星間空間における乱流について
Kolmogorov の理論 (1941)

名古屋大学理学研究科　井尾勇貴

概 要

天文物理学においてその空間スケールに比べて平均自由行程が十分小さい場合が多く、流体力学における粘性項に対する慣性項の比である Reynolds 数が非常に大きくなる。そのため何らかの流れが宇宙流体中に発生すると乱流状態に移行することが期待される。実際、宇宙では乱流は至る所に存在し、分子雲中での星形成や降着円盤での角運動輸送、さらに銀河中心部の加熱など様々な現象を支配している。したがって、乱流を研究することは天文物理学を理解する上で重要である。本発表では星間ガスの観測から良い近似で成立することが知られている亜音速流体乱流の kolmogorov の理論を紹介する。

1　基礎方程式

非圧縮流体の場合、流れは非圧縮流体の Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \tag{1}$$

に従い、非圧縮条件

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{2}$$

を満たす。原理的にはこの 2 式より流れの様子を求めることができるが非線形項により数学的な解析は困難である。Navier-Stokes 方程式を以下の無次元化された変数

$$\tilde{\mathbf{x}} \equiv \frac{\mathbf{x}}{L},\ \ \tilde{t} \equiv \frac{t}{L/U}\ \ \tilde{\mathbf{u}} \equiv \frac{\mathbf{u}}{U}\ \ \tilde{p} \equiv \frac{p}{\rho U^2} \tag{3}$$

を用いてあらわすと

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}} = -\tilde{\nabla}\tilde{p} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{u}} \tag{4}$$

となる。ここで L, U, Re はそれぞれ流れの代表的な長さ、流れの代表的な速さ、Reynolds 数である。この式より流体や密度などが異なっていても Reynolds 数が等しければ流れの形態は相似であることがわかる。これを Reynolds の相似則という。また、Navier-Stokes 方程式と $\mathbf{u}$ との内積をとり全空間で積分し、式変形を行うと

$$\frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} = -\frac{\nu}{2}\int_V \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2 d\mathbf{x} \equiv \epsilon \tag{5}$$

となる。この式より粘性項がエネルギーを熱に変換し、外力がなければ十分時間がたった後、流体は静止することがわかる。

2　非線形相互作用

Fourier 空間で Navier-Stokes 方程式を見ると $\mathbf{k}+\mathbf{p}+\mathbf{q}=0$ を満たす波数間でエネルギーを交換しながら小さなスケールへエネルギーが伝達されることがわかる (図 1)。

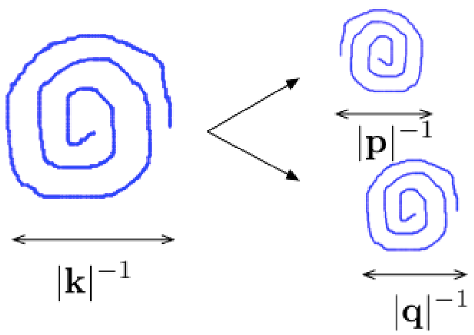

図 1: 非線形相互作用の概略図

3　Kolmogorov の理論

大きなスケールではエネルギーが注入され、その後, 非線形の効果で小さなスケールに分割されていき、最終的には粘性によってエネルギーが散逸される。この過程をエネルギーカスケードと呼ぶ (図 2)。

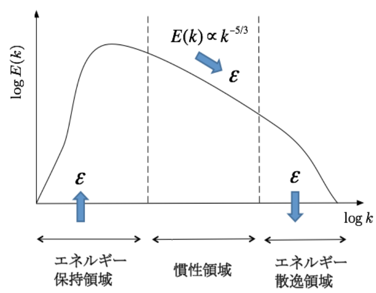

図 2: エネルギースペクトルとエネルギーの流れの概略図

いくつもの変形の過程を経ることによって流体要素は初期に持っていた位置や形といった情報を次第に失っていき、小さなスケールでは乱流は統計的に一様等方な普遍的平衡状態になると期待される。このような考えにより Kolmogorov は 2 つの仮説をたてた。

Kolmogorov の第 1 仮説　十分高い Reynolds 数において、局所的に一様等方性が成り立つような十分小さなスケールにおいては速度差 $\delta\mathbf{u}$ の n 点結合確率分布関数 P_n は $\bar{\epsilon}=\langle\epsilon\rangle$ と ν によって一意に決定される。

Kolmogorov の第 2 仮説　多点間の距離 $|\mathbf{r}_\alpha|, |\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|, \alpha \neq \beta$ が乱流における最も小さいスケールより十分大きいならば P_n は $\bar{\epsilon}$ によってのみ決まり ν にはよらない。

この 2 つの仮説を用いると慣性領域ではエネルギースペクトルは次元解析より次のような依存性

$$E(k) \propto \bar{\epsilon}^{2/3} k^{-5/3} \tag{6}$$

を持つことがわかる。

4　観測との比較

パルサーからの信号は星間プラズマ乱流によって散乱されノイズが生じる (図 3)。パルサーからの信号のノイズを解析することで乱流をよく表す指標となる星間プラズマの電子密度を求めることができる。様々な観測により星間プラズマ乱流は 10^6m〜10^{18}m にわたる非常に大きな範囲で Kolmogorov の理論に従うことが明らかになった (図 4)。

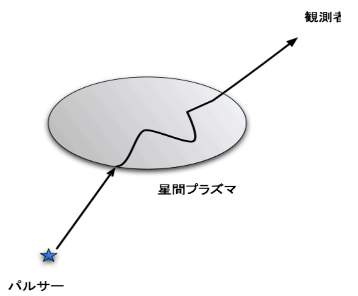

図 3: 星間プラズマによる散乱

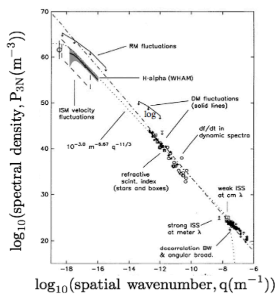

図 4: 波数と電子密度スペクトルの関係

参考文献

[1] 後藤俊幸　乱流理論の基礎

[2] A. Chepurnov and A. Lazarian“Extending the big power law in the sky with turbulence spectra from Wisconsin Hα Mapper Data”