暗黒物質と結合した暗黒エネルギー模型の解析

東京理科大学大学院　辻川研究室
伊藤仁力

1　研究背景

観測より現在の宇宙は暗黒エネルギー，暗黒物質，バリオンがそれぞれ約 74 %，22 %，4 %で構成されている．この暗黒エネルギーの正体は未だに解明されていないため，この正体を解明することが宇宙論における重大な課題の一つとされている．

暗黒エネルギーを解析する際には宇宙項 Λ を含む模型と宇宙項 Λ を含まない模型が考えられる．しかし，前者の模型は観測値と理論値に $\mathcal{O}(120)$ もの差が生じるため，後者の宇宙項 Λ を含まない模型である modified matter を考える．これらの模型のとして Quintessence,k-essence などが挙げられる．多くの模型が暗黒エネルギーの場と物質場が独立して描かれていることが多いが，これは何がしかの対称性が存在するときであり，本来は暗黒エネルギーの場と物質場の結合を考慮しなくてはならない．そこで今回は暗黒物質と結合した暗黒エネルギーの模型を用いて，ordinary(phantom) scalar field,dilatonic ghost condensate,tachyon(phantom) において安定した加速膨張をするのか解析する．

2　SCALAR FIELD MODEL

2.1　scaling solution

スカラー場 φ により描かれる暗黒エネルギーと暗黒物質の結合を考慮し次の作用を考える．

$$S = S_{grav} + S_{\varphi} + S_m = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{M_P^2}{2}R + p(X,\varphi)\right] + S(\varphi, \Psi_i, g_{\mu\nu}) \qquad (1)$$

ここで X は $X = -g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}/2$，$M_P$ はプランク質量であり，今後の計算は簡略化のため $M_P = 1$ として扱う．Friedmann-Robertson-Walker background において上記の作用に対してスカラー場 φ と計量 $g_{\mu\nu}$ についての変分 δ をとると

$$\dot{\rho} + 3(1+\omega_{\varphi})\rho = -Q\rho_m\dot{\varphi} \qquad (2)$$

$$\dot{\rho_m} + 3(1+\omega_m)\rho_m = +Q\rho_m\dot{\varphi} \qquad (3)$$

の２式が与えられる．ρ,p はそれぞれ暗黒エネルギーのエネルギー密度，圧力密度，ρ_m,p_m は暗黒物質のエネルギー密度，圧力密度であり，２つの状態方程式 ω 及び ω_m は $\omega \equiv p/\rho$,$\omega_m \equiv p_m/\rho_m$ と定義される．また，Q は結合定数である．

ここからはスケーリング解による解析を試みる．この理由として物質場と結合した暗黒エネルギー模型の先行研究よりスケーリング解に従うことが多いことが知られていること．また，スケーリング解を与えるラグラジアンが quintessence,ghost-type scalar field,tachyonn などの場に適応することができるためである．スケーリング解を与えるラグラジアン p は

$$p = Xg(Xe^{\lambda\varphi}) \equiv Xg(Y) \tag{4}$$

である．Y は $Y \equiv Xe^{\lambda\varphi}$ とした．$g(Y)$ は任意関数であり解析を行う場によって変換される．また, スケーリング解が得られるときポテンシャルの勾配である λ は

$$\lambda \equiv Q\frac{1+\omega_m-\Omega_\varphi(\omega_m-\omega_\varphi)}{\omega_\varphi(\omega_m-\omega_\varphi)} \tag{5}$$

となる．ここで次のような２つの無次元量を定義する．

$$x \equiv \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{6}H},\ y \equiv \frac{e^{-\lambda\varphi/2}}{\sqrt{3}H} \tag{6}$$

ただし，y は正とする．x,y,H の e-folds をとると

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dN} =& x\left[\frac{3}{2}(1+\omega_m)+\frac{3}{2}(1-\omega_m)x^2g(Y)-3\omega_m)x^2g'(Y)-\frac{3[g(Y)+Yg'(Y)}{g(Y)+5Yg'(Y)+2Y^2g''(Y)}\right]\\ &-\sqrt{6}\frac{\lambda x^2Y\{3g'+2Yg''(Y)\}+Q[1-x^2\{g(Y)+2Yg'(Y)\}]}{2[g(Y)+5Yg'(Y)+2Y^2g''(Y)]}\end{aligned} \tag{7}$$

$$\frac{dy}{dN} = -\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda xy+\frac{3}{2}y[1+\omega_m+(1-\omega_m)x^2g(Y)-2\omega_mx^2g'(Y)] \tag{8}$$

$$\frac{1}{H}\frac{dH}{dN} = -\frac{3}{2}y[1+\omega_m+(1-\omega_m)x^2g(Y)-2\omega_mx^2g'(Y)] \tag{9}$$

となる．３章から３つの場についての解析を行うが各場のラグラジアンがスケーリング解を与えるラグラジアンに対応するように任意関数の $g(Y)$ を変換することにより各場における x,y,H の e-folds をとったものが得られる．３章においてこの計算は省略する．暗黒物質と結合した暗黒エネルギーの有効状態方程式 ω_{eff} は

$$\omega_{eff} \equiv \frac{p+p_m}{\rho+\rho_m} = \frac{\omega_m\lambda-Q}{Q+\lambda} \tag{10}$$

と定義される．このとき (9) と (10) より

$$\frac{\ddot{a}}{aH^2} = -\frac{1+3\omega_{eff}}{2} \tag{11}$$

が得られる．宇宙の加速膨張が負になることはないため (11) は常に正とならなくてはならない．したがって加速膨張を生じるための有効状態方程式の制限 $\omega_{eff} < -1/3$ が得られる．

2.2 固定点解析

$dx/dN = dy/dN = 0$ の固定点を導き，その固定点近傍での安定性を解析することにより安定した加速膨張の条件件などが得られる．固定点 (x_c, y_c) に対して微小摂動を考えると x, y は

$$x = x_c + u, \quad y = y_c + v \tag{12}$$

と書ける．よって固定点近傍の一階微分における線形摂動は行列により

$$\frac{d}{dN}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{13}$$

となる．M は x_c, y_c に依存する行列であり，M の固有値 $\mu_{1,2}$

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2}\left[a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}\right] \tag{14}$$

より固定点金近傍の安定性を判断することができる．

- $\mu < 0, \mu < 0$　　安定
- $\mu < 0, \mu < 0$ かつ $D \equiv (a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$　　螺旋安定

上記は固有値により安定する場合するのみを書いており，その他は不安定であるか鞍点となり不安定となる．また，a_{ij} は M の各成分である．

以上のことを用いて暗黒物質と結合した暗黒エネルギー模型がordinary(phantom) scalar field,dilatonic ghost condensate,tachyon(phantom) において安定した加速膨張が得られるかを解析する．

3 ordinary(phantom) scalar field

正準スカラー場のラグラジアン p は

$$p(X, \varphi) = \epsilon X - ce^{-\lambda\rho} \tag{15}$$

であり，$\epsilon \to +1$ のとき ordinary field となり $\epsilon \to -1$ のとき phantom field となる．(4) のラグラジアンは任意関数 $g(Y)$ を

$$g(Y) = \epsilon - c/Y \tag{16}$$

と与えることにより得られる．このとき $dx/dN = dy/dN = 0$ かつ固定点近傍が安定な固定点は 2 点得られ，その時の各パラメータの値は表 1 のようになった．これらの点について ordinary field と phantom field について加速膨張の安定性を解析する．

表 1: ordinary scalar field における安定な固定点

point	x	y	Ω_φ	ω_φ	ω_{eff}
(a)	$\frac{\epsilon\lambda}{\sqrt{6}}$	$\left[\frac{1}{c}\left(1-\frac{\epsilon\lambda^2}{6}\right)\right]^{1/2}$	1	$-1+\frac{\epsilon\lambda^2}{3}$	$-1+\frac{\epsilon\lambda^2}{3}$
(b)	$\frac{\sqrt{6}(1+\omega_m)}{2(\lambda+Q)}$	$\left[\frac{2Q(\lambda+Q)+3\epsilon(1-\omega_m^2)}{2c(\lambda+Q)^2}\right]^{1/2}$	$\frac{Q(\lambda+Q)+3\epsilon(1+\omega_m)}{(\lambda+Q)^2}$	$\frac{Q(\lambda+Q)+3\epsilon\omega_m(1+\omega_m)}{Q(\lambda+Q)+3\epsilon(1+\omega_m)}$	$\frac{\omega_m\lambda-Q}{\lambda+Q}$

表 2: ordinary scalar field における安定な固定点近傍の解析結果

point	固定点の安定性	加速膨張を生じる条件	解の存在条件
(a)	$([Q^2+12(1+\omega_m)]^{1/2}-Q)/2<\lambda<\sqrt{6}$ のとき鞍点 $\lambda<([Q^2+12(1+\omega_m)]^{1/2}-Q)/2$ のとき安定	$\lambda<\sqrt{2}$	$\lambda<\sqrt{6}$
(b)	$3(1+\omega_m)/\lambda<Q<Q_*$ のとき鞍点 $Q>Q_*$ のとき螺旋安定	$Q>\lambda(1+3\omega_m)/2$	$Q>3(1+\omega_m)/\lambda-\lambda$

3.1 ordinary field

$\epsilon\to+1$ である ordinary field については先行研究で輻射優勢期が含まれていることが知られている．表 1 の point(a),(b) について固定点近傍の解析による固定点の安定性，加速膨張を生じる条件，解の存在条件は表 2 のようになる．表 2 中の Q_* は以下の方程式の解である．

$$3[\lambda(1-\omega_m)+2Q_*]^2=8[\lambda(\lambda+Q_*-3(1+\omega_m)][2Q_*(\lambda+Q_*)+3(1-\omega_m)^2] \quad (17)$$

表 1 より point(b) はスケーリング解を満たし，$\Omega_\varphi<1$ の制限が課せられていることが分かる．また，表 2 より point(a) は λ と Q のみに依存すること，point(b) が満たされている時 point(a) は不安定となることが分かる．

3.2 phantom field

$\epsilon\to-1$ の運動エネルギーが負である phantom field においては表 1 の point(b) は不安定となり，point(a) が全ての Q の値において固定点の安定性，加速膨張を生じる条件，解の存在条件が満たされる．表 1 より $\Omega_\varphi=1$ が与えられ暗黒エネルギー優勢期となっていることが分かる．$\Omega_\varphi=1$ が与えられる条件は $\omega_m=-1-\lambda^2/3<-1$ である．

4 dilatonic ghost condensate

dilatonic ghost condensate のラグラジアン p は

$$p=-X-ce^{-\lambda\rho}X^2 \quad (18)$$

表 3: dilatonic ghost condensate における安定な固定点

point	x	y	Ω_φ	ω_φ	ω_{eff}
(a)	$\frac{\sqrt{6}\lambda f_+(\lambda)}{4}$	$\frac{1}{2}+\frac{\lambda^2 f_+(\lambda)}{16}$	1	$\frac{-8+\lambda^2 f_-(\lambda)}{8+3\lambda^2 f_-(\lambda)}$	$\frac{-8+\lambda^2 f_-(\lambda)}{8+3\lambda^2 f_-(\lambda)}$
(b)	$\frac{\sqrt{6}\lambda f_-(\lambda)}{4}$	$\frac{1}{2}+\frac{\lambda^2 f_-(\lambda)}{16}$	1	$\frac{-8+\lambda^2 f_+(\lambda)}{8+3\lambda^2 f_+(\lambda)}$	$\frac{-8+\lambda^2 f_+(\lambda)}{8+3\lambda^2 f_+(\lambda)}$
(c)	$\frac{\sqrt{6}(1+\omega_m)}{2(\lambda+Q)}$	$\frac{3(1-\omega_m^2)-2Q(\lambda+Q)}{3(1-3\omega_m)(1+\omega_m)}$	$\frac{3(1+\omega_m)[1+\omega_m-Q(\lambda+Q)]}{(\lambda+Q)^2(1-3\omega_m)}$	$\frac{3(1+\omega_m)\omega_m-Q(\lambda+Q)}{3(1+\omega_m)-3Q(\lambda+Q)}$	$\frac{\omega_m\lambda-Q}{\lambda+Q}$

表 4: dilatonic ghost condensate における安定な固定点近傍の解析結果

point	固定点の安定性	加速膨張を生じる条件	解の存在条件
(a)	安定または螺旋安定	全ての値において加速膨張する	全ての値において解が存在する
(b)	安定または鞍点	$\lambda < 0.817$	全ての値において解が存在する
(c)	安定または螺旋安定，鞍点	$Q > \lambda(1+\omega_m)/2$	$\lambda < \frac{1}{2}\left[\sqrt{9Q^2+12}-5Q\right] < \lambda < 1/Q - Q$

と与えられる．(4) のラグラジアンは任意関数 $g(Y)$ を

$$g(Y) = -1 + cY \tag{19}$$

と与えることにより得られる．表 3 の $f_\pm$ は

$$f_\pm(\varphi) \equiv 1 \pm \sqrt{1 + 16/(3\lambda^2)} \tag{20}$$

である．ここでは $\omega_m = 0$,$c = 1$ として計算をしている．

表 3 より point(c) は $0 < \Omega_\varphi < 1$ のときスケーリング解を持ち，point(b) は $\Omega_\varphi = 1$ の暗黒エネルギー優勢期を表している．point(a) は先にやった phantom field の場合と同様の結果となる．表 4 の point(b),(c) における固定点の安定性において $0 < \lambda < \lambda_*$ のとき point(b) は安定，point(c) は不安定となり，$\lambda > \lambda_*$ のときは point(b) は不安定，point(c) は安定または，螺旋安定をとる．つまり Q の値が λ_* を境に固定点の安定性が移ることになる．ここで $\lambda_*(Q)$ は

$$\lambda_*(Q) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{9Q^2+12} - 5Q\right] \tag{21}$$

である．また，point(a) は phantom field の場合と同様の結果となる．

5 tachyon(phantom)

tachyon field のラグラジアン p は

$$p = -V(\phi)\sqrt{1 - \epsilon\dot{\phi}^2} \tag{22}$$

表 5: tachyon(phantom) における安定な固定点

point	$\tilde{x}$	y	Ω_φ	ω_φ	ω_{eff}
(a)	$\frac{\lambda y_c}{\sqrt{6\epsilon}}$	y_c	1	$\frac{\lambda^2 y_c^2}{3\epsilon}-1$	$\frac{\lambda^2 y_c^2}{3\epsilon}-1$
(b)	$\tilde{x}_i$	$\frac{3\gamma}{\sqrt{6}(\lambda+Q)\tilde{x}_i}$	$\frac{3c\gamma}{2(\lambda+Q)^2\tilde{x}_i^2\sqrt{1-2\epsilon\tilde{x}_i^2}}$	$2\epsilon\tilde{x}_i^2-1$	$\omega_m-\frac{cy_i^2(1+\omega_m-2\epsilon\tilde{x}_i^2)}{\sqrt{1-2\epsilon\tilde{x}_i^2}}$

表 6: ordinary tachyon における安定な固定点近傍の解析結果

point	固定点の安定性	加速膨張を生じる条件	解の存在条件
(a)	$\gamma \geq \gamma_S$ のとき安定 $\gamma < \gamma_S$ のとき鞍点	$\lambda^2 < 2\sqrt{3}c$	全ての値において解は存在する
(b)	安定または螺旋安定，鞍点	$Q > \tilde{Q}_*(\lambda)$	$\tilde{x}_i^2(1-2\epsilon\tilde{x}_i^2)^{1/2} \geq \frac{9c\lambda^2}{2(\lambda+Q)^2}$

と与えられる．(4) のラグラジアンは任意関数 $g(Y)$ を

$$g(Y) = -c\sqrt{1-2\epsilon Y}/Y \tag{23}$$

として，与えられた $\phi = (2/\lambda)e^{\lambda\varphi/2}$ に適応するように再定義してやると得られる．このときポテンシャルは $V(\phi) = 4c/(\lambda^2\phi^2)$ となる．$\epsilon \to +1$ のとき ordinary tachyon とであり，$\epsilon \to -1$ のとき phantom tachyon である．またここで便宜上のため無次元量 x を $\tilde{x}^2 \equiv \dot{\phi}^2/2 = Y$ と再定義する．また，γ は $\gamma \equiv 1+\omega_m$ とおく．

5.1 ordinary tachyon

$\epsilon \to +1$ で描かれる ordinary tachyon の安定した固定点は表 5 のようになる．今回は暗黒物質と結合した暗黒エネルギー模型を解析しているので安定かつ $Q \neq 0$ の条件がついた固定点を書き出した．表 6 より point(a) における安定した加速膨張は λ の値にのみ依存する．point(b) は解析結果より Q が十分に大きいとき安定した固定点をもつ．具体的には λ に依存した臨界値 Q_1 より大きいとき螺旋安定となり，臨界値 Q_2

$$Q_2(\lambda) = -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^4+36c^2}}{2\lambda} \tag{24}$$

より小さいときに安定となり，Q_2 より大きいときは不安定となる．表中の $\tilde{Q}_*(\lambda)$ は λ の値に依存するものである．ここでの計算は $c = 1, \omega_m = 0$ としている．また，$Q = 3.0, \lambda = 2.18$ において Ω_φ, Ω_m を計算するとそれぞれ $\Omega_\varphi = 0.7, \Omega_m = 0.3$ となることが分かる．これはスケーリング解によって得られる値と一致している．

5.2 phantom tachyon

$\epsilon \to -1$ で描かれる phantom tachyon においては point(a) のみ安定となり phantom field と同様の結果が得られる．

6　まとめ

暗黒物質と結合した暗黒エネルギー模型においてordinary(phantom) scalar field,dilatonic ghost condensate,tachyon(phantom) の３つを解析した．まず，スケーリング解と一致する各場について安定な加速膨張のための条件を得ることができた．中でも,ordinary tachyon において加速膨張が Q の値に依存するという特異な振る舞いを見ることができた．また，$\Omega_\varphi = 1$ が課せられた点において全ての値に対して加速膨張をおこす phantom field の振る舞いとなるか，加速膨張をおこす条件が λ の値のみに依存することが理解できる．今後の目標としてはこの結合定数の数値制限を課せることができるように精進していきたい．

参考文献

[1] Burin Gumjudpai, Tapan Naskar, M. Sami, Shinji Tsujikawa,JCAP 0506:007,(2005)[arXiv:hep-th/0502191]

[2] F. Piazza and S. Tsujikawa, JCAP 0407, 004 (2004) [arXiv:hep-th/0405054]

[3] E. J. Copeland, A. R. Liddle and D. Wands, Phys. Rev. D 57, 4686 (1998) [arXiv:gr-qc/9711068]