Einstein-de Sitter 時空中の Schwarzschild black hole

大阪市立大学宇宙重力研究室 M1
辰己聡一朗

漸近平坦かつ定常な Einstein 方程式のブラックホール解は、ブラックホール唯一性定理より Kerr 解に限られている。しかし現実的な場合を考えればブラックホールは宇宙の中に存在するため漸近平坦かつ定常の条件は破られており、Kerr 解以外の様々な形の解が許されることになる。そのため宇宙の中のブラックホールである dynamical cosmological black hole はよく知られたブラックホール解とは異なった構造や性質を持つ。その一例として Einstein-de Sitter 時空中の Schwarzschild 解 (Sultana-Dyer black hole 解) を考える。

Sultana-Dyer 計量

Einstein-de Sitter 時空は FLRW 計量を曲率０、宇宙項なし、timelike な物質が空間の膨張に比例し薄くなるという条件で解けば得られ、$\eta \propto t^{\frac{1}{3}}$ となる η を用いれば

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[-d\eta^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2\right] \tag{1}$$

と表される。ただし $a^2(\eta) = (\eta/\eta_0)^2$ であり η_0 は定数である。この $a^2(\eta)$ を conformal factor に選び Schwarzschild 計量

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)d\eta^2 + \frac{4M}{r}d\eta dr + \left(1 + \frac{2M}{r}\right)dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{2}$$

を conformal 変換すると Sutana Dyer 計量

$$ds^2 = a^2\left[-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)d\eta^2 + \frac{4M}{r}d\eta dr + \left(1 + \frac{2M}{r}\right)dr^2 + r^2 d\Omega^2\right] \tag{3}$$

が得られる。

解の解析

計量より Einstein テンソルを求め、Einstein 方程式を用い物質の分布を求める。エネルギー運動量テンソルは完全流体と null 流体で記述でき

$$T^{\mu\nu} = (\rho_m + p)u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} + \rho_r k^\mu k^\nu \tag{4}$$

のように表される。Einstein 方程式より (4) の右辺を求めれば

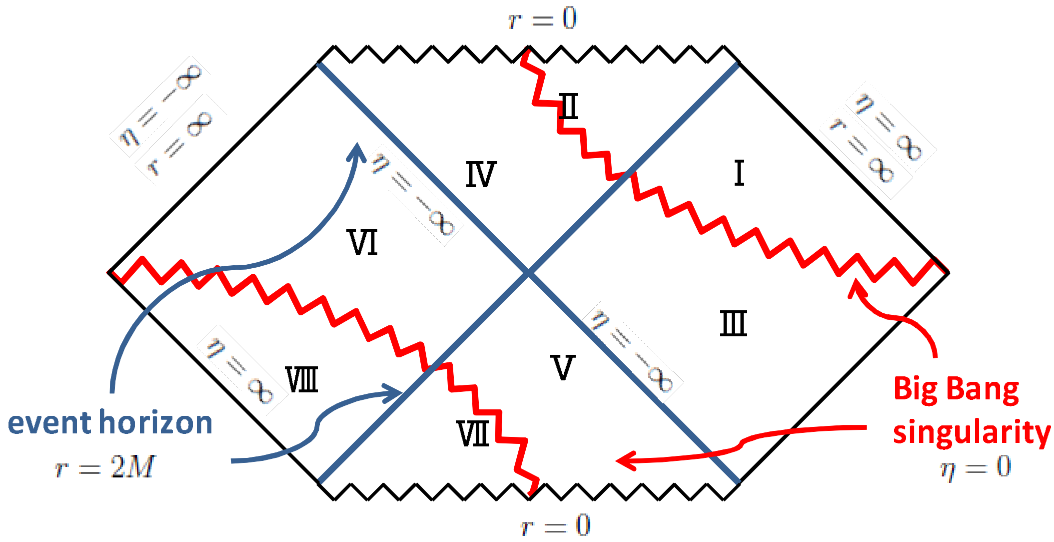
$$p = 0 \qquad \rho_m = \frac{12[r^2 + 2M(r-\eta)]}{\kappa r \eta^6} \qquad \rho_r = \frac{4M[4r^2 + 3m(2r-\eta)]}{\kappa r^2 \eta^5 [r^2 + 2m(r-\eta)]}$$

$$u^\mu = \left(\frac{r^2 + M(2r-\eta)}{r\eta^2\sqrt{r^2+2M(r-\eta)}}, -\frac{M(2r-\eta)}{r\eta^2\sqrt{r^2+2M(r-\eta)}}, 0, 0 \right) \tag{5}$$

$$k^\mu = \left(\frac{\sqrt{r^2+2M(r-\eta)}}{r\eta^2}, -\frac{\sqrt{r^2+2M(r-\eta)}}{r\eta^2}, 0, 0 \right)$$

$\eta = r(r+2M)/2M$ で weak energy condition を破り、これ以前の時刻では流体の動径方向の 4 元速度は常に負となり流体は中心に向かう。すなわちブラックホールは時間が経つにつれ成長するであろうと予測することができる。実際 event horizon の表面積を計算すれば $A = 16\pi M^2 a^2$ となり、Sultana Dyer black hole は Big Bang と共に形成され時間の経過と共に成長することがわかる。

また、時空構造は図 1 のペンローズダイアグラムのようになる。



参考文献

[1] Joseph Sultana and Charles C. Dyer
Gen. Relativ. Gravit. (2005) 37(8): 1349-1370

[2] Hiromi Saida and Tomohiro Harada and Hideki Maeda
arXiv:0705.4012v2 [gr-qc] 16 Aug 2007