

輻射輸送におけるM1スキーム の数値的解法

千葉大学 理学研究科 宇宙物理学研究室
菅野 裕次

Introduction



原始惑星系円盤,NASA

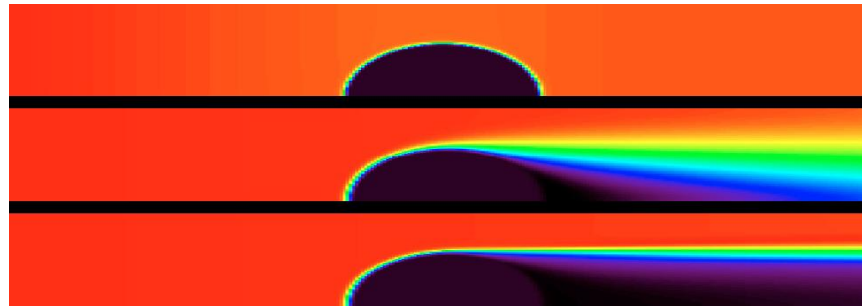
天体におけるエネルギー輸送や、天体の見え方を議論する上で輻射輸送方程式を精度よく解くことは重要である。最も簡単な計算方法である拡散近似では、エネルギー密度 E とその勾配だけで輻射を表すので、精度よく解くことはできない。

➡ 本発表では、エネルギー流束 F も考慮した**M1モデル**の解法を提案する。

目的

- まずは**輻射輸送方程式**をM1モデルを使って解き、簡単なHLL法を用いて数値計算を行い物体に光を当てて背後に影ができるかテストする(**shadow test**)。
- よりシャープな影ができるような計算法を提案し、shadow testを行い結果を比較する。

Shadow test



M.Gonzalez et al,2006

- この方法を用いて限られた領域から光を出したときどのように進むかというシミュレーションも行う(**beam test**)。

基礎方程式

輻射輸送方程式

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{n} \cdot \nabla \right) I(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}, \nu) = \sigma_a^\nu B(\mathbf{x}, t, \nu) - \sigma^\nu I(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}, \nu) + \sigma_s^\nu \int_{4\pi} g(\mathbf{n}, \mathbf{n}') I(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}', \nu) d\mathbf{n}'$$

$I(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}, \nu)$: 光の強度

σ_a^ν : 吸収係数, σ_s^ν : 散乱係数

$\sigma^\nu = \sigma_a^\nu + \sigma_s^\nu$: 全断面積

B : 光を発生させる関数

g : 散乱時の方向を決める関数

散乱が等方性であると仮定すると、
輻射輸送方程式

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{n} \cdot \nabla \right) I(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}, \nu) = \sigma_a^\nu B(\mathbf{x}, t, \nu) - \sigma^\nu I(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}, \nu) + \sigma_s^\nu \int_{4\pi} g(\mathbf{n}, \mathbf{n}') I(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}', \nu) d\mathbf{n}' \quad \dots (1)$$

(1) 式を振動数で平均をとると。

$$\left[\begin{array}{l} \partial_t E_r^\nu + \nabla \cdot \mathbf{F}_r^\nu = \sigma_a^\nu (4\pi B - c E_r^\nu) \quad \dots (2.1) \\ \partial_t \mathbf{F}_r^\nu + c^2 \nabla \cdot \mathbf{P}_r^\nu = -\sigma^\nu c \mathbf{F}_r^\nu \quad \dots (2.2) \end{array} \right.$$

このとき、

$$E_r^\nu = \frac{1}{c} \oint_{4\pi} I(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}, \nu) d\mathbf{n}$$

$$\mathbf{F}_r^\nu = \oint_{4\pi} \mathbf{n} I(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}, \nu) d\mathbf{n} \quad \dots (3)$$

$$\mathbf{P}_r^\nu = \frac{1}{c} \oint_{4\pi} \mathbf{n} \mathbf{n} I(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}, \nu) d\mathbf{n}$$

を使った。

(2. 1)、(2. 2)式で、単一の波長のみを考えると、

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{E}_r + \nabla \cdot \mathbf{F}_r &= c(\sigma_P B(T) - \sigma_E \mathbf{E}_r) \\ \partial_t \mathbf{F}_r + c^2 \nabla \cdot \mathbf{P}_r &= -c \sigma_F \mathbf{F}_r \end{aligned} \quad \dots (4)$$

これを数値計算で解いていく。

ここで、 $\sigma_P, \sigma_E, \sigma_F$ は、それぞれ吸収係数である。

M1 Closure

← 方程式を閉じるための関数

$$\left\{ \begin{aligned} \underline{\mathbf{P}_r} &= \mathbf{D} \mathbf{E}_r \\ \mathbf{D} &= \frac{1-\chi}{2} \mathbf{I} + \frac{3\chi-1}{2} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad : \text{Eddington tensor} \\ \chi &= \frac{3+4\|\mathbf{f}\|^2}{5+2\sqrt{4-3\|\mathbf{f}\|^2}} \quad : \text{Eddington factor} \end{aligned} \right.$$

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{F}_r}{c\mathbf{E}_r} < 1$$

数値計算方法(HLL法)

$c=1$ の単位系を使う。(4)式を、

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{F} = \mathbf{S} \quad \dots (5)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} E_r \\ F_r \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_r \\ P_r \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_P B(T) - \sigma_E E_r \\ -\sigma_F F_r \end{pmatrix}$$

と書き換える。

ここで、

$$U_{j,i}^n \equiv U(z = j\Delta z, x = i\Delta x, t = n\Delta t)$$

とする。

(5)式を、 $\int_{t=n\Delta t}^{t=(n+1)\Delta t} \int_{z=(j-\frac{1}{2})\Delta z}^{z=(j+\frac{1}{2})\Delta z} \int_{x=(i-\frac{1}{2})\Delta x}^{x=(i+\frac{1}{2})\Delta x} dt dz dx$ で積分すると、

$$U_{j,i}^{n+1} = U_{j,i}^n - \left(F_{j+\frac{1}{2},i}^n - F_{j-\frac{1}{2},i}^n \right) \frac{\Delta t}{\Delta z} - \left(F_{j,i+\frac{1}{2}}^n - F_{j,i-\frac{1}{2}}^n \right) \frac{\Delta t}{\Delta x} + S_{j,i}^n \Delta t$$

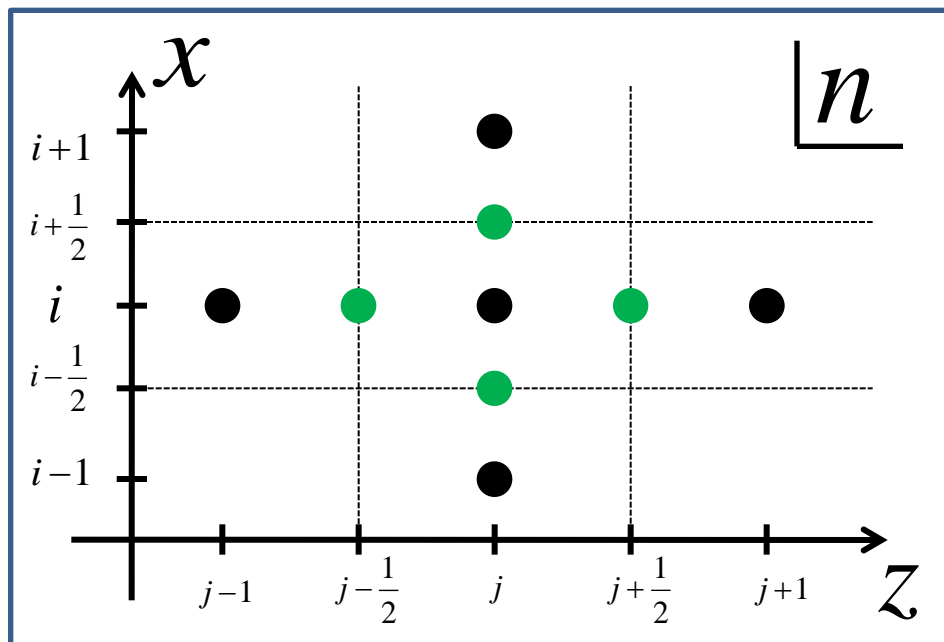
このとき、

$$F_{j+\frac{1}{2},i}^n = \frac{\lambda_R F_{j,i}^n - \lambda_L F_{j+1,i}^n + \lambda_R \lambda_L (U_{j+1,i}^n - U_{j,i}^n)}{\lambda_R - \lambda_L}$$

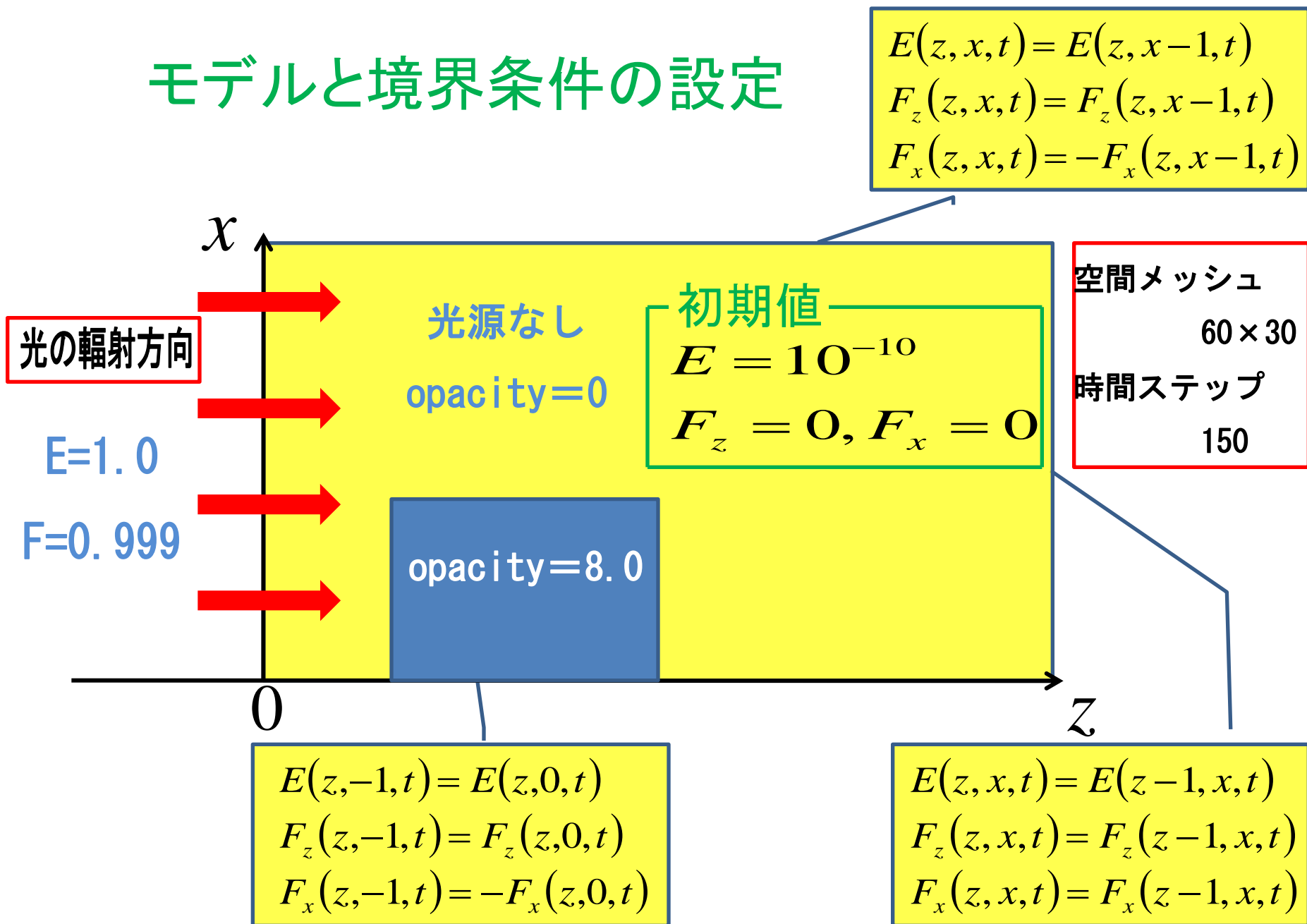
である。

$F_{j,i+\frac{1}{2}}^n$ についても同様。

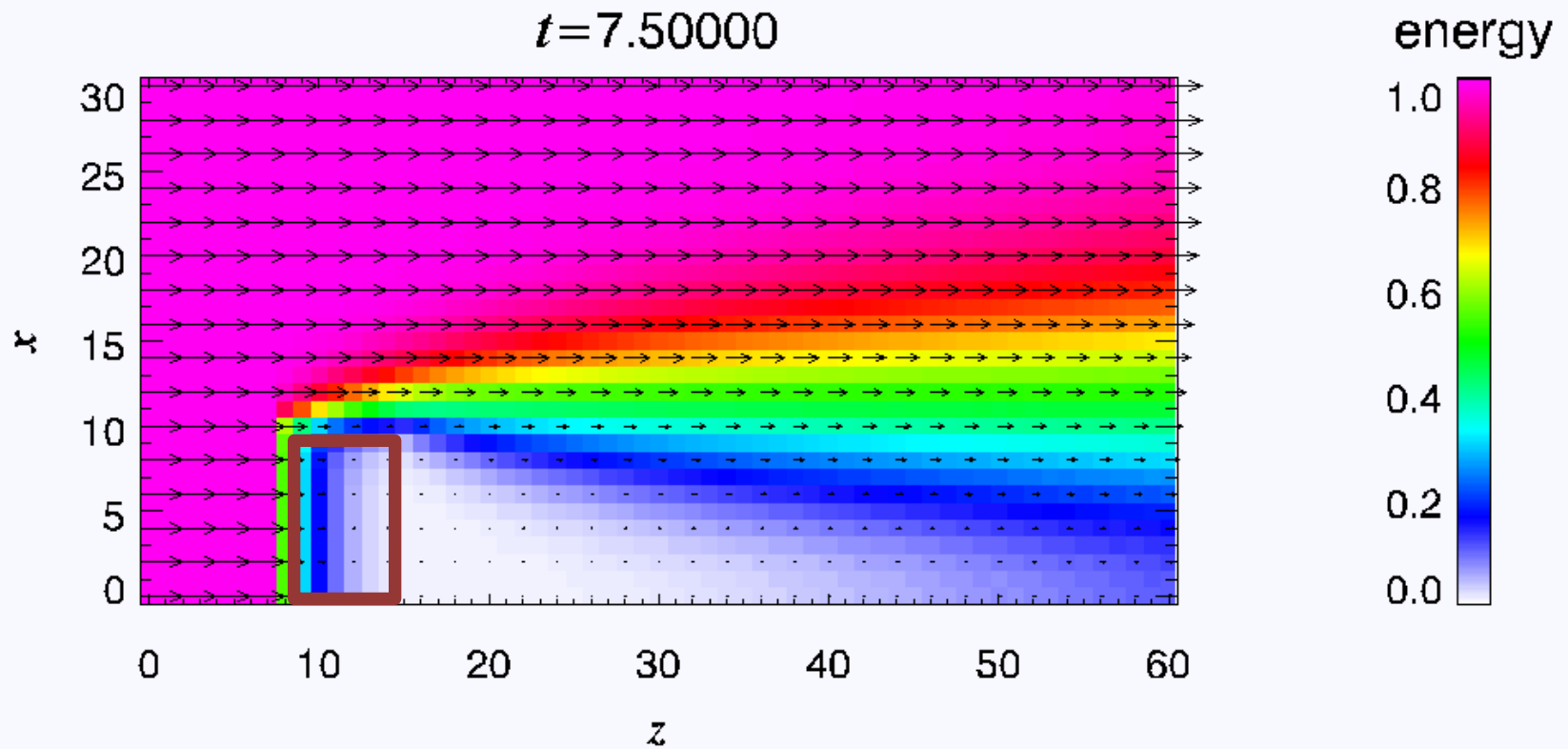
$\lambda_R = +c, \lambda_L = -c$ とした。



モデルと境界条件の設定



Shadow Test (HLL法)



提案する数値計算方法

$c=1$ の単位系を使う。(4)式を、

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{F} = \mathbf{S} \quad \dots (5)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} E_r \\ \mathbf{F}_r \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_r \\ \mathbf{P}_r \end{pmatrix}, \mathbf{S} = -\sigma \begin{pmatrix} E_r - B(T) \\ \mathbf{F}_r \end{pmatrix}$$

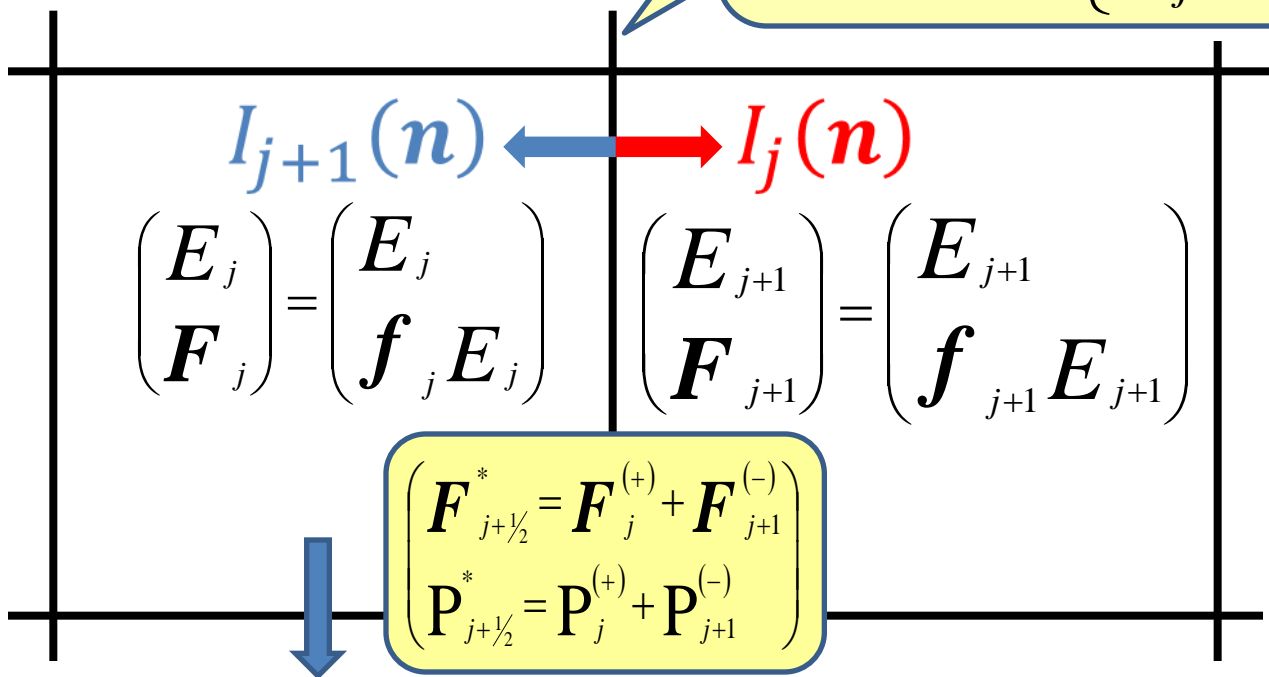
と書き換える。

HLL法と異なる点は \mathbf{F} の計算方法である。

HLL法は左右のセルの差分で計算するが、今回の方法では、左のセルの \mathbf{U} を用いて右のセルへの \mathbf{F} を計算し、逆に右のセルの \mathbf{U} を用いて左のセルへの \mathbf{F} を計算する。

具体的には、

$$I_{j+\frac{1}{2}}^*(n) = \begin{cases} I_j(n) & (\mu > 0) \\ I_{j+1}(n) & (\mu < 0) \end{cases}$$



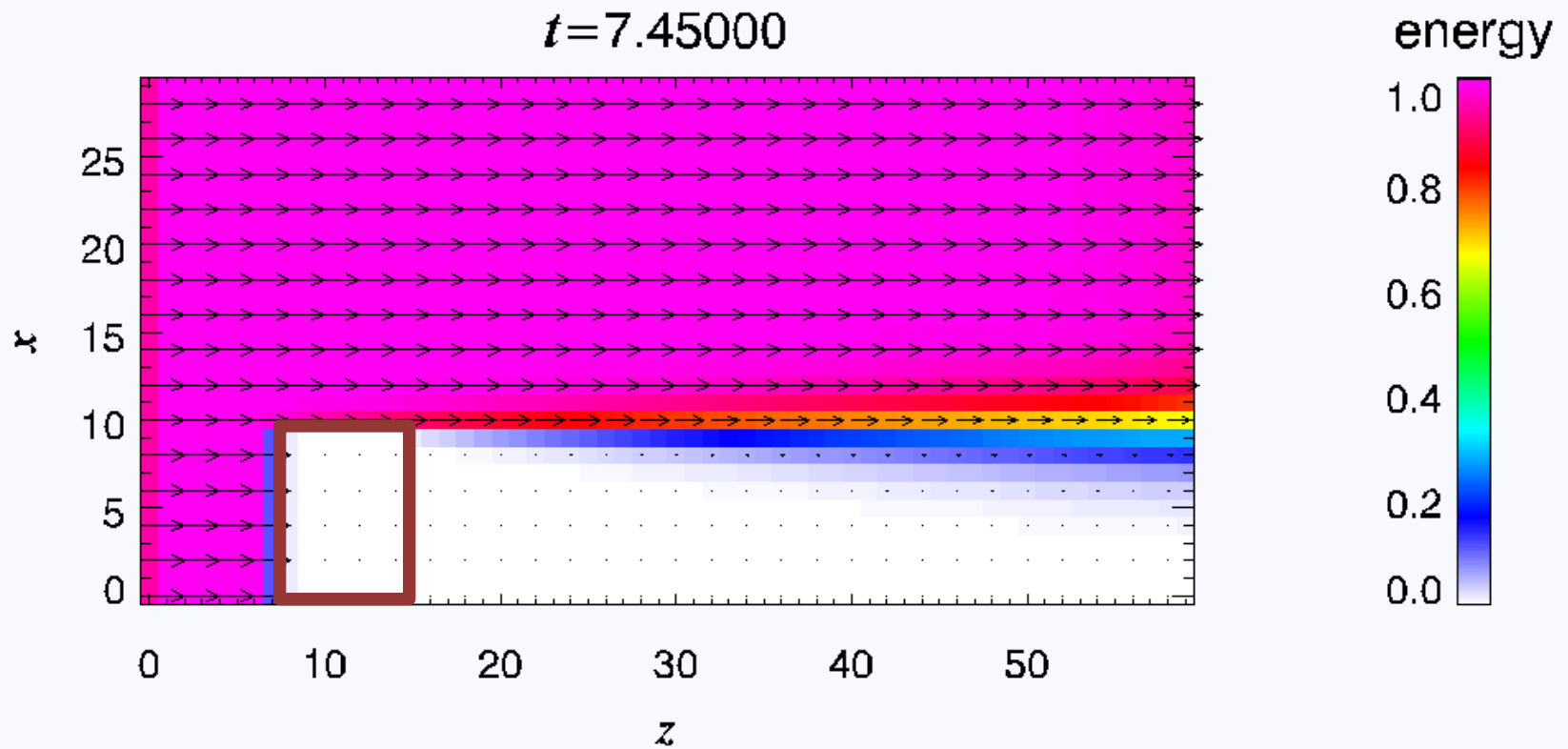
$$\begin{cases} F_{j+\frac{1}{2}}^* = F_j^{(+)} + F_{j+1}^{(-)} \\ P_{j+\frac{1}{2}}^* = P_j^{(+)} + P_{j+1}^{(-)} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} F_{j+\frac{1}{2}}^* \\ P_{j+\frac{1}{2}}^* \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \beta = \frac{3f}{2 + \sqrt{4 - 3f^2}} \\ I(n) = \frac{3E}{8\pi} \frac{(1 - \beta^2)^3}{3 + \beta^2} (1 - \beta \cdot n)^{-4} \end{cases}$$

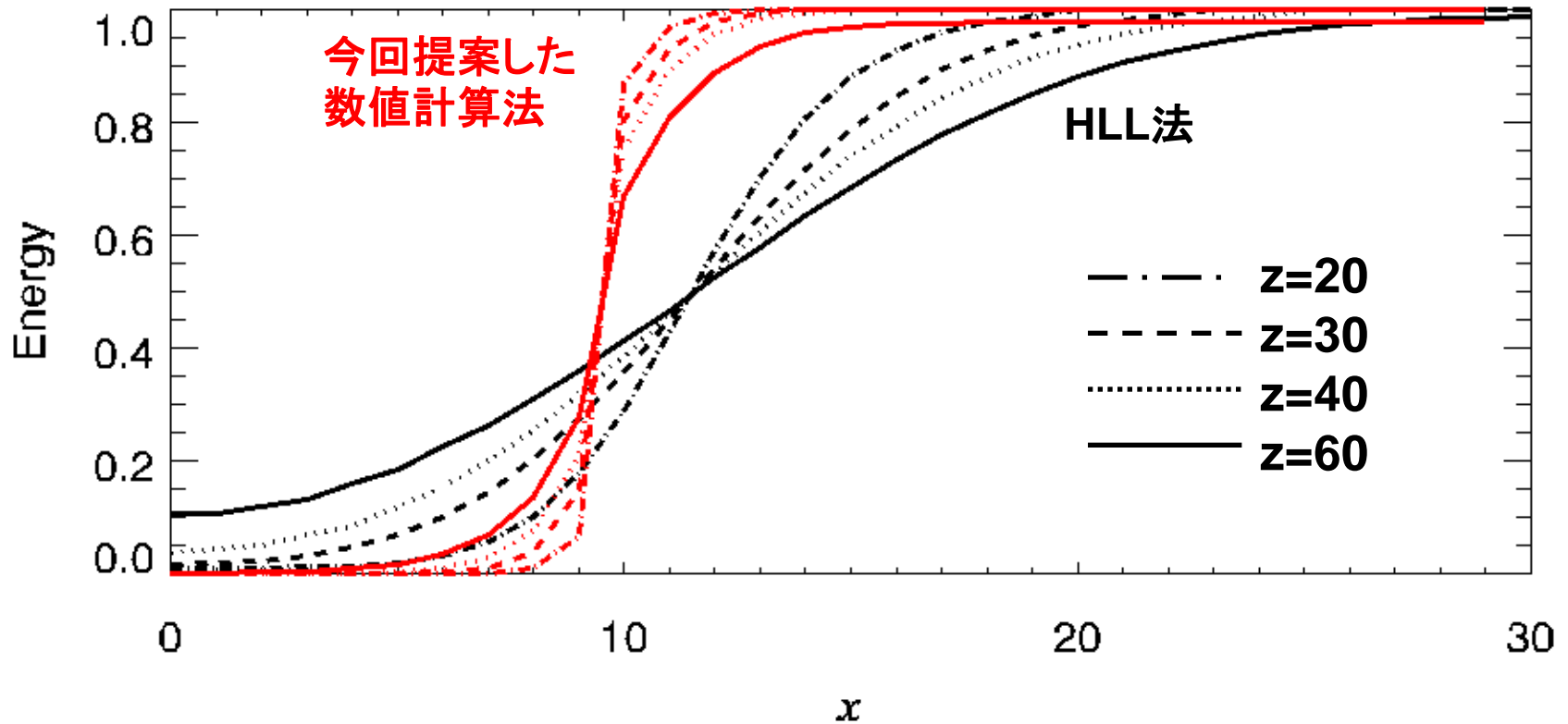
M1 Closureに
この関係を組み込む

Shadow Test



考察①

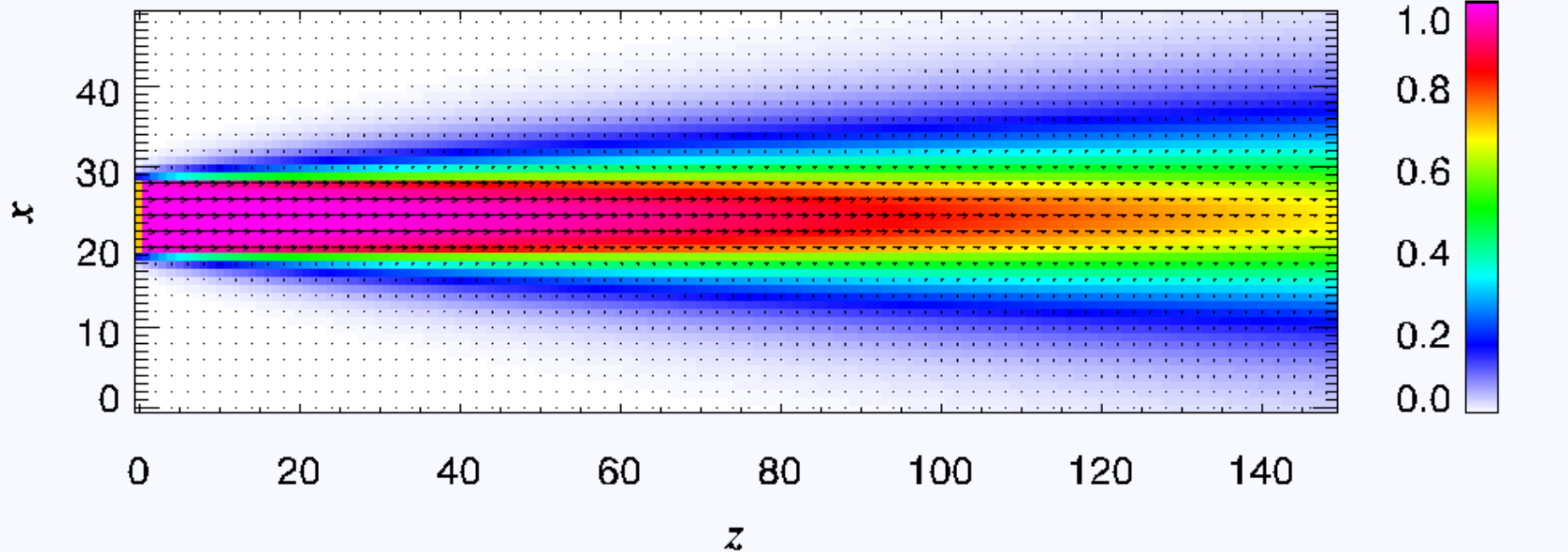
$t = 7.45000$ $z = 20, 30, 40, 60$



HLL法は変化が緩やかだが、今回の計算法では急激に変化している。 ➡ よりシャープな影ができている！！

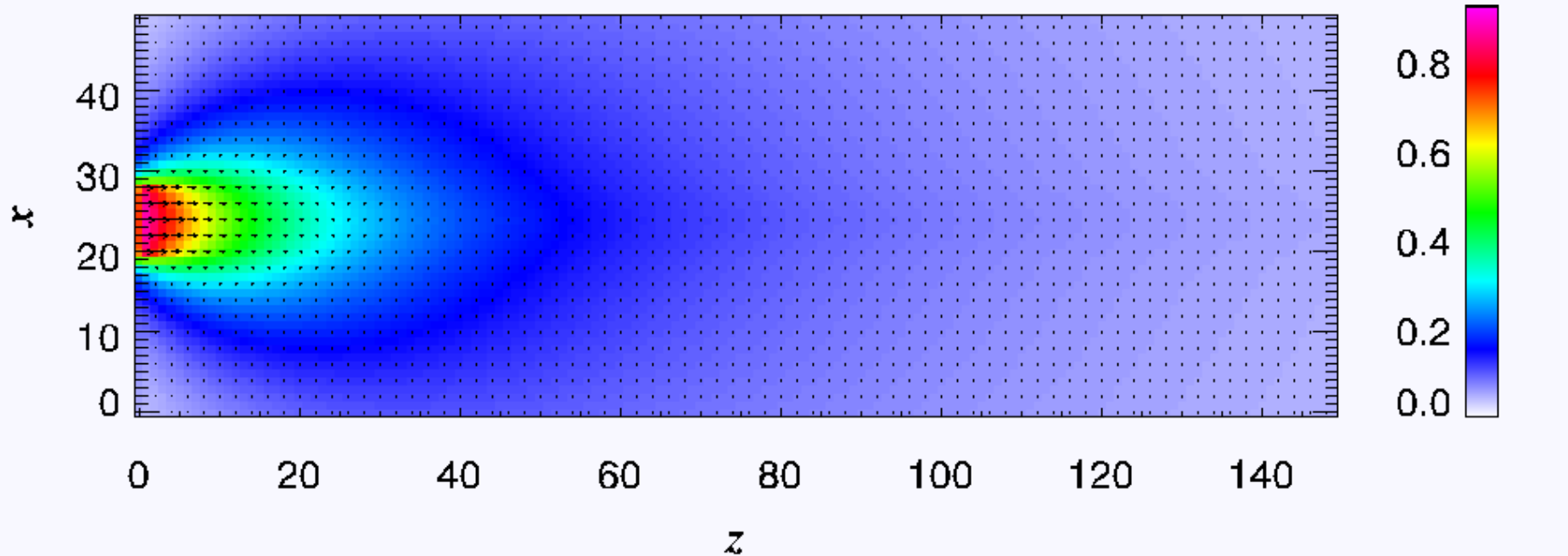
Beam Test (f=0.999)

y=25 t=99.5000



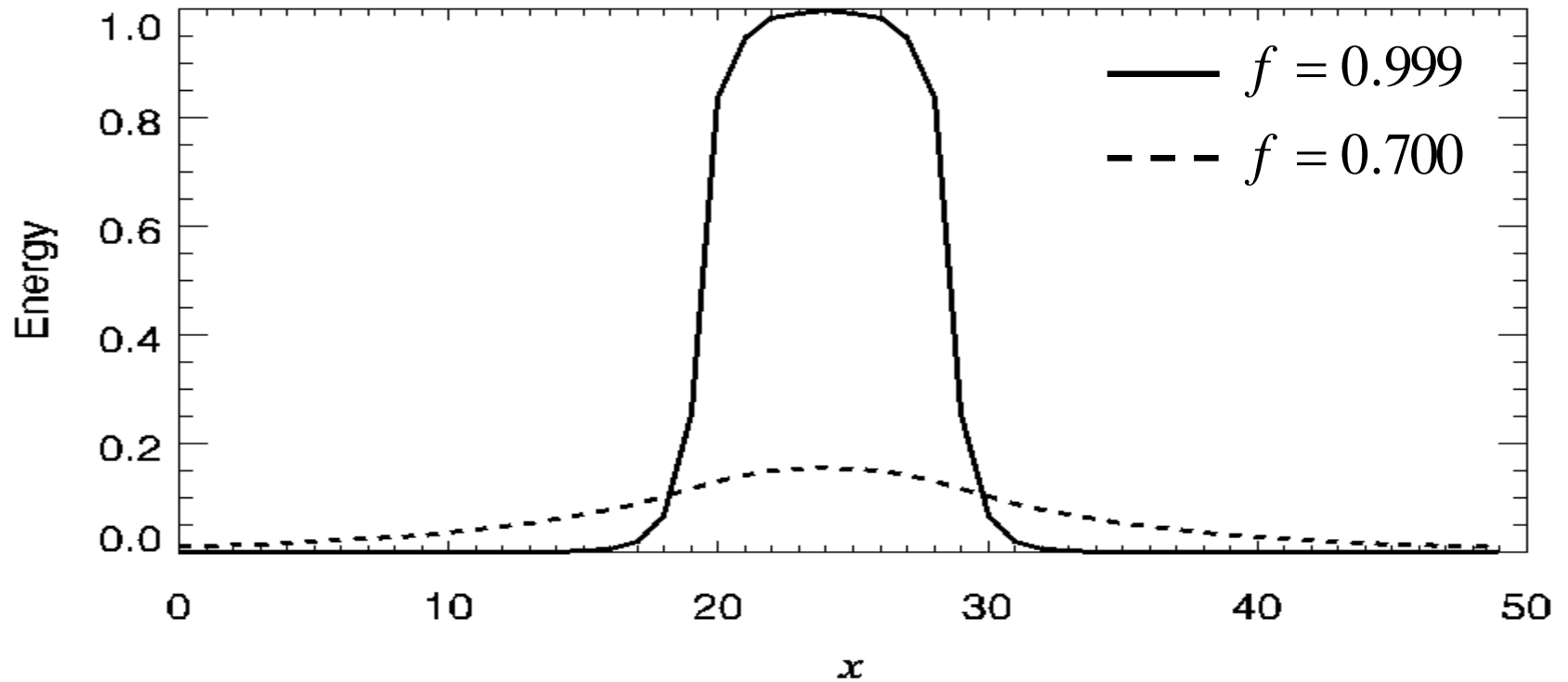
Beam Test (f=0.700)

y=25 t=99.5000



考察②

$z = 20$, $f = 0.999$, 0.700



$f (= F/E)$ に依存して光が拡散している。



エネルギー流束 F の初期値に依存する。

まとめ

- M1スキームでの数値計算でHLL法を用いてShadow Testを行った。
- 新たな計算法を提案し、Shadow Testを行いHLL法の結果と比較した。
- Beam Testを行い吸収体がない場合の光の進み方をみた。
- 今後の展望として、光学的に薄いところでは計算が容易だが、光学的に厚いところ(例えば、原始惑星円盤の内縁など)の計算は複雑である。そちらの計算に応用していく。