一般相対論的三体系における近日点移動

弘前大学 大学院 理工学研究科
山田 慧生

共同研究者：浅田秀樹さん

発表の流れ

- はじめに
- 今回用いた近似
- 一般相対論的三体系の近日点移動
- 最近の観測
- まとめ

はじめに

惑星ヴァルカン説

- 一般相対論(GR)の登場以前, 水星の近日点移動をNewton力学で説明する試みが盛んであった.
- 有名なのは, 水星の内側に仮想の惑星ヴァルカンがあるとするヴァルカン説.
- しかし, 惑星ヴァルカンはついに未発見のまま.
- 水星の近日点移動はGRで説明された.

研究の動機と目的

- L. Iorio, Astron. J. 137, 3615 (2009)によると, 土星の近日点移動に異常(anomaly)がある.
- Newtonの多体の効果はもちろん, 太陽のGR的な効果を考慮しても, 観測と合わない(-6mas/cy).
- しかし, 土星のすぐ内側には木星が運動している.
- 水星における惑星ヴァルカンのように, 土星の近日点移動をGR的な木星の効果で説明出来ないか？ → GR的三体系の近日点移動の解析的な公式を作りたい.

今回用いた近似

４つの近似

- 三体系をそのまま扱うのは複雑で難しい.
- そこで今回は４つの近似を使う.

1. M_1(太陽) $\gg M_2$(木星) $\gg M_3$(土星)
2. ３つの天体は同一面を運動する.
3. M_2は円運動とする.
4. $r_3(=r) \gg r_2(=\ell)$

一般相対論的多体系の計量

GR的多体系(1PN近似)の一般的な計量は

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= g_{\mu\nu}(t, \boldsymbol{r}) dx^\mu dx^\nu \\
&= \left[-1 + 2\sum_A \frac{m_A}{r_A} - 2\left(\sum_A \frac{m_A}{r_A}\right)^2 + 3\sum_A \frac{m_A v_A^2}{r_A} - 2\sum_A \sum_{B \neq A} \frac{m_A m_B}{r_A R_{AB}}\right] dt^2 \\
&\quad + 2 \times \left[-\sum_A \frac{m_A}{r_A} \left\{\frac{7}{2} v_{Aj} + \frac{1}{2} \frac{(\boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{r}_A) r_{Aj}}{r_A^2}\right\}\right] dt dx^j \\
&\quad + \left[1 + 2\sum_A \frac{m_A}{r_A}\right] \delta_{ij} dx^i dx^j,
\end{aligned}
$$

一般相対論的多体系の計量

GR的多体系(1PN近似)の一般的な計量は

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= g_{\mu\nu}(t,\boldsymbol{r})dx^\mu dx^\nu \\
&= \left[-1 + 2\sum_A \frac{m_A}{r_A} - 2\left(\sum_A \frac{m_A}{r_A}\right)^2 + 3\sum_A \frac{m_A v_A^2}{r_A} - 2\sum_A \sum_{B\neq A} \frac{m_A m_B}{r_A R_{AB}}\right] dt^2 \\
&\quad \boxed{+ 2 \times \left[-\sum_A \frac{m_A}{r_A}\left\{\frac{7}{2} v_{Aj} + \frac{1}{2}\frac{(\boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{r}_A) r_{Aj}}{r_A^2}\right\}\right] dt dx^j} \\
&\quad + \left[1 + 2\sum_A \frac{m_A}{r_A}\right]\delta_{ij} dx^i dx^j,
\end{aligned}
$$

Lense-Thirring効果

一般相対論的多体系の計量

GR的多体系(1PN近似)の一般的な計量は

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= g_{\mu\nu}(t, \boldsymbol{r}) dx^\mu dx^\nu \\
&= \left[-1 + 2\sum_A \frac{m_A}{r_A} - 2\left(\sum_A \frac{m_A}{r_A}\right)^2 + 3\sum_A \frac{m_A v_A^2}{r_A} - 2\sum_A \sum_{B\neq A} \frac{m_A m_B}{r_A R_{AB}}\right] dt^2 \\
&\quad + \left[1 + 2\sum_A \frac{m_A}{r_A}\right] \delta_{ij} dx^i dx^j,
\end{aligned}
$$

Lense-Thirring効果

時間, 空間成分だけを考える.

近似した三体系の計量

近似した三体系におけるM_3が感じる計量は

$$ds^2 = \left[-1 + \frac{r_s}{r}\left(1 - \frac{Q}{\ell^3}\right) + \frac{Q}{r^3} + \frac{r_s Q}{r^4}\right]dt^2 + \left(1 + \frac{r_s}{r} + \frac{3Q}{r^3}\right)dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

ただし, $r_s = 2(M_1 + M_2),\ Q = \dfrac{M_2 \ell^2}{2},\ G = c = 1,\ \theta = \dfrac{\pi}{2}$

一方, Schwarzschild計量(弱場近似)は

$$ds^2 = \left(-1 + \frac{r_s}{r}\right)dt^2 + \left(1 + \frac{r_s}{r}\right)dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

近似した三体系の計量

近似した三体系におけるM_3が感じる計量は

$$ds^2 = \left[-1 + \frac{r_s}{r}\left(1 \boxed{- \frac{Q}{\ell^3}\right) + \frac{Q}{r^3} + \frac{r_s Q}{r^4}}\right]dt^2 + \left(1 + \frac{r_s}{r} \boxed{+ \frac{3Q}{r^3}}\right)dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

ただし, $r_s = 2(M_1 + M_2),\ Q = \frac{M_2 \ell^2}{2},\ G = c = 1,\ \theta = \frac{\pi}{2}$

一方, Schwarzschild計量(弱場近似)は

$$ds^2 = \left(-1 + \frac{r_s}{r}\right)dt^2 + \left(1 + \frac{r_s}{r}\right)dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

近似した三体系の計量

近似した三体系におけるM_3が感じる計量は

$$ds^2 = \left[-1 + \frac{r_s}{r}\left(1 \boxed{- \frac{Q}{\ell^3}\right) + \frac{Q}{r^3} + \frac{r_s Q}{r^4}}\right]dt^2 + \left(1 + \frac{r_s}{r} \boxed{+ \frac{3Q}{r^3}}\right)dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

ただし, $r_s = 2(M_1 + M_2),\ Q = \dfrac{M_2 \ell^2}{2},\ G = c = 1,\ \theta = \dfrac{\pi}{2}$

一方, Schwarzschild計量(弱場近似)は

$$ds^2 = \left(-1 + \frac{r_s}{r}\right)dt^2 + \left(1 + \frac{r_s}{r}\right)dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

このときの運動方程式を解いて, 近日点移動の角度を求める

一般相対論的三体系の近日点移動

三体系の近日点移動

Newtonの多体の効果や太陽のGR的効果などを取り除いて

新しくわかったGR的三体系における近日点移動の角度は

(1周期あたり)

$$\Delta\varphi = \frac{3}{2}\frac{(16+9e^2)\pi}{(1-e^2)^3}\frac{Q}{a^3}$$

a :M_3 (土星)の軌道長半径, e :M_3 (土星)の離心率

Yamada & Asada arXiv:1105.2998 (2011)

三体系の近日点移動

Newtonの多体の効果や太陽のGR的効果などを取り除いて

新しくわかったGR的三体系における近日点移動の角度は

(1周期あたり)

$$\Delta\varphi = \frac{3}{2}\frac{(16+9e^2)\pi}{(1-e^2)^3}\frac{Q}{a^3}$$

特に土星については

$$= 2.302 \times 10^{-3}\mathrm{mas} \times \left(\frac{M_2}{M_J}\right) \times \left(\frac{\ell}{r_J}\right)^2$$

a :M_3 (土星)の軌道長半径, e :M_3 (土星)の離心率

Yamada & Asada arXiv:1105.2998 (2011)

土星の近日点移動

惑星	$M_2(\mathrm{kg})$	$\ell(\mathrm{AU})$	$\dot{\omega}_Q$ (mas/cy)
水星	3.301×10^{23}	0.3871	7.502×10^{-9}
金星	4.869×10^{24}	0.7233	3.864×10^{-7}
地球	5.984×10^{24}	1.000	9.075×10^{-7}
火星	6.419×10^{23}	1.524	2.260×10^{-7}
木星	1.899×10^{27}	5.203	7.796×10^{-3}

太陽によるLense-Thirring効果は $-1 \times 10^{-4}(\mathrm{mas/cy})$

土星の近日点移動

惑星	M_2(kg)	ℓ(AU)	$\dot{\omega}_Q$ (mas/cy)
水星	3.301×10^{23}	0.3871	7.502×10^{-9}
金星	4.869×10^{24}	0.7233	3.864×10^{-7}
地球	5.984×10^{24}	1.000	9.075×10^{-7}
火星	6.419×10^{23}	1.524	2.260×10^{-7}
木星	1.899×10^{27}	5.203	7.796×10^{-3}

太陽によるLense-Thirring効果は　-1×10^{-4}(mas/cy)

土星の近日点移動

惑星	M_2(kg)	ℓ(AU)	$\dot{\omega}_Q$ (mas/cy)
水星	3.301×10^{23}	0.3871	7.502×10^{-9}
金星	4.869×10^{24}	0.7233	3.864×10^{-7}
地球	5.984×10^{24}	1.000	9.075×10^{-7}
火星	6.419×10^{23}	1.524	2.260×10^{-7}
木星	1.899×10^{27}	5.203	7.796×10^{-3}

太陽によるLense-Thirring効果は　-1×10^{-4}(mas/cy)

土星の近日点移動

惑星	M_2(kg)	ℓ(AU)	$\dot{\omega}_Q$ (mas/cy)
水星	3.301×10^{23}	0.3871	7.502×10^{-9}
金星	4.869×10^{24}	0.7233	3.864×10^{-7}
地球	5.984×10^{24}	1.000	9.075×10^{-7}
火星	6.419×10^{23}	1.524	2.260×10^{-7}
木星	1.899×10^{27}	5.203	$\boxed{7.796 \times 10^{-3}}$

太陽によるLense-Thirring効果は　-1×10^{-4}(mas/cy)

最近の観測

Fienga & Pitjeva

土星の近日点移動における観測値と数値計算の残差(mas/cy)

	Fienga et al.	Pitjeva
2009	-10 ± 8	-10 ± 15
2011	0.15 ± 0.65	0.1 ± 1.0

Iorioが2009年の時点で指摘した異常は-6mas/cy.

2011年における最新のデータによって棄却された.

一方, 我々の導いた新たな効果は0.001mas/cyのオーダー

まとめ

まとめと今後の展望

- GR的三体系における近似した近日点移動の公式化に成功.
- しかし,現在の観測精度(1mas/cy程)では測定不可能.
  → 土星ではなく火星はどうか？
- 今回は内側をまわる惑星の効果しか考えていない.
  → 木星の内側をまわる火星については議論出来ない.
- 外側をまわる惑星の効果も考慮した公式を作りたい.

おわり