

Cosmology in Einstein-Aether Theory

岡アキラ¹

東京大学 宇宙理論研究室

概要

Einstein-Aether Theory とは、Einstein-Hilbert 作用に時間的かつノルムを固定したベクトルを 2 階微分までの項すべてを加えて、重力を修正する理論である。Einstein-Aether Theory は、一般共変性を保ちつつ Lorentz 対称性を自発的に破ることができるので、繰り込み可能な重力理論である Horava-Lifshitz Gravity と相性が良いとされており、近年、注目を集めている。しかし、その一方で、宇宙の加速膨張について説明することができないと言う問題を抱えている。本講演では、Einstein-Aether Theory を用いた宇宙論、特に、宇宙の加速膨張について議論する。

1 Introduction

1.1 宇宙の加速膨張

観測から、宇宙は過去と現在の 2 回、加速膨張していると考えられている。最も主流の考え方では、宇宙項 Λ を用いて Einstein 方程式を、

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \quad (1)$$

と変更することにより、現在の加速膨張を説明している。

しかし、場の量子論に従った計算により求められる Λ の値は、観測により得られる値と 10^{120} 以上のずれがあり、これは不自然である。また、加速膨張を説明するのに宇宙項 Λ を用いなければならないと言う理由はない。

1.2 修正重力理論

前の節で述べたように、宇宙項 Λ は、理論と観測の間に不自然なずれが生じる。この不自然さを払拭するために、宇宙項 Λ 以外に宇宙の加速膨張を説明することができる機構として、Einstein-Hilbert 作用に新たな自由度（スカラー、ベクトル、テンソル）を加えることで Einstein 方程式を修正する、修正重力理論と言う考え方が提唱された。

1.3 Einstein-Aether Theory

Einstein-Aether Theory は修正重力理論の一つである。この理論は、新たな自由度として、時間的かつノルムを固定した²ベクトルの 2 階微分までのす

¹oka@utap.phys.s.u-tokyo.ac.jp

²ノルムを固定しない場合、摂動論における伝搬に異常が生じるため、通常考えない。

すべての項を Einstein-Hilbert 作用に加え、重力を修正する。その作用は、具体的に、

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left(\frac{1}{16\pi G_*} R + \mathcal{L}_u \right) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u = & -\beta_1 \nabla^\mu u^\sigma \nabla_\mu u_\sigma - \beta_2 (\nabla_\mu u^\mu)^2 \\ & - \beta_3 \nabla^\mu u^\sigma \nabla_\sigma u_\mu + \lambda (u^\mu u_\mu + m^2) \end{aligned} \quad (3)$$

で与えられる³。ここで、新たな自由度として加えられた u^μ をエーテルと呼ぶ。 β_i はそれぞれ無次元の結合定数であり、 λ はラグランジュの未定乗数である。また、 G_* はエーテルによる修正を受けていないときの重力定数であることに留意する。

Einstein-Hilbert 作用の変更に伴って、Einstein 方程式は、

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} + 8\pi G T_{\mu\nu}^{(u)} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{(u)} = & -2 \frac{\partial \mathcal{L}_u}{\partial g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_u \\ = & 2\beta_1 (\nabla_\mu u^\rho \nabla_\nu u_\rho - \nabla^\rho u_\mu \nabla_\rho u_\nu) \\ & - 2 \left[\nabla_\rho (u_{(\mu} J^{\rho}_{\nu)}) + \nabla_\rho (u^\rho J_{(\mu\nu)}) - \nabla_\rho (u_{(\mu} J_{\nu)}{}^\rho) \right] \\ & - 2 \frac{1}{m^2} u_\sigma \nabla_\rho J^{\rho\sigma} u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_u \end{aligned} \quad (5)$$

と変更される。ここで、

$$J^\mu{}_\sigma \equiv K^{\mu\nu}{}_{\sigma\rho} \nabla_\nu u^\rho \quad (6)$$

$$K \equiv K^{\mu\nu}{}_{\sigma\rho} \nabla_\mu u^\sigma \nabla_\nu u^\rho \quad (7)$$

である。 $T_{\mu\nu}^{(u)}$ の計算の途中で、 u^μ の運動方程式を用いたことに留意する。

³Aehter の 1 階微分は物理的な自由度ではないため、適当に基準を変えて消すことができる。

2 Cosmology in Einstein-Aether Theory

2.1 Setup

計量を Robertson-Walker 計量とする。つまり、

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{1}{1-kr^2} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (8)$$

とする。このとき、空間の等方性を保つために、エーテルは、

$$u^\mu = (m, 0, 0, 0) \quad (9)$$

となる。このとき、エネルギー-運動量テンソル ((5) 式) は、対角成分しか値を持たない。得に 00 成分について計算すると、

$$T_{00}^{(u)} = -3\alpha H^2 \quad (10)$$

を得る。ここで、 $\alpha = (\beta_1 + 3\beta_2 + \beta_3)m^2$ である。摂動論において、伝搬モードのハミルトニアンが正であるべき、と言う要請から、

$$\alpha \geq 0 \quad (11)$$

となる。

2.2 エーテルを含む Friedmann 方程式

修正された Einstein 方程式の 00 成分を計算することで、エーテルを含む Friedmann 方程式が得られる。

$$H^2 = \frac{8\pi G_*}{3} (\rho - 3\alpha H^2) \quad (12)$$

この式を、

$$G_c \equiv \frac{G_*}{1 + 8\pi G_* \alpha} \quad (13)$$

を用いて変形すると、

$$H^2 = \frac{8\pi G_c}{3} \rho \quad (14)$$

と、エーテルを加えていないときの Friedmann 方程式と同じ形で記述できる。 $\alpha \geq 0$ なので、エーテルを加えることで、重力定数 G はエーテルを加えない場合に比べて小さくなることがわかる。すなわち、 H はエーテルの存在によって小さくなる。

3 Einstein-Aether Theory を研究する意義

3.1 Einstein-Aether Theory を用いた宇宙論の問題点

前の章で見た通り、エーテルを加えて重力を修正する場合、宇宙の加速膨張は説明できないことがわかった。修正重力理論の大きなモチベーションとなっている加速膨張の説明ができないとなれば、Einstein-Aether Theory はこれ以上考える価値のない理論であるかのように思われる。しかし、Einstein-Aether Theory を少し拡張することで加速膨張を説明することが可能であり、さらに、この理論には、他の修正重力理論にはない良い点がある。

3.2 Horava-Lifshiz Gravity との関係

Einstein-Aether Theory の枠組みでは、エーテルの存在により Lorentz 対称性が自発的に破られる。また、このことと関連して、Lorentz 対称性を持たない、繰り込み可能な重力理論である Horava-Lifshiz Gravity の低エネルギー極限として記述することができる。

3.3 Vector-Tensor Theory への興味

Einstein-Aether Theory はベクトルを用いた修正重力理論の最も一般的な理論である。ベクトルを用いた重力の修正が棄却されていない以上、ベクトルを用いた修正重力 (Vector-Tensor Theory) へのアカデミックな興味は尽きない。

4 Einstein-Aether Theory の拡張

4.1 拡張の方法

Einstein-Aether Theory の拡張として、たとえば、作用にさらにスカラーやテンソルの自由度を加えたり、エーテルの高階微分の項を加えたりする方法が考えられる⁴。

⁴Aether の高階微分の項を加える拡張を考える場合、運動方程式に高階微分の項が出ないようにラグランジアンを構築する必要があり、容易には得られない。運動方程式に高階微分が現れないようなラグランジアンを一つだけ見つけることに成功したが、宇宙論を考えた場合、観測事実とは合わない結果が得られた。また、この結果から、おそらく、Aether の高階微分の項を加える拡張は上手くいかないだろう、と予測した。今後、厳密な証明を得たい。

4.2 F(K) Theory

Einstein-Aether Theory の拡張として、作用が K の任意関数 $F(K)$ を用いて以下のように与えられるものを F(K)Theory と呼ぶ。

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left(\frac{1}{16\pi G_*} R + \mathcal{L}_K \right) \quad (15)$$

$$\mathcal{L}_K = F(K) + \lambda(u^\mu u_\mu + m^2) \quad (16)$$

$$K \equiv K^{\mu\nu}{}_{\sigma\rho} \nabla_\mu u^\sigma \nabla_\nu u^\rho \quad (17)$$

ここで、

$$F(K) = K \quad (18)$$

とすると、Einstein-Aether Theory は F(K)Theory に含まれていることがわかる。

4.3 F(K)Theory における加速膨張

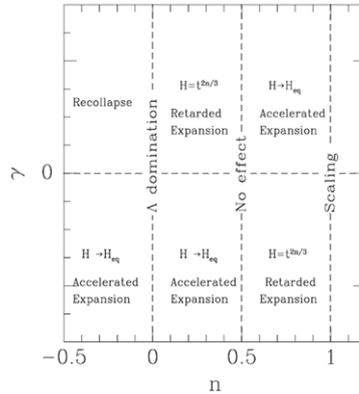
たとえば、次のような $F(K)$ を考える。

$$F(K) = \gamma K^n \quad (19)$$

ここで、 γ は定数である。Einstein-Aether Theory のときと同様にエネルギー運動量テンソルを計算し、状態方程式 $P_K = w_K \rho_K$ の係数 w_K を求めると、

$$w_K = -1 - \frac{2n}{3(2n-1)} \frac{\dot{H}}{H^2} \quad (20)$$

を得る。 $w_K < -1/3$ であれば加速膨張が実現するので、図の “accelerated expansion” の部分に入るような γ, n に対しては加速膨張を実現できる。



5 まとめ

Einstein-Aether Theory は、時間的かつノルムを固定したベクトル(エーテル)による修正重力理論である。エーテルによる重力の修正は、重力定数に影響を与えるが、Robertson-Walker 時空において加速膨張を説明することができないと言う問題を抱えている。この問題は、理論を拡張することで回避可能である。

そして、Einstein-Aether Theory は、他の修正重力理論と異なり、エーテルの存在によって一般共変性を保ちつつ Lorentz 対称性を自発的に破ることができるという利点がある。これは、Einstein-Aether Theory を拡張した理論にも言える性質である。

したがって、ベクトルを用いた修正重力理論は今後も研究する価値のある理論である。

参考文献

[1] arroll and Lim, Phys. Rev. D 70, 123525(2004)

[2] untz et al., Phys. Rev. D 81, 104015(2010)

6 おまけ

6.1 夏の学校における質疑応答

- Q. エーテルの存在によって、観測結果に非等方性が現れることは考えられますか？
A. 一様等方時空を考えている以上は現れません。しかし、計量に非等方性がある場合はありうると思います。
- Q. α が正である理由を詳しく教えてください。
A. ベクトルと計量の摂動を考えると、スカラーモード（1自由度）とベクトルモード（2自由度）、テンソルモード（2自由度）に対して、それぞれ波動方程式が得られます。その波動方程式から伝搬モードの音速の2乗を求めることができます。そして、音速の2乗が正であるべきだ、という要請を課すと、 $(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)/\beta_1 > 0$ 、 $0 \geq \beta_1 + \beta_3$ という条件を得ます。また、伝搬モードを生むラグランジアンに対してハミルトニアンを構築できますが、ハミルトニアンがそれぞれのモードに対して正であるべきだ、という要請を課すと、 $\beta_1 > 0$ という条件が得られます。この3つの条件から $\alpha > 0$ だと言うことが言えます。
- Q. ベクトルのノルムを固定するのはなぜですか？
A. ベクトルを固定することによって、摂動による伝搬モードの自由度を一つ消すことができます。すなわち、ノルムを固定しないと、以上で考えてきた自由度の他にもう一つ自由度をかんがえなくてはなりません。摂動計算を行うと、その自由度に対するラグランジアンの運動項とポテンシャル項の符号が一致してしまう、つまり、この自由度はゴーストであるということがわかります。したがって、このゴーストを出さないために、ノルムを固定します。
- Q. 観測によって他の修正重力理論と Einstein-Aether Theory を区別することは可能ですか？
A. Lorentz-violation の有無が観測できれば区別できます。Lorentz 対称性が破れていれば、Einstein-Aether Theory およびその拡張が正しいと言えます。

講演を聴きに来てくださった方々に、この場を借りて、改めて御礼申し上げます。ありがとうございました。

講演やこのまとめに関する質問あるいは間違いの指摘などはメールにて随時受け付けております。よろしく申し上げます。