2011年天文天体物理若手夏の学校集録

グリーン関数の分解を介した自己力の評価

（相対 02a）

大阪大学　宇宙進化グループ　M2
佐野　保道

S. Detweiler and B. F. Whiting, Phys. Rev. D 67 024025 (2003) のレビュー

ブラックホールの周りを運動する粒子の運動を一般相対論で考えると、重力波の放出により粒子の軌道が縮まっていく。この効果を重力自己力という力が粒子に働いた結果だとする扱い方がある。

粒子に働く重力自己力を実際に計算するにはいくつかの困難があるが、計算の仕方を物理的にシンプルな形に示したDetweiler & Whitingの2003年の論文を紹介した。

ブラックホール摂動

- ブラックホール時空での質点の運動
- 重力波放出により測地線からずれる
  - 背景計量 ＋ 1次摂動

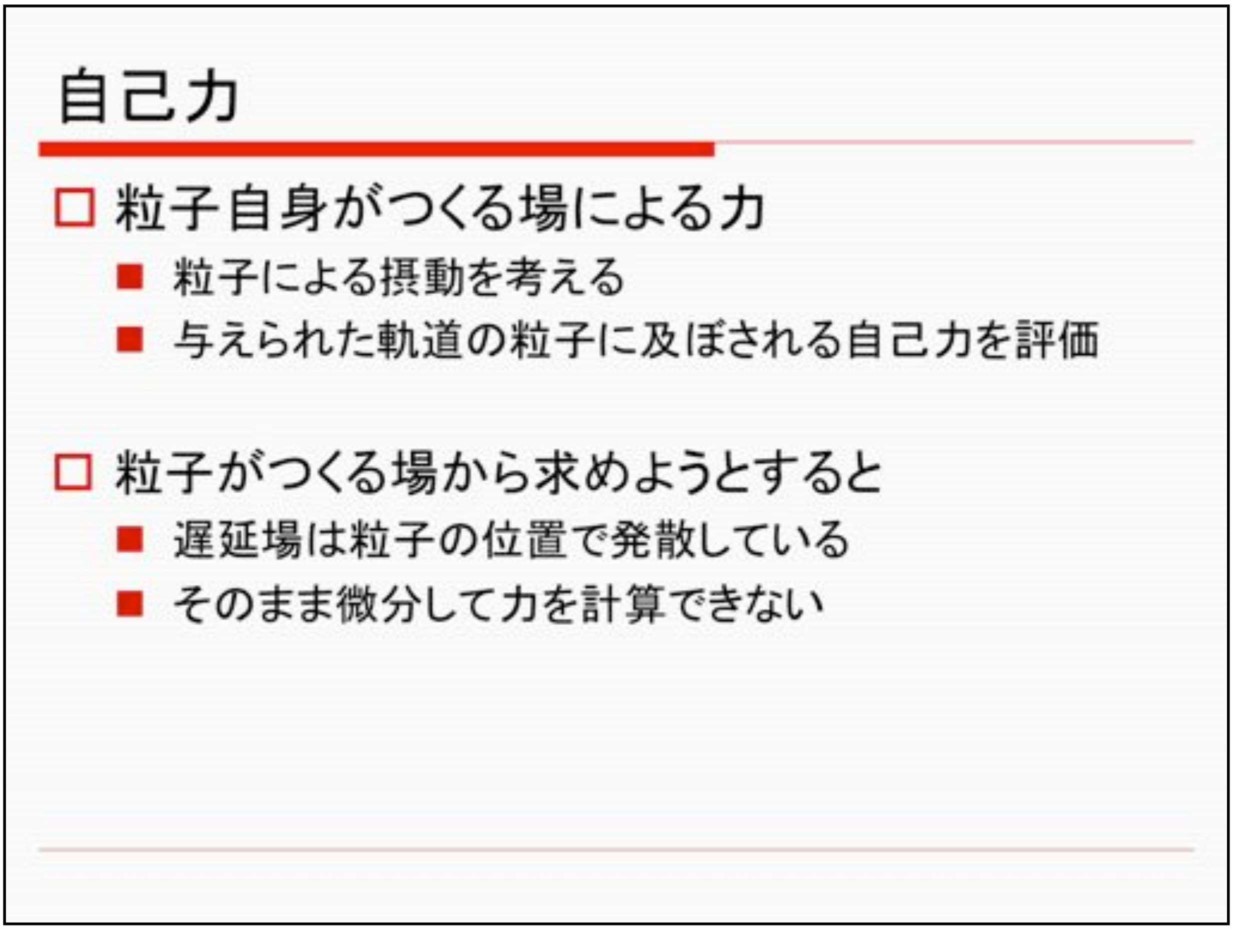
$$\mu \left[\frac{d^2 z^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dz^\beta}{d\tau} \frac{dz^\gamma}{d\tau} \right] = F^\alpha$$

- 質点が計量に（1次）摂動を加えたことで質点の運動がずれる効果
  - → 自己力

重力波源のひとつとして考えられているような、質量比の極端な二天体の運動を一般相対論的に扱いたい。ブラックホール摂動は、ブラックホール（重い方の天体）とテスト粒子（質点：軽い方の天体）の運動をゼロ次として、小さな質量比でもってその運動からのずれを取り入れていく近似の手法である。

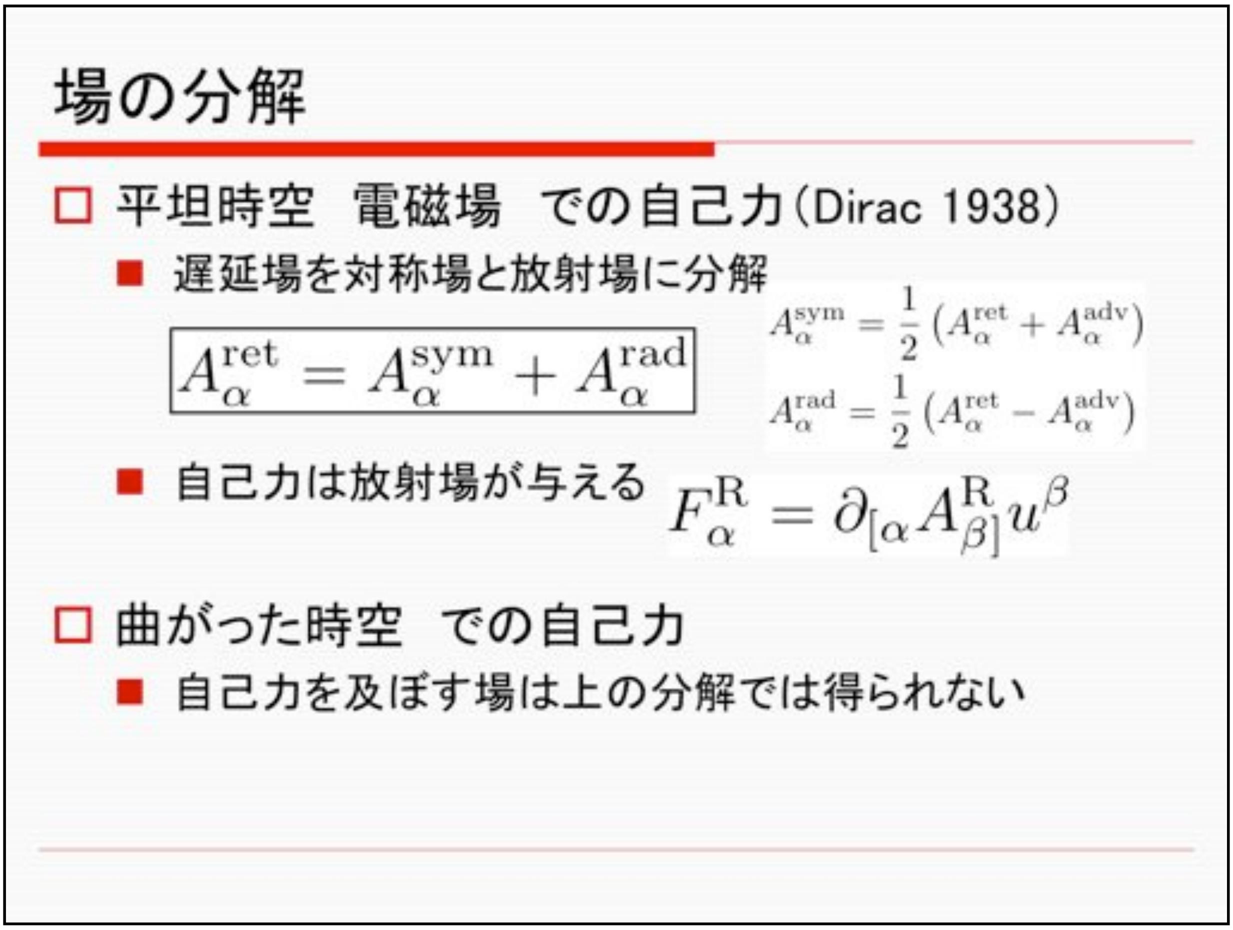
摂動のゼロ次では、質点はテスト粒子であるので、ブラックホール単体の時空計量による測地線運動をするだけである。しかし質点も時空をゆがめることを考慮すると（摂動の1次以降を考えると）、質点の運動はもはやブラックホールの時空計量（背景計量）の測地線運動ではなくなる。あるいは、二天体が互いを回る運動によって重力波が放出されるためにエネルギーが失われて粒子の運動が低エネルギー側へずれて行くのだとも言える。

どちらにせよ、測地線運動からのずれは粒子に余計な力が働くからだという扱いをするとき、その力を自己力という。粒子が時空をゆがめたせいで粒子自身の運動が影響を受けるからである。



自己力の効果自体は、重力に限ったことではない。電磁場やスカラー場でも同様で、電荷やスカラー荷をもった粒子がある与えられた軌道を運動しているときに、それがつくる場（遅延場）を求めれば、粒子がつくった場によって粒子自身に働く力というものを考えることが出来る。

しかしこの考え方では、粒子がつくる場が粒子の位置で発散しているために場を粒子の位置で微分できず力を直接計算できないという問題がある。



Diracは平坦時空における電磁場についてこの問題に取り組み、粒子がつくる遅延場を対称場と放射場に分解することで、発散を回避できることを発見した。この分解では、遅延場の発散部分は対称場のみに含まれ、さらに残りの放射場のみが粒子に働く自己力を与える。だから、遅延場を求め、分解して放射場の方だけを微分することで自己力を計算できるのである。また、放射場は斉次解（真空解）であるので、粒子の運動は、背景の場にこの放射場を加えた場の中でのテスト粒子の運動となる。

しかし、曲がった時空ではこの分解は上のようにすっきりとしない。全く同じように対称場と放射場に分解したのでは、発散部分が両者に残ってしまう上、自己力を与える部分も両者に含まれる。

Detweiler & Whiting (2003)はそれを、依然Diracのものと似た形で解決した論文である。

曲がった時空の場合

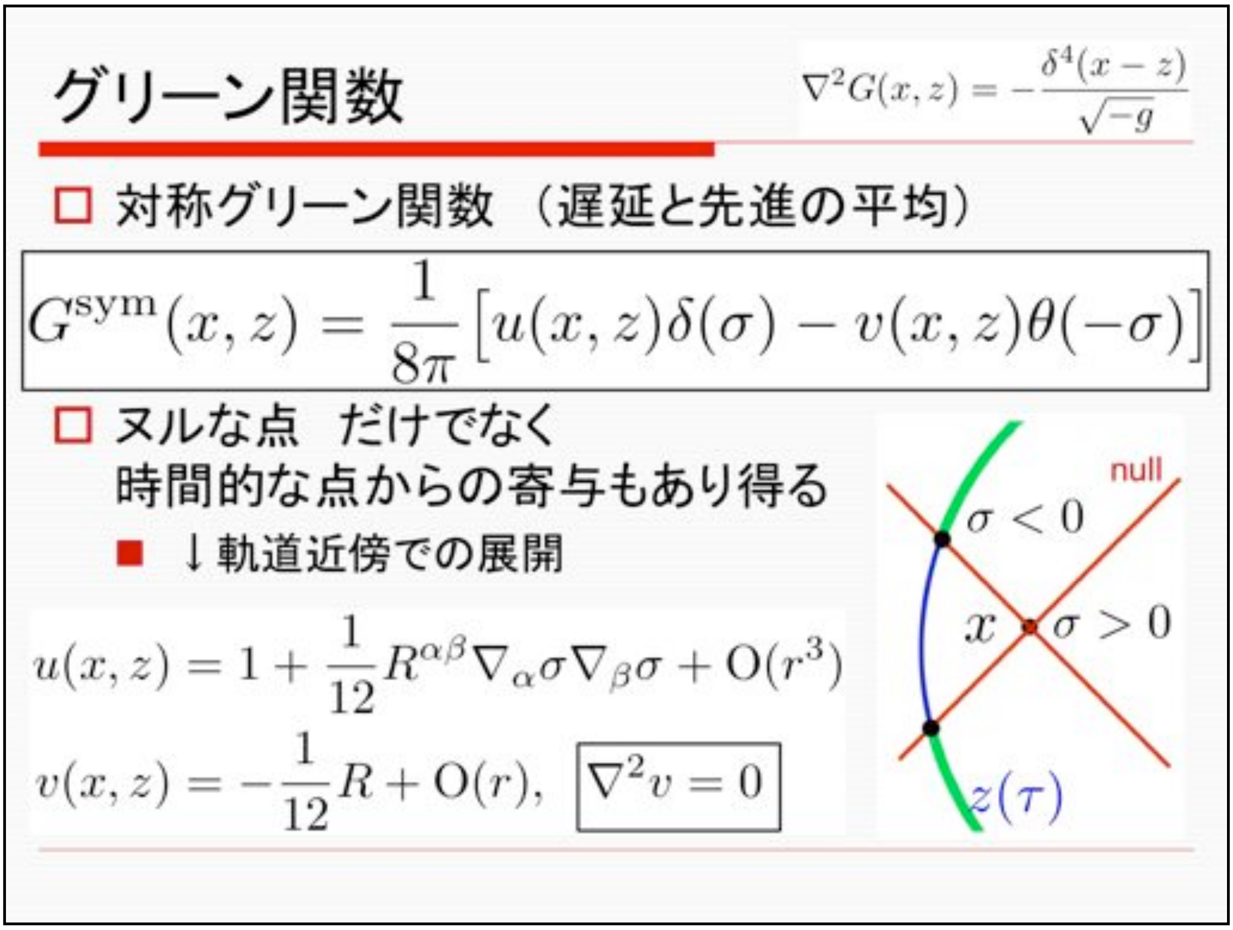
- スカラー場（簡単のため）
  - 場の方程式 $\nabla^2\psi(x) = -4\pi\rho(x)$
  - グリーン関数 $\boxed{\nabla^2 G(x,z) = -\dfrac{\delta^4(x-z)}{\sqrt{-g}}}$
  - 点源（軌道は与える）
    - q：粒子の荷
    - τ：固有時間

$$\rho(x) = q\int \frac{\delta^4(x-z(\tau))}{\sqrt{-g(z(\tau))}}d\tau$$

  - 場 $\boxed{\psi(x) = 4\pi q\int G(x,z(\tau))d\tau}$
  - 力 $F^\mu(x) = q\nabla^\mu\psi(x)$

　曲がった時空での自己力を、簡単のためスカラー場で考える。電磁場や重力場の場合でも、諸関数がテンソルになるだけで原理的には全くそのまま拡張が出来ることが分かっている。

　ソースとしては与えられた軌道を運動する粒子を考え、そのソースによってつくられる遅延場が粒子自身におよぼす自己力を求めたい。場はグリーン関数を使って求める。粒子と場の相互作用による力は、場の微分で与えられる。



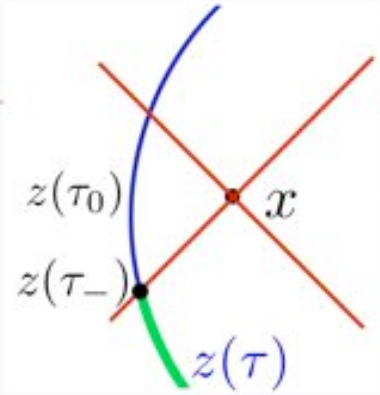
まずグリーン関数をみつける。グリーン関数をみつける方法として、対称場に対応する対称グリーン関数を先にみつける方法がある。

点xは場を評価する点を表し、点zは粒子の位置を表す。グリーン関数に含まれているσという量は点xとzの因果関係を表すもので、ヌルのときゼロ、時間的なとき負、空間的なとき正の値をとる。遠ければ遠いほど絶対値は大きい。つまり、対称グリーン関数の第一項は、点xの場にはヌルな点にあるソースからの寄与があることを表している。図では曲線上の黒い点に対応する。ただし、時空が曲がっている場合ではそれだけではなく、時間的な点にあるソースからの寄与も考えられる。ソースからの情報がゆがんだ時空を伝わるときには最短経路以外の経路も考えられるからである。対称グリーン関数の第二項がそれを表している。図では曲線の緑色の部分に対応する。

関数のuとvは、グリーン関数としての性質を満たすように決めるものである。するとvはソース無しの場の方程式を満たす（斉次解である）。

遅延場

$$\psi^{\rm ret} = q\int_{-\infty}^{\tau_0}\left[u\delta(\sigma) - v\theta(-\sigma)\right]d\tau$$
$$= q\left[\frac{u}{|\dot\sigma|}\right]_{\tau=\tau_-} - q\int_{-\infty}^{\tau_-} v\,d\tau$$



□ 粒子の位置 $x = z(\tau)$ での振舞い

$$F^\mu = q\nabla^\mu\psi$$

$$\nabla_\mu\left[\frac{u}{|\dot\sigma|}\right]_{\tau_-} \to \nabla_\mu\frac{1}{r}$$

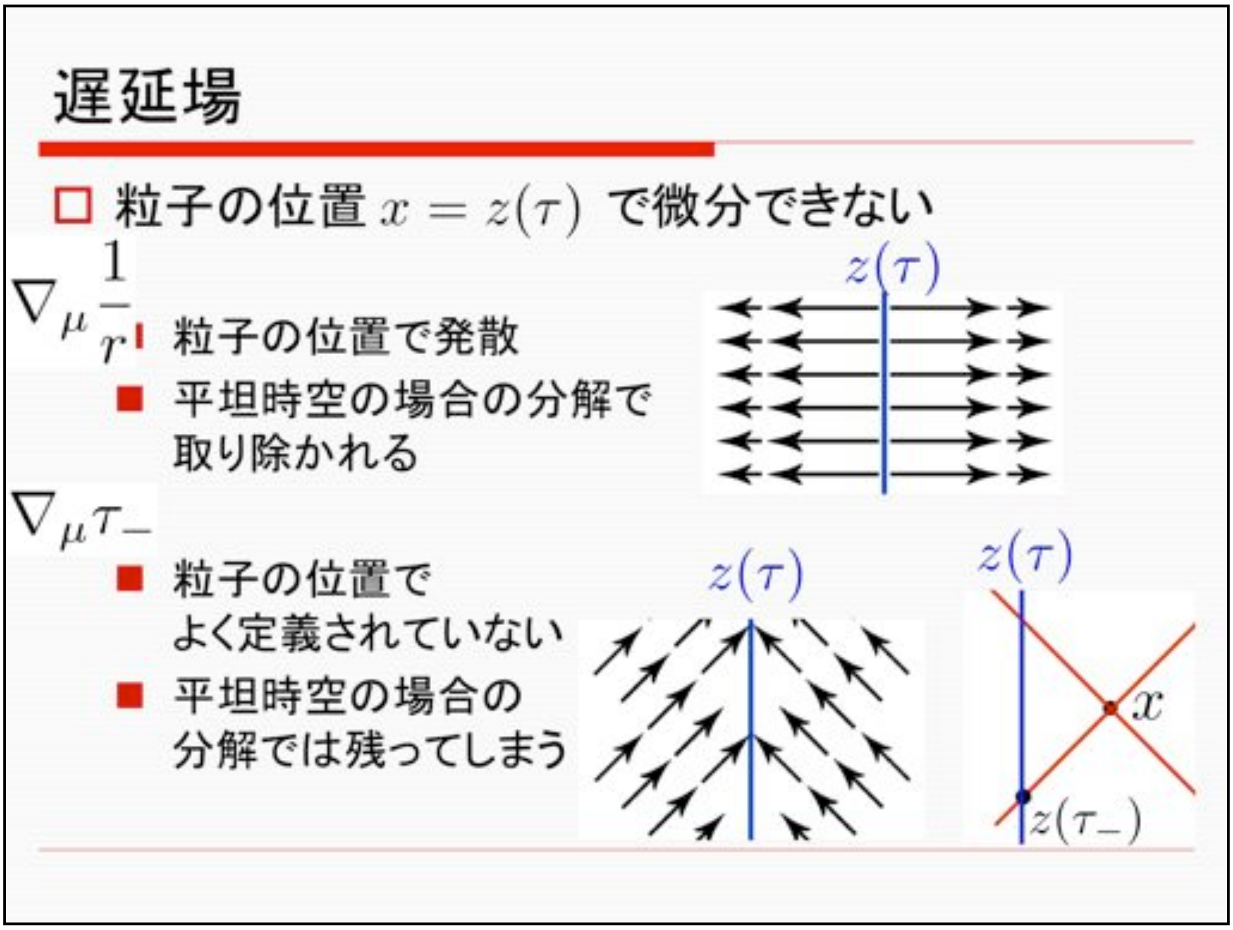
r： x と z の空間的距離

$$\nabla_\mu\int_{-\infty}^{\tau_-} v\,d\tau = \int_{-\infty}^{\tau_-}\nabla_\mu v\,d\tau + v\boxed{\nabla_\mu\tau_-}$$

対称グリーン関数がみつかると、それを点xの過去にある粒子の軌道にわたって積分することで遅延場を求めることが出来る。粒子の軌道のパラメータであるτは粒子の固有時間である。

その遅延場がしかし粒子の位置で微分が出来ないということは前にも述べた。詳しく見ると、第一項には粒子からの距離に反比例する部分が含まれている。曲がった時空の場合に新しいのは第二項の方で、こちらは発散こそしないが粒子の位置での定義が悪い。

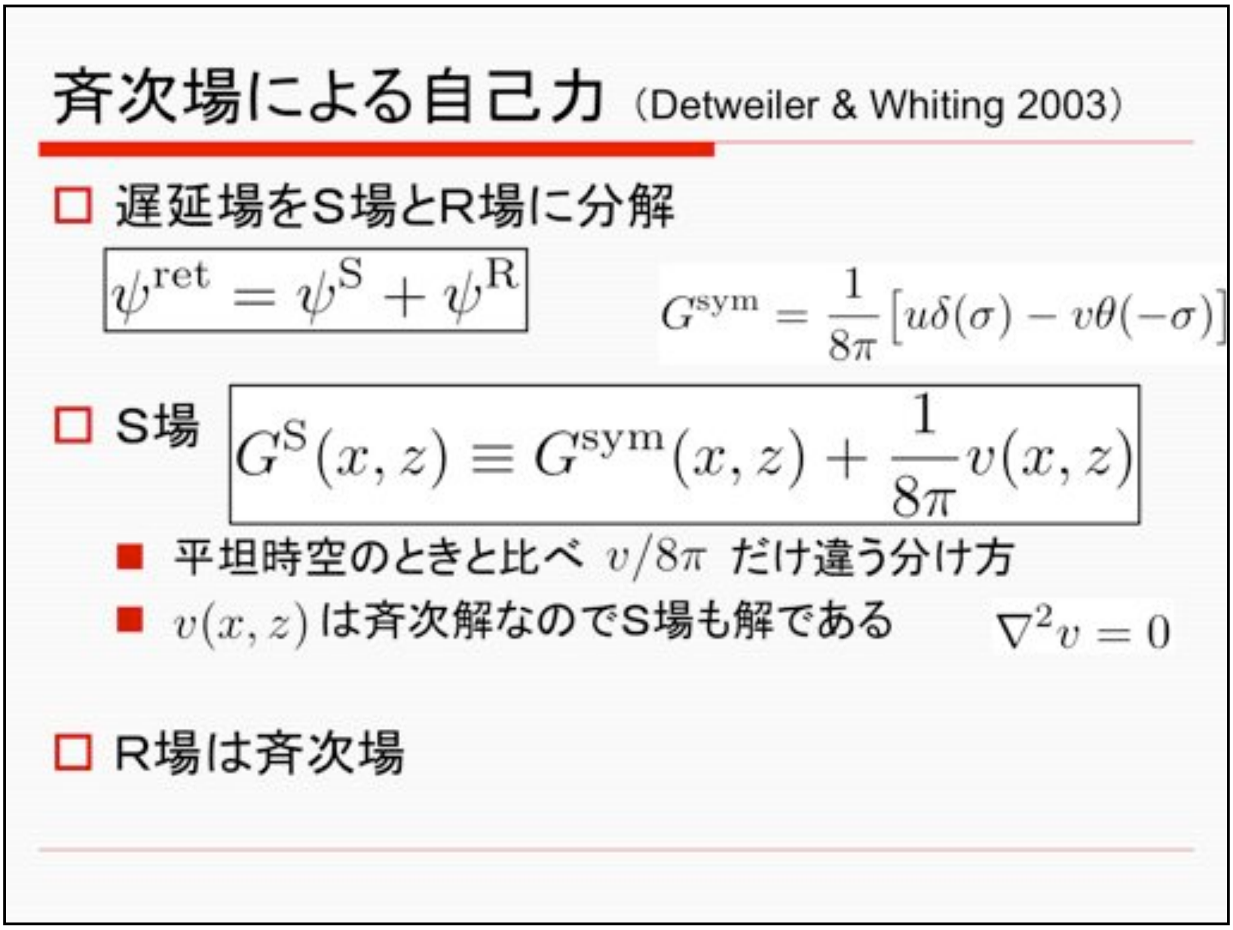
粒子の位置での振舞が悪い二つの部分について次のページで述べる。



遅延場には、粒子の位置での振る舞いが悪い部分が二つ含まれているために粒子の位置での微分が出来ない。

一つ目は粒子の位置で発散する部分である。図では場の微分を勾配ベクトル場として描いた。平坦時空の場合ならば、遅延場に含まれる悪い振舞いはこれだけである。Diracによる対称場と放射場への分解をすれば、放射場にはこの部分は残らない。

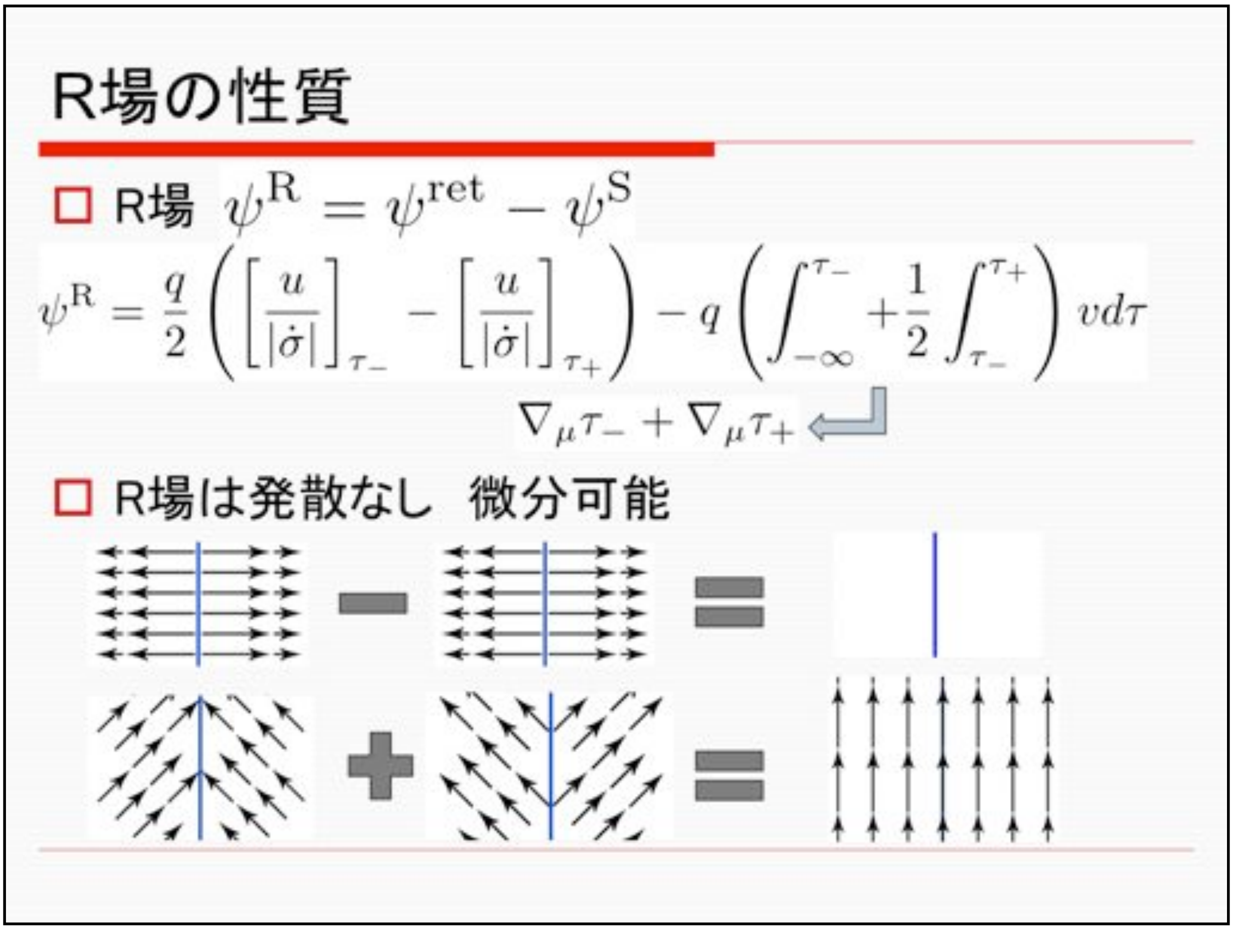
二つ目は粒子の位置での微分が定義できない部分である。一つ目と同様、場の微分を勾配ベクトル場として描いた。この部分は平坦時空の場合には現れない。点xの位置を変えると、光円錐（図では赤い直線）と軌道（図では青い線）の交点は移動するので、図のようなベクトル場になる。これでは、ベクトルの空間成分が粒子の位置で定まらない。



Detweiler & Whitingが示した遅延場の分解では、前ページで述べた振る舞いの悪い部分がS場だけに含まれ、残りのR場は粒子の位置でも微分可能である。

具体的には、対称グリーン関数に斉次解の関数vを加えたものをSグリーン関数として定義し、それを遅延グリーン関数から差し引いた残りをRグリーン関数と定義する。斉次解vを足し引きしただけなので、R場は放射場がそうであったように、斉次場（斉次解、真空解）である。

実際にR場には振る舞いの悪い部分が残らないことを次ページで見る。



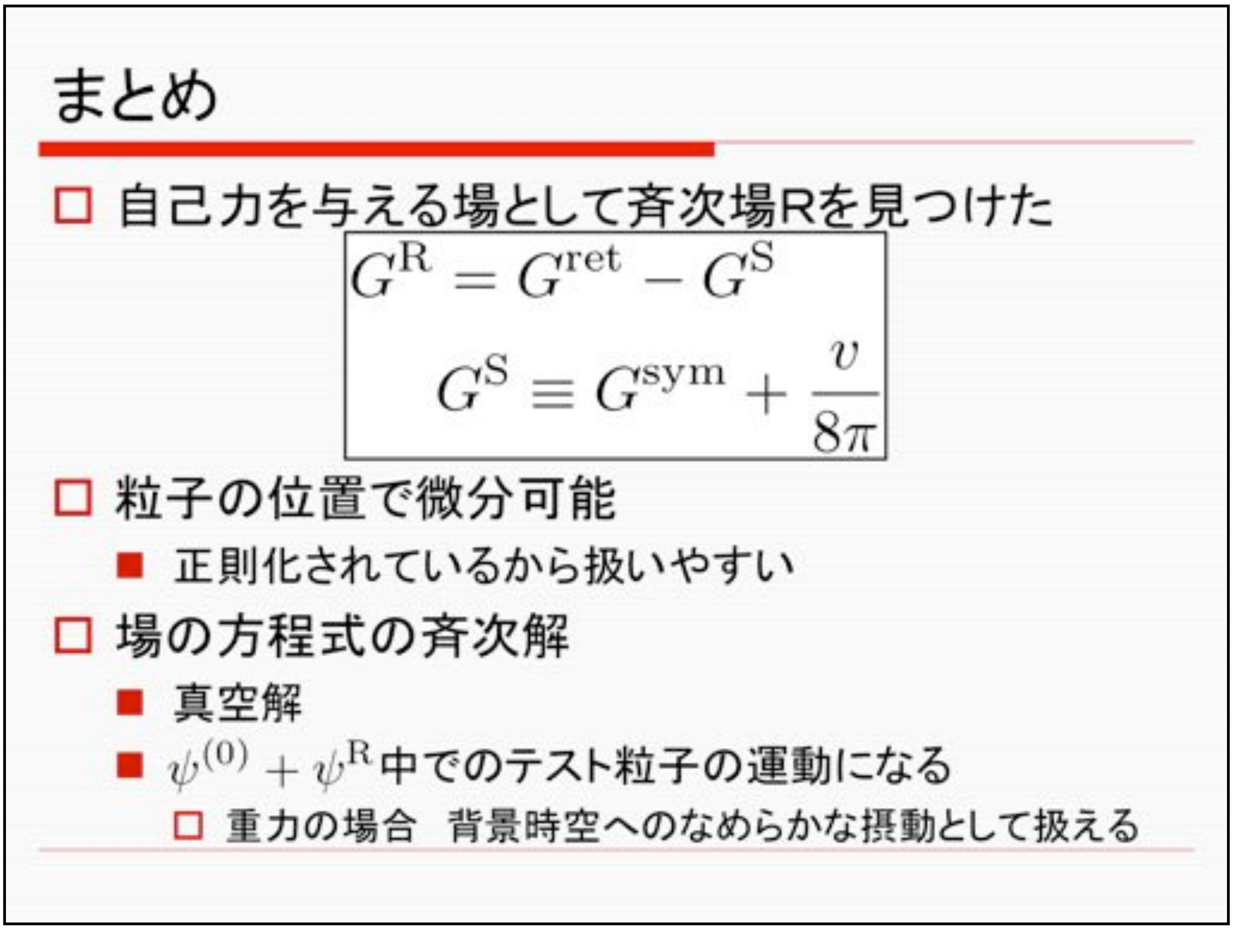
R場は遅延場からS場を差し引いた残りなので、遅延場とS場をそれぞれ計算すれば求めることが出来る。

すると、一つ目の、粒子の位置で発散する部分はちょうど相殺されて消えることが分かる。

二つ目の、ベクトルの空間成分が定まらない成分は、似た性質のベクトル場との足し算によって空間部分だけが相殺され、時間成分だけが残る。こちらには向きの定まらない問題はない。

よって、R場は、遅延場から振る舞いの悪い部分を取り除いたものである、微分可能な場であることが分かる。

以上の、場の分解は、電磁場や重力場に対する問題の場合も全く同じように機能する。



まとめると、今回紹介したDetweiler & Whitingの論文では曲がった時空において与えられた軌道にある粒子がつくる遅延場を分解し、微分可能な斉次場を引き出すことが出来ることを示した。

形としては平坦時空についてDiracが提案した分解とよく似ている。この分解では、遅延場の発散部分はS場のみに含まれ、さらに残りのR場のみが粒子に働く自己力を与える。だから、遅延場を求め、分解してR場の方だけを微分することで自己力を計算できるのである。また、R場は斉次解（真空解）であるので、粒子の運動は、背景の場にこのR場を加えた場の中でのテスト粒子の運動となる。

最後の性質は重力の場合について言えば、粒子の運動は、なめらかな摂動が加わったブラックホール時空の測地線運動となることを意味している。