

重力崩壊するダスト時空の量子化による 厳密な Hawking 輻射の導出

レビュー論文

Kiefer, C., et al. 2007, Phys. Rev. D, 75, 124010

Kiefer, C., et al. 2006, Phys. Rev. D, 73, 044025

名古屋大学大学院 CG 研 M1

末延 博

1 Abstract

重力崩壊する天体を含む時空に場の量子論を適用すると、ブラックホールは黒体輻射を行うことが導かれる。これが Hawking 輻射である。標準的な導出法 (参考文献 [1]) では、重力場は古典的に扱い物質場のみを量子化する。このとき得られる物質場の波動関数のうち、ブラックホールから無限遠へ向かう (outgoing) モードと無限遠からブラックホールへ向かう (ingoing) モードとの内積を計算することで Planck 分布 (黒体輻射) が導かれる。しかしこの方法では、重力は量子化されていないので半古典近似となっている。それに対し近年、特定のモデルについては重力場も含めた系全体の量子化ができるようになり、Hawking 輻射の厳密な導出が行えるようになった。本発表では、そのひとつとして C. Kiefer らが行ったもの (参考文献 [2]) を紹介する。そこでは、重力崩壊するモデルとして球対称に分布したダスト (Lemaitre-Tolman-Bondi model) を採用し、それを正準量子化する。すると対応する Wheeler-De Witt 方程式が得られ、それを解くことで厳密な量子状態が得られる (参考文献 [3])。この量子状態を表す波動関数には、outgoing モードと ingoing モードが現れる。それらを標準的な導出法における二つのモードと同一視し、内積を計算することで Planck 分布からずれた分布を得る。このずれは、Planck 分布に対する補正因子となる。

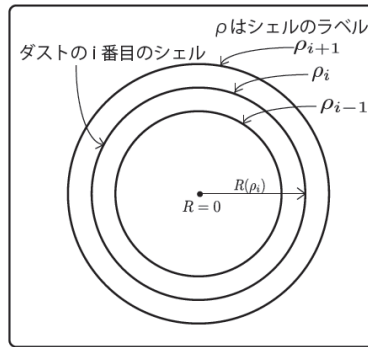
2 LTB モデル

2.1 LTB モデルとは

L T B モデル (Lemaitre-Tolman-Bondi model) とは球対称に分布する自己重力しか働かないダスト系である。この系のエネルギー運動量テンソルは、

$$T_{\mu\nu} = \epsilon(\tau, \rho) u_\mu u_\nu \quad (1)$$

で与えられ、圧力無しの完全流体と同等である。ここで ϵ はエネルギー密度、 τ はダストの固有時間、 ρ はダストシェルのラベルである。ダストは球対称な分布をしているので、角形距離 $R(\tau, \rho)$ が等しいダストを同一視することにし、シェルとして扱う。



このようなダストを含んだ時空の線素は以下で与えられる。

$$ds^2 = -d\tau^2 + \frac{(\partial_\rho R)^2}{1 + 2E(\rho)} d\rho^2 + R^2(\rho)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2)$$

ここで $E(\rho)$ は ρ 番目のシェルの単位質量あたりのエネルギーである。このモデルにおいて、 $\partial_\tau R < 0$ だと重力崩壊を扱うこととなり、その条件で L T B モデルを量子化するとブラックホールを含む時空の量子化を行うことができる。

2.2 正準形式と拘束条件

量子化の手続きとして正準量子化を行うので、その準備として L T B モデルを正準形式に書き換える。先ほどの線素を一般的な球対称線素

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + L^2(dr - N^r dt)^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3)$$

と見比べて 3 + 1 分解を行う。この系を記述する位相空間は $L(t, r)$ 、 $R(t, r)$ 、 $\tau(t, r)$ の 3 つの関数とその正準運動量からなる。ここで量子化に適した関数へと正準変換を行うと、その位相空間は $\Gamma(r)$ 、 $R(r)$ 、 $\tau(r)$ とその正準運動量から構成することができる。 $\Gamma = F'$ であり、 F は質量関数 ($2/G$ は R 内にある全質量)、 $'$ は r 微分を表わす。この $\Gamma(r)$ 、 $R(r)$ 、 $\tau(r)$ を正準変数とした作用より、Euler-Lagrange 方程式を立てると、以下の二つの拘束条件が求められる。

$$\text{ハミルトニアン拘束条件:} \quad H = (P_\tau^2 + \mathcal{F}\bar{P}_R^2) - \frac{\Gamma^2}{4\mathcal{F}} = 0 \quad (4)$$

$$\text{運動量拘束条件:} \quad H_r = \tau' P_\tau + R' \bar{P}_R - \Gamma P'_\Gamma = 0 \quad (5)$$

この拘束条件において、正準運動量を微分演算子に置き換えることで正準量子化がなされる。

3 LTB モデルの正準量子化

このような拘束条件が存在するときの正準量子化の手続きは、まず正準運動量を微分演算子に置き換える。

$$P_\tau(r) \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta \tau(r)}, \quad \bar{P}_R(r) \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta R(r)}, \quad P_\Gamma(r) \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta \Gamma(r)} \quad (6)$$

次に状態ベクトル $|\Psi\rangle$ に対して拘束条件が成り立つ $H|\Psi\rangle = 0$ とすることで行われる。すると、状態を表わす波動関数に対して次の 2 組の方程式 (Wheeler-DeWitt 方程式) が得られる。

$$\left[-G\hbar^2 \left(\frac{\delta^2}{\delta \tau^2} + \mathcal{F} \frac{\delta^2}{\delta R^2} + A(R, F)\delta(0) \frac{\delta}{\delta R} + B(R, F)\delta(0)^2 \right) - \frac{\Gamma^2}{4G\mathcal{F}} \right] \Psi(\tau, R, \Gamma) = 0 \quad (7)$$

$$\left[\tau' \frac{\delta}{\delta \tau} + R' \frac{\delta}{\delta R} - \Gamma \left(\frac{\delta}{\delta R} \right)' \right] \Psi(\tau, R, \Gamma) = 0 \quad (8)$$

(8) 式を満たすように解を仮定すると

$$\Psi(\tau(r), R(r), F(r)) = \exp \left(\frac{i}{2} \int dr \Gamma(r) W(\tau(r), R(r), F(r)) \right) \quad (9)$$

という形になる。これを (7) 式に代入すると関数 $W(\tau, R, F)$ についての方程式が得られ、それを解けばよい。しかし汎関数微分方程式であるうえ、演算子順序の不定性を表わす発散量 $\delta(0)$ を含んでいるので、容易には解けない。そこで、 r について間隔 σ で離散化して解いた後に連続極限を取ることとする。その過程で汎関数微分方程式は偏微分方程式に、 $\delta(0)$ は $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma}$ としている。

そうして得られた解は以下である。

$$\Psi^\pm = \exp\left(\frac{1}{G\hbar} \int dr b\Gamma \mp \frac{i}{2G\hbar} \int dr \Gamma \left[a\tau \pm \int^R dR \frac{\sqrt{1-a^2\mathcal{F}}}{\mathcal{F}} \right]\right) \quad (10)$$

これはブラックホールを含む球対称ダスト時空を表わす厳密な波動関数となっている。

4 ホーキング輻射の導出

4.1 標準的な導出法

先の厳密解 (10) 式から Hawking 輻射を導くが、その際に Hawking 輻射の標準的な導出法のアナロジーを使うので、まずそれを述べる。

球対称な星が重力崩壊を起こしてブラックホールになるという時空において、スカラー場の量子論を考える。スカラー場は曲がった時空に拡張された Klein-Gordon 方程式を満たす Fourier モード関数で展開され、その係数が生成消滅演算子となる。

$$\hat{\phi} = \sum_k [\hat{a}_k u_k + \hat{a}_k^\dagger u_k^*] \quad (11)$$

時空は崩壊前は平坦であるとして、重力崩壊したのち Schwarzschild 時空になるとする。すると重力崩壊による時空の変化によって各モード関数が増えることとなる。重力崩壊の前後のモード関数の間において、一方のモード関数を他方のモード関数の線形結合で表わすことが出来る。これを Bogolyubov 変換という。

$$u_k = \sum_{k'} [\alpha_{kk'} \bar{u}_{k'} + \beta_{kk'} \bar{u}_{k'}^*] \quad (12)$$

u_k が重力崩壊後のもの、 $\bar{u}_{k'}$ などを崩壊前のものとする。この変換に付随して、生成消滅演算子も変換を受ける。

$$\hat{a}_{k \text{ 後}} = \sum_{k'} (\alpha_{kk'}^* \hat{a}_{k' \text{ 前}} - \beta_{kk'}^* \hat{a}_{k' \text{ 前}}^\dagger) \quad (13)$$

ここで、重力崩壊前の真空（粒子がない状態）は $\hat{a}_{k' \text{ 前}} |0_{\text{前}}\rangle = 0$ だが、この状態に崩壊後の消滅演算子を作用させると、

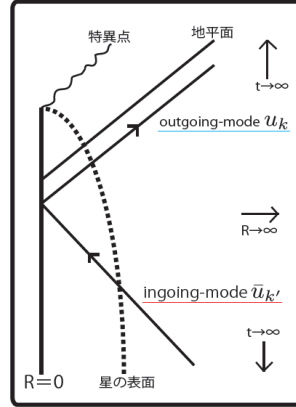
$$\hat{a}_{k \text{ 後}} |0_{\text{前}}\rangle = \sum_{k'} (\alpha_{kk'}^* \hat{a}_{k' \text{ 前}} - \beta_{kk'}^* \hat{a}_{k' \text{ 前}}^\dagger) |0_{\text{前}}\rangle = - \sum_{k'} \beta_{kk'}^* \hat{a}_{k' \text{ 前}}^\dagger |0_{\text{前}}\rangle \neq 0 \quad (14)$$

となり崩壊前に真空だった状態は崩壊後は真空ではなくなる。つまり崩壊後では粒子の生成が起きる。生成される粒子のエネルギースペクトルは

$$\langle 0_{\text{前}} | N | 0_{\text{前}} \rangle = \langle 0_{\text{前}} | \hat{a}_{k \text{ 後}}^\dagger \hat{a}_{k \text{ 後}} | 0_{\text{前}} \rangle = - \sum_{k'} |\beta_{kk'}|^2 \quad (15)$$

である。よって Bogolyubov 係数 β を求めればよい。 β はモード関数のうちの ingoing 正振動モードと outgoing 負振動モードの内積（Klein-Gordon 内積）で求められる。

$$\beta_{kk'} = 2\omega_k (u_k^*, \bar{u}_{k'}) = 2\omega_k (-i) \int_\Sigma u_k^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \bar{u}_{k'}^* \sqrt{-g_\Sigma} d\Sigma^\mu \quad (16)$$



結果もとめられるエネルギー・スペクトルは Schwarzschild ブラックホールの場合

$$\langle 0_{\text{前}} | N | 0_{\text{前}} \rangle = \frac{1}{e^{8\pi G M \omega_k} - 1} \quad (17)$$

となる。ここで Hawking 温度 T_H を

$$T_H = \frac{\hbar}{8\pi k_B G M} \quad (18)$$

とすると、温度 T_H の Planck 分布になっていることが分かる。こうしてブラックホールからの熱輻射が導かれる。

4.2 波動関数のモード

3章で得られた波動関数には複号をが現れており、複数のモードを持っている。このモードを標準的な導出法の際の ingoing 正振動モードと outgoing 負振動モードと同一視して、その内積を取るというアナロジーによって生成粒子のエネルギー・スペクトルに対応する物を求める。

Hawking 輻射は無限遠の観測者の立場で求めるべきなので、波動関数において、ダストの固有時間 τ を無限遠の観測者の固有時と一致する時間座標 Killing time T に変換する。

$$\text{ingoing 正振動モード} : \Psi^+ = \exp \left(\frac{1}{G\hbar} \int dr b \Gamma - \frac{i}{2G\hbar} \int dr \Gamma T \right) \quad (19)$$

$$\text{outgoing 負振動モード} : \Psi^- = \exp \left(\frac{1}{G\hbar} \int dr b \Gamma + \frac{i}{2G\hbar} \int dr \Gamma \left[T - 2 \int^R dR \frac{\sqrt{1 - a^2 \mathcal{F}}}{\mathcal{F}} \right] \right) \quad (20)$$

前者は時間座標に $-i/\hbar$ がかかっているので ingoing 正振動モード、後者は時間座標に $i/\hbar$ がかかっているのので outgoing 負振動モードであると見なす。

4.3 Bogolyubov 係数

ここからは、シェルに分割し、 i 番目のシェルに注目して考える。

$$\Psi(R(r) \dots) = \exp \left(\int dr \dots \right) = \exp \left(\sum_i \sigma \omega_i \dots \right) = \prod_i \Psi_{\sigma \omega_i}(R(r_i) \dots) \quad (21)$$

ここで σ は一定の分割の間隔だが、 ω_i をかけることで i 番目のシェルに対応するように分割の間隔を指定している。以下シェルのラベル i は省略するが、 i 番目のシェルで成り立つことは他のシェルでも成り立つ。

β に対応する内積は次のように定義する。

$$\beta_{\omega\omega'} = \frac{2\sigma\omega}{G\hbar} \int_F^\infty dR \sqrt{g_{RR}} \Psi_{\sigma\omega}^{-*} \Psi_{\sigma\omega'}^+ \quad (22)$$

これは通常の量子力学のヒルベルト空間の内積にあたるものであり、ingoing 正振動モードと outgoing 負振動モードの重なりを抜き出すものである。積分は事象の地平面の外側のみ ($F < R < \infty$) で行う。この積分を実行して、 $\langle 0_{\text{前}} | N | 0_{\text{前}} \rangle = \int d\omega' |\beta_{\omega\omega'}|^2$ を求めると Hawking 輻射に対応するエネルギースペクトルが得られる。

4.4 シェルのエネルギースペクトル

質量分布が Schwarzschild ブラックホールの場合 $\Gamma(r) \approx 2GM\delta(r)$ を考える。積分を寄与の大きいと思われる地平面付近で評価すると、得られるスペクトルは、

$$\langle 0_{\text{前}} | N | 0_{\text{前}} \rangle = \frac{8\pi GM \Delta\epsilon (1 + 2E)}{\hbar} \frac{1}{e^{8\pi GM \Delta\epsilon / \hbar} - 1} \quad (23)$$

となる。ここで $\Delta\epsilon$ はシェルのエネルギーである。(23) 式の後ろの因子は、温度 T_H の Planck 分布になっている。

ダストは古典的には収縮するばかりだが、量子化されると無限遠まで広がるものも含まれ、それをシェルで見たときのエネルギー分布が上式のようにになると解釈できる。これが半古典近似の際の Hawking 輻射に対応するものだと考えられる。

先ほどは地平面付近で近似をしたが、厳密な積分は級数展開することによって求められる。最も優勢な項が (23) 式を与え、その他の項は補正項となる。 $|\beta|^2$ に対する最も単純な補正項を計算すると、

$$|\beta_{\omega\omega'}|^2 \left(1 + \frac{4}{(3 + 10E)^2} \right) \quad (24)$$

などとなる。これは Graybody factor と言われる Planck 分布に対する補正因子となる。

5 まとめ

このように重力崩壊する球対称ダスト系は正準量子化を行うことができ、さらに厳密に波動関数を求めることができる。そして波動関数には異なるモードが存在し、その重なりを計算することによって、無限遠まで広がる量子化されたダストシェルのエネルギースペクトルを得ることができた。この無限遠へのダストの広がり、Hawking 輻射の対応物であると考えられる。

参考文献

- [1] Birrell, N. D., Davies, P. C. W. 1982, Cambridge: University Press, 1982,
- [2] Kiefer, C., et al. 2007, Phys. Rev. D, 75, 124010
- [3] Kiefer, C., et al. 2006, Phys. Rev. D, 73, 044025