ブラックホールの潮汐力による変形

渡辺　拓
京都大学理学研究科 M1 天体核研究室

平成 24 年 8 月 30 日

第1章　Introduction

ブラックホールを含む連星系において、天体は互いに潮汐力を受けて回転する。このような系は周りの重力場を歪め、重力波が放出される。これを観測し波形を解析することで、互いに引き寄せ合った連星の合体や、潮汐力による天体の形状のの変化など、波源でどんな天体現象が起こったかを知ることができる。

今回はI. Vega, E. Poisson and R.Massey による論文”Intrinsic and extrinsic geometries of a　tidally deformed black hole” を紹介し、潮汐力によるブラックホールの変形に着目する。時空において、null 超曲面上に座標を定めることでブラックホールのイベントホライズンの表式を明らかにし、摂動方程式を用いてその変形を潮汐力と結びつける。

第2章　null超曲面

今回はSchiwarzschildブラックホールについて考える。計量として、Eddington-Finkelstein計量を選ぶ。

$$g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = -fdv^2 + 2dvdr + r^2\Omega_{AB}d\theta^A d\theta^B \tag{2.1}$$

ただし、

$$\begin{aligned} f &= 1 - \frac{2M}{r} \\ \Omega_{AB} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

この計量において、ブラックホール半径 $r = 2M$、null超曲面上の座標 $x^\alpha = x^\alpha(v, \theta^A)$ をとることで、ブラックホールのイベントホライズンの位置を定める。

v はnull超曲面を覆うnull測地線に沿ったパラメータ、$\theta^A = \theta^A(\theta, \phi)$ は測地線のラベルであり、各測地線に沿って一定である。

$$k^\alpha = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial v}\right)_{\alpha^A} \tag{2.2}$$

は測地線に接するnullベクトルであり、

$$e^\alpha_A = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \alpha^A}\right)_v \tag{2.3}$$

は k^α と垂直なベクトルである。

また、null超曲面上に埋め込まれた計量を

$$\gamma_{AB} \equiv g_{\alpha\beta}e^\alpha_A e^\alpha_B \tag{2.4}$$

で定める。さらに $N_\alpha k^\alpha = -1$, $N_\alpha e^\alpha_A = 0$ を満たすnullベクトル N^α を用いると時空の計量は

$$g^{\alpha\beta} = -k^\alpha N^\beta - N^\alpha k^\beta + \gamma^{AB}e^\alpha_A e^\alpha_B \tag{2.5}$$

と書ける。

null 超曲面の変形を調べるために、null 測地線束の変形を表すテンソル

$$B_{AB} = k_{\alpha\beta} e^{\alpha}_{A} e^{\alpha}_{B} \tag{2.6}$$

について考える。このテンソルは

$$B_{AB} = \frac{1}{2}\Theta\gamma_{AB} + \sigma_{AB} \tag{2.7}$$

と分解できる。Θ は expansion(拡張) と呼ばれ、測地線束の面積の大きさの変化を表す。σ_{AB} は shear(歪み) と呼ばれ、測地線束の形状の変化を表す量である。

これらの量を調べることで、null 超曲面の変形を知ることができ、それによりブラックホールのイベントホライズンの変形を知ることができる。

第3章　潮汐場

次に、イベントホライズンの変形 Θ,σ_{AB} と、それを引き起こす潮汐場との関係を導くために、摂動方程式を真空で解く。まず、背景時空 $g_{\alpha\beta}^{SCH}$ に摂動 $p_{\alpha\beta}$ を加える。

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^{SCH} + p_{\alpha\beta} \tag{3.1}$$

これを元に摂動方程式を解く。今回解く方程式は K. Martel and E. Poisson(2005) のものである。摂動方程式は v と r についての偏微分方程式であり、全空間で解を求めるのは困難である。しかし今回はイベントホライズンの変形が知りたいので、その周り $r = 2M$ 付近に限って摂動量の変化を追う。
具体的には、$\epsilon = r - 2M$ とおいて摂動量を展開し、ϵ の各次数について摂動方程式の係数を比較し、v についての常微分方程式を得る。それを解くことで、イベントホライズン（$r = 2M$）の周りでの摂動量の v（時間）依存性がわかる。

以上より、次の Θ,σ_{AB} についての方程式が得られる。

$$\Theta = 0 \tag{3.2}$$

$$C_{AB} = (\kappa_0 - \partial_v)\sigma_{AB} \tag{3.3}$$

(3.3) はイベントホライズンの大きさが変わらないことを意味する。(3.3) で、$\kappa_0 = (4M)^{-1}$ は背景時空におけるブラックホールの表面重力であり、また C_{AB} は Weyl テンソルと呼ばれるもので、潮汐場を表す。したがって (3.3) において、潮汐場（C_{AB}）とそれがホライズンに引き起こす変形 (σ_{AB}) を結びつけることができた。

(3.3) の方程式を適切な境界条件のもとで解き、次の解を得る。

$$\sigma_{AB}(v, \alpha^A) = \int_v^\infty e^{-\kappa_0(v'-v)} C_{AB}(v', \alpha^A) \tag{3.4}$$

これはshearテンソルがWaylテンソルの振る舞いを時間間隔にして $\kappa_0 = (4M)^{-1}$ のオーダーで予測することを意味する。Weylテンソルはブラックホールに及ぼされる潮汐場を、shearテンソルはイベントホライズンの変形を表すことから、「ブラックホールの変形は潮汐場を先行する」ことが結論される。

$r = 2M[1 + \rho(v, \alpha^A)]$ で表される潮汐力による変形 $\rho(v, \alpha^A)$ を計算すれば、実際に潮汐場と変形の関係がわかる。

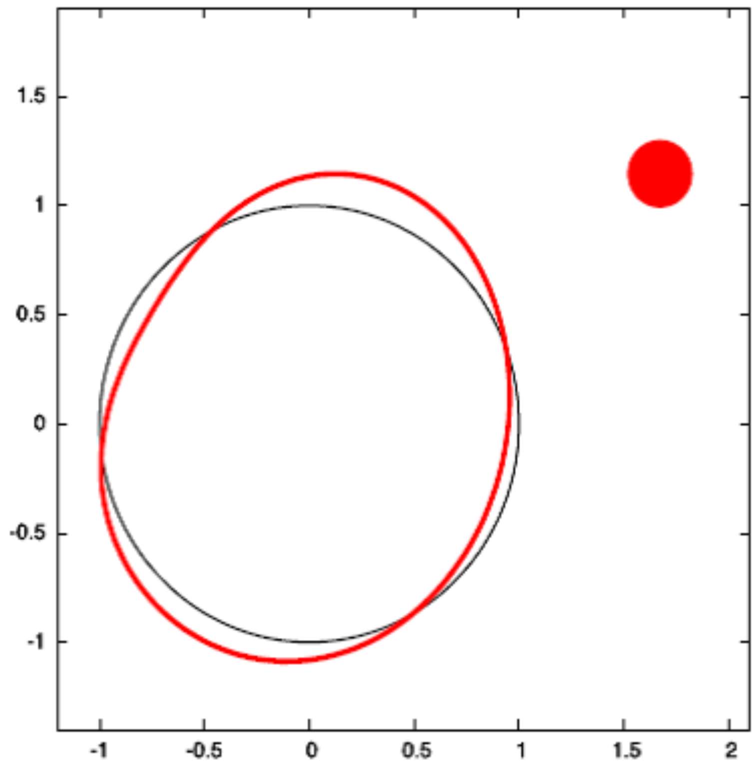


図 3.1: ブラックホールの周りを天体が通過した時のホライズンの潮汐力による変形。黒線が変形前のホライズン、赤線が変形後のホライズン。右上の赤い点が潮汐場を与える天体。座標は横が $x/(2M)$, 縦が $y/(2M)$。

第4章　付録

以下に参照論文と実際の発表のスライドを載せる。

- 参照論文
  - I. Vega, E. Poisson and R.Massey ”Intrinsic and extrinsic geometries of a　tidally deformed black hole” Class. Quantum Grav. 28 (2011) 175006
  - K. Martel and E. Poisson arXiv: gr-qc/0502028

ブラックホールの潮汐力による変形

I.vega, E.poisson and R,Massey

“Intrinsic and extrinsic geometries of a tidally deformed black hole”

京都大学理学研究科M1　天体核研究室

渡辺 拓

イントロ

- BHを含む連星
- 互いに潮汐力を受けて回転

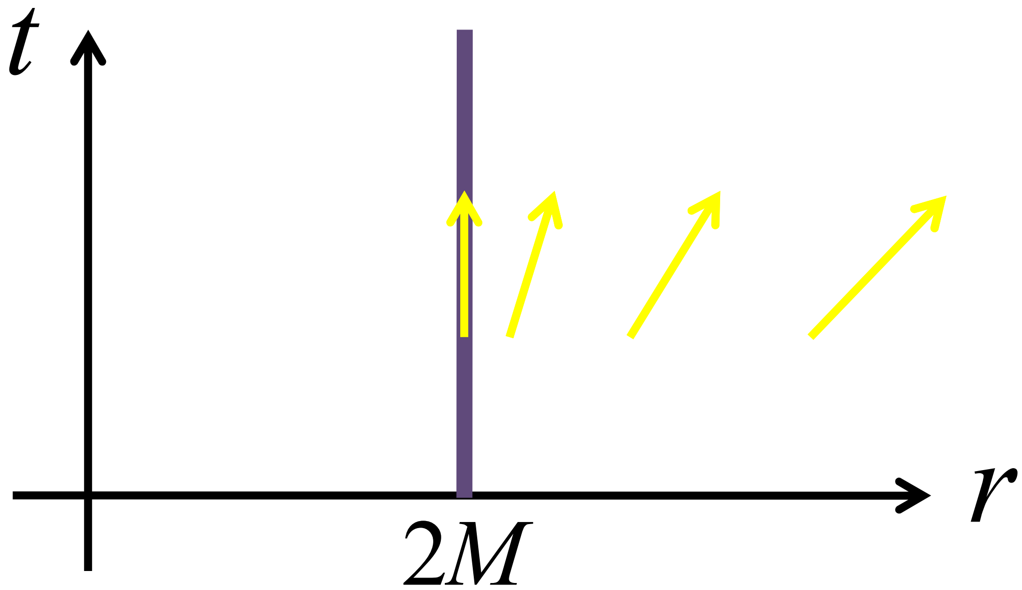
波形からわかること
・・・潮汐変形、合体など
→BHの変形についての波形を取り出したい

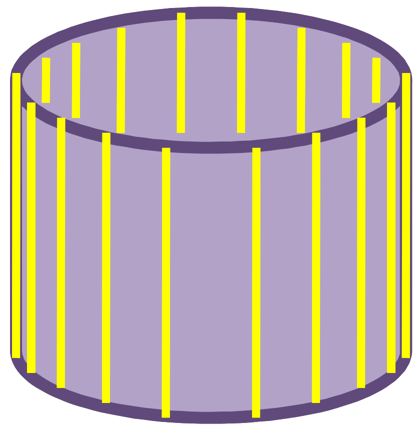
そのために・・・

- BHの表面(イベントホライズン)の変形を表す量を記述する
- 潮汐力との関係を導く

イベントホライズン

- 光が外部に逃げられない領域の境界面





- 光の測地線：null測地線に覆われている

→null超曲面

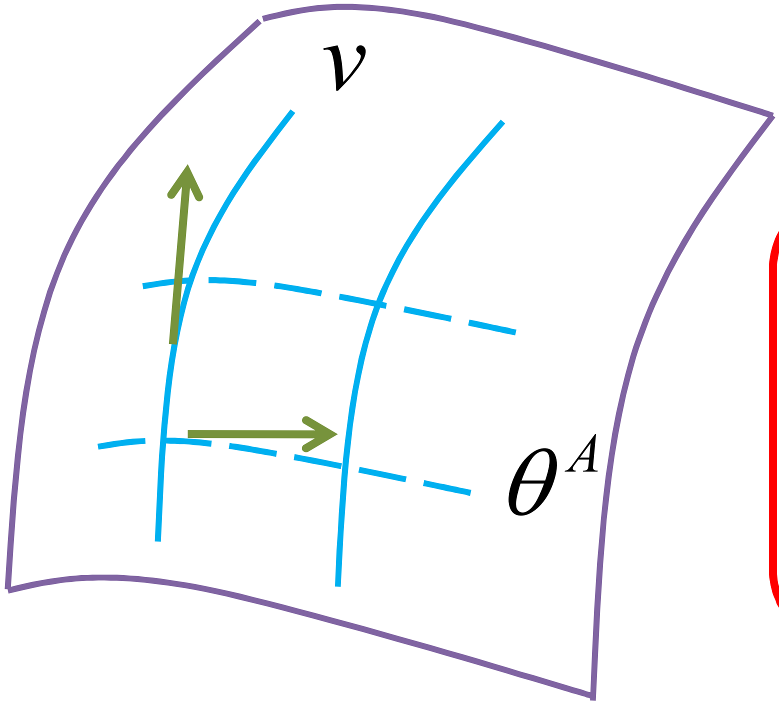
BHのイベントホライズン⇔null超曲面

null超曲面

- Schwarzschild BH
- Eddington-Finkelstein計量 (v, r, θ, ϕ)

$$\boxed{g^0_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -f dv^2 + 2 dv dr + r^2 \Omega_{AB} d\theta^A d\theta^B}$$

$$f = 1 - \frac{2M}{r} \quad , \quad \Omega_{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$



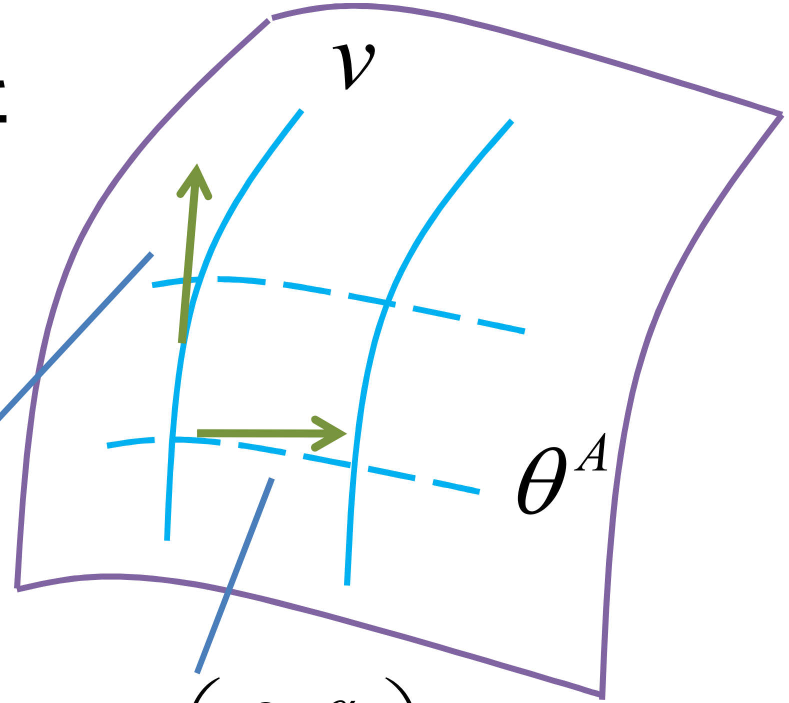
イベントホライズンの位置
- BH半径 $r = 2M$
- null超曲面上の座標
  $x^\alpha = x^\alpha(v, \theta^A)$

null超曲面

v :null測地線に沿ったパラメータ

θ^A :測地線のラベル

$$\theta^A=(\theta,\phi)$$



基底ベクトル

$$k^\alpha=\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial v}\right)_{\theta^A} \qquad e_A^\alpha=\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \theta^A}\right)_{v}$$

超曲面を覆う
null測地線の接ベクトル → 測地線の変化
→超曲面の変化

測地線束の変形

$$B_{AB} = k_{\alpha;\beta}\, e^{\alpha}_{A} e^{\beta}_{B}$$

null測地線束の発展

trace

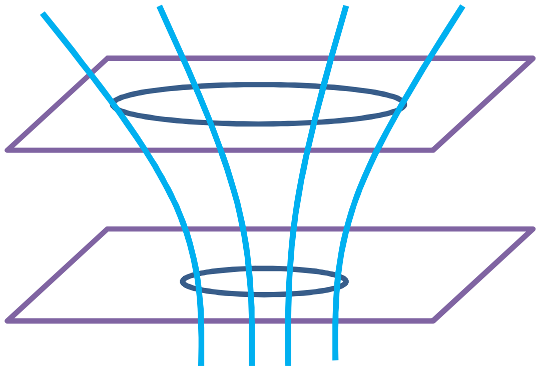
trace free

Θ

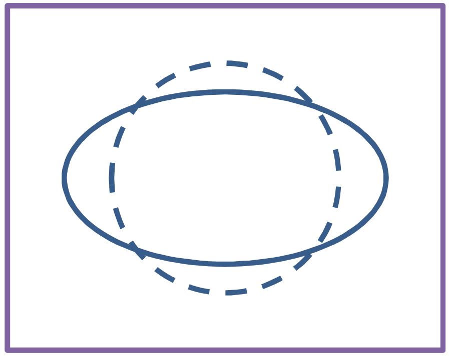
expansion

σ_{AB}

shear



束の面積の変化



束の形状の変化

Θ, σ_{AB}

⇩

測地線束の変形がわかる

⇩

超曲面（ホライズン）の変形がわかる

$$\Theta \; , \; \sigma_{AB}$$

摂動方程式

潮汐力

潮汐力による変形

計量に摂動を加え、摂動方程式を解く

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^{SCH} + p_{\alpha\beta}$$

摂動方程式

$$P^a = -\Box\tilde{h}_a + \nabla_a\nabla_b\tilde{h}^b + \frac{2}{r}(r_b\nabla_a\tilde{h}^b - r_a\nabla_b\tilde{h}^b)$$

$$-\frac{2}{r^2}r_a r_b\tilde{h}^b + \frac{l(l+1)}{r^2}\tilde{h}_a$$ ・・・など

- ν と r についての偏微分方程式
- 全空間で解を求めるのは困難

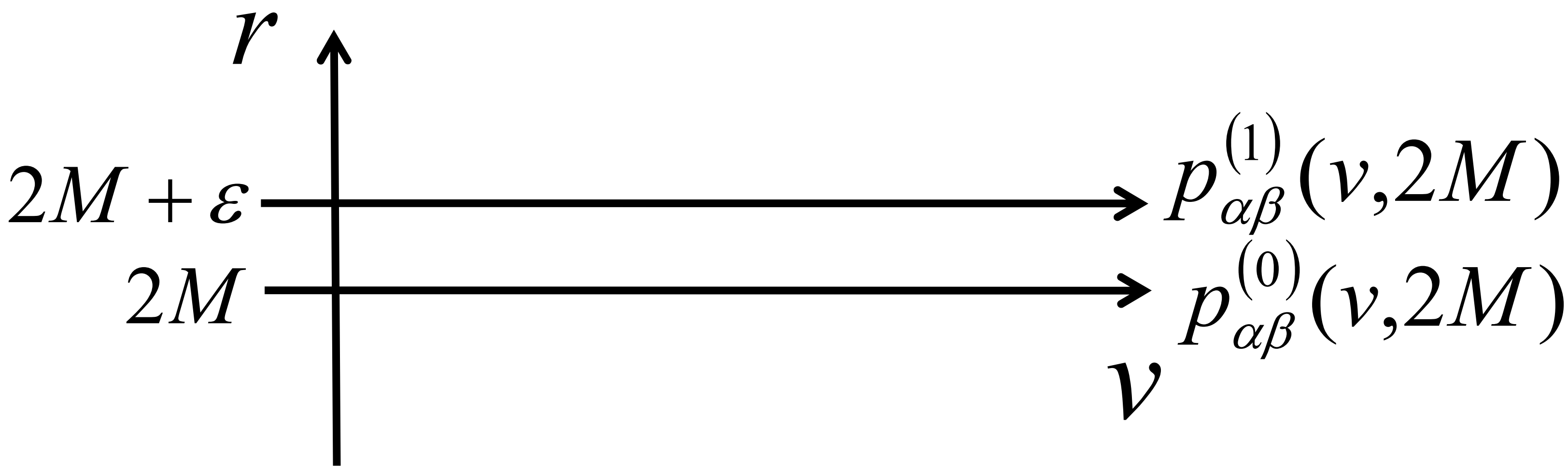
→今回はイベントホライズンの変形が知りたい

潮汐力による変形

- $\varepsilon = r - 2M$ とおいて ε で摂動量を展開
- ε の各次数について摂動方程式の係数を比較、v についての常微分方程式を得る

- それを解くことで、

イベントホライズン $(r = 2M)$
のまわりでの摂動量の v（時間）依存性がわかる



潮汐力による変形

$$\Theta = 0$$

$$C_{AB} = (\kappa_0 - \partial_v)\sigma_{AB}$$

C_{AB}： Weylテンソル 潮汐場 を記述

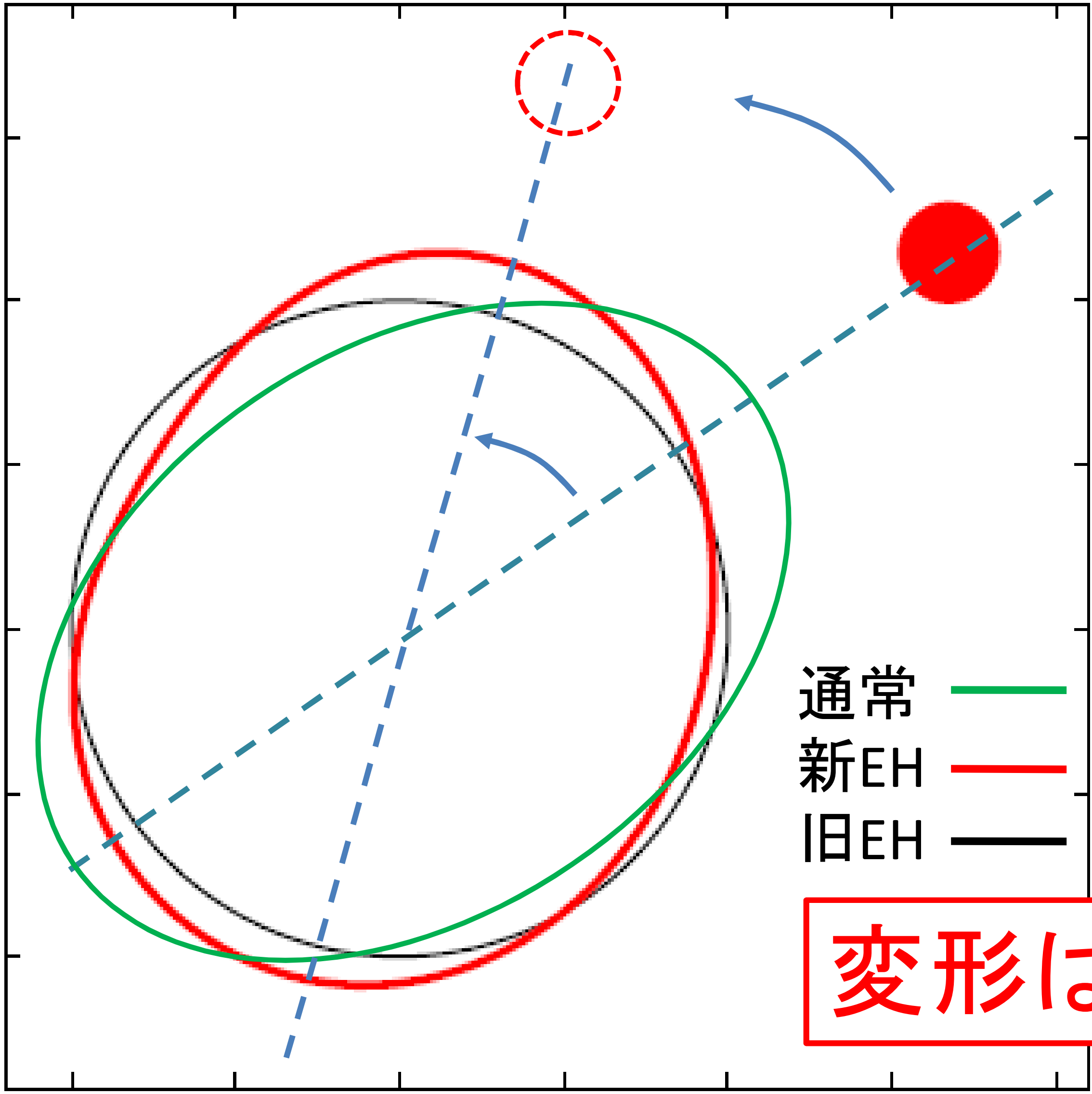
→潮汐場と変形との関係が得られた

$$\sigma_{AB}(v,\theta^A) = \int_v^\infty e^{-\kappa_0(v'-v)} C_{AB}(v',\theta^A)dv'$$

・・・未来からの場の情報を積分

→変形は場を先行する

BHのまわりを天体が運動する時の変形



•通常、潮汐力による変形は中心を結ぶ軸について軸対称

•BHでは、軸が天体に対して傾いている

•未来の位置にある天体の潮汐場による力を受けて変形しているように見える

変形は場を先行する

まとめ

- BHの表面⇔イベントホライズンを表す
  null超曲面の変形についての表式を得た
- 変形と潮汐力との関係を
  摂動方程式を用いて調べた
- BHの変形は場を先行する
  という不思議な結果が得られた

$$\boxed{\Theta\ ,\ \sigma_{AB}} \xrightarrow{\text{摂動方程式}}$$