宇宙の無境界波動関数から得られる古典的予言

James B. Hartle,S. W. Hawking,Thomas Hertog

Phys. Rev. D 77,123537(2008)

名古屋大学理学研究科　素粒子宇宙物理学専攻 CG 研　M１　金井 健一郎

平成 23 年 8 月 31 日

1 Introduction

宇宙の時間を極限までさかのぼって、宇宙の大きさがプランクスケールより小さくなると Einstein 方程式が破綻するため、このスケールの宇宙を記述しようとしたら時空の量子論が必要になる。そしてこの理論は究極的には宇宙の始まりを議論できると期待される。しかし、この時空の量子論には波動関数の始状態や終状態はどう決めるのかという境界条件問題や、波動関数の確率解釈はどのようにすればいいのかという確率解釈問題などといった問題がある。この理論は問題が多いが、宇宙の始まりを議論できるという点が魅力であり、これらの問題を解決するための提案がいくつかなされてきた。
その中で今回紹介する論文ではこれらの問題に対して、境界条件問題には Hartle,Hawking による無境界条件仮説を採用し、確率解釈問題には古典的な Einstein 方程式が成り立つという条件を課すことで確率解釈ができるとして解決を試みている。さらにそれから得られた宇宙の描像が現代の標準的な宇宙論にどれだけあうかを検証することで、その解決法の是非を検証している。

2 扱うモデル

今回扱う時空のモデルは、二次ポテンシャルを持つスカラー場 Φ 及び宇宙定数 Λ が存在する一様等方な時空を考える。一様等方という制限をかけ、かつ時間を虚数化 (Euclid 化) した計量は

$$ds^2 = (3/\Lambda)[N^2(\lambda)d\lambda^2 + a^2(\lambda)d\Omega_3^2] \tag{1}$$

とかける。ここで λ はアフィンパラメータ。N は lapse 関数と呼ばれ、時間間隔の取り方の自由度。a は scale factor。$d\Omega_3$ は三次元球面の面素。
この計量とスカラー場 Φ がある時空を考える。今回は宇宙の波動関数を経路積分で定式化するため、この時空の作用を先に求めておく。Euclid 化した Einstein-Hilbert 作用は

$$I_c[g] = -\frac{1}{16\pi}\int_M d^4x\sqrt{g}(R - 2\Lambda) + (surface\ term) \tag{2}$$

であり、スカラー場の作用は

$$I_\Phi[g,\Phi] = \frac{1}{2}\int_M d^4x\sqrt{g}[(\nabla\Phi)^2 + m^2\Phi^2] \tag{3}$$

とかける。この作用と計量から今回扱う作用の形は

$$I[a(\lambda),\phi(\lambda)] = \frac{3\pi}{4H^2}\int_0^1 d\lambda N\left(-a\left(\frac{a'}{N}\right)^2 - a + a^3 + a^3\left(\left(\frac{\phi'}{N}\right)^2 + \mu^2\phi^2\right)\right) \tag{4}$$

となることがわかる。ただし今

$$H^2 = \Lambda/3 \tag{5}$$
$$\phi = (4\pi/3)^{1/2}\Phi \tag{6}$$
$$\mu = (3/\Lambda)^{1/2}m \tag{7}$$

とした。また積分範囲を $0 \le \lambda \le 1$ としているがこの境界値が問題になるというのが境界条件問題で後に説明する。

3 宇宙の波動関数と無境界条件仮説

Hartle,Hawking の手法に従うと、宇宙の波動関数はとりうる geometry に重み $exp(-I[a(\lambda),\phi(\lambda)]/\hbar)$ をかけて足し上げるという経路積分で定式化される。その際、どんな幾何学を持つ宇宙を足し上げるのか (宇宙の始状態と終状態) が問題になるが、その解決法として無境界条件仮説というものを考える。これは「Euclid 化した時空において終状態以外では境界を持たないコンパクトな幾何を持つ宇宙を足し上げる」とするもので、式で表すと

$$a(1) = b, \phi(1) = \chi \tag{8}$$
$$a(0) = 0, \phi'(0) = 0 \tag{9}$$

となる。この終状態 b,χ になるような宇宙の波動関数は、

$$\Psi(b,\chi) = \int_C \delta a\delta\phi exp(-I[a(\lambda),\phi(\lambda)]/\hbar) \tag{10}$$

ここで C は波動関数を収束させるような複素経路である。さらにこの波動関数には作用 I が極値をとるような a,ϕ が支配的な寄与を与えると考えて準古典近似をする。

$$\Psi(b,\chi) \approx exp\{[-I_R(b,\chi) + iS(b,\chi)]/\hbar\} \tag{11}$$

ここで I_R は極値の作用の実部、S は極値の作用の虚部である。
ではこのように作用の極値を与える方程式はどうなるかというと、これは作用 (4) を変数 a,N,ϕ で変分することで得られる。ここで、変数 λ を $d\tau = N(\lambda)d\lambda$ と変数変換したとき $\dot{} = \frac{d}{d\tau}$ とすると、極値を与える方程式は

$$\dot{a}^2 - 1 + a^2 + a^2(-\dot{\phi}^2 + \mu^2\phi^2) = 0 \tag{12}$$
$$\ddot{\phi} + 3(\dot{a}/a)\dot{\phi} - \mu^2\phi = 0 \tag{13}$$
$$\ddot{a} + 2a\dot{\phi}^2 + a(1 + \mu^2\phi^2) = 0 \tag{14}$$

で与えられる。後の問題はこれらの式を初期条件および τ の発展で解くことに帰着する。最初の式は拘束条件の式でこれをふまえると作用は

$$I[a(\tau), \phi(\tau)] = \frac{3\pi}{2H^2} \int_{C(0,v)} d\tau [a^2(1 + \mu^2 \phi^2) - 1] \tag{15}$$

となる。ここで積分経路が変化したのは変数変換によるもので、N が複素関数であることから経路も複素経路になる。この複素経路は次に説明する、古典的な Einstein 方程式に従う宇宙が存在するという要請から決定される。

4 古典的な Einstein 方程式に従うという要請～classicality condition～

量子的な時空が古典的な Einstein 方程式を満たすかどうかは自明ではないが、今現在、宇宙は Einstein 方程式に従っているためこの要請が必要になる。そしてここでは、この要請をした上で波動関数から得られる宇宙のアンサンブルは、宇宙が今に至るまでに経験したであろう歴史全体を確率的に与えてくれると解釈する。得られるアンサンブルが宇宙の歴史全体 (宇宙が生まれてから今までどう進化してきたか) を表すものであるため、初期に特異点があったとしてもこの波動関数から得られる予言は正当性を持つことになる。
では実際の条件は何かというと、作用が古典的な Hamilton-Jacobi 方程式を満たすか否か、である。極値の作用を得たときの方程式 3 本のうち最初の式は拘束条件を表す。この拘束条件は Hamiltonian 拘束条件と呼ばれ、今回考えているモデルでの一般形は以下のようになる。

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2}\nabla^2 + V(q^A)\right)\Psi(q^A) = 0 \tag{16}$$

ここで q^A は b や χ などの波動関数の変数、∇ は q^A での微分、V はポテンシャルである。この式に先ほどの準古典近似した波動関数 (11) を代入すると

$$-\frac{1}{2}(\nabla I_R)^2 + \frac{1}{2}(\nabla S)^2 + V(q^A) = 0 \tag{17}$$

これから

$$|\nabla I_R| \ll |\nabla S| \tag{18}$$

が満たされれば古典的な Hamilton-Jacobi 方程式が成立することがわかる。従ってこれが求める条件である。

5 得られるアンサンブルの確率

Hamiltonian 拘束条件の式 (16) から保存 currentJ_A の存在がわかる。

$$J_A = -\frac{i\hbar}{2}(\Psi^* \frac{\partial}{\partial q_A}\Psi - \frac{\partial}{\partial q_A}\Psi^* \Psi) \tag{19}$$

これを用いて

$$\mathcal{P}(q_A) = J \cdot n \approx e^{-2I_R(q_A)} \nabla_n S \tag{20}$$

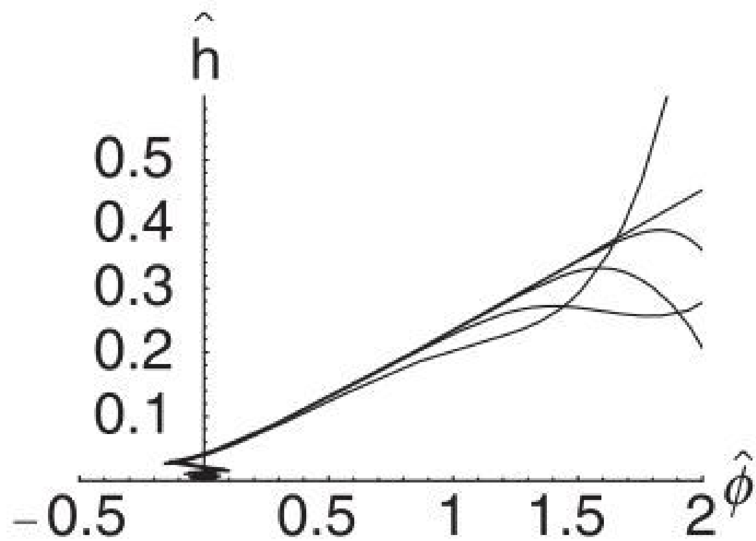

図 1: 縦軸 $\hat{h}=\hat{\dot{a}}/\hat{a}$ と横軸 $\hat{\phi}$ のグラフ.$\hat{}$ は古典的な Einstein 方程式に従う時空であることを示す。得られたアンサンブルのうちのいくつかの振る舞いを表す。

が確率と見なせる。ここで n は q_A の張る空間の spacelike な平面の単位法線ベクトルである。また、確率測度とは正であり一つのアンサンブルに一つの確定した値を与えれば相対的な確率とは見なせることからこのアンサンブル中での相対的確率を $exp(-2I_R)$ と見なすことができる。従ってこの $exp(-2I_R)$ を、現在宇宙が古典的な Einstein 方程式に従うという条件のもとでは、どんな進化をする宇宙が選択されたかという相対的な確率測度を与えるものと考える。

6　結果とまとめ

classicality condition を満たすような τ の経路で式 (14) を解くと図 (1) のような a 及び ϕ の発展が得られる。これをみると $\hat{\phi}\approx 0.3$ あたりですべての線がある直線上に乗る。この直線は $\hat{h}=\mu\hat{\phi}$ という二次ポテンシャルを持つスカラー場ならインフレーションを示す直線である。すなわち、このアンサンブルはインフレーションを経験するような宇宙を表している。

以上から、宇宙の波動関数を考える際の境界条件として無境界仮説を採用し、さらにその波動関数に古典的な Einstein 方程式に従うことを要請すると、解としてインフレーションを起こす時空が得られることを示している。また、数値的にインフレーションは必ず起きることが示されている。この結果は現在の標準的な宇宙論と一致しており、これらの解釈はただしそうだといえる。