massive gravity 理論による FLRW 解

京都大学　基礎物理学研究所　M1 山下泰穂

概要

massive gravity 理論は、長年 ghost の存在に煩わされていたが、近年、ghost free な action を得ることに成功した。また、この理論により、種々の宇宙論的問題が解決され得ることが示唆されている。

本発表は、論文 [1] のレビュー発表であり、この理論の宇宙論への適用が可能かどうかを確かめるものである。

発表の流れは、まず始めに massive gravity とはどのようなものか、その action がどのように得られたかを簡単に説明し、そして open な一様等方宇宙への適用を考える。

ここでは、自然単位系 $c = \hbar = 1$, 計量の符号として (-, +, +, +) を用いる。

第1章　massive gravity 理論

massive gravity とは、従来の一般相対論の Lagrangian に mass term を加え、graviton に mass を与える理論である。

$$I = \frac{M_{pl}^2}{2}\int \sqrt{-g}dx^4 R \;+ (mass\, term) \tag{1.1}$$

これにより、GR では cosmological constant を導入して説明していた宇宙の加速膨張を自然に説明することができる。また、graviton の mass という新たな energy scale が存在することにより、宇宙項問題を解決する可能性があると考えられている。

metric $g_{\mu\nu}$ のみを用いて mass term を作ることはできないため、背景計量 $g_{\mu\nu}^{(0)}$ と背景からのずれ $h_{\mu\nu}$ などのように二つの metric を必要とする。このため、Lagrangian の general covariance は壊されることとなる。

また、mass term を作る際には ghost が出ないように気をつける必要がある。ここで、ghost とは、kinetic term が通常の逆符号をとり、場が unbound となるものを指す。

以上のことに留意して、mass term がどのようにして作られたかを以下に示す。

1.1　linear theory

まず、運動方程式において、Einstein-Hilbert action からの項と mass term からの項のどちらも linear なものを考える。すると、ghost のない mass term I_g は次のようになる。[2] これを Fierz-Pauli mass term を呼ぶ。

$$I_g = \frac{M_{pl}^2}{2}\int \sqrt{-g}dx^4 m_g^2(-h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} + h^2) \tag{1.2}$$

ここで、$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$, m_g は graviton の mass である。

次に、mass term の形はそのままに、背景計量が flat な場合から一般の場合に拡張する。つまり、Einstein-Hilbert action は non linear、mass term は linear な場合を考える。この場合、ghost(BD ghost) が現れることが知られている。[2]

よって、BD ghost を消すため、mass term に高次の interaction term を加えることが必要となる。

1.2 non linear theory

高次の interaction を含む mass term を考える。

ここで、解析を簡単にするため、Stuckelberg scalar field Y^a を導入し、次のテンソル $H_{\mu\nu}$ を用いて action を記述する。

$$H_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{ab}\partial_\mu Y^a \partial_\nu Y^b \tag{1.3}$$

ここで、添え字 a はただの parameter であり、座標を表わす添え字ではないことに注意する。すると、上の式の第二項はテンソルとして振る舞い、従って $H_{\mu\nu}$ もテンソルとして振る舞うことがわかる。

よってこのテンソルを用いて action を記述すると、action は general covariance を見かけ上回復する。見かけ上回復されていた general covariance は、実際には Stuckelberg field を fix することによって壊されることとなる。

例えば、$Y^a = x^a$(unitary gauge) としたとき、$H_{\mu\nu}$ は前 section の $h_{\mu\nu}$ に等しくなることが確認できる。

このテンソル $H_{\mu\nu}$ を用いて、ghost free な action を構成する。まず、次のように Stuckelberg field Y を展開する。

$$Y^a = x^a - (A^a + \partial^a \phi) \tag{1.4}$$

すると、$H_{\mu\nu}$ は次のようになる。

$$H_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu + 2\partial_\mu\partial_\nu\phi - \partial_\mu A^\alpha \partial_\nu A_\alpha - 2\partial_\mu A^\alpha \partial_\alpha \partial_\nu \phi - \partial_\mu \partial^\alpha \phi \partial_\nu \partial_\alpha \phi \tag{1.5}$$

ここでまず、decoupling limit: $m \to 0$, $M_{pl} \to \infty$, cut off Λ:fix において action を ghost free にすることを考える。この極限は、最も strong coupling な項のみを考え、残りの項をゼロにするものである。

このとき、

$$H_{\mu\nu} = 2\partial_\mu\partial_\nu\phi - \partial_\mu\partial^\alpha\phi\partial_\nu\partial_\alpha\phi \tag{1.6}$$

これを用いて ghost free な action を求めたい。問題となるのは、二階以上の時間微分を含む $(\partial\partial\phi)^n$ のような項である。従って、このような項が action においては total derivative の形で消えるように、action の形を決定すればよい。

よって Lagrangian は次の形のものの線形結合で表わされる。

$$L_n = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) K_{\mu_1}^{\sigma(\mu_1)} \cdots K_{\mu_n}^{\sigma(\mu_n)} \tag{1.7}$$

$$K^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu - \sqrt{\delta^\mu_\nu - H^\mu_\nu} = \partial^\mu \partial_\nu \phi \tag{1.8}$$

L_n は四次元において $n \geq 5$ でゼロとなる。

decoupling limit において ghost free に構成したこの Lagrangian は、cut off Λ 以下の energy scale では常に ghost free であることが示されている。[3]

以上により、ghost free な massive gravity の action は理論パラメータ α_3, α_4 を用いて次のように書ける。

$$
\begin{aligned}
I &= M_{pl}^2 \int \sqrt{-g}dx^4 \left[\frac{R}{2} + m_g^2 \left(L_2 + \alpha_3 L_3 + \alpha_4 L_4\right)\right] + I_m \qquad (1.9) \\
L_2 &= \frac{1}{2}\left([K]^2 - [K^2]\right) \\
L_3 &= \frac{1}{6}\left([K]^3 - 3[K][K^2] + 2[K^3]\right) \\
L_4 &= \frac{1}{24}\left([K]^4 - 6[K]^2[K^2] + 3[K^2]^2 + 8[K][K^3] - 6[K^4]\right) \qquad (1.10)
\end{aligned}
$$

ここで $[K]$ は K^μ_ν の trace を、I_m は従来の matter の action を表わす。

第2章　宇宙論への適用

前 chapter では、ghost free な massive gravity の action を得ることができた。しかし、理論はさらに実際の宇宙を記述できるようなものでなければならない。よってこれを確かめるために、本 chapter では、上で得られた action から宇宙論的解を得ることを試みる。

ここでは簡単のため、$M_{pl} = 1$ とする。

2.1　Set up

ここでは、open な一様等方宇宙への適用を考える。

よって、metric として次のものを考える。

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -N(t)^2 dt^2 + a(t)^2 \Omega_{ij} dx^i dx^j && (2.1)\\
\Omega_{ij} dx^i dx^j &= dx^2 + dy^2 + dz^2 - \frac{|K|(xdx + ydy + zdz)}{1 + |K|(x^2 + y^2 + z^2)} && (2.2)
\end{aligned}
$$

ここで、曲率 $K < 0$, $N(t) > 0$, $a(t) > 0$ である。

また、Stuckelberg field として次の形のものを仮定する。

$$
\begin{aligned}
Y^0 &= f(t)\sqrt{1 + |K|(x^2 + y^2 + z^2)} && (2.3)\\
Y^i &= \sqrt{|K|} f(t) x^i && (2.4)
\end{aligned}
$$

ここで、$f(t) \geq 0$, $\dot{f}(t) \geq 0$ である。このように置くことによって、テンソル $H_{\mu\nu}$ が open な一様等方性を持つようにすることができる。

この Stuckelberg field の取り方は、Minkowski 時空の open FLRW 時空 chart が存在することによる。closed FLRW 時空にはこのような chart が存在しないため、この方法を用いて、closed FLRW universe 解を得ることはできない。

2.2　運動方程式

前 section の仮定を massive gravity の action に適用して、変数 N, a, f について変分を行い、運動方程式を導出する。

まず、$N(t)$ についての変分より、次の運動方程式が得られる。

$$3H^2 - \frac{3|K|}{a^2} = \rho_m + \rho_g \tag{2.5}$$

ここで、ρ_m は matter の energy density を表わし、H, ρ_g は次のように定義される。

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{Na} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}\rho_g = &-m_g^2\left(1-\frac{\sqrt{|K|}f}{a}\right)\\ &\times\left[3\left(2-\frac{\sqrt{|K|}f}{a}\right)+\alpha_3\left(1-\frac{\sqrt{|K|}f}{a}\right)\left(4-\frac{\sqrt{|K|}f}{a}\right)+\alpha_4\left(1-\frac{\sqrt{|K|}f}{a}\right)^2\right]\end{aligned} \tag{2.7}$$

$a(t)$ についての変分より、次の運動方程式が得られる。

$$-\frac{2\dot{H}}{N} - \frac{2|K|}{a^2} = (\rho_m + p_m) + (\rho_g + p_g) \tag{2.8}$$

ここで、p_g は matter の pressure であり、p_g は次のように定義される。

$$\begin{aligned}\rho_g + p_g = &-m_g^2\left(\frac{\dot{f}}{N}-\frac{\sqrt{|K|}f}{a}\right)\\ &\times\left[\left(3-\frac{2\sqrt{|K|}f}{a}\right)+\alpha_3\left(3-\frac{\sqrt{|K|}f}{a}\right)\left(1-\frac{\sqrt{|K|}f}{a}\right)+\alpha_4\left(1-\frac{\sqrt{|K|}f}{a}\right)^2\right]\end{aligned} \tag{2.9}$$

$f(t)$ についての変分より、次の式が得られる。

$$(\dot{a}-\sqrt{|K|}N)\left[\left(3-\frac{2\sqrt{|K|}f}{a}\right)+\alpha_3\left(3-\frac{\sqrt{|K|}f}{a}\right)\left(1-\frac{\sqrt{|K|}f}{a}\right)+\alpha_4\left(1-\frac{\sqrt{|K|}f}{a}\right)^2\right]=0 \tag{2.10}$$

ここで、この方程式の解 $\dot{a} = \sqrt{|K|}N$ は、前 section で見た open FLRW chart で見た Minkwski 時空に一致する。よってこの解は膨張する一様等方宇宙としてふさわしくない。

よって f, a の満たすべき式は

$$\left[\left(3-\frac{2\sqrt{|K|}f}{a}\right)+\alpha_3\left(3-\frac{\sqrt{|K|}f}{a}\right)\left(1-\frac{\sqrt{|K|}f}{a}\right)+\alpha_4\left(1-\frac{\sqrt{|K|}f}{a}\right)^2\right]=0 \tag{2.11}$$

これより、$f(t)$ を $a(t)$ で表わせることがわかる。

今回の方法で flat FLRW universe 解を得るには、これらの方程式で $K=0$ とすればよいが、このとき、式 (2.11) は $3+3\alpha_3+\alpha_4=0$ となり、理論パラメータを fine tuning しない限り解を持たない。よって flat な解は得られない。

以上より運動方程式は次のような形になる。

$$3H^2 - \frac{3|K|}{a^2} = \rho_m + c_\pm m_g^2 \tag{2.12}$$

$$-\frac{2\dot{H}}{N} - \frac{2|K|}{a^2} = \rho_m + p_m \tag{2.13}$$

ここで、

$$\begin{aligned} c_\pm = &-\frac{1}{(\alpha_3+\alpha_4)^2}\left[1+\alpha_3 \pm \sqrt{1+\alpha_3+\alpha_3^2-\alpha_4}\right] \\ &\times \left[1+\alpha_3^2 - 2\alpha_4 \pm (1+\alpha_3)\sqrt{1+\alpha_3+\alpha_3^2-\alpha_4}\right] \end{aligned} \tag{2.14}$$

これは cosmological constant が $c_\pm m_g^2$ の Friedmann 方程式に一致する。

以上より、massive gravity 理論を用いて open FLRW 解を得ることができることがわかった。

第3章　結論

今回のように Stuckelberg field を決めることによって、massive gravity 理論においても、open な FLRW 宇宙解を得ることができることがわかった。

しかし、今回の方法では closed または flat な FLRW 宇宙を記述することはできず、今回得られた解を $K \to 0$ とすることにより近似的に flat な解が得られるものの、厳密に flat な解とは discontinuity が存在する。

一方、実際の宇宙は、微小な負の曲率を持つ可能性が残されているものの、ほぼ flat であるため、flat な解を見つけることは非常に重要である。

関連図書

[1] A. Emir Gumrukcuoglu, Chunshan Lin and Shinji Mukohyama arXiv:1109.3845v2

[2] Kurt Hinterbichler arXiv:1105.3735v2

[3] S. F. Hassan and Rachel A. Rosen arXiv:1106.3344v3