Critical Gravity in Four Dimensions

名古屋大学 M1　桂川大志

2012 年 8 月 30 日

目次

1　はじめに

現代物理学の大きな目標の一つとして、一般相対性理論と量子力学（場の量子論）の統一というものがあるが、それを困難にさせている理由として、場の量子論で用いられる繰り込みという手法が使えないという問題がある。これを解決するための方法のひとつとして、普段の Einstein-Hilbert 作用に高階微分項を加え修正することにより、この困難を回避するというものがある。

しかし、高階微分項を入れることにより繰り込み可能になる一方で、負のエネルギーを持つ伝播モードが現れユニタリー性が失われてしまうという新たな問題が生じる。さらには、普段の massless spin-2 の graviton 以外にも、massive な伝播モードも現れる。

今回の発表で採り上げる Critical Gravity [1] という理論は、曲率 2 乗の項と宇宙項を加えた 4 次元の重力理論であり、massless spin-2 mode に加え、massive spin-2 mode と massive scalar mode が現れる。massive spin-2 mode がユニタリー性を破ることが示されるが、適切にパラメーターを選ぶことでこの問題は回避される。

2　繰り込み可能性とユニタリー性

Einstein-Hilbert 作用について見ていく。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G} R$$

metric は無次元であるから、その 2 階微分から作られる曲率 R は質量次元で 2 の次元を持つ。一方、4 次元では Lagrangian density は質量次元 4 であり、$1/16\pi G$ は質量次元 2 である。ゆえに、結合定数 G は質量次元 -2 で負の次元を持つため、素朴な意味では繰りこみ不可能となる。

ここで曲率 2 乗について考えてみると、この項は質量次元で 4 であるから、その結合定数は無次元になり繰り込み可能になる。そこで、次のような Lagrangian density が考えてみる。

$$\mathcal{L} \sim R + \alpha(R^{\mu\nu\rho\lambda})^2 + \beta(R^{\mu\nu})^2 + \gamma R^2$$

曲率 2 乗は即ち 4 階微分であるから、およそ運動量の 4 乗である。ゆえに、高エネルギースケールでは 2 乗の項が支配的になり、全体としては繰り込み可能になる。またプロパゲーターを見てみると、普段の Einstein-Hilbert 作用のリッチスカラーでは $1/p^2$ であり、loop 計算では 2 次発散が起こるが、曲率 2 乗は $1/p^4$ で対数発散になり、発散が緩やかになることがわかる。

繰り込み可能になった一方で、上の場合の Lagrangian density では、普段の massless spin-2 mode 以外に、正のエネルギーを持つ massive scalar mode と、負のエネルギーを持つ massive spin-2 mode も現れる [2] [3]。負のエネルギーはいわゆるゴーストを意味し、ユニタリー性が失われてしまうことになる。量子化を考えるにあたっては、繰り込み可能性とユニタリー性の両方を守らなければならないので、これらを両立させるような方法を考えなければならない。

そのような理論が 3 次元にはあって、Chiral Gravity [4] というものがある。

$$I = \frac{1}{16\pi G}\int d^3x\,\sqrt{-g}\,[R + \frac{2}{l^2} + \frac{1}{2\mu}\,\epsilon^{\lambda\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma}(\partial_\mu\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} + \frac{2}{3}\Gamma^{\sigma}_{\mu\tau}\Gamma^{\tau}_{\nu\rho})]\ ,\ \Lambda = -\frac{1}{l^2}$$

この理論でも massive spin-2 mode が現れるのだが、$\mu l = 1$ のとき、massive spin-2 mode は massless になり、そのエネルギーはゼロになる。同様の理論を 4 次元へのアナロジーとして考えたものが、今回の Critical Gravity である。

3 作用と運動方程式

次のような作用を考えていく。

$$I = \frac{1}{2\kappa^2}\int\sqrt{-g}\,d^4x\,(R - 2\Lambda + \alpha(R^{\mu\nu})^2 + \beta R^2)$$

曲率 2 乗の項としては、Riemann tensor の足をつぶした $(R^{\mu\nu\rho\lambda})^2$ もあるが、Gauss-Bonnet 項

$$\mathcal{L}_{GB} \equiv (R^{\mu\nu\rho\lambda})^2 - 4(R^{\mu\nu})^2 + R^2$$

と呼ばれるこの組み合わせが、4 次元では表面項になり作用での寄与はゼロになるので、この項は作用に入れて考えなくてよい。

また宇宙項を入れないとき、ユニタリー性を課すと α と β がともにゼロになり、結局 Einstein-Hilbert 作用になってしまい、繰り込み可能性もユニタリー性も得られないということが知られている。

metric について変分をとって、運動方程式を求めると、

$$\begin{aligned}
&\mathcal{G}_{\mu\nu} + E_{\mu\nu} = 0\\
&\qquad \mathcal{G}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}\\
&\qquad E_{\mu\nu} = 2\alpha(R_{\mu\rho}R^{\rho}_{\nu} - \frac{1}{4}R^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}g_{\mu\nu}) + 2\beta R(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}Rg_{\mu\nu})\\
&\qquad\qquad + \alpha(\Box R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\Box Rg_{\mu\nu} - 2\nabla_\rho\nabla_{(\mu}R_{\nu)}^{\ \rho}) + 2\beta(g_{\mu\nu}\Box R - \nabla_\mu\nabla_\nu R)
\end{aligned}$$

となる。ここで、$\Box = \nabla_\mu\nabla^\mu$ である。

この運動方程式は、Ricci tensor が metric に比例するようなものを解に持っていて、これは真空のアインシュタイン方程式と同じことを表す。

$$R_{\mu\nu} = kg_{\mu\nu} \quad\Leftrightarrow\quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$$

よって、アインシュタイン方程式の解もこの理論での解になっている。いま、Cosmological constant がゼロではないので、解としては de-Sitter (dS) や Anti de-Sitter (AdS) 解などがある。

$$\text{(A)dS}_4\ \ :\ \mathrm{d}s^2 = -(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2)\mathrm{d}t^2 + (1 - \frac{\Lambda}{3}r^2)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2\ ,\ (\text{dS}\ :\Lambda > 0\ \ \text{AdS}\ :\Lambda < 0)$$

4 運動方程式の線形化

Back ground を Anti de-Sitter として、

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\,, h = g^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$$

1 次までの摂動を計算して、伝播モードを評価する。

$$\begin{aligned}0 = \delta(\mathcal{G}_{\mu\nu} + E_{\mu\nu}) = [1 + 2\Lambda(\alpha + 4\beta)]\,\mathcal{G}^L_{\mu\nu} + \alpha[(\Box - \frac{2\Lambda}{3})\,\mathcal{G}^L_{\mu\nu} - \frac{2\Lambda}{3}\,R^L g_{\mu\nu}]\\ + (\alpha + 2\beta)[-\nabla_\mu\nabla_\nu + g_{\mu\nu}\Box + \Lambda g_{\mu\nu}]\,R^L\end{aligned}$$

ここで、添え字Ｌはｈについての線形化で、

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^L_{\mu\nu} &= R^L_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R^L g_{\mu\nu} - \Lambda h_{\mu\nu}\\ R^L_{\mu\nu} &= \nabla^\lambda\nabla_{(\mu}h_{\nu)\lambda} - \frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\nabla_\mu\nabla_\nu h\\ R^L &= \nabla^\mu\nabla^\nu h_{\mu\nu} - \Box h - \Lambda h\end{aligned}$$

である。

ここで、ゲージ条件

$$\nabla^\mu h_{\mu\nu} = \nabla_\nu h$$

を課して、運動方程式の trace 成分を計算する。

$$0 = g^{\mu\nu}\delta(\mathcal{G}_{\mu\nu} + E_{\mu\nu}) = \Lambda[h - 2(\alpha + 3\beta)\Box h]$$

ここで、共変微分 ∇_μ はスカラーに対して通常の微分 ∂_μ として作用するので、

$$(\,\partial^2 - \frac{1}{2(\alpha + 3\beta)}\,)h = 0$$

運動方程式の形から、massive scalar mode が伝播することがわかる。scalar mode を取り除くための条件 (h=0) は、

$$\alpha = -3\beta$$

この条件の下で、運動方程式は

$$0 = \delta(\mathcal{G}_{\mu\nu} + E_{\mu\nu}) = \frac{3\beta}{2}(\Box - \frac{2\Lambda}{3})(\Box - \frac{4\Lambda}{3} - \frac{1}{3\beta})h_{\mu\nu}$$

また、ゲージ条件は

$$\nabla^\mu h_{\mu\nu} = 0\ ,\ g^{\mu\nu}h_{\mu\nu} = 0$$

となり、Tranceverse-Traceless(TT) ゲージとなる。

この方程式の解を考える。これは、２つの微分演算子 $\Box - \frac{2\Lambda}{3}$ と $\Box - \frac{4\Lambda}{3} - \frac{1}{3\beta}$ がそれぞれ作用してゼロになるような解の重ねあわせとして表現される。また

$$\Box h_{\alpha\beta} \equiv \nabla_\mu \nabla^\mu h_{\alpha\beta} = (\partial^2 + \frac{2}{3}\Lambda) h_{\alpha\beta}$$

であって、２つの微分方程式に分けて書くと

$$\partial^2 \, h^{(m)}_{\mu\nu} = 0$$
$$(\partial^2 - \frac{2\Lambda}{3} - \frac{1}{3\beta}) h^{(M)}_{\mu\nu} = 0$$

方程式の形から、それぞれ massless spin-2 mode と massive spin-2 mode が伝播することがわかる。

massive mode が安定である（tachyonic にならない）ためには、

$$M^2 = \frac{2\Lambda}{3} + \frac{1}{3\beta} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; 0 < \beta \leq (-\frac{1}{2\Lambda})$$

massive mode が massless になる条件は

$$\beta = -\frac{1}{2\Lambda}$$

であって、先ほどの条件とあわせて

$$\alpha = -3\beta = \frac{3}{2\Lambda}$$

このパラメーターのとり方 (Critical Point) では、massive spin-2 な graviton だけが伝播する。

5　伝播モードのエネルギー

Hamiltonian を構成し、それぞれの伝播 mode の on-shell のエネルギーを評価する。ここでいったんβについての制限を外す。$h^{\mu\nu}$ の変分をとったときに、先の摂動の運動方程式を導く作用の項は

$$I_2 = -\frac{1}{2\kappa^2}\int \sqrt{-g}\, d^4x\, h^{\mu\nu}\, \delta(\mathcal{G}_{\mu\nu} + E_{\mu\nu})$$
$$= -\frac{1}{2\kappa^2}\int \sqrt{-g}\, d^4x\, [\frac{1}{2}(1+6\beta\Lambda)(\nabla^\lambda h^{\mu\nu})(\nabla_\lambda h_{\mu\nu}) + \frac{3}{2}\beta(\Box h^{\mu\nu})(\Box h_{\mu\nu}) + \frac{\Lambda}{3}(1+4\beta\Lambda) h^{\mu\nu} h_{\mu\nu}]$$

h について１階・２階の時間微分を含むので、普段の方法では共役運動量を定義できない。

$$\nabla_\lambda h_{\mu\nu} \Rightarrow \dot{h}_{\mu\nu} \;,\; \Box h_{\mu\nu} \Rightarrow \frac{\partial(\nabla_0 h_{\mu\nu})}{\partial t}$$

そこで Ostrogradsky method と呼ばれる方法を用いる。これは、任意の階数の時間微分を含む場合の一般化された Legendre 変換であり、共役運動量は以下のように２つ定義される。

$$\pi^{(1)\mu\nu} = \frac{\delta L_2}{\delta \dot{h}_{\mu\nu}} - \nabla_0(\frac{\delta L_2}{\delta(d(\nabla_0 h_{\mu\nu})/dt)}) = -\frac{1}{2\kappa^2}\sqrt{-g}\nabla^0((1+6\beta\Lambda)h^{\mu\nu} - 3\beta\Box h^{\mu\nu})$$
$$\pi^{(2)\mu\nu} = \nabla_0(\frac{\delta L_2}{\delta(d(\nabla_0 h_{\mu\nu})/dt)}) = -\frac{3\beta}{2\kappa^2}\sqrt{-g}g^{00}\nabla h^{\mu\nu}$$

Lagrangian が陽に時間に依存しないので、Hamiltonian も時間に依らない。時間間隔 T として

$$H = T^{-1}(\int \sqrt{-g}\, d^4x\, [\pi^{(1)\mu\nu}\dot{h}_{\mu\nu} + \pi^{(2)\mu\nu}\frac{\partial(\nabla_0 h_{\mu\nu})}{\partial t}] - I_2)$$

と 4 次元積分の形で書くことができる。

massless mode と massive mode それぞれの運動方程式を用いて、エネルギーを計算すると

$$E_{massless} = -\frac{1}{2\kappa^2 T}(1+2\beta\Lambda)\int \sqrt{-g}\, d^4x\, \nabla^0 h^{\mu\nu}_{(m)}\dot{h}^{(m)}_{\mu\nu}$$
$$E_{massive} = \frac{1}{2\kappa^2 T}(1+2\beta\Lambda)\int \sqrt{-g}\, d^4x\, \nabla^0 h^{\mu\nu}_{(M)}\dot{h}^{(M)}_{\mu\nu}$$

massless mode が正のエネルギーを、massive mode が負のエネルギーを持つ [5]。ここで、critical point を考えると、両方の mode のエネルギーがゼロになり、また

$$(\Box - \frac{2\Lambda}{3})(\Box - \frac{4\Lambda}{3} - \frac{1}{3\beta})h_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow (\Box - \frac{2\Lambda}{3})^2 h_{\mu\nu} = 0$$

となり、massive spin-2 の mode の自由度が失われたかのように見える。

ここで、運動方程式を見直してみると

$$\left\{\begin{array}{c} (\Box - \frac{2\Lambda}{3})\, h^{(m)}_{\mu\nu} = 0 \\ (\Box - \frac{4\Lambda}{3} - \frac{1}{3\beta})h^{(M)}_{\mu\nu} = 0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{c} (\Box - \frac{2\Lambda}{3})\, h^{(m)}_{\mu\nu} = 0 \\ (\Box - \frac{2\Lambda}{3})^2 h^{(log)}_{\mu\nu} = 0 \end{array}\right.$$

演算子が２回作用してゼロになるような新たなモード（logarithmic mode）に、massive mode の自由度が移り変わっていると考えられる。

$$h^{(log)}_{\mu\nu} = (2it + \log\sinh 2\sqrt{-\frac{\Lambda}{3}}\, r - \log\tanh\sqrt{-\frac{\Lambda}{3}}\, r)h^{(m)}_{\mu\nu}$$

$$(\Box - \frac{2\Lambda}{3})\, h^{(log)}_{\mu\nu} \neq 0$$

このように Critical point では、massive mode の代わりに logarithmic mode が現れて伝播する [6]。また、この mode のエネルギーを先ほどの手順に従って計算すると、有限で正のエネルギーをもつことが示される [5]。

6　ブラックホールの質量

ブラックホール解の質量について評価していく。$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ と分けて書く。ここで $g_{\mu\nu}$ は AdS であり、$h_{\mu\nu}$ について摂動的に取り扱う。（無限遠で十分早くゼロになる）

運動方程式に代入し、ｈについて線形の項と非線形（２次以上）の項に分ける。非線形の項を $T_{\mu\nu}$ としてまとめて

$$\delta(\mathcal{G}_{\mu\nu} + E_{\mu\nu}) = T_{\mu\nu}$$

左辺に共変微分を作用するとゼロになるので、右辺を有効的に energy-momentum tensor と考えることができる。

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

Back ground である AdS に対する Killing vectorξ^μ として、Killing 方程式 $\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0$ から保存則

$$\nabla_\mu (T^{\mu\nu}\xi_\nu) \equiv \nabla_\mu J^\mu = 0$$

が成立する。

無限遠で timelike な killing vector を用いて、AD mass は

$$E = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^3x\, T^{0\nu}\xi_\nu$$

と定義される [7]。さらに、反対称テンソル F を用いて $J^\mu = \nabla_\nu \mathcal{F}^{\mu\nu}$ とすれば

$$E = \frac{1}{2\kappa^2}\int_{S_\infty} dS_i\, \mathcal{F}^{0i}$$

と書くことができる。これに基づいて計算すると [8]、

$$\begin{aligned} E = &\frac{1}{2\kappa^2}[1 + 2\Lambda(\alpha + 4\beta)]\int d^3x\, \mathcal{G}_L^{0\nu}\xi_\nu + \frac{1}{2\kappa^2}(\alpha + 2\beta)\int_{S_\infty} dS_i\, (2\xi^{[0}\nabla^{i]}R^L + R^L\nabla^0\xi^i) \\ &- \frac{\alpha}{2\kappa^2}\int_{S_\infty} dS_i\, (2\xi_\alpha\nabla^{[0}\mathcal{G}_L^{i]\alpha} + 2\mathcal{G}_L^{\alpha[0}\nabla^{i]}\xi_\alpha) \end{aligned}$$

Schwarzchild-AdS Black hole について AD mass を計算する [9]。

$$\mathrm{d}s^2 = -(1 - \frac{m}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2)\mathrm{d}t^2 + (1 - \frac{m}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2$$

十分遠方では、$h_{\mu\nu}$ は $h = \mathcal{O}(r^{-1})$ である。また、曲率は metric の 2 階微分からなるので、$R^L, \mathcal{G}^L = \mathcal{O}(r^{-3})$ よって、第 2 項、第 3 項はゼロになる

$$\int_{S_\infty} dS_i\, \mathcal{O}(r^{-3}) \approx \lim_{r\to\infty}\int r^2 d\Omega\, \frac{1}{r^3} = 0$$

残りの第 1 項について、

$$E = \frac{1}{2\kappa^2}[1 + 2\Lambda(\alpha + 4\beta)]\int d^3x\, \mathcal{G}_L^{0\nu}\xi_\nu$$

Schwarzschild-like な摂動で線形化した、普段の（一般相対性理論での）Einstein tensor の積分であるから、Schwarzschild Black hole の質量になる。以上の計算から、AD mass は

$$E = [1 + 2\Lambda(\alpha + 4\beta)]\, m$$

Critical point $\alpha = -3\beta = \frac{3}{2\Lambda}$ において、質量はゼロになるという結果が得られる。

7 ブラックホールのエントロピー

Bekenstein-Hawking のエントロピー公式

$$S_{BH} = \frac{A_H}{4}$$

があるが、これは一般相対性理論での表式なので、そのまま使うことはできない。そこで、一般の重力理論にまで拡張されたエントロピーの表式として、Wald のエントロピー公式を使う [10][11]。

$$S = -2\pi \oint_{\mathcal{H}} dA \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{\alpha\beta\gamma\delta}} \, \epsilon_{\alpha\beta} \, \epsilon_{\gamma\delta}$$

ここで、dA は horizon での面積素で、ϵ は horizon に対する binormal vector である。また、この表式においては Lagrangian density が metric と Riemann tensor にのみ依存していること用いている。

これを用いて計算すると、

$$S_w = [1 + 2\Lambda(\alpha + 4\beta)] \, \pi r_H^2$$

Critical point では、エントロピーもゼロになる。

8 まとめ

宇宙項と曲率 2 乗の項を入れ、適切にパラメーターを決めることで、繰り込み可能でユニタリー性をもつ 4 次元の重力理論を構成することができた。Critical point では、scalar mode がなくなり、massive spin-2 mode は massless になった。また、massless spin-2 mode のエネルギーがゼロになってしまうが、一方で、logarithmic mode が正のエネルギーを持つ。

Schwarzschild-AdS Black hole 解について計算をしていくと、質量がゼロになりエントロピーもゼロになった。今回はアインシュタイン方程式の解を用いて計算しているが、一般にはアインシュタイン方程式の解ではないようなブラックホール解も存在しうる。このような解では質量やエントロピーがゼロにならない可能性がある。

参考文献

[1] H. Lu and C. N. Pope, "Critical gravity in four dimensions", Phys. Rev. Lett. 106 (2011) 181302.

[2] K.S. Stelle, "Renormalization of higher derivative quantum gravit"y, Phys. Rev. D16, 953 (1977).

[3] K.S. Stelle, "Classical gravity with higher derivatives", Gen. Rel. Grav. 9, 353 (1978).

[4] W. Li, W. Song and A. Strominger, "Chiral gravity in three dimensions", JHEP 0804, 082 (2008).

[5] Haishan Liu, H. Lu, and Mingxing Luo, "On black hole stability in critical gravities", Int. J. Mod. Phys. D 21, 1250020 (2012)

[6] E.A. Bergshoeff, O. Hohm, J. Rosseel and P.K. Townsend, "Modes of log gravity", Phys. Rev. D 83, 104038 (2011).

[7] L.F. Abbott and S. Deser, "Stability of gravity with a cosmological constant", Nucl. Phys. B195, 76 (1982).

[8] S. Deser and B. Tekin, "Energy in generic higher curvature gravity theories", Phys. Rev. D67, 084009 (2003).

[9] S. Deser and B. Tekin, "Gravitational energy in quadratic curvature gravities", Phys. Rev. Lett. 89, 101101 (2002)

[10] R.M. Wald, "Black hole entropy is the Noether charge", Phys. Rev. D48, 3427 (1993).

[11] Ram Brustein, Dan Gorbonos, Merav Hadad and A. J. M. Medved, "Evaluating the Wald entropy from two-derivative terms in quadratic actions", Phys. Rev. D 84, 064011 (2011).