

重力崩壊における量子論的粒子生成

原田 知広

立教大学理学部

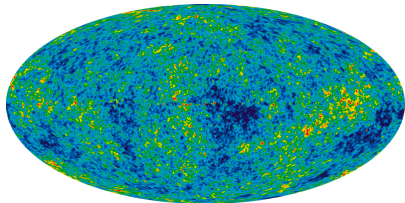
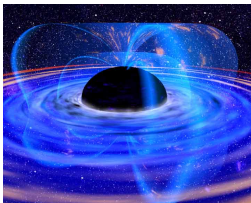
夏の学校相対論分科会 2011 年 8 月 1 日@蒲郡市

- 1 導入
- 2 粒子生成と $T_{\mu\nu}$ の期待値
- 3 Hawking 輻射
 - 球対称重力崩壊時空
 - 単純化した議論
 - 議論の精密化
- 4 多様な重力崩壊時空への適用
 - 裸の特異点形成による放射
 - 宇宙論的 BH の蒸発
- 5 まとめ

目次

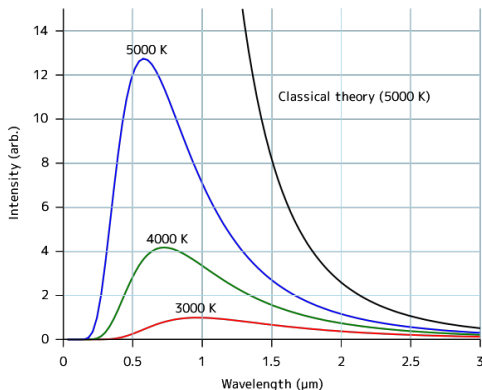
- 1 導入
- 2 粒子生成と $T_{\mu\nu}$ の期待値
- 3 Hawking 輻射
 - 球対称重力崩壊時空
 - 単純化した議論
 - 議論の精密化
- 4 多様な重力崩壊時空への適用
 - 裸の特異点形成による放射
 - 宇宙論的 BH の蒸発
- 5 まとめ

曲がった時空上の場の量子論



- ブラックホール (BH) の黒体輻射：Hawking 輻射
 - BH 熱力学の発見
 - 原始 BH：温度 $T_H \approx 100\text{MeV}(M/10^{15}\text{g})^{-1}$ の γ 線放射
- 宇宙の初期ゆらぎの生成
 - インフレーションはスケール不変なゆらぎを生成
- 曲がった時空上の場の量子論：まだ実験的検証はない。

重力崩壊時空上の場の量子論



- BH は黒体輻射する。(Hawking 1974)
- 重力崩壊は多様。Hawking 輻射は普遍的？それとも多様な放射現象？

目次

- 1 導入
- 2 粒子生成と $T_{\mu\nu}$ の期待値
- 3 Hawking 輻射
 - 球対称重力崩壊時空
 - 単純化した議論
 - 議論の精密化
- 4 多様な重力崩壊時空への適用
 - 裸の特異点形成による放射
 - 宇宙論的 BH の蒸発
- 5 まとめ

スカラー場

- Lagrangian

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \sqrt{-g} [-g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \phi \nabla_{\nu} \phi - \xi \mathcal{R} \phi^2].$$

ここで \mathcal{R} は Ricci scalar

- 運動方程式

$$[\square - \xi \mathcal{R}] \phi = 0$$

- 重力との結合

- $\xi = 0$: 最小結合
- $\xi = (n - 2)/(4(n - 1))$: 共形結合: 運動方程式は共形変換 $g_{\mu\nu} \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}$ に対して不変。

- 二次元時空では最小結合=共形結合

第二量子化

- モード展開

$$\phi(x) = \sum_i [a_i u_i(x) + a_i^\dagger u_i^*(x)],$$

- $\{u_i\}$ は正規直交完全系 (Minkowski なら $u_i \propto e^{ik \cdot x - i\omega t}$)

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij}, \quad (u_i^*, u_j^*) = -\delta_{ij}, \quad (u_i, u_j^*) = 0$$

- (f, g) : Klein-Gordon 内積 (Σ : 空間的超曲面)

$$(f, g) = -i \int_{\Sigma} [f \partial_{\mu} g^* - \partial_{\mu} f g^*] d\Sigma^{\mu}$$

- 生成・消滅演算子

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad [a_i, a_j] = 0, \quad [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0$$

- 真空状態, Fock 空間, 粒子数演算子

$$a_i |0\rangle = 0 \text{ (for all } i), \quad |n_i\rangle = \frac{(a_i^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle, \quad \dots, \quad N_i = a_i^\dagger a_i$$

Bogoliubov 変換

- 別の正規直交完全系 $\{\bar{u}_j\}$ による展開

$$\phi(x) = \sum_j \left[\bar{a}_j \bar{u}_j(x) + \bar{a}_j^\dagger \bar{u}_j^*(x) \right]$$

- Bogoliubov 変換

$$\bar{u}_j = \sum_i (\alpha_{ji} u_i + \beta_{ji} u_i^*), \quad \alpha_{ij} = (\bar{u}_i, u_j), \quad \beta_{ij} = -(\bar{u}_i, u_j^*)$$

$$a_i = \sum_j \alpha_{ji} \bar{a}_j + \beta_{ji}^* \bar{a}_j^\dagger$$

- 異なる真空状態: $a_i |0\rangle = 0, \bar{a}_j |\bar{0}\rangle = 0$
- 粒子生成

$$a_i |\bar{0}\rangle = \sum_j \beta_{ji}^* |1_j\rangle, \quad \langle \bar{0} | N_i | \bar{0} \rangle = \sum_j |\beta_{ji}|^2$$

$T_{\mu\nu}$ の期待値

- $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$ は発散してしまう。込み入った正則化の手続きが必要。(詳しくは Birrel & Davies 1982)
- one-loop effective action W_{eff} を求めた後、 W_{div} を同定して、 $W_{\text{ren}} = W_{\text{eff}} - W_{\text{div}}$ として有限部分を取り出す。 W_{ren} に曲率とその高階微分を含む項が現れる。 W_{ren} から $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle_{\text{ren}}$ を求める。
- 正則化の方法には、次元正則化 (時空次元 $n \neq 4$ として $n \rightarrow 4$ とする) や point-splitting 正則化 (x と x' に分けて計算した後、 $x' \rightarrow x$ の極限をとる) などがある。
- trace anomaly: 共形不変な場なら $T_{\mu}^{\mu}(x) = 0$ 。しかし、偶数次元時空では、 $\langle T_{\mu}^{\mu}(x) \rangle_{\text{ren}}$ は 0 ではなく曲率とその高階微分で書ける。
- 共形不変な場の $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle_{\text{ren}}$ は trace anomaly から導かれる。trace anomaly からの $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle_{\text{ren}}$ への寄与は局所的に計算できる。

目次

1 導入

2 粒子生成と $T_{\mu\nu}$ の期待値

3 Hawking 輻射

- 球対称重力崩壊時空
- 単純化した議論
- 議論の精密化

4 多様な重力崩壊時空への適用

- 裸の特異点形成による放射
- 宇宙論的 BH の蒸発

5 まとめ

目次

1 導入

2 粒子生成と $T_{\mu\nu}$ の期待値

3 Hawking 輻射

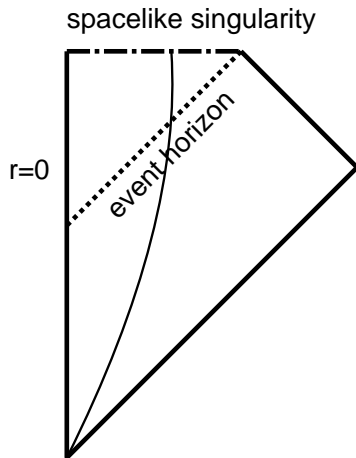
- 球対称重力崩壊時空
- 単純化した議論
- 議論の精密化

4 多様な重力崩壊時空への適用

- 裸の特異点形成による放射
- 宇宙論的 BH の蒸発

5 まとめ

重力崩壊で BH ができる場合



球対称重力崩壊時空の計量

- 外部時空=Schwarzschild 時空

$$ds^2 = -C(r)dudv + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

$$C(r) = 1 - \frac{2M}{r}, \quad dr^* = \frac{dr}{C(r)}, \quad u = t - r^* + R_0^*, \quad v = t + r^* - R_0^*$$

- 内部時空 (中心は $r = 0 \iff U - V = 2R_0$)

$$ds^2 = -A(U, V)dUdV + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

$$U = \tau - r + R_0, \quad V = \tau + r - R_0$$

- 星の表面 $r = R(\tau)$ で内部と外部を接続。 $U = \alpha(u), v = \beta(V)$

$$\alpha'(u) = \frac{dU}{du} = \frac{(1 - \dot{R})C}{[AC(1 - \dot{R}^2) + \dot{R}^2] - \dot{R}}$$

$$\beta'(V) = \frac{dv}{dV} = \frac{[AC(1 - \dot{R}^2) + \dot{R}^2] + \dot{R}}{C(1 + \dot{R})}$$

目次

1 導入

2 粒子生成と $T_{\mu\nu}$ の期待値

3 Hawking 輻射

- 球対称重力崩壊時空
- **単純化した議論**
- 議論の精密化

4 多様な重力崩壊時空への適用

- 裸の特異点形成による放射
- 宇宙論的 BH の蒸発

5 まとめ

in-mode, out-mode

- $d\Omega^2 = 0$ として 2次元にする。2次元時空は共形平坦。2次元ではスカラー場は共形不変。だから、一般解は

$$u = f(u) + g(v)$$

- 境界条件 : $r = 0$ ($\iff v = \beta(\alpha(u) - 2R_0)$) で $\phi = 0$ 。

$$u = g(v) - g(G(u)), \quad G(u) := \beta(\alpha(u) - 2R_0)$$

- モード関数

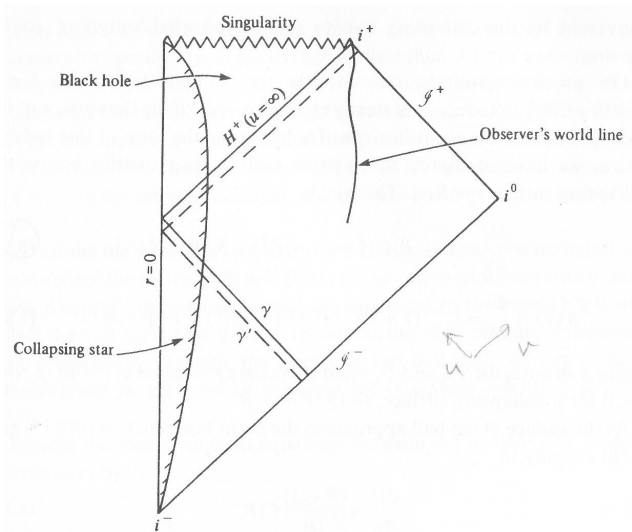
- in-mode: $u \propto e^{-i\omega(t+r^*)}$ at I^-

$$u_{\omega}^{in} = \frac{i}{\sqrt{4\pi\omega}} [e^{-i\omega v} - e^{-i\omega G(u)}]$$

- out-mode: $u \propto e^{-i\omega(t-r^*)}$ at I^+

$$u_{\omega}^{out} = \frac{i}{\sqrt{4\pi\omega}} [e^{-i\omega F(v)} - e^{-i\omega u}], \quad F(v) := G^{-1}(v) \quad (v < v_0)$$

ヌル座標の mapping (1)



ヌル座標の mapping (2)

- $r = R(\tau) = R_h$ で $C(r) = 0$ 。ホライズン付近で展開

$$R(\tau) = R_h + v(\tau_h - \tau) + O((\tau_h - \tau)^2),$$

$$C(r) = 0 + 2\kappa(r - R_h) + O((r - R_h)^2),$$

- 表面重力: $\kappa := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial C}{\partial r} \right)_{R_h}$
- するとヌル座標の接続条件から

$$\kappa u = -\ln |U - U_h| + \text{const}, \quad U_h = \tau_h - R_h + R_0,$$

$$v = c_1 V + c_2, \quad c_1, c_2 : \text{constants}$$

よって

$$G(u) \simeq -c \cdot e^{-\kappa u} + v_0,$$

$$F(v) \simeq -\kappa^{-1} \ln[(v_0 - v)/c], \quad c : \text{const.}$$

粒子生成

- Bogoliubov 係数

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_{\omega\omega'} \\ \beta_{\omega\omega'} \end{array} \right\} = \pm \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \int_{-\infty}^{v_0} dv e^{\pm i\omega F(v) - i\omega' v}$$

- Planck 分布

$F(v) = -\kappa^{-1} \ln[(v_0 - v)/c]$ とすると $\alpha_{\omega\omega'}$, $\beta_{\omega\omega'}$ が定まる。とくに

$$N_{\omega} = \sum_{\omega'} |\beta_{\omega\omega'}|^2 = \frac{1}{e^{\omega/T_H} - 1}.$$

- Hawking 温度 $T_H = \kappa/(2\pi)$

Schwarzschild では $\kappa = (4M)^{-1}$ だから

$$T_H = \frac{1}{8\pi M} = \frac{\hbar c^3}{8\pi k G M} \simeq 6 \times 10^{-8} \text{K} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-1}$$

2次元での $\langle T_{\mu\nu} \rangle$

- 2次元時空は共形平坦。 $ds^2 = -D(\bar{u}, \bar{v})d\bar{u}d\bar{v}$ 。スカラー場は共形不変。
- 量子状態は $ds^2 = -d\bar{u}d\bar{v}$ の Minkowski 時空全体についての真空 (共形真空) にとる。trace anomaly から $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ を導くことができる。

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \theta_{\mu\nu} + \frac{\mathcal{R}}{48\pi} g_{\mu\nu},$$

ここで \mathcal{R} は Ricci scalar で

$$\begin{aligned} \theta_{\bar{u}\bar{u}} &= -\frac{1}{24\pi} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{D_{,\bar{u}}}{D} \right)^2 - \frac{D_{,\bar{u}\bar{u}}}{D} \right], \\ \theta_{\bar{v}\bar{v}} &= -\frac{1}{24\pi} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{D_{,\bar{v}}}{D} \right)^2 - \frac{D_{,\bar{v}\bar{v}}}{D} \right], \quad \theta_{\bar{u}\bar{v}} = \theta_{\bar{v}\bar{u}} = 0. \end{aligned}$$

エネルギー運動量テンソルの期待値

- $\bar{v} = v, \bar{u} = \alpha(\beta(u) - 2R_0) = G(u)$ だから

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dudv = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{1}{G'} d\bar{u}d\bar{v}$$

- 星の外での期待値

$$\langle T_{uu} \rangle = \frac{1}{24\pi} \left(\frac{3}{2} \frac{M^2}{r^4} - \frac{M}{r^3} \right) + \frac{1}{24\pi} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{G''}{G'} \right)^2 - \frac{G'''}{G'} \right],$$

$$\langle T_{vv} \rangle = \frac{1}{24\pi} \left(\frac{3}{2} \frac{M^2}{r^4} - \frac{M}{r^3} \right), \quad \langle T_{uv} \rangle = \frac{1}{24\pi} \left(2 \frac{M^2}{r^4} - \frac{M}{r^3} \right).$$

- エネルギーフラックス

$$P_{\text{obs}} = \langle T_{uu} \rangle_{r \rightarrow \infty} = \frac{1}{24\pi} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{G''}{G'} \right)^2 - \frac{G'''}{G'} \right]$$

エネルギー放射と収支

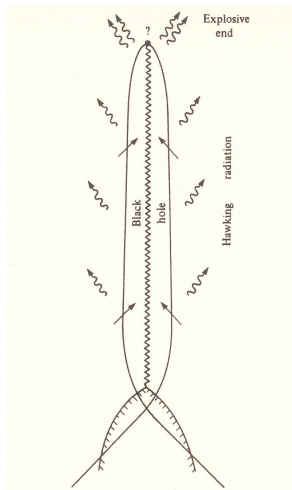
- $G(u) = -c \cdot e^{-ku} + v_0$ を代入すると

$$P_{\text{obs}} = \frac{\kappa^2}{48\pi} = \frac{\pi}{12} T_H^2$$

2次元での Stefan-Boltzmann の法則

- ホライズン上での内向きの負のエネルギーフラックス

$$\langle T_{vv} \rangle_{r=R_h} = -\frac{\kappa^2}{48\pi}$$



エネルギーの流れ

目次

1 導入

2 粒子生成と $T_{\mu\nu}$ の期待値

3 Hawking 輻射

- 球対称重力崩壊時空
- 単純化した議論
- 議論の精密化

4 多様な重力崩壊時空への適用

- 裸の特異点形成による放射
- 宇宙論的 BH の蒸発

5 まとめ

4次元時空へ

● 正振動数モード

- in-mode

$$u_{\omega lm}^{in} \sim \frac{1}{(8\pi^2\omega)^{1/2}r} e^{-i\omega v} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad \text{at } I^-$$

- out-mode

$$u_{\omega lm}^{out} \sim \frac{1}{(8\pi^2\omega)^{1/2}r} e^{-i\omega u} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad \text{at } I^+$$

● 幾何光学近似

- スカラー場の運動方程式にポテンシャル項が入ってくるが、ホライズン付近で自由落下する観測者にとっては粒子の振動数が非常に高いのでポテンシャル項は無視できる。このとき、モード関数は Y_{lm}/r を除いて2次元のときと同じになる。
- 一般にはポテンシャルで散乱される部分があるので灰色因子 $\Gamma_{\omega l}$ が入る。

4次元時空でのエネルギー放出率 (1)

- エネルギー運動量テンソル

$$T_{\mu\nu} = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta},$$

- point-splitting による漸近領域での期待値の計算

$$\begin{aligned} \langle 0, in | T_t^r | 0, in \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{lm} \int_0^\infty d\omega (u_{\omega lm, t}^{in} u_{\omega lm}^{in*, r} + u_{\omega lm}^{in, r} u_{\omega lm, t}^{in*}) \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \sum_{lm} |Y_{lm}|^2 \int_0^\infty \omega [G'(u)G'(u + \epsilon)e^{i\omega[G(u+\epsilon)-G(u)]} - e^{i\omega\epsilon}] \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \sum_{lm} |Y_{lm}|^2 \left[\left\{ -\epsilon^{-2} + \frac{1}{4} \left(\frac{G''}{G'} \right)^2 \right\} - \frac{1}{6} \frac{G'''}{G'} + O(\epsilon) - (-\epsilon^{-2}) \right] \\ &= \frac{1}{24\pi r^2} \sum_{lm} |Y_{lm}|^2 \left[\frac{3}{2} \left(\frac{G''}{G'} \right)^2 - \frac{G'''}{G'} \right] \end{aligned}$$

4次元時空でのエネルギー放出率 (2)

- エネルギー放出率

$$P = \int \langle T_t^r \rangle r^2 d\Omega = \frac{1}{24\pi} \sum_{lm} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{G''}{G'} \right)^2 - \frac{G'''}{G'} \right]$$

$$P_{lm} = \frac{1}{24\pi} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{G''}{G'} \right)^2 - \frac{G'''}{G'} \right].$$

- 全ての l, m について和をとると発散するが、大きな l については散乱の効果が大きいので放射には寄与しない。

4次元BHの輻射

- スペクトル

$$N_{\omega lm} = \frac{\Gamma_{\omega l}}{e^{8\pi M\omega} - 1}$$

- 全エネルギー放射率

$$L = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \int_0^{\infty} d\omega \omega \frac{\Gamma_{\omega l}}{e^{8\pi M\omega} - 1}$$

- Stefan-Boltzmann の法則

半径 $2M$, 温度 T_H の黒体球の輻射と置き換える。

$$P_H \approx \sigma T_H^4 A_H = \frac{N \kappa^2}{1920\pi}$$

ここで $\sigma = N\pi^2/120$, $A_H = 4\pi(2M)^2$ であり、 N は有効自由度。

目次

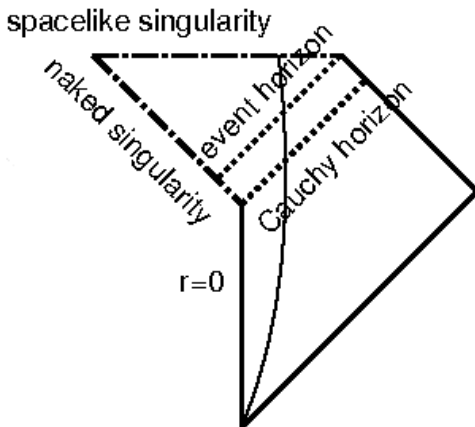
- 1 導入
- 2 粒子生成と $T_{\mu\nu}$ の期待値
- 3 Hawking 輻射
 - 球対称重力崩壊時空
 - 単純化した議論
 - 議論の精密化
- 4 多様な重力崩壊時空への適用
 - 裸の特異点形成による放射
 - 宇宙論的 BH の蒸発
- 5 まとめ

目次

- 1 導入
- 2 粒子生成と $T_{\mu\nu}$ の期待値
- 3 Hawking 輻射
 - 球対称重力崩壊時空
 - 単純化した議論
 - 議論の精密化
- 4 多様な重力崩壊時空への適用
 - 裸の特異点形成による放射
 - 宇宙論的 BH の蒸発
- 5 まとめ

重力崩壊で裸の特異点ができる場合

- globally naked singularity: 特異点から発した光が無窮遠に到達する。
- Cauchy horizon が event horizon の外側にある。



特異点定理と宇宙検閲仮説

特異点定理 (see Hawking & Ellis 1973)

重力崩壊では一般に時空特異点ができる。

- 時空特異点では、物理法則を適用できない。
- 時空特異点はホライズンに隠されている場合もあるが隠されていない(裸の特異点) 場合もある。

宇宙検閲仮説 (Penrose 1969, 1979)

古典一般相対論において裸の特異点は物理的に現実的な時空には存在しないだろう。

- 一方、裸の特異点をもつ時空が多数見つかっている。
- 古典一般相対論は究極理論ではないので、量子重力的な変更が必要であろう。(Harada & Nakao 2004, Gimon & Horava 2009)

LTB 時空における特異点

- 球対称非一様ダスト重力崩壊：Lemaître-Tolman-Bondi (LTB) 時空 (marginally bound)

$$ds^2 = -dt^2 + R(t, r)_{,r}^2 dr^2 + R^2(t, r) d\Omega^2,$$

$$R = r \left(1 - \frac{3}{2} t \sqrt{\frac{F(r)}{r^3}} \right)^{2/3}, \quad \rho = \frac{F'(r)}{8\pi R^2 R_{,r}}.$$

- r は共動座標。 $F(r)$ は任意関数で r より内側の質量に対応。
- ダストの表面で外側の Schwarzschild に接続
- $1 - \frac{3}{2} t \sqrt{\frac{F(r)}{r^3}} = 0$ のとき時空特異点。 $r = 0$ のみ裸になりうる。

例 1: 自己相似時空における裸の特異点からの放射

- 方針: 裸の特異点ができる前の時空で放射を計算する。
- 自己相似 LTB の場合 (Barve, Singh, Vaz & Witten 1998ab)
 - $F(r) = \lambda r$, $0 < \lambda < \lambda_c (\simeq 0.18)$ で裸の特異点
 - Mapping of null coordinates

$$G(u) = v_0 - A(u_0 - u)^\gamma \quad (\gamma > 1)$$

- エネルギー放出率と放射エネルギーは Cauchy horizon $u = u_0$ に近づくにつれて発散

$$P = \frac{1}{48\pi} \frac{\gamma^2 - 1}{(u_0 - u)^2}, \quad E = \frac{1}{48\pi} \frac{\gamma^2 - 1}{u_0 - u},$$

- 粒子の概念は global なので、スペクトルを得るためには Cauchy horizon より後の時空を仮定する必要がある。
- 一般の球対称自己相似重力崩壊に拡張 (Miyamoto & Harada 2004)

例 2: C^∞ LTB 時空における裸の特異点からの放射

- C^∞ LTB 時空の場合 (Harada, Iguchi, Nakao, 2000ab)
 - 初期の密度分布が C^∞ なら (自己相似 LTB はこの範疇に入らない)

$$\rho(0, r) = \rho_0 + \rho_2 r^2 + \dots, \quad \text{or,} \quad F(r) = F_3 r^3 + F_5 r^5 + \dots$$

- $\rho_0 > 0$ かつ $\rho_2 < 0$ ($F_3 > 0$ かつ $F_5 < 0$) ならば裸の特異点。
- Mapping of null coordinates (cf. Singh & Tanaka 2001)

$$G(u) = v_0 + A(u - u_0) - B(u_0 - u)^{3/2}$$

- エネルギー放出率と放射エネルギーがともに発散。自己相似のときより発散は弱い。

$$P \propto \frac{1}{(u_0 - u)^{3/2}}, \quad E \propto \frac{1}{(u_0 - u)^{1/2}},$$

裸の特異点からの放射に関する未解決問題

- 幾何光学近似の妥当性
 - 2次元時空なら厳密に正しい。
 - 4次元の場合は近似であり、BHの場合は正当化できるが、裸の特異点の場合は単純にはわからない。
- 量子効果の反作用
 - $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ の効果を含めると時空がどうなるか？
 - BHの場合は準静的に質量が減ると考えられるが、裸の特異点の場合はよくわからない。
- 量子重力との関係 (Harada, Iguchi, Nakao, Tanaka, Singh & Vaz 2001)

目次

- 1 導入
- 2 粒子生成と $T_{\mu\nu}$ の期待値
- 3 Hawking 輻射
 - 球対称重力崩壊時空
 - 単純化した議論
 - 議論の精密化
- 4 多様な重力崩壊時空への適用
 - 裸の特異点形成による放射
 - 宇宙論的 BH の蒸発
- 5 まとめ

膨張宇宙における BH の蒸発

BH 一意性定理

漸近的に平坦な定常真空の BH は Kerr 時空のみである。

しかし、我々の宇宙は漸近的に平坦ではないし真空でもない。我々の宇宙は膨張している。

宇宙論的 BH

BH の event horizon をもちかつ空間的無限遠で漸近的に膨張 Friedmann であるような時空を宇宙論的 BH という。

見つかっている厳密解は少ない。

- Kottler or Schwarzschild-de Sitter (1918)
- Einstein-Straus (1945)
- Sultana-Dyer (2005)

宇宙論的 BH の蒸発に関する疑問

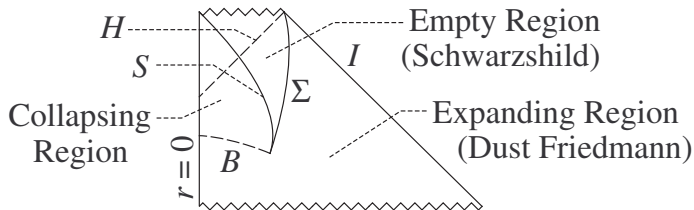
- 原始 BH はその形成時には Hubble 長と同程度の大きさ。宇宙膨張の効果が Hawking 輻射に効いてくるのか？
- BH から Hawking 輻射を観測すると宇宙論的赤方偏移を受けて温度が低くなる？BH の赤方偏移とは？
- BH は徐々に周りの物質を降着して太る。我々はどの時点での BH の Hawking 温度の輻射を観測するのか？

例 3: Einstein-Straus BH: 物理

- Einstein-Straus (1945)



- 重力崩壊



Einstein-Straus BH: 構成

- 崩壊領域

$$ds^2 = -A(U, V)dUdV + r^2 d\Omega^2, \quad U = \tau - r + R_0, \quad V = \tau + r - R_0$$

- 真空領域: Schwarzschild
- 膨張領域: ダスト平坦 Friedmann = Einstein-de Sitter

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + a(t)^2 (d\chi^2 + \chi^2 d\Omega^2) \\ &= a^2(-du dv + \chi^2 d\Omega^2), \end{aligned}$$

ここで $d\eta = dt/a$, $d\chi = dr$, $u = \eta - \chi$, $v = \eta + \chi$. a は Friedmann 方程式を満たす。

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi\rho_*}{3a^3}.$$

Einstein-Straus BH の蒸発

- $G(u)$ を求めて $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ を計算すると

$$P_{\text{obs}} = \frac{\kappa^2}{48\pi(1+z)^2} \left[(1 + \epsilon^{1/3})^{-2} + O(\epsilon^2) \right],$$

$$z := \frac{a_0}{a_{\text{ret}}} - 1, \quad \epsilon := \frac{2M}{H_{\text{ret}}^{-1}},$$

ここで z と H_{ret}^{-1} は観測される光が接続面 Σ を貫いたときの赤方偏移と Hubble 長。

- 宇宙論的赤方偏移がある。これは母銀河の赤方偏移とみなせる。
- 最低次で $\epsilon^{1/3}$ に比例して抑制される。
 $\epsilon^{1/3} \sim 10^{-4} (M/10^9 M_{\odot})^{1/3} (t/14 \text{ Gyr})^{-1/3}$ だができたての原始 BH では大きい。
- 幾何光学近似は良いので 2次元の結果は 4次元でも成り立つ。

例 4: Sultana-Dyer BH: 構成

- Sultana & Dyer (2005): 共形 Schwarzschild

$$ds^2 = a(\eta)^2 \left[-d\eta^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 + \frac{2M}{r} (d\eta + dr)^2 \right],$$

ここで $a(\eta) = (\eta/\eta_*)^2$ 。 (η, r) は Panleve-Gulstrand 座標。

- 通常の Schwarzschild 時空の (t, r) とは

$$\eta = t + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right).$$

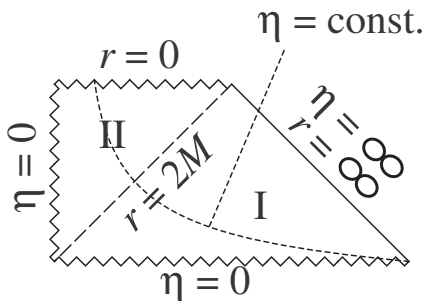
という関係になっていて

$$ds^2 = a(t, r)^2 \left[- \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right]$$

と書ける。

Sultana-Dyer BH: 物理

- ダストとヌルダストを含む Einstein 方程式の厳密解。
- $r \rightarrow \infty$ で漸近的に Einstein-de Sitter
- $r = 2M$ は event horizon。物理的な半径は $2Ma$ で膨張する。質量は late time では Ma となり、これは著しい質量降着である。
- event horizon 付近でエネルギー条件を破る。
- 時空構造



Sultana-Dyer BH の蒸発

- Sultana-Dyer 時空は共形 Schwarzschild なので 4D での共形結合スカラ場を考えて trace anomaly から $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ 計算をする。
- 観測されるエネルギーフラックス

$$F_{obs} \approx \frac{1}{a^4} \langle T_{(r)}^{(t)} \rangle_{Sch} \quad \text{as } r \rightarrow \infty$$

このうち $\frac{1}{a^2}$ の因子は赤方偏移。

- エネルギー放出率は $P_H = (N \kappa^2)/(1920\pi)$ を使って

$$P = 4\pi(ra)^2 F_{obs} = \frac{1}{a^2} P_H = \frac{1}{a^2} \frac{N \kappa^2}{1920\pi}$$

- $A_H = 4\pi(2Ma)^2$ であることに注意すると

$$T_{\text{eff}} = \frac{1}{8\pi Ma} = \frac{\kappa}{2\pi a}.$$

- 各時刻で質量 Ma をもつ Schwarzschild BH の Hawking 輻射と同じ。

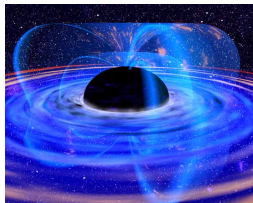
宇宙論的 BH の蒸発のまとめ

- BH の質量降着が無視できる場合:
放射は Hawking 輻射のそれから宇宙論的赤方偏移を受ける。また、エネルギー放出率さらに宇宙膨張によって弱められる。
- BH が効率よく物質を降着して太り続ける場合:
放射は各時刻での BH の質量の Schwarzschild の Hawking 輻射と同じになる。したがって、質量が増えるにつれて温度が下がりエネルギー放出率も小さくなる。さらに宇宙論的赤方偏移を受ける。

目次

- 1 導入
- 2 粒子生成と $T_{\mu\nu}$ の期待値
- 3 Hawking 輻射
 - 球対称重力崩壊時空
 - 単純化した議論
 - 議論の精密化
- 4 多様な重力崩壊時空への適用
 - 裸の特異点形成による放射
 - 宇宙論的 BH の蒸発
- 5 まとめ

まとめ



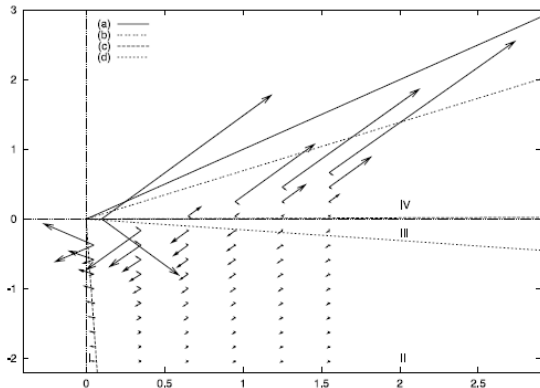
- 曲がった時空上の場の量子論は、興味深い予言を行うが、直接実験的に検証されたことはない。
- ブラックホールは黒体放射する。(Hawking 放射)
- 多様な重力崩壊時空上の場の量子論
 - 裸の特異点形成過程では、一般的にエネルギー放出率や放射エネルギーが Cauchy horizon へ近づくにつれて発散する。
 - 宇宙論的 BH の放射は、宇宙論的赤方偏移を受けるとともに宇宙膨張によって弱められる。また、各時刻の BH 質量の Hawking 放射する。
- わからないことはたくさんある。面白い問題設定があれば面白いことができる。

参考文献

- 曲がった時空上の場の量子論: Birrel & Davies, *Quantum fields in curved space*, 1982
- Hawking 輻射: Hawking Nature 1974, Hawking CMP 1975
- 時空特異点: Hawking & Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, 1973, Wald, *General Relativity*, 1984
- 裸の特異点からの放射: Ford & Parker PRD 1978, Hiscock, Williams & Eardley PRD 1982, Barve, Singh, Vaz & Witten NPB 1998, Barve, Singh, Vaz & Witten, PRD 1998, Harada, Iguchi & Nakao PRD 2000ab, Tanaka & Singh PRD 2001, Iguchi & Harada CQG 2001, Harada, Iguchi & Nakao PTP 2002, Miyamoto & Harada PRD 2004
- 宇宙論的 BH の蒸発: Einstein & Straus RMP 1945, Sultana & Dyer JMP 2004, Saida, Harada & Maeda CQG 2007

エネルギー収支

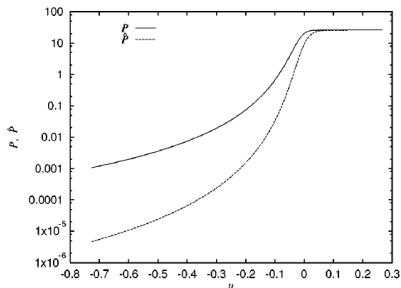
- 自己相似 LTB 時空で $d\Omega^2 = 0$ の 2 次元時空として各点での $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ を計算する。(Iguchi & Harada 2001)



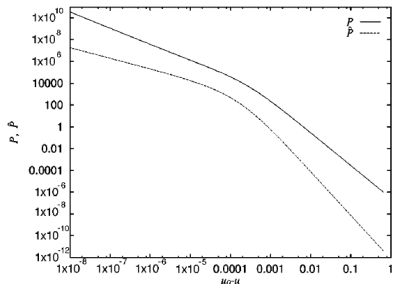
特異点付近でのみ Cauchy horizon を横切る強い負の内向きエネルギーフラックスがある。

エネルギー放出率：BH との比較

- C^∞ LTB で、BH ができる場合と裸の特異点ができる場合とで、 P (最小結合) と \hat{P} (共形結合) を計算。



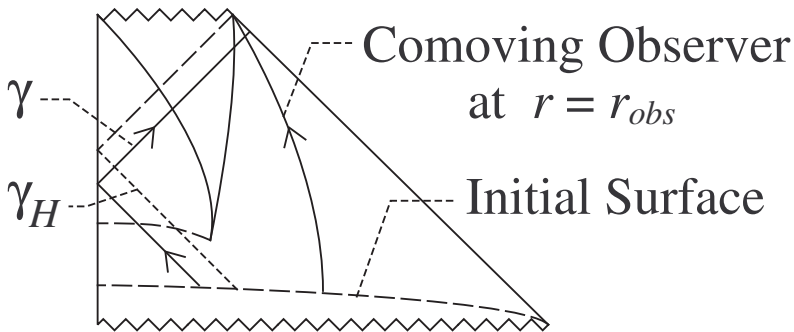
BH



裸の特異点

ヌル座標の mapping

- 二つの接続面 S (崩壊領域と真空領域) および Σ (真空領域と膨張領域) で接続をおこなって、中心の軌跡を Friedmann でのヌル座標 (u, v) で $v = G(u)$ と表して G を決定する。



エネルギー運動量テンソルの期待値

- $d\Omega^2 = 0$ として2次元での $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ を評価。量子状態は初期の Friedmann の共形真空とすると (Saida, Harada & Maeda 2007)

$$\begin{aligned}\langle T_{\bar{u}\bar{u}} \rangle &= \frac{1}{24\pi} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{G''}{G'} \right)^2 - \frac{G'''}{G'} \right] + \langle T_{\bar{v}\bar{v}} \rangle, \\ \langle T_{\bar{v}\bar{v}} \rangle &= -\frac{2a'^2 - aa''}{48\pi a^2}, \quad \langle T_{\bar{u}\bar{v}} \rangle = \frac{a'^2 - aa''}{4\pi a^2}.\end{aligned}$$

- $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ には BH による放射の他に宇宙膨張による粒子生成の効果が入っているが、エネルギーフラックスには入ってこない。

$$P_{obs} = \langle T_{(\eta)}^{(\chi)} \rangle = \frac{1}{24\pi a_0^2} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{G''}{G'} \right)^2 - \frac{G'''}{G'} \right]$$

Effective action and conformal transformation

- Effective action: $W = W_{\text{ren}} + W_{\text{div}}$

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta W_{\text{ren}}}{\delta g^{\mu\nu}}$$

- Conformal transformation $g_{\mu\nu} = \Omega^2 \tilde{g}_{\mu\nu}$

$$W_{\text{ren}} = \tilde{W}_{\text{ren}} - \int g^{\alpha\beta} \langle T_{\alpha\beta} \rangle \frac{\delta \Omega}{\Omega} \sqrt{-g} d^4x.$$

- Conformal anomaly for conformally invariant fields

$$g^{\alpha\beta} \langle T_{\alpha\beta} \rangle = \frac{\Omega}{\sqrt{-g}} \frac{\delta W_{\text{div}}}{\delta \Omega}.$$

- Stress-energy tensor:

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \frac{1}{\Omega^2} \langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle - \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta W_{\text{div}}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{2\Omega^2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \tilde{W}_{\text{div}}}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}}$$

Formula for a conformally coupled scalar field

- A conformally coupled massless scalar field

$$\left(\square - \frac{\mathcal{R}}{6}\right)\phi = 0$$

- W_{div} is given for this case (cf. Birrel & Davies 1982).

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \frac{1}{\Omega^2} \langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle - \frac{1}{2880\pi^2} \left(\frac{1}{6} X_{\mu\nu} - Y_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{2880\pi^2 \Omega^2} \left(\frac{1}{6} \tilde{X}_{\mu\nu} - \tilde{Y}_{\mu\nu} \right),$$

where

$$\begin{aligned} X_{\mu\nu} &= 2 \nabla_\mu \nabla_\nu \mathcal{R} - 2 g_{\mu\nu} \square \mathcal{R} + \frac{1}{2} \mathcal{R}^2 g_{\mu\nu} - 2 \mathcal{R} R_{\mu\nu}, \\ Y_{\mu\nu} &= -R^\alpha_\mu R_{\alpha\nu} + \frac{2}{3} \mathcal{R} R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \mathcal{R}^2 g_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

are wrt $g_{\mu\nu}$, and $\tilde{X}_{\mu\nu}$ and $\tilde{Y}_{\mu\nu}$ are wrt $\tilde{g}_{\mu\nu}$.

4次元での $\langle T_{\mu\nu} \rangle$

- Sultana-Dyer 時空は共形 Schwarzschild なので 4D での trace anomaly から計算をする。
- 共形結合スカラー場の場合、共形変換 $g_{\mu\nu} = \Omega^2 \tilde{g}_{\mu\nu}$ で結びついた二つの時空での期待値の関係は (Saida, Harada & Maeda 2007)

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \frac{1}{\Omega^2} \langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle - \frac{1}{2880\pi^2} \left(\frac{1}{6} X_{\mu\nu} - Y_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{2880\pi^2 \Omega^2} \left(\frac{1}{6} \tilde{X}_{\mu\nu} - \tilde{Y}_{\mu\nu} \right),$$

ここで

$$\begin{aligned} X_{\mu\nu} &= 2 \nabla_\mu \nabla_\nu \mathcal{R} - 2 g_{\mu\nu} \square \mathcal{R} + \frac{1}{2} \mathcal{R}^2 g_{\mu\nu} - 2 \mathcal{R} R_{\mu\nu}, \\ Y_{\mu\nu} &= -R^\alpha_\mu R_{\alpha\nu} + \frac{2}{3} \mathcal{R} R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \mathcal{R}^2 g_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

は $g_{\mu\nu}$ について。 $\tilde{X}_{\mu\nu}$ と $\tilde{Y}_{\mu\nu}$ は $\tilde{g}_{\mu\nu}$ について。

Sultana-Dyer BH の蒸発 (1)

- $g_{\mu\nu}$ =Sultana-Dyer, $\tilde{g}_{\mu\nu}$ =Schwarzschild:

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \frac{1}{a^2} \langle T_{\mu\nu} \rangle_{Sch} - \frac{1}{2880\pi^2} \left(\frac{1}{6} X_{\mu\nu} - Y_{\mu\nu} \right),$$

宇宙膨張による粒子生成の効果が第二項に入っている。

- 観測されるエネルギーフラックス

$$\begin{aligned} F_{obs} &= \langle T_{(r)}^{(r)} \rangle = -\frac{1}{a^4} \langle T_{\eta r} \rangle_{Sch} + \frac{1}{a^2} \frac{1}{2880\pi^2} \left(\frac{1}{6} X_{\eta r} - Y_{\eta r} \right) \\ &\approx \frac{1}{a^4} \langle T_{(r)}^{(t)} \rangle_{Sch} \quad \text{as } r \rightarrow \infty \end{aligned}$$

となる。このうち $\frac{1}{a^2}$ の因子は宇宙論的赤方偏移によるもの。