

重力理論を用いた天体の研究

塚本直樹
立教大学理学研究科

1 概要

ブラックホールやワームホールによる強い重力場の重力レンズ効果として、光球 (photon sphere) 近くを通る光線によって作られる無限個のアインシュタインリングが知られており、特に相対論的アインシュタインリング (relativistic Einstein ring) と呼ばれている。

天体間距離、アインシュタインリングと相対論的アインシュタインリングの半径が分かれば、シュバルツシルト・ブラックホール (Schwarzschild black hole) とエリス・ワームホール (Ellis wormhole) が区別できることを示した [1]。

2 始めに

ここ数十年、強い重力場での重力レンズ効果が熱心に研究されている [2]。Frittelli ら [3], Virbhadra と Ellis [4, 5] や Bozza ら [6] によって、シュバルツシルト時空における相対論的アインシュタインリングなどの強重力場での重力レンズ効果が研究された。シュバルツシルト時空やエリス時空を含む球対称時空での強重力場の重力レンズ効果は Bozza [7], Hasse と Perlick [8] や Perlick [9] によって研究され、相対論的アインシュタインリングは、光球が存在すれば、シュバルツシルト時空以外での球対称時空でも作られることが示された。

Kim と Cho [10], Cramer ら [11] によってワームホールによる重力レンズ効果の先駆的な研究がなされた後に、様々な種類のワームホールによる重力レンズ効果が研究されている [11, 12, 13, 14, 15]。

エリス時空は Ellis [16] によって研究され、Morris-Thorne class の通行可能なワームホール時空である [17, 18]。エリス時空での光の曲がり角は Chetouani と Clement [19], Perlick [9], Nandi ら [12], 中島と浅田 [20] によって計算され、弱い重力場での重力レンズ効果は Dey と Sen [21], 阿部 [22], Toki ら [23] によって研究され、強い重力場での重力レンズ効果は Perlick [9] によって研究された。

アインシュタインリングと相対論的アインシュタインリングを観測することで、ともに球対称静的であるシュバルツシルト・ブラックホールとエリス・ウォームホールを区別することができるであろうか。この問いに答えるために、アインシュタインリングと相対論的アインシュタインリングの半径の関係を求めることにする。

3 エリス時空中の光の曲がり角

まず、エリス時空中の光の曲がり角について考察しよう [9, 12, 19, 20]。エリス時空の線素は

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + (r^2 + a^2)d\Omega^2 \quad (1)$$

で与えられる。ここで $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ であり、 a は正の定数である。ここでは、 $\rho^2 = r^2 + a^2$ として

$$ds^2 = -dt^2 + \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2}\right)^{-1} d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2 \quad (2)$$

と書き直す。ここで $\rho = \pm a$ はウォームホールの喉を表している。時空の定常性と軸対称性から、キリング・ベクトル (Killing vector) $t^\mu \partial_\mu = \partial_t$ と $\phi^\mu \partial_\mu = \partial_\phi$ が存在する。

以下では光の軌道が赤道面上 $\theta = \pi/2$ にある場合について考えるが、球対称性から一般性は損なわれない。 $k^\mu \partial_\mu$ をヌル測地線の接ベクトルとすると、光子のエネルギー $E \equiv -g_{\mu\nu} k^\mu t^\nu$ と角運動量 $L \equiv g_{\mu\nu} k^\mu \phi^\nu$ と $k^\mu k_\mu = 0$ から、光の軌跡は

$$\frac{1}{\rho^4} \left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2 = \frac{1}{b^2} \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2}\right) \left(1 - \frac{b^2}{\rho^2}\right) \quad (3)$$

となる。ここで $b \equiv L/E$ は光子の衝突径数である。

光の軌跡の有効ポテンシャルの議論から¹、 $|b| > a$ ならば散乱軌道で、 $|b| = a$ ならば不安定円軌道 (光球)、 $|b| < a$ ならば衝突軌道となるために、

¹臨界衝突径数 b_c を求める。そのためには、 ρ を使うよりも (1) 式に戻って赤道面上の光の軌跡を求めたほうが、計算が楽である。光の軌跡は、

$$\dot{r}^2 + V_{eff} = 1 \quad (4)$$

となる。ここで $\dot{}$ はアフィンパラメーター微分であり、有効ポテンシャルを

$$V_{eff} \equiv \frac{b^2}{r^2 + a^2} \quad (5)$$

と定義した。(4) 式を求めるためにアフィンパラメーターの取りかえを行った。[25] の 117 頁でのシュバルツシルト時空中の計算を参照のこと。

$V_{eff}(r)$ は r の偶関数なので、 $r \geq 0$ のみを考えればよい。 $V_{eff}(r)$ は $r = 0$ で極大値 $(b/a)^2$ を取り、 r に関して単調減少し、 $V_{eff}(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ である。(4) 式から、 $V_{eff}(r) \leq 1$ の範囲では光子は運動できるが、 $V_{eff}(r) > 1$ の範囲では光子の運動は禁止されていることが分かる。このことから、 $r \rightarrow \infty$ から $r = 0$ の方向へ運動する光子は、 $V_{eff}(r) = 1$ となる r で反射する。以上の議論から、 $(b_c/a)^2 = 1$ 、つまり $b_c = \pm a$ とわかる。

また、有効ポテンシャルを $v_{eff} \equiv V_{eff} - 1$ と定義する方が好きな人が多いかもしれない。

光線はワームホールの喉を通過する。ここでは、散乱軌道 $|b| > a$ のみを考える²。 $u \equiv 1/\rho$ とすると、(3) 式は

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{1}{b^2}(1 - a^2u^2)(1 - b^2u^2) \quad (6)$$

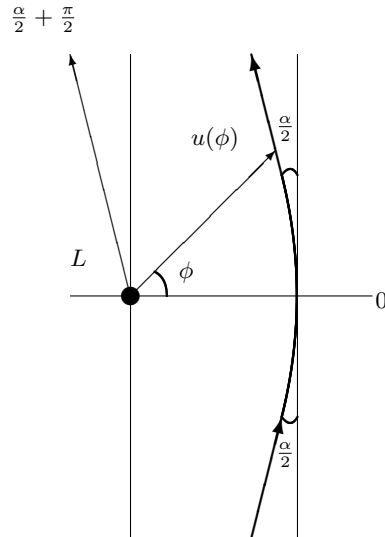
となる。ここで、

$$G(u) = a^2(a^{-2} - u^2)(b^{-2} - u^2) \quad (7)$$

として、(6) 式を積分すると、 ϕ は u の関数として

$$\phi = \pm \int_u^{b^{-1}} \frac{du}{\sqrt{G(u)}} \quad (8)$$

で与えられる。ここで $\phi(b^{-1}) = 0$ とした。



図から、光の曲がり角 α は

$$\alpha = 2 \int_0^{b^{-1}} \frac{du}{\sqrt{G(u)}} - \pi \quad (9)$$

で与えられることが分かる。

ここで、 $u = b^{-1} \sin \theta$ と積分変数の変換を行うと

$$\int_0^{b^{-1}} \frac{du}{\sqrt{G(u)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \sin^2 \theta}} = K\left(\frac{a}{b}\right) \quad (10)$$

²エリス時空での光の衝突軌道の定性的なことは [9] で詳しく議論されている。

となり、第一種の完全楕円積分³で記述できることが分かる。第一種の完全楕円積分 $K(k)$ は

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad (11)$$

で定義される。したがって、曲がり角は

$$\alpha = 2K\left(\frac{a}{b}\right) - \pi \quad (12)$$

となる。 $K(k)$ を展開すると、

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 k^{2n} \quad (13)$$

となる。ここで、 $n!!$ は n の double factorial であり、 $(-1)!! = 1$ である。これを使うと、曲がり角は

$$\alpha = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \left(\frac{a}{b}\right)^{2n} \quad (14)$$

と表せる。

したがって、弱い重力場 $|b| \gg a$ では

$$\alpha \simeq \frac{\pi}{4} \left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad (15)$$

となる。

第一種の完全楕円積分 $K(k)$ の性質から直ちにわかるように、 $|b|$ を a に近づけていくと重力場の効果が強くなるので、曲がり角 α は大きくなり、 $|b| \rightarrow a$ の極限では曲がり角 α は \log 発散する。

4 エリス時空中での重力レンズ効果

次に、エリス時空中でのアインシュタインリングと相対論的アインシュタインリングの半径を求めよう。以下では観測者と光源がレンズ天体（ワームホールあるいはブラックホール）から十分に離れている場合について考察する。つまり、 D_l を観測者とレンズ天体の間の距離、 D_{ls} をレンズ天体と光源の間の距離とすると、 $D_l \gg b$ かつ $D_{ls} \gg b$ の場合を考える。天体の配置は次頁の図の通りであり、光源 S が放出した光はレンズ天体 L によって曲げられ、 ϕ の角度でなく、 θ の角度で観測者 O に届く。 $|\bar{\alpha}| \ll 1$ 、 $|\theta| \ll 1$ 、 $|\phi| \ll 1$ である場合を考えると、レンズ方程式は

$$D_{ls}\bar{\alpha} = D_s(\theta - \phi) \quad (16)$$

³第一種の完全楕円積分については、たとえば、[24, 25, 26] を見よ。

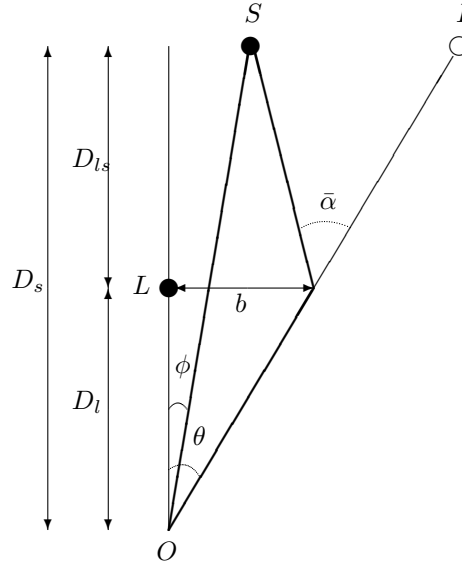
で与えられる。ここで、 $\bar{\alpha} = (\alpha \bmod 2\pi)$ は有効曲がり角で、 $D_s = D_l + D_{ls}$ は観測者と光源の間の距離である。曲がり角 α は非負の整数である光線の巻き数 n を用いて、

$$\alpha = \bar{\alpha} + 2\pi n \quad (17)$$

と表すことができる。ここでは、(相対論的) アインシュタインリングに興味があるので、

$$\phi = 0 \quad (18)$$

とする。このとき、 $\theta = \theta_n$ は観測される(相対論的) アインシュタインリングの半径を表している。



図からも明らかなように、 $b = D_l \theta$ なので、

$$\theta_n = \frac{a}{D_l} \frac{1}{k_n} \quad (19)$$

である。ここで、 $k_n \in (0, 1)$ は、(12)、(16)、(17)、(18) 式から導かれる

$$2K(k) - \frac{\eta}{k} = (2n + 1)\pi \quad (20)$$

$$\eta \equiv \frac{D_s}{D_l D_{ls}} a \quad (21)$$

$$k \equiv \frac{a}{b} \quad (22)$$

の唯一の解である。 $2K(k) - \eta/k$ は k に関して単調増加し、 k を 0 から 1 まで増加させると、 $2K(k) - \eta/k$ は $-\infty$ から ∞ まで動く。また、 k_n は n に関して単調増加し、 $n \rightarrow \infty$ の極限で $k_n \rightarrow 1$ となる。したがって、 θ_n は n に関して単調減少し、 $n \rightarrow \infty$ の極限で $\theta_n \rightarrow a/D_l$ となる。

弱い重力場 $|b| \gg a$ では光線の巻き数は $n = 0$ である。先ほど計算した光の曲がり角 (15) 式) を使うと、(20) 式を近似的に解くことができ、アインシュタインリングの半径は

$$\begin{aligned}\theta_0 &\simeq \left(\frac{\pi}{4} \frac{D_{ls}}{D_s D_l^2} a^2 \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\simeq 4 \times 10^{-1} \text{arcsecond} \left(\frac{D_{ls}}{10 \text{kpc}} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{20 \text{kpc}}{D_s} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{10 \text{kpc}}{D_l} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{a}{10 \text{AU}} \right)^{\frac{2}{3}}\end{aligned}\quad (23)$$

となる。この近似は $D_l \gg a$ かつ $D_{ls} \gg a$ ならば、よく成り立ち、 $a = 10 \text{pc}$ で $D_l = D_{ls} = 10 \text{kpc}$ では、数値計算と比較すると、その相対誤差は $\sim 10^{-2}$ である。

光線の巻き数が $n \geq 1$ となるような強い重力場では、 $a \simeq b$ つまり $k_n \simeq 1$ が (20) 式を満たしていることを数値計算で確かめることができる。このことは、光球付近を回転する光線が相対論的アインシュタインリングを生成することを示している [7, 9]。それ故に、相対論的アインシュタインリングの半径は近似的に

$$\begin{aligned}\theta_{n \geq 1} &\simeq \frac{a}{D_l} \\ &\simeq 1 \times 10^{-3} \text{arcsecond} \left(\frac{10 \text{kpc}}{D_l} \right) \left(\frac{a}{10 \text{AU}} \right)\end{aligned}\quad (24)$$

としてよい。 D_{ls} 、 D_l 、 a の値によらずに、 θ_n の相対誤差は $n = 1$ では $\sim 10^{-3}$ であり、 $n \geq 2$ では 10^{-5} よりも小さい。このことは、相対論的アインシュタインリングを互いに分離して観測することが難しいことを示唆している。

したがって、無限個のリングが一つに重なった相対論的アインシュタインリングと一つのアインシュタインリングが観測され得る。この結果は η の値によらずに成り立つ。

D_s 、 D_l 、 θ_0 が与えられれば、喉の半径 a を (23) 式から求めることができる。したがって、相対論的アインシュタインリングの半径 $\theta_{n \geq 1}$ が観測できれば、(24) 式と比較することで、レンズ天体がワームホールであるかどうかをテストすることができる。

また、(23) 式と (24) 式から、 θ_0 と $\theta_{n \geq 1}$ の関係式

$$\theta_{n \geq 1} \simeq \left(\frac{4}{\pi} \frac{D_s}{D_{ls}} \right)^{\frac{1}{2}} \theta_0^{\frac{3}{2}}\quad (25)$$

が求まる。

5 ブラックホールとワームホールの判別

ブラックホールとワームホールの判別可能性を議論するために、シュバルツシルト時空での光の曲がり角と (相対論的) アインシュタインリングについて思い出した上で [4, 5, 6, 8, 27]、 θ_0 と $\theta_{n \geq 1}$ 関係式を導く。

弱い重力場 $b \gg r_g$ では、光の曲がり角は近似的に

$$\alpha \simeq \frac{2r_g}{b} \quad (26)$$

で与えられる。ここで、 $r_g = 2GM/c^2$ は質量 M のブラックホールのシュバルツシルト半径である。アインシュタインリングの半径は、

$$\begin{aligned} \theta_0 &\simeq \sqrt{\frac{2D_{ls}}{D_l D_s}} r_g \\ &\simeq 9 \times 10^{-1} \text{arcsecond} \left(\frac{D_{ls}}{10 \text{kpc}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{M}{10^6 M_\odot} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{10 \text{kpc}}{D_l} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{20 \text{kpc}}{D_s} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (27)$$

となる。シュバルツシルト半径 r_g はワームホールの喉の半径 a と同様にして決定することができる。

光線の巻き数が $n \geq 1$ となるような強い重力場では、レンズ方程式を満たす衝突径数 b は、臨界衝突径数 $b \simeq (3\sqrt{3}/2)r_g$ でなければならない⁴。相対論的アインシュタインリングの半径 $\theta_{n \geq 1}$ は

$$\begin{aligned} \theta_{n \geq 1} &\simeq \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{r_g}{D_l} \\ &\simeq 1 \times 10^{-5} \text{arcsecond} \left(\frac{M}{10^6 M_\odot} \right) \left(\frac{10 \text{kpc}}{D_l} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

となる。やはり、シュバルツシルト時空の場合も、相対論的アインシュタインリングを互いに分離して観測することは難しい。

ここで、弱い重力場での光の曲がり角の leading term は、エリス時空においては (15) 式で求めたように微小量 a/b の二次のオーダーであったが、シュバルツシルト時空では (26) 式が示すように微小量 r_g/b の一次のオーダーである。したがって、シュバルツシルト時空での θ_0 と $\theta_{n \geq 1}$ の関係式は

$$\theta_{n \geq 1} \simeq \frac{3\sqrt{3}}{4} \frac{D_s}{D_{ls}} \theta_0^2 \quad (29)$$

となり、エリス時空における場合 ((25) 式) と異なっている。よって、 D_s 、 D_l 、 θ_0 、 $\theta_{n \geq 1}$ が与えられれば、原理的にはワームホールとブラックホールを判別することが可能である。

6 議論

とりあえず、 10^{-3}arcsecond の分解能を持つ観測装置を使って相対論的アインシュタインリングを観測できると仮定しよう [28]。そうすると、 $D_l = D_{ls} = 10 \text{Mpc}$ では、 $10^9 M_\odot$ の大質量ブラックホールと $a \simeq 0.1 \text{pc}$ の喉を持つワームホールを観測から判別可能だと分かる。また、天の川銀河内にある

⁴[4, 6, 7] を参照のこと。

$a \simeq 10\text{AU}$ の喉を持つワームホールをワームホールだと断定できることもわかる。

観測者とレンズ天体と光源が直線上に並ぶと仮定したが、このように天体が並ぶのは奇跡的である。一般的には、強い重力場での重力レンズ効果は、 ϕ が十分小さいときに観測され、相対論的像 (relativistic image) と呼ばれる多数の壊れたリング状の像を作る [4]。今回の結果は弱い重力場が作る像と相対論的像を用いてもブラックホールとワームホールを判別可能であることを示唆している。Bozza らは相対論的像は弱い重力場が作る像に比べて、増光率が小さいために、必ず微かにしか見えないことを指摘している [6]。また、ここでは点光源を仮定したが、相対論的アインシュタインリングは小さいために、背景となる光源に邪魔されて、見えなくなるかもしれない。

実際に観測するためには、光干渉計などの新しい観測技術の完成を待たねばならないかもしれない。このように相対論的像の観測には、多くの困難が予想されるが、21世紀の天文学者と物理学者が挑むに値する仕事である。

参考文献

- [1] N. Tsukamoto, T. Harada and K. Yajima, arXiv:1207.0047
- [2] V. Perlick, Living Rev. Relativity **7**, 9 (2004).
- [3] S. Frittelli, T. P. Kling and E. T. Newman, Phys. Rev. D **61**, 064021 (2000).
- [4] K. S. Virbhadra and G. F. R. Ellis, Phys. Rev. D **62**, 084003 (2000).
- [5] K. S. Virbhadra and G. F. R. Ellis, Phys. Rev. D **65**, 103004 (2002).
- [6] V. Bozza, S. Capozziello, G. Iovane and G. Scarpetta, Gen. Relativ. Gravit. **33**, 1535 (2001).
- [7] V. Bozza, Phys. Rev. D **66**, 103001 (2002).
- [8] W. Hasse and V. Perlick Gen. Relativ. Gravit. **34**, 415 (2001).
- [9] V. Perlick, Phys. Rev. D **69**, 064017 (2004).
- [10] S. W. Kim and Y. M. Cho, in Evolution of the Universe and its Observational Quest (Universal Academy Press, Inc. and Yamada Science Foundation, 1994), p. 353.
- [11] J. G. Cramer, R. L. Forward, M. S. Morris, M. Visser, G. Benford and G. A. Landis, Phys. Rev. D **51**, 3117 (1995).

- [12] K. K. Nandi, Y. Z. Zhang and A. V. Zakharov, Phys. Rev. D **74**, 024020 (2006).
- [13] M. Safonova, D. F. Torres and G. E. Romero, Mod. Phys. Lett. A **16**, 153 (2001).
- [14] E. Eiroa, G. E. Romero and D. F. Torres, Mod. Phys. Lett. A **16**, 973 (2001).
- [15] M. Safonova, D. F. Torres and G. E. Romero, Phys. Rev. D **65**, 023001 (2001).
- [16] H. G. Ellis, J. Math. Phys. **14**, 104 (1973).
- [17] M. S. Morris and K. S. Thorne, Am. J. Phys. **56**, 395 (1988).
- [18] M. S. Morris, K. S. Thorne and U. Yurtsever, Phys. Rev. Lett. **61**, 1446 (1988).
- [19] L. Chetouani and G. Clément, Gen. Relativ. Gravit. **16**, 111 (1984).
- [20] K. Nakajima and H. Asada, Phys. Rev. D **85**, 107501 (2012).
- [21] T. K. Dey and S. Sen, Mod. Phys. Lett. A, **23**, 953 (2008).
- [22] F. Abe, Astrophys. J. **725**, 787 (2010).
- [23] Y. Toki, T. Kitamura, H. Asada and F. Abe, Astrophys. J. **740**, 121 (2011).
- [24] P. F. Byrd and M. D. Friedman, Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists, Springer-Verlag, New York, (1971).
- [25] 佐々木節、「一般相対論」(産業図書、1986)
- [26] 中山恒義、「物理数学(I)」(裳華房、2001)
- [27] T. Müller, Phys. Rev. D **77**, 124042 (2008).
- [28] F. Delplancke, K. Gorski and A. Richichi, Astron. Astrophys. **375**, 701 (2001).