ホジャバ・リフシッツ重力理論における回転する星

塚本直樹
立教大学理学研究科

1 Introduction

最近、ホジャバによってローレンツ不変でない新しい量子重力理論が提案された [1]。ホジャバ・リフシッツ重力理論と呼ばれるこの新しい重力理論は、時間と空間が同等でないことを指導原理にしており、一般座標変換の不変性は破られ、時間一定の超曲面を保つ変換

$$t \to \tilde{t}(t),\ x^i \to \tilde{x}^i(t,x), \tag{1}$$

でのみ不変な理論である。よって、この理論では時間一定面上の物理量は正則でなければばならない。この理論はパワーカウンティング繰りこみ可能であり、繰りこみを目指したほかの量子重力理論で生じるゴーストや様々な不安定性を避けようとする量子重力理論である。

泉・向山によって、ホジャバ・リフシッツ重力理論では、エネルギー密度が圧力の非負の区分的連続な関数であり、星の中心での圧力が正であるという仮定の下で、完全流体で満たされた球対称静的な星は存在しないことが示された [2]。しかし、実際の星は必ず回転しているのでこの条件は強すぎると思われる。今回の発表では泉・向山の研究を拡張し、完全流体に満たされた軸対称定常な回転をする星について考察する。以下では光速 $c = 1$ とする。

2 Properties of Hořava-Lifshitz gravity

ホジャバ・リフシッツ重力理論の基本的なことをここでは述べる。場の変数はラプス関数 $N(t)$、 シフトベクトル $N^i(t,x)$ と空間の計量 $g_{ij}(t,x)$ である。この理論ではラプス関数 $N(t)$ が時間だけの関数であるという射影可能条件が課されている [1]。Arnowitt-Deser-Misner(ADM) 形式で線素を記述すると、

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + g_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt), \tag{2}$$

となる。作用は

$$I = I_g + I_m, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} I_g &= \int dtd^3x\sqrt{g}N\left\{\frac{2}{\kappa^2}(K^{ij}K_{ij}-\lambda K^2)-\frac{\kappa^2}{2\omega^4}C_{ij}C^{ij}+\frac{\kappa^2\mu}{2\omega^2}\varepsilon^{ijk}R_{il}D_jR^l_k\right. \\ &\left. -\frac{\kappa^2\mu^2}{8}R_{ij}R^{ij}+\frac{\kappa^2\mu^2}{8(1-3\lambda)}\left(\frac{1-4\lambda}{4}R^2+\Lambda_W R-3\Lambda_W^2\right)\right\}, \end{aligned} \tag{4}$$

ここで I_m は物質の作用、R は g_{ij} のリッチスカラー、R_{ij} は g_{ij} のリッチテンソル、D_i は g_{ij} に関する共変微分、K_{ij} は時間一定面上の外部曲率テンソルであり、

$$K_{ij} = \frac{1}{2N}(\partial_t g_{ij} - D_iN_j - D_jN_i), \tag{5}$$

で定義される。$K = g^{ij}K_{ij}$, C_{ij} はコットンテンソル、

$$C^{ij} = \varepsilon^{ikl}D_k\left(R^j_l - \frac{1}{4}R\delta^j_l\right), \tag{6}$$

である。また $\varepsilon^{ikl} = \epsilon^{ikl}/\sqrt{g}$ は g_{ij} に関して共変な反対称テンソルであり, $\kappa, \omega, \mu, \lambda, \Lambda_W$ はそれぞれ定数である。重力の作用 (4) 式は書き直すことができて

$$\begin{aligned} I_g &= \int dtd^3x\sqrt{g}N[\alpha(K^{ij}K_{ij}-\lambda K^2)+\beta C_{ij}C^{ij} \\ &+\gamma\varepsilon^{ijk}R_{il}D_jR^l_k+\zeta R_{ij}R^{ij}+\eta R^2+\xi R+\sigma], \end{aligned} \tag{7}$$

ここで、各パラメーターは

$$\begin{aligned} &\alpha = \frac{2}{\kappa^2}, \quad \beta = -\frac{\kappa^2}{2\omega^4}, \quad \gamma = \frac{\kappa^2\mu}{2\omega^2}, \quad \zeta = -\frac{\kappa^2\mu^2}{8}, \\ &\eta = \frac{\kappa^2\mu^2}{8(1-3\lambda)}\frac{1-4\lambda}{4}, \quad \xi = \frac{\kappa^2\mu^2}{8(1-3\lambda)}\Lambda_W, \quad \sigma = \frac{\kappa^2\mu^2}{8(1-3\lambda)}(-3\Lambda_W^2), \end{aligned} \tag{8}$$

とした。$\lambda = 1$ とすれば、一般相対論の作用の形を再現できるので、一般相対論の作用と比較して

$$\alpha = \frac{1}{16\pi G}, \quad \xi = \alpha, \quad \sigma = -2\Lambda\alpha, \tag{9}$$

とすることができる。ここで Λ は宇宙定数、G は万有引力定数である。

無限小座標変換

$$\delta t = f(t), \qquad \delta x^i = \zeta^i(t,x), \tag{10}$$

において g_{ij}、N^i、N はそれぞれ

$$\delta g_{ij} = f\partial_t g_{ij} + \mathcal{L}_\zeta g_{ij}, \tag{11}$$

$$\delta N^i = \partial_t(N^i f) + \partial_t\zeta^i + \mathcal{L}_\zeta N^i, \tag{12}$$

$$\delta N_i = \partial_t(N_i f) + g_{ij}\partial_t\zeta^j + \mathcal{L}_\zeta N_i, \tag{13}$$

$$\delta N = \partial_t(Nf), \tag{14}$$

のように変換される。ここで $\mathcal{L}_\zeta$ は $\zeta^i(t,x)$ に沿ったリー微分で、$\mathcal{L}_\zeta g_{ij}$ と $\mathcal{L}_\zeta N^i$ は

$$\mathcal{L}_\zeta g_{ij} = g_{jk} D_i \zeta^k + g_{ik} D_j \zeta^k, \tag{15}$$

$$\mathcal{L}_\zeta N^i = \zeta^k D_k N^i - N^k D_k \zeta^i, \tag{16}$$

である。

N に関する作用の変分から, ハミルトニアン拘束条件

$$H_{g\perp} + H_{m\perp} = 0, \tag{17}$$

が得られる。ここで、それぞれ

$$\begin{aligned} H_{g\perp} \quad &\equiv -\frac{\delta I_m}{\delta N} \\ &= \int dx^3 \sqrt{g} \left[(\alpha K^{ij} K_{ij} - \lambda K^2) - \beta C_{ij} C^{ij} \right. \\ &\left. -\gamma \varepsilon^{ijk} R_{il} D_j R^l_k - \zeta R_{ij} R^{ij} - \eta R^2 - \xi R - \sigma \right], \end{aligned} \tag{18}$$

$$H_{m\perp} \equiv -\frac{\delta I_m}{\delta N} = \int dx^3 \sqrt{g} T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu, \tag{19}$$

であり、n^μ は

$$n_\mu dx^\mu = -N dt, \quad n^\mu \partial_\mu = \frac{1}{N}(\partial_t - N^i \partial_i), \tag{20}$$

である。すぐに解るように、射影可能条件 $N = N(t)$ からハミルトニアン拘束条件は大域的になることが一般相対論と大きく違うところである。

N^i に関する作用の変分から、運動量拘束条件

$$\mathcal{H}_{gi} + \mathcal{H}_{mi} = 0, \tag{21}$$

$$\mathcal{H}_{gi} \equiv -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta I_g}{\delta N^i} = -2\alpha D^j (K_{ij} - \lambda K g_{ij}), \tag{22}$$

$$\mathcal{H}_{mi} \equiv -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta I_m}{\delta N^i} = T_{i\mu} n^\mu, \tag{23}$$

が得られる。

g_{ij} に関する作用の変分からは発展方程式が得られる。

$$\mathcal{E}_{gij} + \mathcal{E}_{mij} = 0, \tag{24}$$

ここで

$$\mathcal{E}_{gij} \equiv g_{ik} g_{jl} \frac{2}{N\sqrt{g}} \frac{\delta I_g}{\delta g_{kl}}, \tag{25}$$

$$\mathcal{E}_{mij} \equiv g_{ik} g_{jl} \frac{2}{N\sqrt{g}} \frac{\delta I_m}{\delta g_{kl}} = T_{ij}, \tag{26}$$

である。

無限小座標変換 (10) 式による作用の不変性からエネルギー保存則

$$N\partial_t H_{\alpha\perp} + \int dx^3 \left(N^i \partial_t(\sqrt{g}\mathcal{H}_{\alpha i}) + \frac{N\sqrt{g}}{2}\mathcal{E}_\alpha^{\ ij}\partial_t g_{ij} \right) = 0, \tag{27}$$

と運動量保存則

$$0 = \frac{1}{N}(\partial_t - N^j D_j)\mathcal{H}_{\alpha i} + K\mathcal{H}_{\alpha i} - \frac{1}{N}\mathcal{H}_{\alpha j} D_i N^j - D^j \mathcal{E}_{\alpha ij}, \tag{28}$$

が得られる。ここで α は g か m を表している。

3 No stationary axisymmetric star solutions

ここでは、定常軸対称な時空において、完全流体に満ちた赤道面対称な回転する星が、エネルギー密度が圧力の非負の区分的連続な関数であり、星の中心での圧力が正であるという仮定のもとでは存在しないことを示す。

3.1 Stationary And Axisymmetric Configuration

定常軸対称な時空では、キリングベクトル

$$t^\mu \partial_\mu = \partial_t, \tag{29}$$

$$\phi^\mu \partial_\mu = \partial_\phi, \tag{30}$$

が存在する。時間的キリングベクトル t^μ から

$$N^2 - N_i N^i > 0, \tag{31}$$

がすべての場所で成り立つことが分かる。

ゲージ条件の一部で

$$g_{r\theta} = g_{r\phi} = 0, \tag{32}$$

とする。このゲージ条件の下で空間線素は一般的に

$$dl^2 = \psi^4 [A^2 dr^2 + \frac{r^2}{B^2} d\theta^2 + r^2 B^2 (\sin\theta d\phi + \xi d\theta)^2], \tag{33}$$

と記述することができる。ここで、定常と軸対称から ψ, A, B, ξ は r と θ のみの関数である。

3.2 Matter Sector And Momentum Conservation

簡単のために物質は完全流体だと仮定する。そのエネルギー・運動量テンソルは

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}, \tag{34}$$

である。ここで P と ρ はそれぞれ、圧力とエネルギー密度を表している。四元速度を

$$\begin{aligned} u^\mu \partial_\mu &= \frac{1}{D}(t^\mu + \omega\phi^\mu)\partial_\mu \\ &= \frac{1}{D}\partial_t + \frac{\omega}{D}\partial_\phi, \end{aligned} \tag{35}$$

と仮定する。ここで

$$D \equiv (N^2 - N_i N^i - 2\omega N_\phi - \omega^2 g_{\phi\phi})^{\frac{1}{2}}, \tag{36}$$

は規格化因子である。

$\alpha = m$ とすると運動量保存則 (28) 式は

$$0 = -\frac{1}{N}N^j D_j(T_{i\mu}n^\mu) + KT_{i\mu}n^\mu - \frac{1}{N}T_{j\mu}n^\mu D_i N^j - D^j T_{ij}, \tag{37}$$

となる。少々長い計算の後にその r 成分

$$\begin{aligned} 0 &= -P_{,r} + \frac{\rho + P}{D^2}\left\{\frac{1}{2}(N_i N^i)_{,r} + \omega N_{\phi,r} + \frac{1}{2}\omega^2 g_{\phi\phi,r} + \frac{N_{,r}}{N}N^r N_r + \frac{N_{,\theta}}{N}N^\theta N_r\right\} \\ &= -P_{,r} + \frac{\rho + P}{D^2}\left\{\frac{1}{2}(-N^2 + N_i N^i)_{,r} + \omega N_{\phi,r} + \frac{1}{2}\omega^2 g_{\phi\phi,r}\right\}, \end{aligned} \tag{38}$$

を得ることができる。最後の行で射影可能条件 $N = N(t)$ を用いた。

ここから、回転軸上 $\theta = 0$ に着目する。(51) 式から, 軸上ではシフトベクトルのトライアド成分 $N_{(3)}$ の正則性から

$$N_\phi = 0, \tag{39}$$

となる。よって、$N_{\phi,r} = 0$ である。空間線素 (33) 式から、$g_{\phi\phi,r} = 0$ である。したがって、回転軸上では運動量保存則の r 成分 (38) 式は

$$0 = -P_{,r} - \frac{1}{2}\frac{(\rho + P)(N^2 - N_i N^i)_{,r}}{N^2 - N_i N^i}, \tag{40}$$

となる。

3.3 Contradiction Of Momentum Conservation

星は赤道面 $\theta = \frac{\pi}{2}$ で対称とし、エネルギー密度 ρ は圧力 P の非負の区分的連続な関数で、星の中心での圧力 $P_c \equiv P(r = 0)$ が正だと仮定する。

シフトベクトルのトライアド成分 $N_{(i)}$ の正則性 (49)-(51) 式と外部曲率テンソルのトライアド成分 $K_{(i)(j)}$ の正則性 (55)-(60) 式から $(N_iN^i)_{,r}$ は正則であることがわかる。時間的キリングベクトル t^μ から $N^2 - N_iN^i > 0$ であり、射影可能条件から $N_{,r} = 0$ であるので、(40) 式から $P_{,r}$ も正則である。従って、N_iN^i と P は r の連続な関数である。よって、エネルギー密度 ρ は圧力 P の区分的連続な関数と仮定したので、$\rho + P$ は r の区分的連続な関数である。

エネルギー密度 ρ はすべての場所で非負であり、中心での圧力 P_c は正だと仮定したので、$\rho + P$ は中心では正である。ここで、r_s を $(\rho+P)|_{r=r_s}$、$\lim_{r\to r_s-0}(\rho+P)$、$\lim_{r\to r_s+0}(\rho+P)$ のうち少なくとも一つが非正となる最小の r であると定義する。

(40) 式を $\frac{1}{2}(\rho+P)$ で割ると、

$$\left\{\log\left(N^2 - N_iN^i\right)\right\}_{,r} = -2\frac{P_{,r}}{\rho+P}. \tag{41}$$

となる。エネルギー密度が圧力の関数 $\rho = \rho(P)$ という仮定の下では、(41) 式の右辺は

$$\begin{aligned} -2\frac{P_{,r}}{\rho+P} &= -2\frac{\frac{dP}{d\rho}\rho_{,r}}{\rho+P} = -2\frac{d\left(\int \frac{\frac{dP}{d\rho}}{\rho+P}d\rho\right)}{d\rho}\rho_{,r} \\ &= -2\left(\int \frac{\frac{dP}{d\rho}}{\rho+P}d\rho\right)_{,r} = -2\left(\int \frac{dP}{\rho+P}\right)_{,r}, \end{aligned} \tag{42}$$

と変形できる。従って、(41) 式を区間 $0 \le r < r_s$ で積分して、

$$\log\left(N^2 - N_iN^i\right)\Big|_{r=r_s} - \log\left(N^2 - N_iN^i\right)\Big|_{r=0} = -2\int_{P_c}^{P_s}\frac{dP}{\rho+P}, \tag{43}$$

が得られる。ここで $P_s \equiv P(r=r_s)$ である。

r_s の定義から $(\rho+P)|_{r=r_s}$、$\lim_{r\to r_s-0}(\rho+P)$、$\lim_{r\to r_s+0}(\rho+P)$ のうち少なくとも一つは非正である。先ほど示したように、圧力 $P(r)$ は連続関数であり、仮定から ρ は非負なので、$P_s = \lim_{r\to r_s-0} P = \lim_{r\to r_s+0} P$ は非正である。従って、

$$P_s \le 0 < P_c, \tag{44}$$

である。このことから (43) 式の右辺は正であることが分かる。

一方で、射影可能条件 $N = N(t)$ と (39)、(77)、(78) 式から、星の中心では

$$N_iN^i\Big|_{r=0} = 0, \tag{45}$$

となるので、(43) 式の左辺は非正である。これは (43) 式の右辺が正であることと矛盾している。

4 Discussion and conclusion

定常軸対称な時空において、完全流体に満ちた赤道面対称な回転する星が、エネルギー密度が圧力の非負の区分的連続な関数であり、星の中心での圧力が正であるという仮定のもとでは存在しないことを示した。これらの仮定は星として自然なものである。時間一定面上の物理量の正則性と射影可能条件は強い制限を課しており、ホジャバ・リフシッツ重力理論で星を作ることを難しくしていることが分かった。

5 Appendix A. Triad components of shift vector and extrinsic curvature tensor

直交するトライアド基底ベクトル $\boldsymbol{e_{(i)}}$ を以下のように定義する。$\boldsymbol{e_{(1)}}$ は半径方向、$\boldsymbol{e_{(3)}}$ は空間的キリングベクトルに沿った方向、$\boldsymbol{e_{(2)}}$ は直交性と右手系の規則で決まる方向とする。

$$e^i_{(1)} = \frac{1}{\psi^2}[\frac{1}{A}, 0, 0], \tag{46}$$

$$e^i_{(2)} = \frac{1}{\psi^2}[0, \frac{B}{r}, -\frac{\xi B}{r\sin\theta}], \tag{47}$$

$$e^i_{(3)} = \frac{1}{\psi^2}[0, 0, \frac{1}{rB\sin\theta}]. \tag{48}$$

シフトベクトルのトライアド成分と座標成分の関係は

$$N_{(1)} = \frac{N_r}{\psi^2 A}, \tag{49}$$

$$N_{(2)} = \frac{N_\theta B}{\psi^2 r} - \frac{N_\phi \xi B}{\psi^2 r\sin\theta}, \tag{50}$$

$$N_{(3)} = \frac{N_\phi}{\psi^2 rB\sin\theta}, \tag{51}$$

となる。

N^i に沿った g_{ij} のリー微分は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\boldsymbol{N}} g_{ij} &= D_j N_i + D_i N_j = N_{i,j} + N_{j,i} \\ &= g_{ik} N^k_{\ ,j} + g_{jk} N^k_{\ ,i} + g_{ij,k} N^k,\end{aligned} \tag{52}$$

となる。(5) 式と (52) 式から

$$\frac{dg_{ij}}{dt} - N^k_{\ ,i} g_{jk} - N^k_{\ ,j} g_{ki} = 2NK_{ij}, \tag{53}$$

となる。ここで

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} - N^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{54}$$

である。(53) 式と (46)-(48) 式から、

$$-NK_{(1)(1)} = N^r_{,r} - \frac{1}{A}\frac{dA}{dt} - \frac{2}{\psi}\frac{d\psi}{dt}, \tag{55}$$

$$-\frac{2NK_{(1)(2)}}{\sin\theta} = -\frac{AB}{r}N^r{}_{,x} + \frac{r}{AB}G_{,r}, \tag{56}$$

$$-\frac{2NK_{(1)(3)}}{\sin\theta} = \frac{rB}{A}[N^\phi_{,r} + \xi G_{,r}], \tag{57}$$

$$NK_{(2)(2)} = \frac{1}{r}\frac{dr}{dt} + \frac{2}{\psi}\frac{d\psi}{dt} - \frac{1}{B}\frac{dB}{dt} - N^\theta{}_{,\theta}, \tag{58}$$

$$NK_{(3)(3)} = \frac{1}{r}\frac{dr}{dt} + \frac{2}{\psi}\frac{d\psi}{dt} + \frac{1}{B}\frac{dB}{dt} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{d\sin\theta}{dt}, \tag{59}$$

$$-2NK_{(2)(3)} = -B^2\frac{d\xi}{dt} - (1-x^2)B^2(N^\phi_{,x} + \xi G_{,x}), \tag{60}$$

を得る [3]。ここで

$$G \equiv \frac{N^\theta}{\sin\theta}, \tag{61}$$

$$x \equiv \cos\theta, \tag{62}$$

である。

6 Appendix B. Regularity conditions at the origin

軸対称空間において球面座標を r, θ, ϕ とする。軸対称性から空間的キリングベクトル (30) 式が存在する。局所デカルト座標と球面座標の関係は

$$x \equiv r\sin\theta\cos\phi, \tag{63}$$

$$y \equiv r\sin\theta\sin\phi, \tag{64}$$

$$z \equiv r\cos\theta, \tag{65}$$

である。対称性から、空間的キリングベクトルに沿ったシフトベクトル N^i のリー微分は

$$N^i{}_{,j}\phi^j - \phi^i{}_{,j}N^j = 0, \tag{66}$$

となる。局所デカルト座標では、空間的キリングベクトルは

$$\phi^i\partial_i = -y\partial_x + x\partial_y, \tag{67}$$

となる。従って、(66) 式の成分は

$$-N^x_{,x}y + N^x_{,y}x + N^y = 0, \tag{68}$$

$$-N^y_{,x}y + N^y_{,y}x - N^x = 0, \tag{69}$$

$$-N^z_{,x}y + N^z_{,y}x = 0, \tag{70}$$

となる。この連立方程式の正則な一般解は

$$N^x = F_1(z,\rho^2)x - F_2(z,\rho^2)y, \tag{71}$$
$$N^y = F_1(z,\rho^2)y + F_2(z,\rho^2)x, \tag{72}$$
$$N^z = F_3(z,\rho^2), \tag{73}$$

である。ここで各 F_n は z と $\rho^2 \equiv x^2+y^2$ の独立な正則関数である。

N^i を球面座標 r,θ,ϕ に変換すると

$$\frac{N^r}{r} = \sin^2\theta F_1 + \frac{1}{r}\cos\theta F_3, \tag{74}$$
$$\frac{N^\theta}{\sin\theta} = \cos\theta F_1 - \frac{F_3}{r}, \tag{75}$$
$$N^\phi = F_2, \tag{76}$$

となる。よって、原点付近において、軸上 $(\theta=0)$ では

$$N^\theta = 0, \tag{77}$$

となることが分かる。

ここで、赤道面 $z=0, \theta=\pi/2$ で対称だと仮定する。すると、N^x と N^y は z の偶関数、N^z は z の奇関数となる。これらから F_1, F_2 は z の偶関数で、F_3 は z の奇関数であることが分かる。よって、軸上 $(\theta=0)$ では、N^r は z の奇関数となるので、原点では

$$N^r = 0, \tag{78}$$

となる。

参考文献

[1] P. Hořava, Phys. Rev. D**79**, 084008 (2009).

[2] K. Izumi and S. Mukohyama, Phys. Rev. D**81**, 044008 (2010).

[3] J. M. Bardeen and T. Piran, Phys. Rep. **96**, 205 (1983)