

# Chameleon 機構: 高密度領域における非線形機構

広島大学 M1 照喜名歩

## 1 Introduction

観測から現在の宇宙は加速膨張しているということが強く示唆されており、その起源を探ることは宇宙論の大きな目標の一つである。この問題は、宇宙定数やダークエネルギーを導入することで解決できると考えられているが、これらの正体は未だに分かっていない。一方で、重力理論を修正することで宇宙の加速膨張を説明しようという研究が活発に進められている。これは修正重力理論と呼ばれ、宇宙論的スケールで Einstein-Hilbert 作用を修正するものである。重力理論の修正方法はこれまで多数挙げられているが、小スケールの実験では一般相対論が高精度で検証されているため、これらの修正された重力理論は小スケールで一般相対論に帰着しなければならない。一部の修正重力理論は Chameleon 機構により、小スケールで一般相対論に帰着することが知られている。ここではこの Chameleon 機構について見ていくことにする。

## 2 修正重力理論

Chameleon 機構を含む修正重力理論には  $f(R)$ -model や Coupled scalar field model などがあり、物質場のラグランジアン  $L_m$  を含めたそれぞれの作用は次のようになる。

$f(R)$ -model

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{M_{Pl}^2}{2} (R + f(R)) \right] - \int d^4x \mathcal{L}_m(\Psi_m, g_{\mu\nu}) \quad (1)$$

Coupled scalar field model

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \frac{M_{Pl}^2}{2} \tilde{R} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\partial}_\mu \phi \tilde{\partial}_\nu \phi - V(\phi) \right] - \int d^4x \mathcal{L}_m(\Psi_m, e^{\frac{2\beta\phi}{M_{Pl}}} \tilde{g}_{\mu\nu}) \quad (2)$$

ここで,  $M_{Pl} = 1/\sqrt{8\pi G}$  はプランク質量,  $R$  はスカラー曲率,  $f(R)$  はスカラー曲率の任意関数,  $\phi$  はスカラー場である。

これら 2 つのモデルには等価性がある。  $f(R)$ -model の作用 (1) は, 共形変換と呼ばれる次の計量の変換

$$g_{\mu\nu} = e^{\frac{2\beta\phi}{M_{Pl}}} \tilde{g}_{\mu\nu}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad (3)$$

を行うことで Coupled scalar field model の作用 (2) と等価であることを示せる。このときポテンシャル  $V(\phi)$  と  $f(R)$  の対応は

$$V(\phi) = \frac{M_{Pl}^2 [R(1 + f_R) - (R + f(R))]}{2(1 + f_R)^2}, \quad f_R \equiv \frac{df(R)}{dR} \quad (4)$$

となる。共形変換される前の系を Jordan frame, 変換後の系を Einstein frame と呼ぶ。

### 3 Chameleon 機構

Einstein frame での作用 (2) では, Chameleon 機によりスカラー場が隠されることが分り易く理解できるため, ここではこの作用をベースとして修正重力理論が太陽系スケールで一般相対論に帰着することを見る。

Einstein frame おける作用 (2) からスカラー場の方程式は

$$\tilde{\square}\phi = V_{,\phi} - \frac{\beta}{M_{Pl}} e^{\frac{4\beta\phi}{M_{Pl}}} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \quad (5)$$

となる。ここで

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (6)$$

は, Jordan frame におけるエネルギー・運動量テンソルである。非相対論的物質に対しては物質のエネルギー密度  $\rho$  を用いて

$$g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = -\rho$$

と表される。このエネルギー密度の代わりに, Einstein frame において保存するエネルギー密度

$$\tilde{\rho} \equiv \rho e^{\frac{3\beta\phi}{M_{Pl}}}$$

を用いると, スカラー場の方程式は

$$\tilde{\square}\phi = V_{,\phi} + \frac{\beta}{M_{Pl}} \tilde{\rho} e^{\frac{\beta\phi}{M_{Pl}}} \quad (7)$$

となる。

ここで有効ポテンシャル

$$V_{eff}(\phi) \equiv V(\phi) + \tilde{\rho} e^{\frac{\beta\phi}{M_{Pl}}} \quad (8)$$

を導入する。ポテンシャル  $V(\phi)$  を単調減少関数とすると、有効ポテンシャルの形は図1、2のようになる。

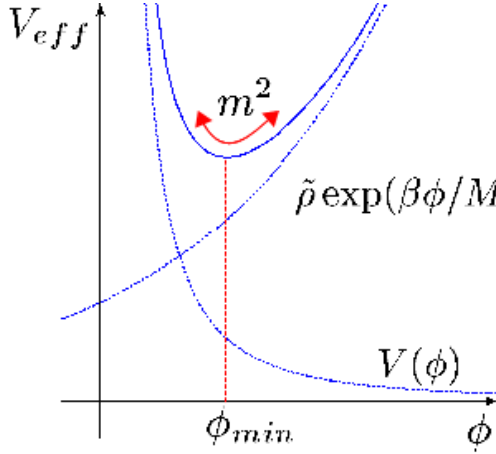


図 1: 高密度領域

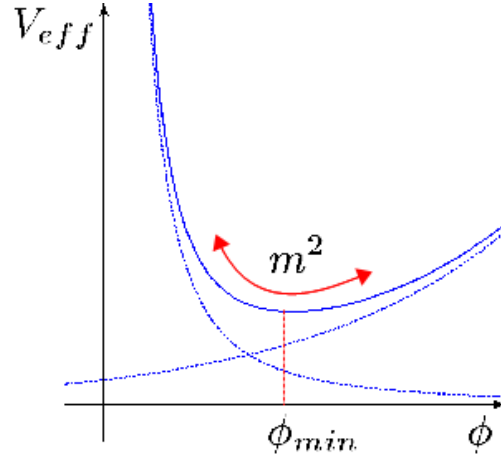


図 2: 低密度領域

物質場とスカラー場がカップリングするため、物質密度によって有効ポテンシャルの関数形が異なる。有効ポテンシャルを最小にするスカラー場  $\phi_{min}$  は

$$V_{,\phi}(\phi_{min}) + \frac{\beta}{M_{Pl}} \tilde{\rho} e^{\frac{\beta\phi_{min}}{M_{Pl}}} = 0 \quad (9)$$

を満たし、 $V_{eff}(\phi_{min})$  の曲率がスカラー場の質量  $m_{min}$  を決め

$$m_{min}^2 = V_{,\phi\phi}(\phi_{min}) + \frac{\beta^2}{M_{Pl}^2} \tilde{\rho} e^{\frac{\beta\phi_{min}}{M_{Pl}}} \quad (10)$$

と定義できる。ここで、 $V_{,\phi} \equiv dV/d\phi$ 、 $V_{,\phi\phi} \equiv d^2V/d\phi^2$  である。

したがって、高密度領域ではスカラー場の質量が大きくなるため、対応するコンプトン波長が短くなり、スカラー場の寄与が見られなくなる。これが Chameleon 機構である。次で具体的にこれを見ることにする。

### 3.1 Solution for a compact object

地球や太陽などの compact object でスカラー場  $\phi$  がどのような解を持つかを見る。そのために、compact object が静的球対称で、半径  $R$ 、一様密度  $\rho_c$ 、全質量  $M_c = 4\pi R^3 \rho_c / 3$  であると考え。また、compact object は孤立しており、周りの

物体の影響は無視し，一様な背景密度  $\rho_\infty$  の中にあるとする。背景密度は compact object の密度より十分小さい ( $\rho_\infty \ll \rho_c$ ) とする。

このとき，スカラー場の方程式 (7) を球座標系で表すと

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} = V_{,\phi} + \frac{\beta}{M_{Pl}} \rho(r) e^{\frac{\beta\phi}{M_{Pl}}} \quad (11)$$

となる。ここで

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_c & (r < R) \\ \rho_\infty & (R < r) \end{cases}$$

である。それぞれの密度で有効ポテンシャルを最小にするスカラー場を  $\phi_c, \phi_\infty$  とする。すなわち，(9) 式より

$$\phi_c \equiv \phi_{min}|_{\rho=\rho_c}, \quad \phi_\infty \equiv \phi_{min}|_{\rho=\rho_\infty} \quad (12)$$

$m_{min}$  も (10) 式より

$$m_c \equiv m_{min}(\phi_c), \quad m_\infty \equiv m_{min}(\phi_\infty) \quad (13)$$

と定義する。このとき  $m_c \gg m_\infty$  であり，またここでは  $m_\infty R \ll 1$  を仮定する。

上述の仮定の下，スカラー場の解を求める。物体の十分内部では，スカラー場は物体の有効ポテンシャルを最小にするスカラー場で近似でき，解は

$$\phi \approx \phi_c \quad (r < R) \quad (14)$$

となる。

物体の外部では，内部の体積要素  $dV$  が外部へ及ぼすスカラー場の寄与が加わる。これは  $\exp(-m_c \tilde{r})$  に比例するが，物体内部のスカラー場の質量は大きいいため，指数関数的に抑えられることになる。これは物体内部のほとんどの体積要素に当てはまり，物体の shell の部分  $\Delta R$  (図3の斜線部) の寄与だけが残ることになる。したがってこの要素の足し合わせだけを考えると，物体外部の解は

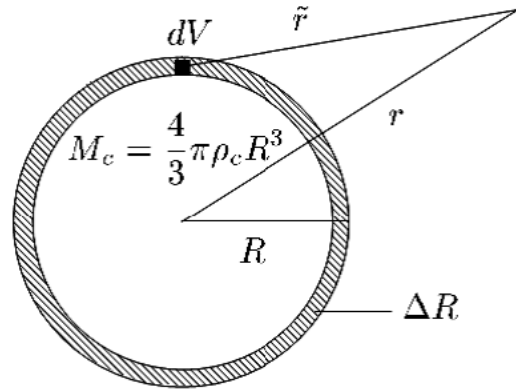


図3: 体積要素  $dV$  が  $\tilde{r}$  離れた点に及ぼすスカラー場の寄与

$$\phi(r) \approx - \left( \frac{\beta}{4\pi M_{Pl}} \right) \left( \frac{3\Delta R}{R} \right) \frac{M_c e^{-m_\infty r}}{r} + \phi_\infty \quad (r > R) \quad (15)$$

となる。 $\Delta R/R$  は shell の薄さを表す因子で (ここでは thin-shell factor と呼ぶことにする), ニュートンポテンシャル  $\Phi_c = M_c/8\pi M_{Pl}^2 R$  を用いて

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\phi_\infty - \phi_c}{6\beta M_{Pl}\Phi_c} \quad (16)$$

と表すことができる。(15) は shell が薄い, すなわち

$$\frac{\Delta R}{R} \ll 1 \quad (17)$$

としたとき導かれる解で, この条件 (17) を thin-shell condition と呼ぶ。スカラー場による力 (fifth force) はスカラー場の勾配に比例するため, thin-shell condition が成り立っている場合 (15) の解から, この力は十分小さくなる。つまり, スカラー場が隠されることになるのである。逆に, スカラー場が隠されている場合はこの thin-shell condition を満たすと考えられる。例えば, 太陽系スケールで fifth force が見られない場合, 地球などの物体は thin-shell condition を満たす物体であると考えらる。

### 3.2 Profile for the Earth

では具体的に地球の場合, スカラー場はどのような解を持つだろうか。

地球の場合, 地球内部, 大気, 地球の外でそれぞれ密度が違う。地球の外は真空ではなく銀河の平均密度で考えるとそれぞれの領域で密度は次のようになる。

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_\oplus \sim 10 \text{ [g/cm}^3] & (0 < r < R_\oplus) \\ \rho_{atm} \sim 10^{-3} \text{ [g/cm}^3] & (R_\oplus < r < R_{atm}) \\ \rho_G \sim 10^{-24} \text{ [g/cm}^3] & (R_{atm} < r) \end{cases}$$

$R_\oplus = 6 \times 10^8 \text{ [cm]}$  は地球半径,  $R_{atm} = R_\oplus + 10 \text{ [km]}$  は地球中心から大気までの距離である。

大気では等価原理が成り立っているため,  $\phi \approx \phi_{atm}$  と近似でき, 地球内部は大気より密度が高いため  $\phi \approx \phi_\oplus$  と近似できると考えられる。地球外部ではスカラー場による寄与は見られないため, スカラー場の解は前節で求めた解と同じ形になる。

$$\phi(r) \approx - \left( \frac{\beta}{4\pi M_{Pl}} \right) \left( \frac{3\Delta R_\oplus}{R_\oplus} \right) \frac{M_\oplus e^{-m_G(r-R_{atm})}}{r} + \phi_G \quad (18)$$

まとめると, 地球近傍のスカラー場の解は

$$\rho(r) = \begin{cases} \phi_\oplus & (0 < r < R_\oplus) \\ \phi_{atm} & (R_\oplus < r < R_{atm}) \\ - \left( \frac{\beta}{4\pi M_{Pl}} \right) \left( \frac{3\Delta R_\oplus}{R_\oplus} \right) \frac{M_\oplus e^{-m_G(r-R_{atm})}}{r} + \phi_G & (R_{atm} < r) \end{cases}$$

となる。

ここで thin-shell factor は地球のニュートンポテンシャル  $\Phi_{\oplus}$  を用いると

$$\frac{\Delta R_{\oplus}}{R_{\oplus}} \equiv \frac{\phi_G - \phi_{atm}}{6\beta M_{Pl} \Phi_{\oplus}} \quad (19)$$

と定義できる。これは実験により制限されることになる。

## 4 パラメータの制限

地球の thin-shell factor (19) を制限するために、ここでは fifth force を用いた実験を利用する。この制限は、修正重力理論のモデルパラメータを制限することになる。

Fifth force

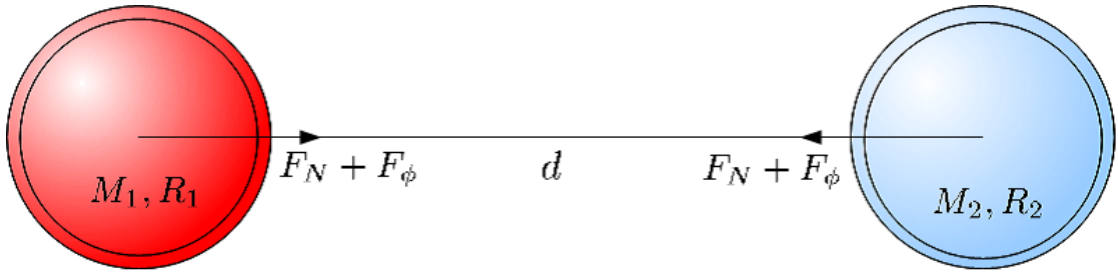


図 4: fifth force

質量がそれぞれ  $M_1, M_2$ , 半径がそれぞれ  $R_1, R_2$  の thin-shell を持つ 2 つの物体 1, 2 を考える。スカラー場を考えると、この 2 つの物体の間には万有引力の他にスカラー場による力、fifth force  $F_{\phi}$  が働く。この力が観測されると等価原理が破れていることになる。2 物体間の距離を  $d$  とすると、物体 2 に対する物体 1 の fifth force による加速度  $a_{\phi}$  は次のように表すことができる。

$$\frac{F_{\phi}}{M_1} = a_{\phi} \approx 18\beta^2 \left( \frac{\Delta R_1}{R_1} \right) \left( \frac{\Delta R_2}{R_2} \right) \frac{M_2}{8\pi M_{Pl}^2 d^2} \quad (20)$$

太陽や月は地球と同じような密度を持っているため、それぞれも thin-shell を持つ物体であると考えられる。したがって、(20) を用いると、太陽に対する月、地球の加速度はそれぞれ次のようになる。

$$a_{\oplus} = a_N + a_{\phi}^{\oplus} \approx a_N + 18\beta^2 \left( \frac{\Delta R_{\oplus}}{R_{\oplus}} \right) \left( \frac{\Delta R_{\odot}}{R_{\odot}} \right) a_N \quad (21)$$

$$a_{Moon} = a_N + a_{\phi}^{Moon} \approx a_N + 18\beta^2 \left( \frac{\Delta R_{Moon}}{R_{Moon}} \right) \left( \frac{\Delta R_{\odot}}{R_{\odot}} \right) a_N \quad (22)$$

$a_N = M_\odot / 8\pi M_{Pl}^2 d^2$  は太陽に対するニュートン加速度である。ただし、太陽-地球、太陽-月の距離は同じ  $d$  で近似した。ここで、 $\phi_G \gg \phi_\odot, \phi_{atm}, \phi_{Moon}$  とすると、太陽と月の thin-shell factor は地球の thin-shell factor とそれぞれのニュートンポテンシャルで近似することができる。

$$\frac{\Delta R_\odot}{R_\odot} \approx \frac{\Delta R_\oplus}{R_\oplus} \frac{\Phi_\oplus}{\Phi_\odot}, \quad \frac{\Delta R_{Moon}}{R_{Moon}} \approx \frac{\Delta R_\oplus}{R_\oplus} \frac{\Phi_\oplus}{\Phi_{Moon}} \quad (23)$$

この近似を用いると (21), (22) 式は

$$a_\oplus \approx a_N \left[ 1 + 18\beta^2 \left( \frac{\Delta R_\oplus}{R_\oplus} \right)^2 \frac{\Phi_\oplus}{\Phi_\odot} \right] \quad (24)$$

$$a_{Moon} \approx a_N \left[ 1 + 18\beta^2 \left( \frac{\Delta R_\oplus}{R_\oplus} \right)^2 \frac{\Phi_\oplus^2}{\Phi_\odot \Phi_{Moon}} \right] \quad (25)$$

となる。

#### Eötvös パラメータによる制限

等価原理からのずれを表す Eötvös パラメータ  $\eta$  は実験から次のような制限を受けている。

$$\eta \equiv \frac{2|a_{Moon} - a_\oplus|}{|a_{Moon} + a_\oplus|} < 10^{-13} \quad (26)$$

(24), (25) 式から、Eötvös パラメータは

$$\eta \approx \beta^2 \left( \frac{\Delta R_\oplus}{R_\oplus} \right)^2 \quad (27)$$

となる。ここで、 $\Phi_\odot = 10^{-6}$ ,  $\Phi_\oplus = 10^{-9}$ ,  $\Phi_{Moon} = 10^{-11}$  を用いた。したがって、 $\beta \sim O(1)$  とすると、thin-shell factor は次を満たす必要がある。

$$\frac{\Delta R_\oplus}{R_\oplus} < 10^{-7.5} \quad (28)$$

また、(19) 式から  $\phi_G \gg \phi_{atm}$  を用いると  $\phi_G$  に対して

$$\phi_G < 10^{-21} M_{Pl} \quad (29)$$

という制限が与えられる。このことは、 $V_{eff,\phi}(\phi_G) = 0$  の関係からポテンシャル  $V(\phi)$  のモデルパラメータに対して制限を付けることになる。 $f(R)$ -model に対しては (4) 式から、任意関数  $f(R)$  のパラメータに対して制限が付けられる [4]。

## 5 Summary

ここでは Coupled scalar field model や  $f(R)$ -model などの修正重力理論が太陽系スケールでは一般相対論に帰着することを見てきた。これは Chameleon 機構により、高密度領域でスカラー場が隠されることで理解される。太陽系スケールでスカラー場が隠されるためには、地球や太陽は thin-shell condition を満たす物体でなければならない。また、地球の thin-shell factor は実験による Eötvös パラメータの制限などから制限される。このことから修正重力理論のモデルパラメータに対して制限が付けられる。

## Referenes

- [1] J. Khoury and A. Weltman, Phys. Rev. D 69, 044026 (2004).
- [2] T. P. Waterhouse, arXiv:astro-ph/0611816.
- [3] D. F. Mota and D. J. Shaw, Phys. Rev. D 75, 063501 (2007).
- [4] S. Capozziello and S. Tujikawa, Phys. Rev. D 77, 107501 (2008).