ワイルテンソルの電場・磁場成分

万城秀人

理工学研究科　物理・情報科学専攻
素粒子論研究室

September 7, 2011

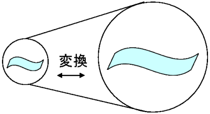
共形変換

共形変換[1]

$$\hat{g}_{ij} = e^{2\Phi} g_{ij}$$

共形（*Weyl*）テンソル

$$\hat{C}^{i}{}_{jkl} = C^{i}{}_{jkl}$$



角度を保存し、長さを局所的に変化させる変換
この共形変換において計量テンソルの性質は変わらない。リーマンテンソルにはこの自由度が存在する。ワイルテンソルが 0 になる空間を共形的に平坦な時空と呼ぶ。
したがって、共形的に平坦ではない時空ではワイルテンソルが 0 ではない。

[1] は共形変換前の計量テンソル、は共形変換後の計量テンソル

ワイルテンソルの電磁場成分

ワイルテンソル

$$
\begin{aligned}
C_{abcd} &= R_{abcd} + \frac{1}{6}R(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \\
&\quad - \frac{1}{2}(g_{ac}R_{bd} - g_{bc}R_{ad} + g_{bd}R_{ac} - g_{ad}R_{bc})
\end{aligned}
$$

ワイルテンソルはリーマンテンソルとリッチテンソルとスカラー曲率を使ってかける。

ワイルテンソルの電場・磁場部分[2]

$$C^*_{abcd} \equiv C_{abcd} + i\tilde{C}_{abcd}$$
$$-Q_{ab} \equiv C^*_{abcd} u^b u^d \equiv E_{ac} + iH_{ac}$$
$$u_c u^c = -1 (\text{time like な４元速度})$$

電場・磁場

$$E_{ac} = C_{abcd} u^b u^d$$
$$H_{ac} = \tilde{C}_{abcd} u^b u^d$$
$$E^\mu_\mu = 0, H^\mu_\mu = 0$$
$$E_{\mu\nu} = E_{\nu\mu}, H_{\mu\nu} = H_{\nu\mu}$$

４元速度与えられたとき、ワイルテンソルの電場・磁場成分が得られる。(Matte 1953)

[2] diag(-1,1,1,1)

ワイルテンソルの電場・磁場部分の不変量の定義

ワイルテンソルの電場・磁場成分の不変量の定義

$$I = \left(E^{ab}E_{ab} - H^{ab}H_{ab}\right) + iE^{ab}H_{ab}$$

これは、Maxwell 方程式のローレンツ変換に対する不変量

$$E^2 - H^2 \quad E \cdot H$$

と類似したように定義している。

bondi's formalism の時空でのワイル電場・磁場の計算

円筒対称で漸近的に平坦（遠方でフラットな時空）な計量テンソルの一般形[3]

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= \left(\frac{V}{r}e^{2\beta} - U^2 r^2 e^{2\gamma}\right) du^2 + 2e^{2\beta} du dr \\
&+ 2Ur^2 e^{2\gamma} du d\theta - r^2 \left(e^{2\gamma} d\theta^2 + e^{-2\gamma}\sin^2\theta d\phi^2\right)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ここで V, β, U ,γ は u, r, θ. の関数

を使ったワイル電場・磁場の計算

4

[3]H Bondi, 1962

[4]L.Herra, 2006

４次元の計量テンソルは $\mathbf{1/r}$ で級数展開されるとして、アインシュタイン方程式方程式つかうと

$$\gamma = cr^{-1} + \left(C - \frac{1}{6}c^3\right) r^{-3} + \dots \tag{2}$$

$$U = -(c_\theta + 2c\cot\theta)\, r^{-2} + \left[2N + 3cc_\theta + 4c^2\cot\theta\right] r^{-3}\dots \tag{3}$$

$$\begin{aligned} V &= r - 2M \\ &- \left(N_\theta + N\cot\theta - c_\theta^2 - 4cc_\theta\cot\theta - \frac{1}{2}c^2(1 + 8\cot^2\theta)\right) r^{-1} + \dots \end{aligned} \tag{4}$$

$$\beta = -\frac{1}{4}c^2 r^{-2} + \dots \tag{5}$$

c, C, N と M は u と θ の関数, 添字は微分を表している。
ここで、座標変数は

$$x^{0,1,2,3} = u, r, \theta, \phi \tag{6}$$

としている。

$$4C_u = 2c^2 c_u + 2cM + N\cot\theta - N_\theta \tag{7}$$

関数 c, M, N は 更に次の関係がある。

$$M_u = -c_u^2 + \frac{1}{2}\left(c_{\theta\theta} + 3c_\theta \cot\theta - 2c\right)_u \tag{8}$$

$$-3N_u = M_\theta + 3cc_{u\theta} + 4cc_u \cot\theta + c_u c_\theta \tag{9}$$

静的な場合 M は系の質量を、N は双極子モーメントを、C は４重極子モーメントを表している。

計算するべきワイルテンソルの項

$$C_{0101}, C_{0102}, C_{0112}, C_{0202}, C_{0212}, C_{0303}$$

$$C_{0313}, C_{0323}, C_{1212}, C_{1313}, C_{1323}, C_{2323}.$$

しかし、これらは独立ではなく次の関係が存在する。

$$\frac{r^4 \sin^2\theta}{e^{2\beta}} C_{1010} = e^{2\gamma}(V - r^4 e^{2\gamma-2\beta}) C_{1313} - 2r^2 e^{2\gamma} C_{0313}, \tag{10}$$

$$\frac{r^2 \sin^2\theta}{e^{2\gamma}} C_{0112} = e^{2\beta} C_{1323} - r^2 e^{2\gamma} C_{1313}, \tag{11}$$

$$\frac{2r^2 \sin^2\theta}{e^{2\gamma}} C_{0212} = e^{2\beta} C_{2323} - r e^{2\gamma} C_{1313}, \tag{12}$$

$$\sin^2\theta C_{1212} = -e^{4\gamma} C_{1313}. \tag{13}$$

ワイル磁場でゼロになる項

$$H_0^0 = H_1^0 = H_2^0 = H_0^1 = H_1^1 = H_2^1$$
$$= H_0^2 = H_1^2 = H_2^2 = H_0^3 = H_3^3 = 0$$

$$\begin{aligned}
H_3^0 &= -\frac{1}{r}\left(2c_u \cos\theta + c_{\theta u}\sin\theta\right) \\
&+ \frac{1}{r^2}\left\{4c_u(c-M)\cos\theta + \left[\frac{3}{2}(N_u + M_\theta + c_u c_\theta) + \frac{7}{2}cc_{\theta u} - 2Mc_{\theta u}\right]\sin\theta\right\} \\
&+ \frac{1}{r^3}\left\{-\frac{N}{\sin\theta}(1+2c_u) + \left[8Mc_u(c-M) + N_\theta(1-2c_u) + \frac{5}{2}c^2 c_u - Nc_{\theta u} - P_u - 4Mc\right]\cos\theta\right. \\
&+ \left[2(N - Mc_\theta) - c_{\theta u}(7Mc - 4M^2 - N_\theta - \frac{7}{4}c^2) + 3M(N_u + M_\theta) - \frac{1}{2}P_{\theta u}\right. \\
&\left.\left. -3cM_\theta + N_{\theta\theta} + c_u(8N + 3Mc_\theta + \frac{5}{2}cc_\theta)\right]\sin\theta\right\}, \qquad (14)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
H_3^1 = {} & \frac{1}{r}\left[(c_\theta c_{uu} + c_{\theta u})\sin\theta + 2(cc_{uu} + c_u)\cos\theta\right] + \frac{1}{r^2}\biggl\{ \frac{4cc_u\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{2c_uc_\theta - cc_{\theta u}}{\sin\theta} \\
& + \biggl[-\frac{1}{2}c_\theta c_{\theta\theta u} + (2M-3c)c_\theta c_{uu} - \frac{5}{2}(cc_{\theta u} + c_uc_\theta) - 2Nc_{uu} - \frac{3}{2}(N_u + M_\theta)\biggr]\sin\theta \\
& + \biggl[-6cc_u + 4c(M-c)c_{uu} - \frac{1}{2}c_\theta c_{\theta u} - cc_{\theta\theta u}\biggr]\cos\theta\biggr\} \\
& + \frac{1}{r^3}\biggl\{ \frac{8cc_u(M-c)\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\bigl[c_uc_\theta(4M-3c) + N - 2cN_u + 2Ncc_{uu} + \\
& + cc_{\theta u}(7c-2M) - 4c_uN - cM_\theta\bigr] + \biggl[\frac{1}{2}P_{\theta u} - N_{\theta\theta} - 2N + 4cM_\theta - 4c_uN + 2cN_u \\
& + c_uc_\theta\Bigl(-\frac{9}{2}c - M + cc_u + \frac{1}{2}c_{\theta\theta}\Bigr) + c_\theta\Bigl(2M - cM_u + P_{uu} + N_{\theta u} + \frac{1}{2}M_{\theta\theta}\Bigr) \\
& + c_{\theta u}\Bigl(-\frac{19}{4}c^2 + 2c_\theta^2 + 2Mc\Bigr) + c_{\theta\theta u}(N + 3cc_\theta - Mc_\theta) \\
& + c_\theta c_{uu}\Bigl(-6Mc + \frac{1}{2}c^2 + N_\theta + 4M^2\Bigr) - 2Nc_{uu}(c+2M)\biggr]\sin\theta \\
& + \biggl[2c\Bigl(2M + N_{\theta u} + P_{uu} - cM_u + \frac{1}{2}M_{\theta\theta}\Bigr) + c_u\Bigl(-2Mc - \frac{3}{2}c^2 + 2c^2c_u + \frac{3}{2}c_\theta^2 + cc_{\theta\theta}\Bigr) \\
& + c_{\theta u}(N - Mc_\theta + 8cc_\theta) + c_{uu}(c^3 + 2cN_\theta + Nc_\theta - 8Mc^2 + 8M^2c) \\
& + cc_{\theta\theta u}(5c-2M) - c_\theta\Bigl(\frac{1}{2}M_\theta + N_u\Bigr) + P_u - N_\theta\biggr]\cos\theta\biggr\},
\end{aligned} \tag{15}
$$

$$H^2_3 = \frac{1}{r}\left(\sin\theta c_{uu}\right) + \frac{1}{r^2}\left\{\frac{2c_u}{\sin\theta} - \frac{1}{2}c_{\theta u}\cos\theta + \left[2c_{uu}(M-c) - c_u - \frac{1}{2}c_{\theta\theta u}\right]\sin\theta\right\}$$

$$+\frac{1}{r^3}\left\{4c_u\frac{M-c}{\sin\theta} + \left[\frac{3}{2}c_u c_\theta - N_u - \frac{1}{2}M_\theta + Nc_{uu} + (\frac{7}{2}c - M)c_{\theta u}\right]\cos\theta + \right.$$

$$\left[(\frac{5}{2}c - M)c_{\theta\theta u} + (\frac{1}{2}c_{\theta\theta} - M)c_u + 2c_\theta c_{\theta u} + c_{uu}(2c^2 + 4M^2 - 4Mc + N_\theta) + \right.$$

$$\left.\left.\frac{1}{2}M_{\theta\theta} - cM_u + N_{\theta u} + P_{uu} + cc_u^2\right]\sin\theta\right\}, \tag{16}$$

$$H^3_1 = \frac{1}{r^3}\frac{2c_u\cos\theta + c_{\theta u}\sin\theta}{\sin^2\theta}, \tag{17}$$

$$
\begin{aligned}
H_2^3 = \frac{1}{r}\frac{c_{uu}}{\sin\theta} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[2c_{uu}(c+M) - c_u - \frac{1}{2}c_{\theta\theta u} - \frac{1}{2}\cot\theta c_{\theta u} + 2\frac{c_u}{\sin^2\theta}\right] \\
+\frac{1}{r^3\sin\theta}\left\{\frac{4Mc_u}{\sin^2\theta} + \cot\theta\left[-N_u + Nc_{uu} - \frac{1}{2}c_u c_\theta - (\frac{1}{2}c + M)c_{\theta u} - \frac{1}{2}M_\theta\right]\right. \\
+c_{uu}(N_\theta + 4Mc + 4M^2 + 2c^2) + cc_u^2 + (\frac{1}{2}c_{\theta\theta} - M)c_u + (\frac{1}{2}c - M)c_{\theta\theta u} \\
\left. +P_{uu} + \frac{1}{2}M_{\theta\theta} + c_\theta c_{\theta u} - cM_u + N_{\theta u}\right\}. \qquad (18)
\end{aligned}
$$

ワイル電場でゼロになる項

$$E^0_0 = E^0_3 = E^1_0 = E^1_3 = E^2_0 \tag{19}$$

$$= E^2_3 = E^3_0 = E^3_1 = E^3_2 = 0 \tag{20}$$

$$E^0_1 = \frac{2(cc_u + M)}{r^3}, \tag{21}$$

$$E^0_2 = \frac{2c_u \cos\theta + c_{\theta u} \sin\theta}{r \sin\theta}$$

$$+ \frac{1}{2\sin\theta r^2} \{8Mc_u \cos\theta + [c_{\theta u}(4M - 3c) - 3(M_\theta + c_u c_\theta + N_u)] \sin\theta\}$$

$$+ \frac{1}{4r^3} \left\{(1 + 2c_u) \frac{4N}{\sin^2\theta} + \cot\theta \left[4\left(Nc_{\theta u} + P_u - N_\theta\right) + c_u \left(32M^2 + 8N_\theta - 42c^2\right)\right]\right.$$

$$+4\left(N - 3cN_u - N_{\theta\theta}\right) - 12M\left(M_\theta + N_u\right) + c_{\theta u}\left(4N_\theta + 16M^2 - 13c^2 - 12Mc\right)$$

$$\left. -c_u\left(30cc_\theta + 12Mc_\theta + 32N\right) + 2P_{\theta u}\right\}, \tag{22}$$

$$E^1_1 = -\frac{2cc_u(1 + \cos^2\theta) + (c_\theta c_{\theta u} + 2M)\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta(c_u c_\theta + cc_{\theta u})}{r^3 \sin^2\theta}, \tag{23}$$

$$
\begin{aligned}
E_2^1 = &-\frac{2(cc_{uu}+c_u)\cos\theta+(c_\theta c_{uu}+c_{\theta u})\sin\theta}{r\sin\theta}\\
&+\frac{1}{2r^2}\Bigg\{3(N_u+M_\theta)+c_{uu}(2cc_\theta-4Mc_\theta+4N)+5c_\theta c_u+c_\theta c_{\theta\theta u}+cc_{\theta u}\\
&+\cot\theta\,[2c(c_{\theta\theta u}+2c_u-4Mc_{uu})+c_\theta c_{\theta u}]+\frac{2}{\sin^2\theta}(cc_{\theta u}-2c_\theta c_u)-\frac{8}{\sin^3\theta}cc_u\cos\theta\Bigg\}\\
&-\frac{1}{r^3}\Bigg\{8cc_u(M-c)\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\Big[(4M-7c)c_uc_\theta-4c_uN+2Ncc_{uu}+(c^2-2Mc)c_{\theta u}\\
&+N-c(M_\theta+2N_u)\Big]+\cot\theta\Big[c_u(-\frac{1}{2}c_\theta^2-2Mc+cc_{\theta\theta}+2c^2c_u-\frac{15}{2}c^2)+\\
&c_\theta\left(c_{uu}N+(3c-M)c_{\theta u}-N_u-\frac{1}{2}M_\theta\right)+cc_{uu}(8M^2-3c^2+2N_\theta)+cc_{\theta\theta u}(3c-2M)\\
&+c_{\theta u}N+cM_{\theta\theta}+P_u-N_\theta+2c(P_{uu}+N_{\theta u}-M-cM_u)\Big]\\
&+c_{uu}\left[c_\theta(-\frac{7}{2}c^2+N_\theta-2Mc+4M^2)-6Nc-4MN\right]+c_u\left[c_\theta(\frac{1}{2}c_{\theta\theta}-\frac{9}{2}c-M+cc_u)-4N\right]\\
&+c_{\theta u}(c_\theta^2+2Mc-\frac{15}{4}c^2)+c_{\theta\theta u}(N-Mc_\theta+2cc_\theta)+c_\theta(\frac{1}{2}M_{\theta\theta}-M+N_{\theta u}+P_{uu}-M_uc)\\
&-N_{\theta\theta}+\frac{1}{2}P_{\theta u}-cN_u+N+cM_\theta\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{24}
$$

$$E^2_1 = -\frac{2c_u \cos\theta + c_{\theta u}\sin\theta}{r^3 \sin\theta}, \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
E^2_2 = &-\frac{c_{uu}}{r} + \frac{1}{2r^2}\left(c_{\theta\theta u} - 4Mc_{uu} + 2c_u + \cot\theta c_{\theta u} - \frac{4c_u}{\sin^2\theta}\right)\\
&+\frac{1}{r^3}\left\{M_u c - \frac{1}{2}M_{\theta\theta} + M - N_{\theta u} - P_{uu}\right.\\
&+\cot\theta\left[Mc_{\theta u} + \frac{1}{2}M_\theta + N_u - \frac{1}{2}cc_{\theta u} + \frac{1}{2}c_\theta c_u - Nc_{uu}\right]\\
&\left.+c_u\left[\frac{4(c-M)}{\sin^2\theta} + M - c - cc_u - \frac{1}{2}c_{\theta\theta}\right] - c_{uu}(4M^2 + N_\theta) - c_\theta c_{\theta u} + c_{\theta\theta u}(M - \frac{3}{2}c)\right\},
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
E^3_3 = &\frac{c_{uu}}{r} - \frac{1}{2r^2}\left(c_{\theta\theta u} - 4Mc_{uu} + 2c_u + \cot\theta c_{\theta u} - \frac{4c_u}{\sin^2\theta}\right)\\
&+\frac{1}{r^3}\left\{M + N_{\theta u} + P_{uu} + \frac{1}{2}M_{\theta\theta} - cM_u\right.\\
&+\cot\theta\left[\frac{5}{2}cc_{\theta u} - \frac{1}{2}M_\theta - N_u + Nc_{uu} - Mc_{\theta u} + \frac{3}{2}c_u c_\theta\right]\\
&\left.+c_u\left[\frac{4M}{\sin^2\theta} + cc_u - M + \frac{1}{2}c_{\theta\theta} - c\right] + c_{uu}(4M^2 + N_\theta) + 2c_\theta c_{\theta u} + (\frac{3}{2}c - M)c_{\theta\theta u}\right\},
\end{aligned} \tag{27}$$

ここで

$$P \equiv C - \frac{c^3}{6}. \tag{28}$$

この計算より次の不変量を計算してみると

$$Q = H^{\alpha}_{\ \beta} E^{\beta}_{\ \alpha}, \qquad L = E^{\alpha}_{\ \beta} E^{\beta}_{\ \alpha} - H^{\alpha}_{\ \beta} H^{\beta}_{\ \alpha}. \tag{29}$$

Q はゼロになる。

$$Q = 0 \tag{30}$$

L の $1/r^6$ のオーダーでの不変量は

$$L = \frac{2}{r^6}\left[3(cc_u + M)^2 + (c^3 + 6P)c_{uu} + 6N(c_{\theta u} + 2c_u \cot\theta)\right] + O(1/r^7) \tag{31}$$

となる。

条件

$$\boldsymbol{H^{\alpha}_{\beta} = 0}$$

とすると、条件より $\boldsymbol{M_{\theta} = 0, N_u, C_u = 0}$ などが得られる。よって、N:dipole C:quadrupole モーメントは静的である。結果的には、ボンディが提唱した”non-nutural non-radiative moveing system(nnnrms)” 以外では、ボンディ計量でのワイル電場は静的であることがわかる。

条件

$$\boldsymbol{E^{\alpha}_{\beta} = 0}$$

をかすと、ワイル磁場のみの時空は存在しないことがわかる。

まとめ

- 共形的に平坦ではない時空はワイルテンソルが 0 ではない。ワイルテンソルと 4 元速度からワイル電場・磁場と呼ばれる量を定義することができる。
- Bondi 計量でワイル電場のみの条件をかすと、nnnrms 以外では静的解になる。
- Bondi 計量でのワイル磁場のみが存在する解は存在しない。