2011 年度 第 41 回 天文天体物理若手 夏の学校

Hybrid inflation 終了時における waterfall fieldの原始曲率ゆらぎへの寄与

名古屋大学大学院理学研究科　素粒子宇宙物理学専攻
理論天体物理学研究室 (At 研)
小林 明美

2011 年 8 月 3 日　@蒲郡

概 要

近年、インフレーション理論はビッグバン理論の問題点を解決し、観測的にも支持されている理論である。インフレーション理論は、宇宙が極めて初期の段階に加速膨張をしたとするものであり、この理論に基づくと、今日の宇宙の大規模構造の源となっているゆらぎも説明することができる。このゆらぎを原始曲率ゆらぎと呼び、標準的にはインフレーションを起こすスカラー場の量子ゆらぎが加速膨張によって引き伸ばされて生成されたと考えられている。

インフレーションを起こすモデルには多くの種類があり、今回考える hybrid inflation は、インフレーションを起こす場（ ϕ ）と、インフレーションを終わらせる場（waterfall field χ ）が異なるものである。hybrid inflation では、 ϕ がある臨界値を超えると χ が不安定化し、インフレーションが終了する。一般に hybrid inflation の終了時には、 χ と ϕ の相互作用によるパラメトリック共鳴や、 χ のタキオン不安定などの非線形な現象が起こる。

本発表では、David H. Lyth（2010）の論文をレビューした。この論文では、上記の hybrid inflation の終了時に起こる非線形な現象が、インフレーションで生成された曲率ゆらぎに与える影響を検証している。その結果、この現象は曲率ゆらぎには影響しないことが分かった。

Introduction

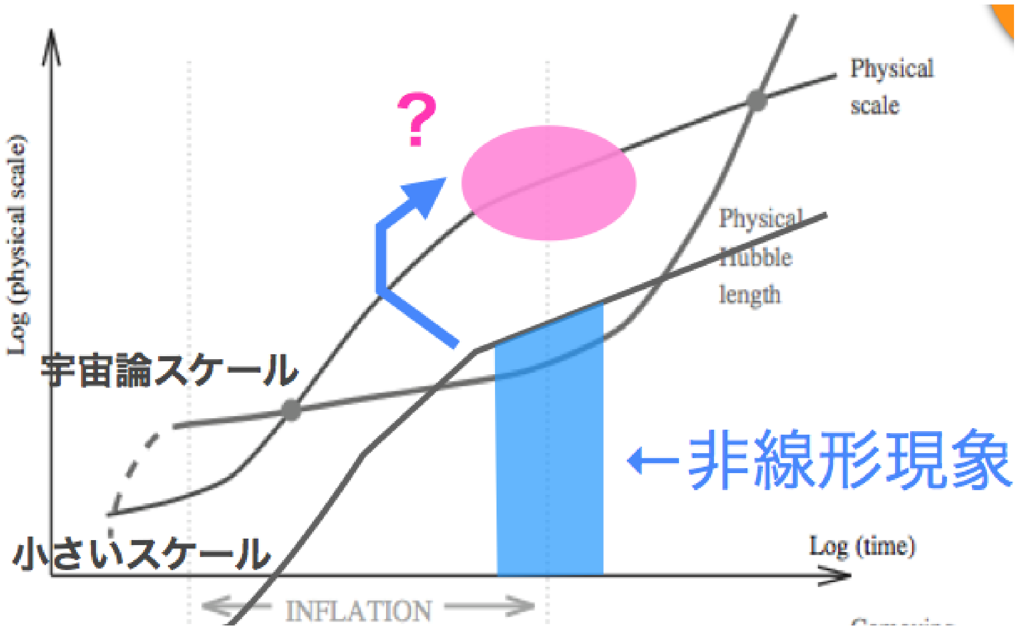
今回の発表では、hybrid inflation の waterfall の曲率ゆらぎへの寄与を考えた David H. Lyth（2010）の論文 [1] をレビューした。

インフレーションは宇宙の極めて初期に起こったと考えられる宇宙の加速膨張のことである。インフレーション理論はビッグバン宇宙論の問題点を解決し、宇宙の大規模構造の源となっているゆらぎを生成することのできる理論でもある。インフレーションによって生成されるゆらぎは原始曲率ゆらぎ ζ と呼ばれている。インフレーションは、標準的にはポテンシャル中をゆっくり転がる (slow-roll) スカラー場により引き起こされると考えられている。そのスカラー場の量子ゆらぎが、インフレーション中にハッブルスケールを超えることによって量子相関が消え、ゆらぎが凍りつくことにより古典的なゆらぎになると考えられている。後にこのゆらぎが再び horizon に入ってきて構造形成の種になるのである。

インフレーションには、色々な種類があるが、この論文では、hybrid inflation というものを考える。これは、インフレーションを起こす場 (ϕ) と、終わらせる場 (χ) が異なる slow-roll inflation モデルである。ϕ がある臨界値 ϕ_{c} より小さくなると、 χ が不安定化し、インフレーションが終了する。$\phi < \phi_{\mathrm{c}}$ となってから、インフレーションが終了するまでを waterfall と呼ぶ。一般的に hybrid inflation 終了時には χ と ϕ の相互作用によるパラメトリック共鳴や、 χ のタキオン不安定などの非線形な現象が起こる。

すると、**「このような非線形現象が宇宙論スケールに影響を及ぼすのだろうか？」**という問いが生まれる。今までに出された論文の中には、「影響がある。」とするものがいくつかあった。しかし、このような非線形な現象が起こっているスケールは、インフレーション終了時に horizon を出るようなとても小さいスケールである。したがって、宇宙論スケールとの間にかなりの隔たりが存在する。そのため、本当に影響があるのかは疑わしく、むしろ影響してこなさそうである。この論文のモチベーションは、この、「非線形現象が宇宙論スケールに影響を及ぼすか？」という問いに対して、きちんと計算をしていこうというものである。

この論文では、重い場 χ を考え、 χ のタキオン不安定という非線形な現象が、曲率ゆらぎに与える寄与 ζ_χ を求め、このパワースペクトルについて考察する。χ のタキオン不安定というのは、 χ の 2 乗質量が負になることから生じる不安定性である。この論文では、まず、最も簡単な hybrid inflation モデルを考え、インフレーションや、waterfall についていくつか仮定をする。そうすると、パラメータ空間が制限されるので、その領域での ζ_χ を求めることができる。



hybrid inflation について

hybrid inflation は、ポテンシャルの大部分が ϕ ではなく、ある waterfall field χ の真空からの変位 V_0 で生じている。
この論文で考える hybrid inflation のポテンシャルは、χ の質量を $m_\chi = m$ 、ϕ の質量を m_ϕ 、ϕ によって生じるポテンシャルを $V(\phi)$ 、$V_0 = m^4/4\lambda$ としたときに,

$$V(\phi,\chi) = V_0 + V(\phi) + \frac{1}{2}m^2(\phi)\chi^2 - \frac{1}{4}\lambda\chi^4 \quad (0.0.1)$$

のように表される。ここで、 $m^2(\phi)$ は $\phi_c \equiv m/g$ として

$$m^2(\phi) \equiv g^2\phi^2 - m^2 \equiv g^2(\phi^2 - \phi_c^2) \qquad (0.0.2)$$

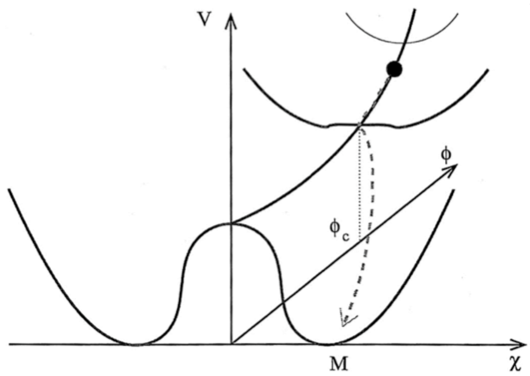


図 1: Ref[3] より。hybrid inflation のポテンシャルの例

であり、結合定数に対して $0 < \lambda \ll 1$ 、 $0 < g \ll 1$ という制限がある。ポテンシャルを図示すると、上右図のようになる。我々の宇宙を表すような場がこのポテンシャルの上からゆっくり転がってきている。(つまり ϕ は小さくなる。) ポテンシャルの式からも分かるように、 ϕ と χ の相互作用項があり、これを χ の質量項と見ると、 χ の質量が ϕ 、つまり、時刻によって変わることが分かる。そのため、 ϕ がある臨界値 ϕ_c より小さくな

ると、 χ の 2 乗質量が負になり不安定化する。そして、 ϕ と χ は急速に vev に近づき、インフレーションが終了する。$\phi < \phi_{\rm c}$ となってから、インフレーションが終了するまでを waterfall と呼ぶ。

slow-roll の条件から、 $m_\phi^2 \ll H^2$ である。また、waterfall の条件 (slow-roll inflation を起こさない) は $m_\phi^2 \gg H^2$ である。このときの H はインフレーションのときの H でほぼ一定である。

この論文では、hybrid inflation についてある仮定をしている。それは、ポテンシャル中の ϕ の高次の項を無視するため、 ϕ は小さいと仮定していることである。ここから、

$$\phi_{\rm c} \equiv \frac{m}{g} \ll M_{\rm P} \tag{0.0.3}$$

ここで、 $M_{\rm P}$ はプランク質量である。また、インフレーションに対して観測からの制限が付けられている。テンソル摂動に対する制限は、

$$\frac{H}{M_{\rm P}} \lesssim 10^{-5} \tag{0.0.4}$$

である。また、ビッグバン元素合成 (BBN) に対する制限は

$$\frac{H}{M_{\rm P}} \lesssim 10^{-5} \tag{0.0.5}$$

である。これは、MeV スケールまでインフレーションのスケールが下がらないという制限である。

ζ について

原始曲率ゆらぎ ζ は comoving な糸を持った uniform energy density のスライス上での空間のメトリックによって定義される非摂動のものである。

$$\zeta \equiv \ln\left(\frac{a(\vec{x},t)}{a(t)}\right) \equiv \delta \ln a \tag{0.0.6}$$

摂動をゲージ変換すると、一般のスライス上で

$$\zeta(\vec{x},t) = \psi + \frac{1}{3}\frac{\delta\rho}{\rho + P} \tag{0.0.7}$$

とかける。flat slicing($\psi = 0$) なら、 $\zeta = \frac{1}{3}\frac{\delta\rho}{\rho+P}$ 、uniform energy density slicing($\delta\rho = 0$) なら $\zeta = \psi$ である。$a(\vec{x},t)$ は局所的なスケールファクターであると考えられうるので、エネルギー連続の式から、 ζ の時間依存性が出てくる。これを摂動の１次まで考えると、

$$\dot{\zeta}(\vec{x},t) = -\frac{H(t)}{\rho(t) + p(t)}\delta p_{\rm nad}(\vec{x},t) \tag{0.0.8}$$

となる。ここで、 $\delta p_{\rm nad}(\vec{x},t)$ は非断熱的な圧力ゆらぎで、ゲージ不変量で表すと、

$$\delta p_{\rm nad}(\vec{x},t) = \delta p(\vec{x},t) - \frac{\dot{p}(t)}{\dot{\rho}(t)}\delta\rho(\vec{x},t) \tag{0.0.9}$$

となる。もし、１流体だけなら、圧力は断熱変化 ($\delta p_{\rm nad} = 0$) であり、 ζ は一定となる。この論文では、この $\dot{\zeta}(\vec{x},t)$ を積分して、 ζ を得ていく。

　また、原始曲率ゆらぎには原始ブラックホールから制限が付けられている。まず、初期宇宙には $\langle\zeta(\vec{x},t)\rangle \lesssim 1$ となるような super-horizon サイズの球の領域が存在していたと考えられる。これが、horizon に入ってくると、平均の密度コントラストが 1 より大きくなり、大体 horizon サイズくらいのブラックホール、原始ブラックホールになる。観測から、このようにしてできた原始ブラックホールがあまり作られすぎてはいけないことから ζ に制限がつく。ζ が Gaussian のとき、

$$\mathcal{P}_\zeta \lesssim 10^{-2} \tag{0.0.10}$$

である。

waterfall field について

　この論文の目的は、waterfall 中の ζ への寄与を求めることである。これは、 ζ の表式から分かるように、 δp_χ と $\delta\rho_\chi$ に依存している。ここで、

$$\rho_\chi = \frac{1}{2}m^2(\phi)\chi^2 + \frac{1}{2}\dot{\chi}^2 + \frac{1}{2}|\nabla\chi|^2 \tag{0.0.11}$$

$$p_\chi = -\frac{1}{2}m^2(\phi)\chi^2 + \frac{1}{2}\dot{\chi}^2 + \frac{1}{6}|\nabla\chi|^2 \tag{0.0.12}$$

である。これから、 δp_χ と $\delta\rho_\chi$ のパワースペクトルは $\langle\delta\chi^2\rangle$ 、 $\langle\delta\dot{\chi}^2\rangle$ 、 $\langle|\nabla\delta\chi|^2\rangle$ に依存していることが分かる。これらを計算していきたいので、それには χ の発展を解く必要がある。以下で χ について求めていく。

　まず、waterfall が始まるまで χ は 0 である。ここで、waterfall に対して次の３つの仮定をする。

waterfall に対する仮定

(1)back-reaction を無視する。

つまり、場の方程式が以下のように書ける。

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \nabla^2\phi = -\partial V/\partial\phi = -V'(\phi) - g^2\chi^2\phi \tag{0.0.13}$$

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} - \nabla^2\chi = -\partial V/\partial\chi = -m^2(\phi)\chi - \lambda\chi^3 \tag{0.0.14}$$

(2)waterfall は、上の式の最後の項が無視できるときに始まる。

つまり、この期間 χ の時間発展は線形的であり、この論文ではこの期間の、 χ の ζ への寄与を考えている。

(3) $\delta\phi$ を無視する

また、この論文では、簡単のため、この線形な時期 linear era について以下の４つの仮定をする。

linear era に対する仮定

(1)slow-roll inflation は linear era の終わりまで続く。

(2)linear era は Hubble time よりもずっと短い時間続く。

これは、宇宙の膨張を無視できること (H と a を無視) に対応している。これから $\dot{\phi}$ の変化も無視できる。

(3)linear era の間 ϕ の変化は無視できる。

(4)linear era が終わるまでに χ は古典的になる。

これらの仮定が成り立つようなパラメータ空間の領域内において計算を進めていく。これらの仮定は色々な制限となるが、詳しくは後に見る。

ここで、無次元の時間 τ を導入する。ϕ と $\dot{\phi}$ の変化は無視できるので、 $m^2(\phi)$ は直線的に減少する。waterfall の開始時刻を $t=0$ 、linear era の終了時刻を $t_{\rm nl}$ とし、無次元の時間 $\tau(\tau \equiv \mu t)$ を用いてかくと、

$$m^2(\phi) = -\mu^2\tau \tag{0.0.15}$$

となる。ここで、 $\mu^3 \equiv -2g^2\phi\dot{\phi} \sim -2gm\dot{\phi}$ である。

今までの仮定の下での場の方程式は、

$$\ddot{\chi}_{\vec{k}} = (-k^2 + \mu^2\tau)\chi_{\vec{k}} \tag{0.0.16}$$

となる。ここで、 $x \equiv \tau - k^2/\mu^2$ という変数変換をすると、

$$\frac{d^2\chi_{\vec{k}}(\tau)}{d\tau} = x(\tau,k)\chi_{\vec{k}}(\tau) \tag{0.0.17}$$

となる。この方程式は Airy 関数を解に持つ。Airy 関数は振動から指数関数的ふるまいへ移るような解である。ここで、場 $\chi_{\vec{k}}$ を以下の関係を満たすように量子化する。

$$\hat{\chi}_{\vec{k}}(\tau) = \chi_k(\tau)\hat{a}_k + \chi_k^*(\tau)\hat{a}_{-k} \tag{0.0.18}$$

$$[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{p}}] = (2\pi)^3\delta^3(\vec{k} - \vec{p}) \tag{0.0.19}$$

linear era について仮定した、古典的な領域が存在するためには、 $x \equiv \tau - k^2/\mu^2 \gg 1$ となるような領域が存在すれば良い。そのとき、Airy 関数の漸近形から、

$$\chi_k(\tau) \simeq (2\mu)^{-1/2} x^{-1/4} e^{\frac{2}{3}x^{3/2}} \tag{0.0.20}$$

となる。また、時間微分については、

$$\dot{\chi}_k(\tau) \simeq \mu\sqrt{x}\chi_k \tag{0.0.21}$$

となる。この領域では、 $\hat{\chi}_k(\tau) = \chi_k(\tau)(\hat{a}_{\vec{k}} + \hat{a}_{-\vec{k}})$ となる。そのため、真空の期待値からパワースペクトルが求まり、 $P_\chi(k, \tau) = \langle \hat{\chi}_{\vec{k}}\, \hat{\chi}_{\vec{p}} \rangle = \chi_k^2(\tau)$ となる。ここから、

$$\langle \chi^2(\tau) \rangle = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} P_\chi(0, \tau) \int_0^{\mathrm{inf}} dk k^2 e^{(-k^2/k_*^2(\tau))} = (2\pi)^{-3/2} P_\chi(0, \tau) k_*^3(\tau) \tag{0.0.22}$$

$$\langle \dot{\chi}^2 \rangle \simeq \mu^2 \tau \langle \chi^2 \rangle \tag{0.0.23}$$

$$\langle |\nabla\chi|^2 \rangle \sim \int d^3k k^2 |\chi_k|^2 \sim k_*^2(\tau) \langle \chi^2 \rangle \ll \langle \dot{\chi}^2 \rangle = \mu^2 \tau \langle \chi^2 \rangle \tag{0.0.24}$$

となる。最後の式は、 χ が 0 に近いところ以外では、 $\dot{\chi}$ に比べて $|\nabla\chi|$ は無視できることを示している。これから、 χ のエネルギー密度と圧力は、

$$p_\chi(\mathrm{x}, \tau) \simeq \frac{1}{2}\mu^2\tau\chi^2(\mathrm{x}, \tau) + \frac{1}{2}\dot{\chi}^2(\mathrm{x}, \tau) \simeq \dot{\chi}^2(\mathrm{x}, \tau) \simeq \mu^2\tau\chi^2 \equiv |\mathrm{m}^2(\phi)|^2\chi^2 \tag{0.0.25}$$

$$\rho_\chi(\mathrm{x}, \tau) = -\frac{3H}{2\mu\sqrt{\tau}} p_\chi(\mathrm{x}, \tau) = -\frac{3H}{2\tau^{3/2}} p_\chi(\mathrm{x}, \tau) \tag{0.0.26}$$

のようになる。ここから、圧力ゆらぎとエネルギー密度ゆらぎが求められる。

$$\delta p_\chi(\mathrm{x}, \tau) = \mu^2\tau\delta\chi^2(\mathrm{x}, \tau) = \delta\dot{\chi}^2 \tag{0.0.27}$$

$$\delta\rho_\chi(\mathrm{x}, \tau) = -\frac{3H}{2\mu\sqrt{\tau}} \delta p_\chi \tag{0.0.28}$$

パラメータ空間への制限

今までに、インフレーションに対する制限や、色々な仮定がでてきた。ここで、これらを満たすようなパラメータ空間がどのような領域であるのかを定めていく。4 つのパラメータが存在しており、無次元量を用いて

$$g \ll 1 \tag{0.0.29}$$

$$H_{\mathrm{P}} \equiv H/M_{\mathrm{P}} \ll 1 \tag{0.0.30}$$

$$H_{\mathrm{m}} \equiv H/m \ll 1 \tag{0.0.31}$$

$$f \equiv (5\times 10^{-5})^{-1} H^2/2\pi\dot{\phi} = (5\times 10^{-5})^{-1}\mathcal{P}_{\zeta_\phi}^{1/2}(k_{\mathrm{end}}) \ll 1 \tag{0.0.32}$$

のように表される。τ もこの 4 つのパラメータで書くことができる。τ とこのパラメータを用いて、今までの様々な制限は以下のパラメータに対する制限に書き換えられる。

観測からの制限

インフレーションに対する制限

$$10^{-42} < H_{\mathrm{P}} \lesssim 10^{-5} \qquad (\mathrm{BBN\ \&\ tensor})$$

仮定からの制限

$$H_{\mathrm{P}} \ll 10^{-3} f \qquad (\text{slow roll})$$

$$H_{\mathrm{P}} \ll g H_{\mathrm{m}} \qquad (\text{small } \phi)$$

$$H_{\mathrm{P}} \ll H_m^2 \qquad (\lambda \ll 1)$$

$$(\tau_{\mathrm{nl}}/10)^3 H_m f \ll g \qquad (H t_{\mathrm{nl}} \ll 1)$$

$$10^3 \tau_{\mathrm{nl}}^{3/2} g H_m^2 \ll f \qquad (\phi_{\mathrm{nl}} \simeq \phi_{\mathrm{c}})$$

$$g f^{1/5} \ll H_m \qquad (\tau_{\mathrm{nl}} \gg 1)$$

$$g^2 f \ll 10^2 H_m^2 \qquad (\delta\phi\ \text{negligible})$$

古典的な領域が存在するための条件

線形の時期に対する仮定

waterfall の ζ への寄与

以上から waterfall の間に生成される ζ への寄与を求めることができる。(0.0.8) 式を積分して求めていく。ここで、非断熱的な圧力ゆらぎ $\delta p_{\rm nad}$ は

$$\delta p_{\rm nad} = \delta p_\chi - \frac{\dot{p}(t)}{\dot{\rho}(t)}\delta\rho_\chi = \frac{\dot{\phi}^2}{\dot{\phi}^2 + \langle\dot{\chi}^2\rangle}\delta p_\chi \tag{0.0.33}$$

となる。積分すると、

$$\zeta_\chi({\rm x}, \tau_{\rm nl}) = \frac{1}{3}\frac{\delta\rho_\chi({\rm x}, \tau_{\rm nl})}{\dot{\phi}^2 + \langle\dot{\chi}^2(\tau_{\rm nl})\rangle} \tag{0.0.34}$$

の様に近似できる。最終的に、super-horizon スケール ($k \ll H$) でパワースペクトルは、

$$\mathcal{P}_{\zeta_\chi}(k) = \frac{36\times 16}{\sqrt{2\pi}}\frac{\tau^{-21/4}(Ht_{\rm nl})^7}{(1+6Ht_{\rm nl})^2}\left(\frac{k}{H}\right)^3 \tag{0.0.35}$$

のようになる。ただし、これは、 $Ht_{\rm nl} \ll 1$ 、 $\tau_{\rm nl} \gg 1$ というパラメータ空間の領域でのみ成立する式である。また、 ζ は super-horizon スケールでならされた後に定義されるので、 $k \ll H$ でのみ成立している。そういった上で考えると、このパワースペクトルは k^3 に比例しており、スケールが大きくなるにつれどんどん小さくなっていることが分かる。スケールを $k = e^{-N}H$ で表記すると、現在観測されている $\mathcal{P}_\zeta \sim 10^{-9}$ 以上になるためには、 $N < 7$ が必要だが、実際のところこれは宇宙論スケールよりずっと小さいスケールである。

まとめ

以上から、最初の**「非線形現象が宇宙論スケールに影響を及ぼすのだろうか？」**という問いに答えを出すことができる。答えは**「非線形現象は宇宙論スケールに影響を及ぼさない。」**であった。

この論文では、waterfall field χ が線形的に発展している期間に生成される ζ_χ を計算した。この ζ_χ を計算するには、非断熱的な圧力ゆらぎを計算する必要があった。そうして、この論文では以下のパラメータ空間の領域での、 ζ_χ のパワースペクトル $\mathcal{P}_{\zeta_\chi}$ を求めた。

それから得られる結果をまとめると、宇宙論スケールにおいて、 $\mathcal{P}_{\zeta_\chi}$ は無視することができることが分かった。しかし、より小さいスケールでは、パワースペクトルはかなりの量になる可能性がある。そうすると、原始ブラックホールが大量に生成されるかもしれない。

参考文献

[1] D. H. Lyth, JCAP **1107**, 035 (2011) [arXiv:1012.4617 [astro-ph.CO]].

[2] D. H. Lyth, [arXiv:1005.2461 [astro-ph.CO]].

[3] D.H.LYTH and A.R.LIDDLE 「**THE PRIMORDIAL DENSITY PERTURBATION**」(2009)