される磁場の強さが理論のパラメータ n とスローロールパラメータ ϵ のみで表すことができた。今回考えるべき n の値として現在観測されている磁場を説明可能かつ、back reaction problem を起こさないパラメータで最大限可能な $n = 2.1$ とする。 $n = 2.1$ によって磁場のスペクトルが $n_B = -0.2$ 、生成される磁場の大きさは 1Mpc。のスケールで 10^{-9} Gauss を得る。

1.2 コメント

このカップリングによる磁場生成についていくつかコメントをしておく。

はじめに、back reaction problem についてだが、インフレーション中はインフラトンのエネルギー密度が全体のエネルギー密度に対して支配的でないこと加速膨張を実現しない。電磁場は宇宙で放射成分として振る舞うので、磁場が生成され成長しすぎると放射成分が支配的になるためインフレーションがうまくいかない (Back reaction problem)。これを逆に利用することで可能な n に制限が付けられており、

$$|n| < 2.1 \iff -0.2 < n_B < 2.1 \quad (6)$$

を得ている [1]。この制限の中で我々は最大限可能な磁場生成を行うパラメータを上記の通り選んだ。

次に、strong coupling problem であるが、インフレーション終了時に電磁場の項が我々がよく知る Maxwell の体系に戻る必要がある。そのため、インフレーション終了時、 $W = 1$ となっていないといけない。ここから次のように時間発展を考えることができる。 $n > 0$ の時は、インフレーション終了時に 1 であることから、初期は極めて W は小さいはずである。一方 $n < 0$ の場合 W は初期に極めて大きくないといけない。(それこそ e^{120} ほどのファクターで。)

さて、ここで一度考えるべきことは W が effective な結合定数の逆数となっているという事実である。これは、場を再定義することによって電磁場と fermion の結合定数が $g \rightarrow g/W$ となることで理解される。この事実と先程の時間に対する振る舞いを考えることで、strong coupling problem が生じる。Strong coupling problem とは、初期に結合定数が $n > 0$ で極めて大きくなってしまふ問題である。このような理論は素粒子論的な立場から motivate されない。また、場の理論や摂動論も破綻してしまう。このパラメータ領域を避けると、磁場より電場が生成されてしまい、結局うまくいかない。

我々はこの事実に関しては、[1] や [2] で述べられているように、hidden field の磁場成分、電場成分が重力的にどう CMB に影響を与えるかを考えるので、これ以上言及しない。

2 Perturbations

曲率ゆらぎ、テンソルゆらぎ (重力波) は次のように定義される。

$$g_{ij} = a^2(1 + 2\mathcal{R})\delta_{ij} + a^2h_{ij} \quad (7)$$

また、ゲージは $\delta\varphi = 0$ となるようにとる。ここで、一貫してスローロールパラメーターは定数であると近似しておく。

2.1 \mathcal{R}

フーリエ変換

$$\mathcal{R}(\mathbf{x}, \eta) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathcal{R}(\mathbf{k}, \eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (8)$$

量子化

$$\mathcal{R}(\mathbf{k}, \eta) = \mathcal{R}_{k*} u_\nu(-k\eta) \beta(\mathbf{k}, 0) + \text{h.c} \quad (9)$$

$\beta(\mathbf{k}, 0)$ はスカラーモードである曲率ゆらぎの生成消滅演算子。

ここでモード関数は次のように定義される。

$$u_\nu(x) \equiv \frac{i\pi x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu)} H_\nu^{(1)}(x) \quad (10)$$

また、 $\nu \equiv 3/2 + \epsilon/(1 - \epsilon)$ である。また、下付きのアスタリスクは horizon cross での値をとる定数である。

$$\mathcal{R}_{k*} = i e^{i\pi\nu/2 + i\pi/4} (1 - \epsilon) 2^\nu \Gamma(\nu) \frac{H_*}{\sqrt{\epsilon} M_{\text{pl}}} \frac{(-k\eta_*)^{3/2 - \nu}}{k^{3/2}} \quad (11)$$

2.2 h_{ij}

フーリエ変換

$$h_{ij}(\mathbf{x}, \eta) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda \pm 2} h^{(\lambda)}(\mathbf{k}, \eta) \mathcal{O}_{ij}^{(\lambda)}(\hat{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (12)$$

ここで、 $\mathcal{O}_{ab}^{(\pm 2)} \equiv e_{ab}^{\pm 2}(\hat{k})$ であり、projection tensor である。量子化は、

$$h^{(\lambda)}(\mathbf{k}, \eta) = h_k(\eta) \beta(\mathbf{k}, \lambda) + \text{h.c} \quad (13)$$

ここで、 $\beta(\mathbf{k}, \lambda)$ は生成消滅演算子である。

モード関数は、 $h_k(\eta) = h_{k*} u_\mu(-k\eta)$, $h_{k*} = -2\sqrt{\epsilon} \mathcal{R}_{k*}$ である。

3 Initial の 3 点相関関数

相互作用する場の発展を含む相関関数の計算は In-in formalism を用いることで計算することができる。[3] 曲率ゆらぎ-磁場の 3 点相関は、

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{R}(\mathbf{k}_1, \eta) B_a(\mathbf{k}_2, \eta) B_b(\mathbf{k}_3, \eta) \rangle \\ &= (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \frac{|R_{k_1*}|^2 |v_{k_2*}|^2 |v_{k_3*}|^2}{a^2(\eta)} W_1 \tau_1^{\frac{2n}{1-\epsilon}} \left[K_1 \mathcal{N}_{ab}^{(1)} + K_2 \mathcal{N}_{ab}^{(2)} + K_{3a} \mathcal{N}_{ab}^{(3)} + K_{3b} \mathcal{N}_{ab}^{(4)} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

K_n の定義は、

$$\begin{aligned} K_1 &= -4k_1 k_2 k_3 \text{Im} \left\{ \int_{\tau}^{\infty} d\tau_1 \tau_1^{-2n/(1-\epsilon)} \frac{d}{d\tau_1} u_{\alpha}(x_2 \tau_1) \frac{d}{d\tau_1} u_{\alpha}(x_3 \tau_1) \left(1 + (1-\epsilon) \tau_1 \frac{d}{d\tau_1} \right) u_{\nu}(\tau_1) \right\} \\ K_2 &= 2 \frac{k_2^2 k_3^2}{k_1} \text{Im} \left\{ \int_{\tau}^{\infty} \tau_1^{-2n/(1-\epsilon)} u_{\alpha}(x_2 \tau_1) u_{\alpha}(x_3 \tau_1) \left(1 + (1-\epsilon) \tau_1 \frac{d}{d\tau_1} \right) u_{\nu}(\tau_1) \right\} \\ K_{3a} &= 2 \frac{k_2^2 k_3^2}{k_1} \text{Im} \left\{ \int_{\tau}^{\infty} \tau_1^{-2n/(1-\epsilon)} u_{\alpha}(x_2 \tau_1) (1-\epsilon) \tau_1 \frac{d}{d\tau_1} u_{\alpha}(x_3 \tau_1) u_{\nu}(\tau_1) \right\} \\ K_{3b} &= K_{3a}(k_2 \leftrightarrow k_3) \end{aligned} \quad (15)$$

$\mathcal{N}_{ab}^{(n)}$ の定義は、

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{ab}^{(1)} &= \frac{1}{4} (2\mu \delta_{ab} - \hat{k}_{2a} \hat{k}_{3b} - \hat{k}_{2b} \hat{k}_{3a}) \\ \mathcal{N}_{ab}^{(2)} &= \frac{1}{2} \left\{ 2\mu^2 \delta_{ab} - \mu (\hat{k}_{2b} \hat{k}_{3a} + \hat{k}_{2a} \hat{k}_{3b}) + 2\eta_{ami} \hat{k}_{2m} \hat{k}_{3l} \eta_{bkn} \hat{k}_{2k} \hat{k}_{3n} \right\} \\ \mathcal{N}_{ab}^{(3)} &= \frac{1}{2} \left(\mu + \frac{k_2}{k_3} \right) (2\mu \delta_{ab} - \hat{k}_{2a} \hat{k}_{3b} - \hat{k}_{2b} \hat{k}_{3a}) + \eta_{ami} \hat{k}_{3m} \hat{k}_{2i} \eta_{bkn} \hat{k}_{3k} \hat{k}_{2n} \\ \mathcal{N}_{ab}^{(4)} &= \frac{1}{2} \left(\mu + \frac{k_3}{k_2} \right) (2\mu \delta_{ab} - \hat{k}_{2a} \hat{k}_{3b} - \hat{k}_{2b} \hat{k}_{3a}) + \eta_{ami} \hat{k}_{2m} \hat{k}_{3i} \eta_{bkn} \hat{k}_{2k} \hat{k}_{3n} \end{aligned} \quad (16)$$

重力波-磁場の 3 点相関は、

$$\begin{aligned} & \langle h_{ab}(\mathbf{k}_1, \eta) B_c(\mathbf{k}_2, \eta) B_d(\mathbf{k}_3, \eta) \rangle = 2(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) |\gamma_{k_1*}|^2 |v_{k_2*}|^2 |v_{k_3*}|^2 W_1 (-k_1 \eta)^{2n/(1-\epsilon)} \frac{k_2 k_3}{a^2(\eta)} \\ & \times \left[k_1 \text{Im} \int_{\tau_1}^{\infty} d\tau \tau^{\frac{-2n}{1-\epsilon}} u_{\mu}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} u_{\alpha}(x_2 \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} u_{\alpha}(x_3 \tau) \mathcal{N}_{abcd}^{(1)} + \frac{k_2 k_3}{k_1} \text{Im} \int_{\tau_1}^{\infty} d\tau \tau^{\frac{-2n}{1-\epsilon}} u_{\mu}(\tau) u_{\alpha}(x_2 \tau) u_{\alpha}(x_3 \tau) \mathcal{N}_{abcd}^{(2)} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{abcd}^{(1)} &\equiv \sum_{\lambda} \epsilon_{ij}^{(\lambda)} (-\hat{k}_1) \epsilon_{ab}^{(\lambda)} (\hat{k}_1) \eta_{cmi} \eta_{dnj} \hat{k}_{2m} \hat{k}_{3n} \\ \mathcal{N}_{abcd}^{(2)} &\equiv -\eta_{cmk} \eta_{dnj} \hat{k}_{2i} \hat{k}_{3l} - \eta_{cmj} \eta_{dnk} \hat{k}_{2l} \hat{k}_{3i} \end{aligned} \quad (18)$$

を得る。

4 CMB に与える影響

磁場の非等方ストレスがアインシュタイン方程式の右辺に入ってくるため、磁場起源の曲率ゆらぎと重力波を作る。それと、primary の曲率ゆらぎと重力波が相関を持ち、CMB の温度ゆらぎと

Schematic outline

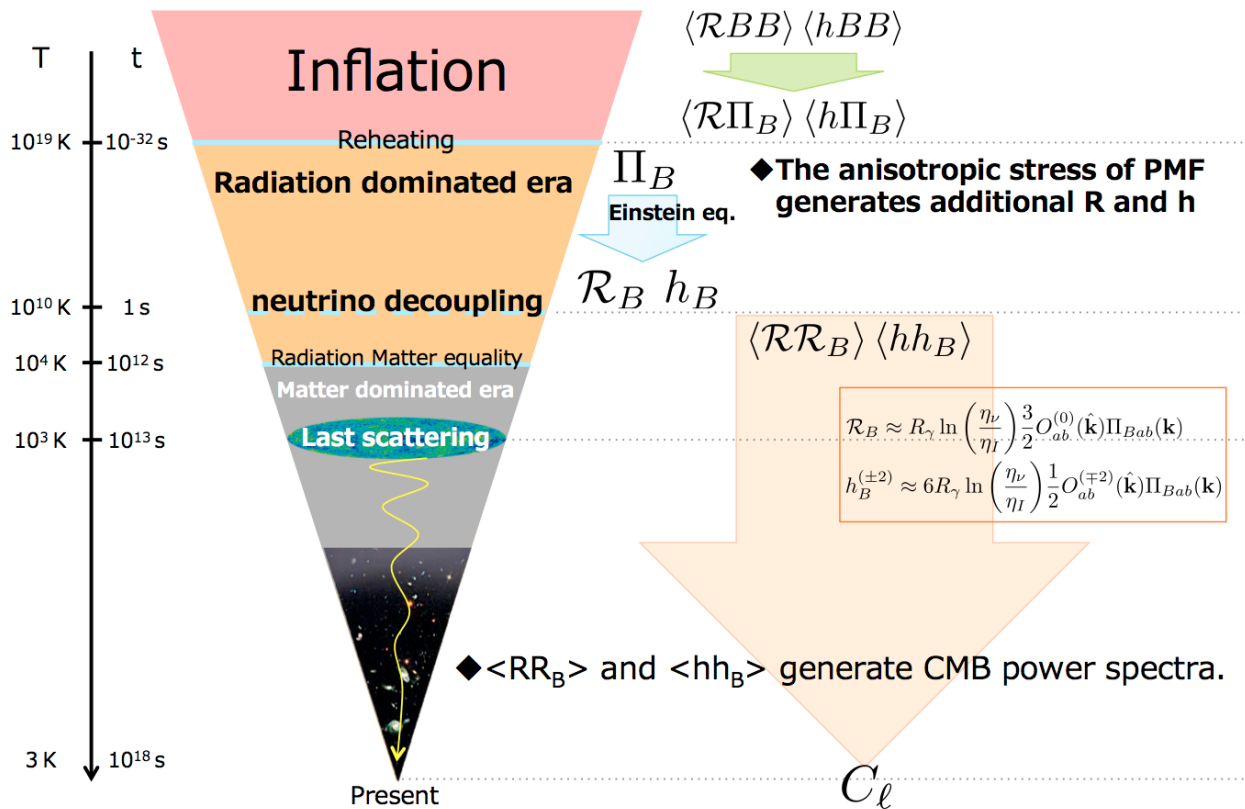


図1 磁場の非等方ストレスが曲率ゆらぎ、重力波を作る

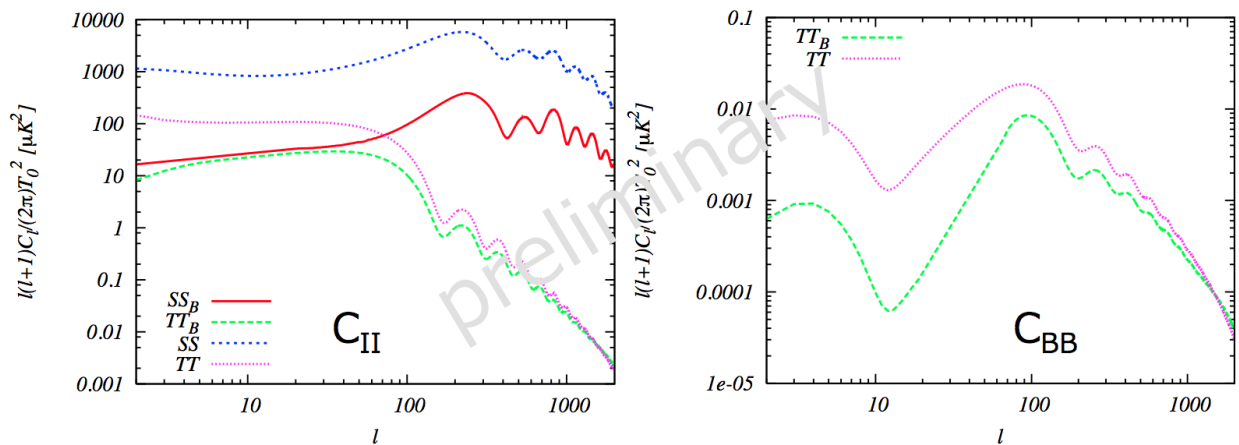


図2 3点相関がCMBに与える影響

して表れる。[4] 3点相関が CMB の温度ゆらぎに与える影響を計算する [5]。結果として、次が得られた。次の点が面白い。

- SS_B で作られる power spectrum は SS で作られるものと符号が異なる
- SS と比べ SS_B は 1 % の大きさ
- TT_B で作られる power spectrum は TT で作られるものと small scale において同じ大きさになる

参考文献

- [1] L. Motta and R. R. Caldwell (2012), 1203.1033.
- [2] R. R. Caldwell, L. Motta, and M. Kamionkowski, Phys.Rev. D84, 123525 (2011), 1109.4415.
- [3] S. Weinberg Phys.Rev.D72, 043514 (2005), hep-th/0506236.
- [4] A. Lewis, Phys.Rev. D70, 043011 (2004), astro-ph/0406096.
- [5] M. Shiraishi, S. Yokoyama, D. Nitta, K. Ichiki and K. Takahashi Phys.Rev.D82, 103505 (2010), 1003.2096.