天体の運動に対する
宇宙定数の影響

弘前大学大学院　理工学研究科
伏見直将(M1)

共同研究者:山田慧、浅田秀樹

目次

- 導入
- 近日点移動
- Kottler解
- 観測への応用
- まとめ

導入

宇宙定数Λ

- 2011年、Saul Perlmutter、Brian P. Schmidt、Adam G. Riess三名がノーベル物理学賞を受賞した。（宇宙の加速膨張を発見）
- 加速膨張が宇宙定数によるものだとした場合、天体の運動への影響は？

近日点移動

- Schwarzschild計量を用いた計算はよく知られている。
- 宇宙定数を含む計量を使った場合影響はどうなるのか？

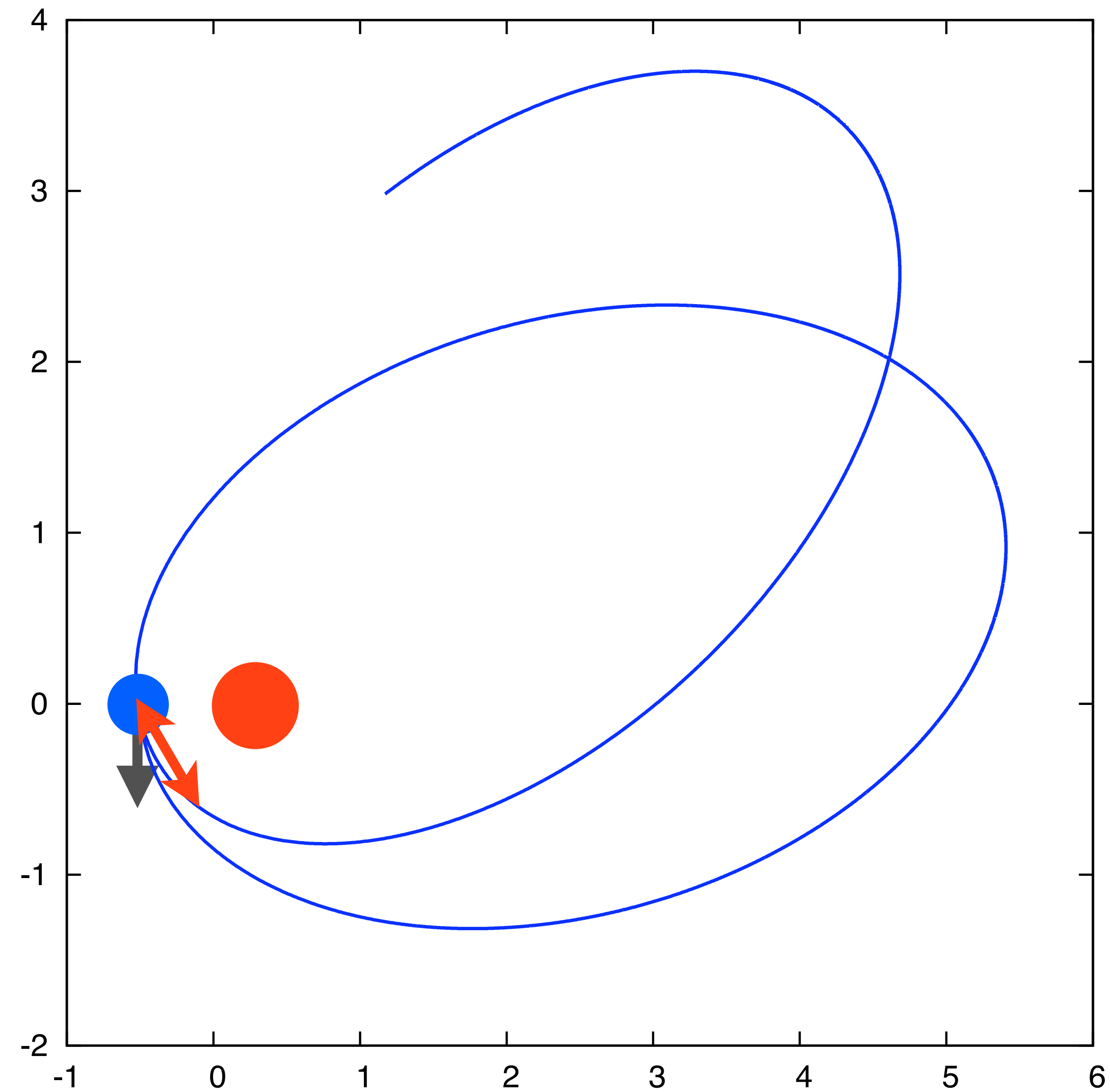
近日点移動

Schwarzschild計量での計算

$$\Delta\phi \simeq 2\pi + \boxed{\frac{3GM}{c^2}\left(\frac{r_a + r_p}{r_a r_p}\right)\pi}$$

相対論による補正項

r_a, r_p： 遠日点、近日点



宇宙定数を含む計量

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Schwarzschild解を求めるのと同じように

静的球対称

Kottler解(Schwarzschild-de Sitter解)

$$ds^2 = -(1 - \frac{r_g}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}$$ シュバルツシルト半径

Kottler解を使った近日点移動の計算

[1]J. N. Islam, Phys. Lett. A 97, 239(1983)
[2]J. F. Cardona, and J. M. Tejeiro, Astrophys. J. 493, 53(1998)

Kottler解を使った計算

$$ds^2 = -(1 - \frac{r_g}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

＊軌道を平面上に固定　$\theta = \frac{\pi}{2}$

測地線方程式の解

$$\epsilon = (1 - \frac{r_g}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2)\dot{t}$$ ←エネルギー保存則

$$j = r^2\dot{\phi}$$ ←角運動量保存則

$$(\frac{du}{d\phi})^2 = \frac{r_g}{u^2}[\frac{\Lambda}{3j^2r_g} + (\frac{\epsilon^2 - 1}{j^2} + \frac{\Lambda}{3})\frac{u^2}{r_g} + \frac{u^3}{j^2} - \frac{u^4}{r_g} + u^5] \quad , \quad \frac{1}{r} = u$$

$$\boxed{\Delta\phi = 2\int_{u_a}^{u_p} \frac{d\phi}{du} du}$$ へ代入

解と係数の関係

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{r_g}{u^2}\left[\frac{\Lambda}{3j^2r_g} + \left(\frac{\epsilon^2-1}{j^2} + \frac{\Lambda}{3}\right)\frac{u^2}{r_g} + \frac{u^3}{j^2} - \frac{u^4}{r_g} + u^5\right]$$
$$= \frac{r_g}{u^2}(u-u_a)(u-u_p)(u-u_0)(u-u_1)(u-u_2)$$

$$u^3 - (u_0+u_1+u_2)u^2 + (u_0u_1+u_1u_2+u_2u_0)u - u_0u_1u_2$$

$$u^4 : u_a+u_p+u_0+u_1+u_2 = \frac{1}{r_g}$$
$$u^3 : (u_a+u_p)(u_0+u_1+u_2) + u_au_p + u_0u_1 + u_1u_2 + u_2u_0 = \frac{1}{j^2}$$
$$u^2 : (u_a+u_p)(u_0u_1+u_1u_2+u_2u_0) + u_au_p(u_0+u_1+u_2) + u_0u_1u_2$$
$$= -\frac{1}{r_g}\left(\frac{\epsilon^2-1}{j^2} + \frac{\Lambda}{3}\right)$$
$$u^1 : u_au_p(u_0u_1+u_1u_2+u_2u_0) + u_0u_1u_2(u_a+u_p) = 0$$
$$u^0 : u_au_pu_0u_1u_2 = -\frac{\Lambda}{3j^2r_g}$$

Kottler計量

$$(\frac{du}{d\phi})^2 = \underline{(u-u_a)(u-u_p)[1-(u_a+u_p+u)r_g} - \underline{(\frac{\Lambda}{3j^2u_au_pu})(\frac{1}{u_a}+\frac{1}{u_p}+\frac{1}{u})]}$$

宇宙定数の効果

Schwarzschild計量

$$(\frac{du}{d\phi})^2 = (u-u_a)(u-u_p)[1-(u_a+u_p+u)r_g]$$

$$\Delta\phi = \int_{u_a}^{u_p} \frac{1}{\sqrt{(\frac{du}{d\phi})^2}} du$$

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \gg r \gg r_g$$

$$\Delta\phi \simeq 2\pi + \frac{3\pi GM}{c^2}(\frac{r_a+r_p}{r_ar_p}) + \boxed{\Lambda\frac{\pi c^2\sqrt{r_ar_p}(r_a+r_p)^2}{4GM}}$$

宇宙定数による補正項

観測への応用

実際の近日点移動の観測量から

Λの値に制限を与えることができる

$$\Lambda \leq \frac{\delta}{\frac{\pi c^2 \sqrt{r_a r_p}(r_a + r_p)^2}{4GM} \frac{180*3600}{\pi}} \frac{T}{100_{[year]}} [m^{-2}]$$

水星、土星の観測値で計算

$$\Lambda \leq 10^{-41}, 10^{-43} [m^{-2}]$$

加速膨張から予想されているΛの大きさ

$$\Lambda \sim 10^{-52} [m^{-2}]$$

まとめ

今回得られた制限は

水星による制限 $\Lambda \leq 10^{-41}[\mathrm{m}^{-2}]$

土星による制限 $\Lambda \leq 10^{-43}[\mathrm{m}^{-2}]$

加速膨張から予想されている宇宙定数の値は

$$\Lambda \sim 10^{-52}[m^{-2}]$$

⇩ 桁数が不十分

他の天体、運動を考え制限を与える。

シュバルツシルト時空による補正の展開の次数を上げる。

おわり