2012年度第42回天文・天体物理若手夏の学校

Nonlinear massive gravityにおける開いたFRW宇宙の加速膨張解

広島大学　宇宙物理学研究室
M1　宅嶌　祐一郎

Motivation

Massive Gravity とは一般相対論では 0 としていたグラビトンに質量を与えた理論である。グラビトンに質量を与えることでどのような理論になるかが主な Motivation である。最近ではこの理論で宇宙の加速膨張を説明できないかと盛んに研究されている。

Massive Gravity の action の構成

ここでは、Massive Gravity の action を歴史的な流れに沿って構成していく。

1939 年、Fierz と Pauli によって、グラビトンに質量を与えた作用が考えられた。
これは Fierz-Pauli action と呼ばれる以下の作用である。

$$S = \frac{M_{pl}^2}{2}\int d^4x \left[-\frac{1}{2}\partial_\lambda h_{\mu\nu}\partial^\lambda h^{\mu\nu} + \partial_\mu h_{\nu\lambda}\partial^\nu h^{\mu\lambda} - \partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\nu h + \frac{1}{2}\partial_\lambda h \partial^\lambda h - \frac{1}{2} m_g \left(h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - h^2 \right) \right] \tag{1}$$

ここで m_g はグラビトンの質量、$h_{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ で定義される量である。
このとき、この作用は一般座標変換に対して不変にはなっていない。
比較するため、一般相対論の作用を載せておく。

$$S = \frac{M_{pl}^2}{2}\int d^4x \sqrt{-g} R \tag{2}$$

(1) の右辺第 1 項から第 4 項までは一般相対論におけるリーマンテンソルを線形化したものである。そして、第 5 項がグラビトンの質量項であり、Fierz-Pauli 質量項と呼ばれる。
この 2 つの作用から重力ポテンシャルを計算すると、(1) の $m_g \to 0$ の極限と、$m_g = 0$ である (2) は一致しないことがわかる。これは vDVZ discontimuity と呼ばれ、長年問題となっていた。

1972 年、Vainstein によって、この不連続性が解決された。
彼は R を線形化したことがこの不連続性の問題であると指摘した。より詳しく述べると、以下で定義される Vainstein 半径 r_V

$$r_V = \left(\frac{GM}{m_g^4} \right)^{\frac{1}{5}} \tag{3}$$

と呼ばれる半径の内側では非線形項が重要になると指摘した。ここで、$m_g \to 0$ の極限を取ると、$r_V \to \infty$ となることが分かる。すなわち、グラビトンの質量が 0 と

なる極限では、すべての領域で非線形項が重要になることを示している。

Vainstein によって不連続性の問題は解決したが新たな問題が出てきた。一般相対論では 2 である自由度が Fierz-Pauli action では 5 となる。ここまではゴーストと呼ばれる運動量が負になる自由度はないのだが、非線形項まで加えると、BD ゴーストと呼ばれる 6 個目の自由度が出てきてしまう。
この問題はポテンシャルの高次項まで加えることで解決する。
Fierz-Pauli action では h の 2 次までしか考えていなかったのに対し、ポテンシャルを

$$V(g,h) = V_2(g,h) + V_3(g,h) + V_4(g,h) + V_5(g,h) + \dots \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
V_2(g,h) &= \langle h^2\rangle - \langle h\rangle^2 \\
V_3(g,h) &= c_1\langle h^3\rangle + c_2\langle h^2\rangle\langle h\rangle + c_3\langle h\rangle^3 \\
V_4(g,h) &= d_1\langle h^4\rangle + d_2\langle h^3\rangle\langle h\rangle + d_3\langle h^2\rangle^2 + d_4\langle h^2\rangle\langle h\rangle^2 + d_5\langle h\rangle^4 \\
V_5(g,h) &= f_1\langle h^5\rangle + f_2\langle h^4\rangle\langle h\rangle + f_3\langle h^3\rangle\langle h\rangle^2 + f_4\langle h^3\rangle\langle h^2\rangle + f_5\langle h^2\rangle^2\langle h\rangle + f_6\langle h^2\rangle\langle h\rangle^3 + f_7\langle h\rangle^5
\end{aligned}$$

と変更し、高次項まで無限に足していく。ここで、トレースは $\langle h\rangle = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$ で定義する。このままでは無限個のパラメータが出てきてしまうが、これは Decoupling limit をとり、Total derivative の combination を作ることで、m_g と 2 つのパラメータで表すことが出来る。また、この無限級数は次のテンソルを考えることで、足しあげること (Ressumation) が出来る。

$$K^\mu_\nu = \sqrt{\delta^\mu_\nu - H^\mu_\nu} \tag{5}$$

ルートは以下で定義される。

$$\sqrt{A}^\mu_\alpha \sqrt{A}^\alpha_\nu = A^\mu_\nu \tag{6}$$

最後に一般座標変換に対して不変な理論にするために $h_{\mu\nu}$ の定義を変更する。

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \\
\Rightarrow g_{\mu\nu} &= g^{(0)}_{ab}\partial_\mu\phi^a\partial_\nu\phi^b + H_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{7}$$

ここで、ϕ^a は stuckelberg scalar と呼ばれ、スカラーの変換則に従う。(7) の左辺と右辺の第 1 項（Fiducial metric）は一般座標変換に対して不変であるので、右辺第 2 項も不変となり、この $H_{\mu\nu}$ を用いることで、一般座標変換に対して不変な理論にすることが出来る。

これまでの考察より、Massive Gravity の action は

$$S = M_{pl}^2 \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2} + m_g^2 (L_2 + \alpha_3 L_3 + \alpha_4 L_4) \right] \tag{8}$$

$$K_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu - \sqrt{g^{\mu\rho} g_{ab}^{(0)} \partial_\rho \phi^a \partial_\nu \phi^b} \tag{9}$$

$$L_2 = \frac{1}{2}\left([K]^2 - \left[K^2\right]\right) \tag{10}$$

$$L_3 = \frac{1}{6}\left([K]^3 - 3[K]\left[K^2\right] + 2\left[K^3\right]\right) \tag{11}$$

$$L_4 = \frac{1}{24}\left([K]^4 - 6[K]^2\left[K^2\right] + 3\left[K^2\right]^2 + 8[K]\left[K^3\right] - 6\left[K^4\right]\right) \tag{12}$$

となる。ここでトレースは $[K] = g^{\mu\nu} K_{\mu\nu}$ で定義される。

Open FRW Universe

ここではまず、open な場合を考える前に flat な場合を考えてみる。
Fiducial metric を Minkowski metric にとり、

$$K_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu - \sqrt{g^{\mu\rho} \eta_{ab} \partial_\rho \phi^a \partial_\nu \phi^b} \tag{13}$$

Physical metric を FRW metric にする。

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) \delta_{ij} dx^i dx^j \tag{14}$$

また stuckelberg scalar を以下のようにおく。

$$\phi^0 = f(x), \phi^i = x^i \tag{15}$$

このとき、ラグランジアンは

$$L = 3M_{pl}^2 \left(-a\dot{a}^2 - m_g^2 |\dot{f}| \left(a^3 - a^2\right) + m^2 \left(2a^3 - 3a^2 + a\right) \right) \tag{16}$$

f に関する変分をとると、

$$m_g^2 \partial_0 \left(a^3 - a^2\right) = 0 \tag{17}$$

$m_g \neq 0$ の時、

$$a = const$$

よって、この場合 Physical metric が Minkowski metric になってしまうので、Flat の場合は解が存在しない。

ここから open な場合を考える。まず、Physical metriic は

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -N(t)dt^2 + a^2(t)\Omega_{ij}dx^i dx^j \tag{18}$$

ここで

$$\Omega_{ij}dx^i dx^j = dx^2 + dy^2 + dz^2 - \frac{|K|\,(xdx + ydy + zdz)^2}{1 + |K|\,(x^2 + y^2 + z^2)} \tag{19}$$

である。stuckelberg scalar を次のようにおく、

$$\begin{aligned} \phi^0 &= f(t)\sqrt{1 + |K|(x^2 + y^2 + z^2)} \\ \phi^i &= \sqrt{|K|}f(t)x^i \end{aligned} \tag{20}$$

このようにおくと、fiducial metric が FRW のような形式になる

$$\eta_{\mu\nu}d\phi^\mu d\phi^\nu = -\left(\dot{f}(t)\right)^2 dt^2 + |K|f(t)^2\Omega_{ij}dx^i dx^j \tag{21}$$

これで Open な場合の action を作ることが出来た。この action の f に関する変分をとると、拘束条件が出てくる

$$\left(\dot{a} - \sqrt{|K|}N\right)\left[\left(3 - \frac{2\sqrt{|K|}f}{a}\right) + \alpha_3\left(3 - \frac{\sqrt{|K|}f}{a}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{|K|}f}{a}\right) + \alpha_4\left(1 - \frac{\sqrt{|K|}f}{a}\right)^2\right] = 0 \tag{22}$$

全部で解は 3 つあるが、そのうち 1 つは

$$\dot{a} = \sqrt{|K|}N \tag{23}$$

となって、これは Physical metric が Minkowski metric の場合に対応しているので、Open な場合の解ではない。残りの 2 つは

$$f = \frac{a}{\sqrt{|K|}}X_\pm, \tag{24}$$

$$X_\pm = \frac{1 + 2\alpha_3 + \alpha_4 \pm \sqrt{1 + \alpha_3 + \alpha_3^2 - \alpha_4}}{\alpha_3 + \alpha_4} \tag{25}$$

となり、この 2 つが Open な場合に対応している。また、N に関する変分をとると、

$$3H^2 - \frac{3|K|}{a^2} = \rho_m + c_\pm m_g^2, \quad H \equiv \frac{\dot{a}}{Na} \tag{26}$$

$$c_\pm = c_\pm(\alpha_3, \alpha_4) \tag{27}$$

$$\rho_g = -p_g \tag{28}$$

ρ_g、p_g はそれぞれグラビトン質量項からの有効的なエネルギー密度と圧力で、$f, \dot{f}$ で表される。$c_\pm$ はパラメータのみの関数になっているので、$\Lambda = c_\pm m_g^2$ とおくことで、グラビトンの質量が宇宙項の働きをすることがわかる。
こうして、Open FRW Universe の場合に宇宙項が現れるモデルを作ることが出来た。
また最近の研究では、Fiducial metric を FRW metric にすることで、Open な場合に限らず解が存在することや de Sitter にすることで、宇宙項以外の時間変動する解も見つかっている。さらに一様という制限をなくしても、宇宙項以外のモデルが作れることが分かっている。

参考文献

[1]Gümrükcüoğlu　et al.JCAP11(2011)030

[2]de Rham，Gabadadze Phys.Rev.D82.040020(2010)

[3]de Rham　et al. Phys.Rev.Lett.106.231101(2011)

[4]G.D′Amico　et al.(2011)

[5]David Langlois，　Atsushi Naruko　(2012)

[6]Pierre Gratia　et al.(2012)

[7]Tsutomu Kobayashi (2012)