

Observational constraints on assisted k-inflation

東京理科大学 辻川研究室 : D1 大橋 純子

1 研究背景

ビッグバン宇宙論における地平線問題や平坦性問題を解決するために、宇宙初期に急激な加速膨張期があったというインフレーション理論が提唱されている。インフレーション理論では、宇宙初期に存在した量子ゆらぎが急激な加速膨張で引き延ばされて古典的なゆらぎになったと考えられ、このように理論的に予言されるスカラーゆらぎが、WMAPなどの観測から得られる宇宙背景放射の温度ゆらぎとよく一致したことから、インフレーション理論は初期宇宙を記述する現実的な理論として強く信じられるようになり、現在まで様々なインフレーション模型が提唱されている。

このゆらぎは理論的には、インフレーションを引き起こすインフラトンのゆらぎと計量のゆらぎを考慮することで得られる摂動アインシュタイン方程式を解くことで記述でき、スカラー型、ベクトル型、テンソル型のゆらぎがそれぞれ存在する。重要なのはスカラー型とテンソル型のゆらぎで、スカラーモードの曲率ゆらぎは宇宙背景放射の温度ゆらぎや大規模構造の密度ゆらぎに対応しており、テンソルモードのゆらぎは原始背景重力波に対応する。重力波は透過性が強いので、初期宇宙を探る道具として注目されているが、未だ直接的には観測されていない。

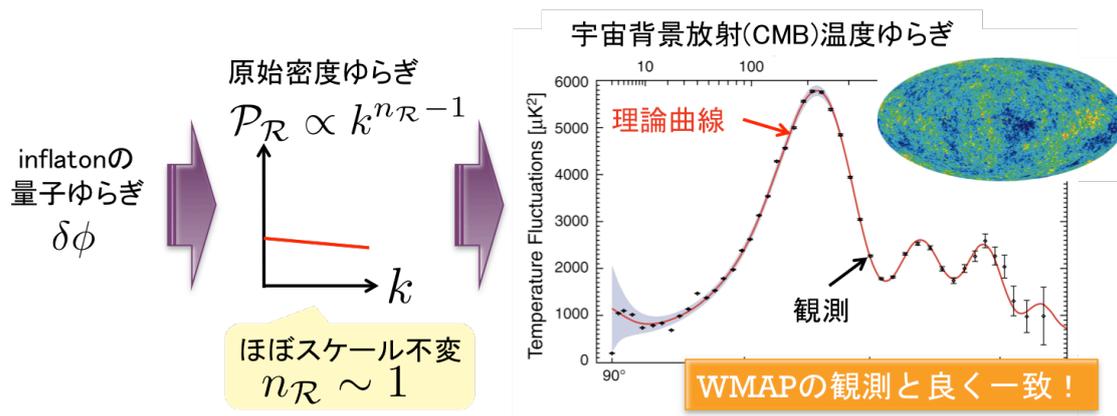


図 1: 密度ゆらぎ

ゆらぎの理論予測と観測がどのように一致するかを示すいくつかのパラメータがある。一つ目は、スペクトル指数と呼ばれるパラメータ n_R で、原始密度ゆらぎのパワースペクトル P_R が波数 k にどの程度依存しているか表す。二つ目は、スカラーゆらぎとテンソルゆらぎの比をとったパラメータ r で、三つ目は最近注目されている Non-Gaussianity パラメータ f_{nl} である。これは、ゆらぎの三点相関から得られる非線形性を示すパラメータであり、場のポ

テンソル項でインフレーションが起こるタイプのモデルでは $f_{nl} \ll 1$ となるのに対し，場の運動エネルギー項でインフレーションが起こる，k-inflation[1] と呼ばれるタイプのモデルでは $f_{nl} \gg 1$ となる可能性を持ち， $n_{\mathcal{R}}$ や r よりもモデルに対する依存性がある．また今後の観測精度の向上から，現在よりも一桁以上の精度で制限がつくと期待されるため，様々な理論モデルを区別するのに有用であると考えられる．これらのゆらぎの現在の観測の制限は以下のように得られている [2].

$$\begin{cases} n_{\mathcal{R}} = 0.963 \pm 0.012 \text{ (68\%CL)} & : \text{ Spectral Index} \\ r < 0.20 \text{ (95\%CL)} & : \text{ Scalar-Tensor Ratio} \\ -214 < f_{nl}^{\text{equil}} < 266 \text{ (95\%CL)} & : \text{ Non-Gaussianity} \end{cases} \quad (1)$$

2 Assisted inflation model

まず，ラグランジアン

$$P(X, \phi) = X - V_0 e^{-\lambda\phi}, \quad X = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \quad (2)$$

で記述される指数関数ポテンシャルを持つ標準的な正準スカラー場モデルを考えた時，single field においてはインフレーションの条件が，

$$\lambda \ll 1 \quad (3)$$

と得られる．しかし，一般的に素粒子物理などから現れるポテンシャルの勾配 λ はオーダー 1 からそれ以上なので single field でこの条件を満たすのは難しい．そこで，multi-field

$$P = \sum_{i=1}^n (X_i - V_0 e^{-\lambda_i \phi_i}), \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

に拡張して考える．この時，実効的な λ を

$$\frac{1}{\lambda^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i^2} \quad (5)$$

のように導入することで実効的な single field の系 $P(X, \phi) = X - V_0 e^{-\lambda\phi}$ に集約して考えることができ，またこの式の形から分かるように，実効勾配 λ は個々の場が持つ勾配 λ_i より小さいので，個々の場ではインフレーションを起こせなくても，インフレーションの条件 $\lambda \ll 1$ を満たすことが可能である．このように複数場の効果でインフレーションを起こすことができるメカニズムを Assisted inflation 機構という [3].

この Assisted inflation 機構は，k-inflation 模型を含む一般的な形に拡張することができ，一般に， n 個のスカラー場がある時，任意関数 g を用いて

$$P = \sum_{i=1}^n X_i g(Y_i), \quad Y_i \equiv X_i e^{\lambda_i \phi_i} \quad (\lambda_i = \text{const.}) \quad (6)$$

のような形で表されるラグランジアンが Assisted inflation を起こすことが示されている [4]. この一般的なラグランジアンの場合も先ほどの正準スカラー場モデルのときと同じように，

Assisted inflation するアトラクターにおいて実効勾配 λ を導入することにより，実効的な single field の系 $P = X g(Y)$ に集約して考えることができる．また，加速膨張を起こす条件は

$$\lambda^2 < 2(g + Yg'), \quad g' = \frac{\partial g}{\partial Y} \quad (7)$$

となる．このラグランジアンは，任意関数 g の取り方により，様々なモデル (正準スカラー場, dilatonic ghost condensate, DBI など) に対応する一般的な形になっており，運動エネルギーの非線形項を持つ k-inflation モデルも含まれる．

以上をふまえて，今回はこの Assisted k-inflation モデルについてインフレーション中に生成される密度ゆらぎを考え，likelihood 解析を用いて観測と比較し，モデルに対する観測的な制限を議論する．

3 ゆらぎの理論予測

インフレーションを起こす有力な起源として，素粒子物理に動機づけられたスカラー場 ϕ が考えられるので，スカラー場 ϕ とその運動項 X の一般的な形で表されるラグランジアンを用いた次ような Action から出発する．

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_{\text{pl}}^2}{2} R + P(\phi, X) \right], \quad (M_{\text{pl}} = \frac{1}{\sqrt{8\pi G}}) \quad (8)$$

ここから導かれる摂動アインシュタイン方程式には，スカラー，ベクトル，テンソルのゆらぎが含まれるが，スカラー原始密度ゆらぎについて，パワースペクトルが

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \frac{1}{8\pi^2 M_{\text{pl}}^2 c_s \epsilon} H^2 \quad (9)$$

と得られるので，これよりスカラースペクトル指数 $n_{\mathcal{R}}$ は

$$n_{\mathcal{R}} - 1 \equiv \left. \frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \ln k} \right|_{c_s k = aH} = -2\epsilon - \eta - s \quad (10)$$

となる．ただし，

$$c_s^2 \equiv \frac{P_{,X}}{\rho_{,X}} = \frac{P_{,X}}{P_{,X} + 2XP_{,XX}} \quad (11)$$

は場の伝播速度であり (ただし $p_{,X} = \partial p / \partial X$)，また

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad \eta \equiv \frac{\dot{\epsilon}}{H\epsilon}, \quad s \equiv \frac{\dot{c}_s}{Hc_s} \quad (12)$$

はスローロールパラメータで，インフレーション中は十分小さい値をとる．

また，テンソルゆらぎについてはパワースペクトルが

$$\mathcal{P}_t = \frac{2H^2}{\pi^2 M_{\text{pl}}^2} \quad (13)$$

と計算でき，スカラーゆらぎとテンソルゆらぎの比は

$$r \equiv \frac{\mathcal{P}_t}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}} = 16c_s \epsilon \quad (14)$$

となる。

原始密度ゆらぎの非ガウス性パラメータ f_{nl} は、ゆらぎの三点相関関数のフーリエ変換から

$$\langle \mathcal{R}(\mathbf{k}_1)\mathcal{R}(\mathbf{k}_2)\mathcal{R}(\mathbf{k}_3) \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) (\mathcal{P}_{\mathcal{R}})^2 B_{\mathcal{R}}(k_1, k_2, k_3) \quad (15)$$

のように定義されるバイスペクトル $B_{\mathcal{R}}$ に含まれている ($B_{\mathcal{R}} \propto f_{nl}$)。非ガウス性パラメータは、三点相関を正三角形 (equilateral) でとると、波数依存性がなくなりスローロールパラメータと伝播速度で以下のように表わせる [5]。

$$f_{nl}^{\text{equil}} = \frac{275}{972} \left(1 - \frac{1}{c_s^2}\right) - \frac{10}{729} \frac{\epsilon}{\epsilon_X} \frac{s}{c_s^2} + \frac{55}{36} \frac{\epsilon}{c_s^2} + \frac{5}{12} \frac{\eta}{c_s^2} - \frac{85}{54} \frac{s}{c_s^2} \quad (16)$$

ただし、 $\epsilon_X \equiv -(\dot{X}/H^2)(\partial H/\partial X)$ である。これはゆらぎのガウス分布からのズレを表し、伝播速度 c_s に依存する。

具体的には、まず正準スカラー場のラグランジアン $P = X - V(\phi)$ で記述され、ポテンシャル項でインフレーションが起こるタイプの標準インフレーションモデルは、 $P_{,X} = 1$ であるため $c_s = 1$ で、 f_{nl} の第一項目がゼロとなり残りの項はスローロールパラメータから十分小さい値となるので、 $f_{nl} \ll 1$ となる。しかし、ラグランジアンが運動エネルギー X の非線形項を含み、運動エネルギーでインフレーションが起こるタイプの k-inflation モデルでは、一般に $P_{,X} \neq 1$ なので $c_s \neq 1$ であり、特に $c_s \simeq 0$ のようなときは、このパラメータの第一項目が十分大きくなるため、 $f_{nl} \gg 1$ となる可能性がある。非ガウス性パラメータは、このようにモデルによる違いがあり、様々なモデルを区別する指標となり得る。

4 Assisted k-inflation のゆらぎ

次に、Assisted inflation モデルのゆらぎについて考える。実効的な1つの場 $P = Xg(Y)$ として考えた時、Assisted inflation する固定点において、実効勾配 λ と、スローロールパラメータ ϵ 、場の伝播速度 c_s はそれぞれ任意関数 g と変数 Y を用いて以下のように表すことができる。

$$\lambda^2 = \frac{6[g(Y) + Yg'(Y)]^2}{g(Y) + 2Yg'(Y)} \quad (17)$$

$$\epsilon = \frac{3[g(Y) + Yg'(Y)]}{g(Y) + 2Yg'(Y)} \quad (18)$$

$$c_s^2 = \frac{g(Y) + Yg'(Y)}{g(Y) + 5Yg'(Y) + 2Y^2g''(Y)} \quad (19)$$

いま λ は定数で考えているので、任意関数 g を具体的に決めれば、 Y が定数で求まることが分かる。すると、 ϵ と c_s も Y のみの関数なので、それぞれが定数となる。したがって、残りのスローロールパラメータがゼロ

$$\eta \equiv \frac{\dot{\epsilon}}{H\epsilon} = 0, \quad s \equiv \frac{\dot{c}_s}{Hc_s} = 0 \quad (20)$$

という結果が得られるので、これを先ほど求めた3つの観測パラメータにあてはめると、

$$n_{\mathcal{R}} - 1 = -2\epsilon \quad (21)$$

$$r = 16c_s\epsilon \quad (22)$$

$$f_{nl}^{\text{equil}} = \frac{275}{972} \left(1 - \frac{1}{c_s^2}\right) + \frac{55}{36} \frac{\epsilon}{c_s^2} \quad (23)$$

となる。ここに含まれる ϵ , c_s はすべて Y または λ の関数であるため、すべてのパラメータが一つの変数で表わせることが分かる。観測によりこのパラメータに制限をつけることができ、モデルに対する観測的な評価ができる。

5 具体的なモデルと観測の制限

今までの一般的な議論を、今度は具体的なモデルにあてはめて見ていく。

5.1 Canonical field with an exponential potential

指数関数ポテンシャルを持った正準スカラー場モデルは、ラグランジアン $P = X - ce^{-\lambda\phi}$ ($c = \text{const.}$) で表され、これは Assisted ラグランジアン $P = Xg(Y)$ において、任意関数を

$$g(Y) = 1 - \frac{c}{Y} \quad (24)$$

のように選ぶことで得られる。三つの観測パラメータは実効勾配 λ のみで書け、以下のように得られる。

$$n_{\mathcal{R}} = 1 - \lambda^2 \quad (25)$$

$$r = 8\lambda^2 \quad (26)$$

$$f_{nl}^{\text{equil}} = 55\lambda^2/72 \quad (27)$$

このうちスペクトル指数とスカラーテンソル比の観測データをもとに、cosmological モンテカルロのコードを用いて likelihood 解析を行った。このとき使った観測データは、CMB(WMAPによる宇宙背景放射温度ゆらぎ)、BAO(バリオン振動)、HST(ハッブル定数)の測定である。結果は図2のようになり、観測的な λ の制限が

$$0.086 < \lambda < 0.228 \quad (95\% \text{ CL}) \quad (28)$$

と得られた。この λ の上限において $f_{nl} \simeq 0.04$ 程度であり、 $f_{nl} \ll 1$ であることが分かる。これは観測を満たしている。

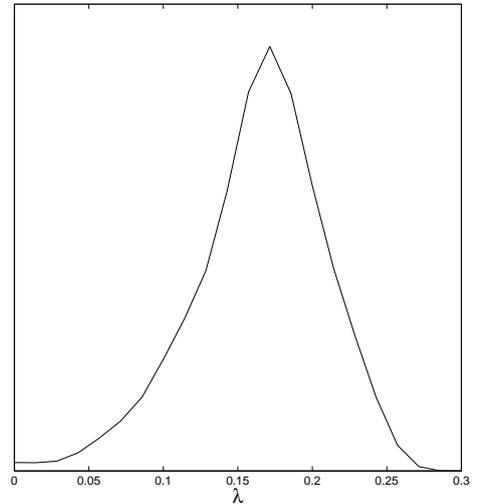


図 2: Exponential potential

5.2 Dilatonic ghost condensate

次に、ラグランジアン $P = -X + ce^{\lambda\phi} X^2$ で記述される Dilatonic ghost condensate と呼ばれるモデルを考える。このラグランジアンは、Assisted ラグランジアン $P = Xg(Y)$ において、任意関数を

$$g(Y) = -1 + cY \quad (29)$$

と選ぶことで得られる。三つの観測パラメータは、先ほどのモデルの時より複雑な形になるが、実効勾配 λ のみの関数で以下のように書ける。

$$n_{\mathcal{R}} = 1 - \frac{\lambda^2}{f(\lambda)} \quad (30)$$

$$r = \frac{8\lambda^2}{\sqrt{f(\lambda)[3f(\lambda) + 2]}} \quad (31)$$

$$f_{nl}^{\text{equil}} = -\frac{275}{486} \left[1 + \frac{1}{f(\lambda)} \right] + \frac{55}{72} \frac{\lambda^2}{f(\lambda)} \left[3 + \frac{2}{f(\lambda)} \right] \quad (32)$$

ただし

$$f(\lambda) \equiv \frac{1}{8} \left[\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 + \frac{16}{3}\lambda^2} \right] \quad (33)$$

とした。

先ほどと同じように、スペクトル指数とスカラーテンソル比の観測データをもとに likelihood 解析を行った結果、観測的に $4.0 \times 10^{-3} < \lambda < 1.5 \times 10^{-2}$ という制限が得られた。ここから得られた λ の中心値で f_{nl} を見積もってみると、 $|f_{nl}| \gg 1$ となることが分かる。また、 f_{nl} の観測の制限 (1) からさらに λ の下限を強く制限することができ、結局観測的な λ の制限は

$$8.4 \times 10^{-3} < \lambda < 1.5 \times 10^{-2} \quad (95\% \text{ CL}) \quad (34)$$

と得られる。

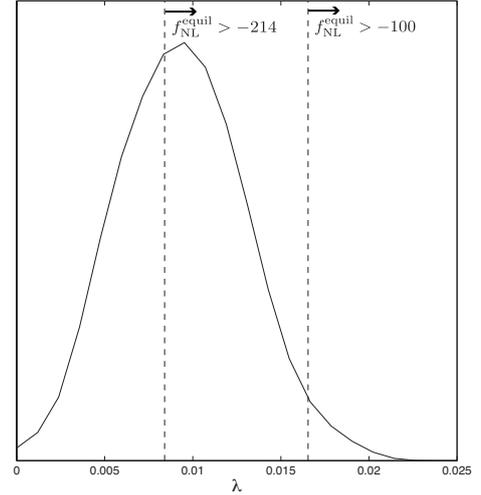


図 3: Dilatonic ghost condensate

5.3 DBI field

次に、ラグランジアン $P = -f(\phi)^{-1} \sqrt{1 - 2f(\phi)\dot{X}} + f(\phi)^{-1} - V(\phi)$ で記述される DBI と呼ばれるモデルについて考える。このラグランジアンは、Assisted ラグランジアン $P = Xg(Y)$ において、任意関数を

$$g(Y) = -\sqrt{1 - 2Y/Y} - c/Y \quad (35)$$

のように選ぶことで得られ、特に関数 $f(\phi)$ と $V(\phi)$ について、 $f(\phi) = e^{\lambda\phi}$ 、 $V(\phi) = (c+1)e^{-\lambda\phi}$ のときに assisted inflation することが分かる。

三つの観測パラメータは、伝播速度 c_s のみで表せば

$$n_{\mathcal{R}} = 1 - \frac{3(1 - c_s^2)}{c c_s + 1} \quad (36)$$

$$r = \frac{24c_s(1 - c_s^2)}{c c_s + 1} \quad (37)$$

$$f_{nl}^{\text{equil}} = -\frac{55}{1944} \frac{(10c c_s - 71)}{(c c_s + 1)} \left(\frac{1}{c_s^2} - 1 \right) \quad (38)$$

と得られ、それぞれのパラメータの中に任意定数 c が残るため、 c の値の取り方によって変わってくる。

同じように likelihood 解析を行った結果が図 4 で、それぞれ (i) $c = 10^2$, (ii) $c = 10^3$, (iii) $c = 10^4$ に対応している。さらに、点線で f_{nl} の観測の制限を示した。ここから分かるように、DBI モデルは任意定数 c の依存性があり、 c の選び方によっては $f_{nl} \gg 1$ となり得る。

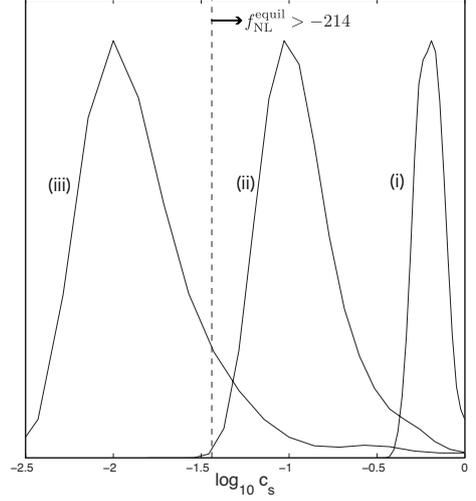


図 4: DBI field

6 MORE GENERAL MODELS

ここまで、いくつかの具対的なモデルを見てきたが、dilaton ghost condensate モデルと DBI モデルにおいて、 $f_{nl} \gg 1$ となり得ることが分かった。ここでは、この二つのモデルを一般化した形で考えることで、任意関数 g がどのような場合に $f_{nl} \gg 1$ となるかを議論する。

スローロールパラメータ ϵ と場の伝播速度 c_s が共に十分小さな値 ($\epsilon \ll 1$, $c_s^2 \ll 1$) である時、スペクトル指数 $n_{\mathcal{R}}$ とスカラーテンソル比 r の観測を満たし、かつ $f_{nl} \gg 1$ となる。dilaton ghost condensate モデルの場合は、 $\epsilon(18)$ と $c_s(19)$ の分子 $\ll 1$ でこの条件を満たしているのに対し、DBI モデルの場合は分母 $\gg 1$ となることでこの条件を満たしているため、この二つの場合を分けて一般化する。

6.1 Class(i)

まず、 ϵ と c_s の分子が十分小さくなる場合を考える。式 (18), (19) をふまえて、変数 Y を摂動展開 $Y = Y_0 + \delta Y$ し、

$$g(Y_0) + Y_0 g'(Y_0) = 0 \quad (39)$$

という状況のもとで、 ϵ と c_s の関係が次のように得られる。

$$\frac{c_s^2}{\epsilon} \simeq \frac{1}{12} \left[1 + \frac{Y_0 g''(Y_0)}{2g'(Y_0)} \right]^{-1} \quad (40)$$

Dilaton ghost condensate モデル $g(Y) = -1 + cY$ の一般化として、

$$g(Y) = c_0 + c_p Y^p \quad (41)$$

という任意関数を考えれば、 ϵ と c_s の関係は

$$\frac{c_s^2}{\epsilon} \simeq \frac{1}{6(p+1)} \quad (42)$$

となる。これについてグラフにしたのが図5で、それぞれ (i) $p = -0.5$, (ii) $p = 0.5$, (iii)

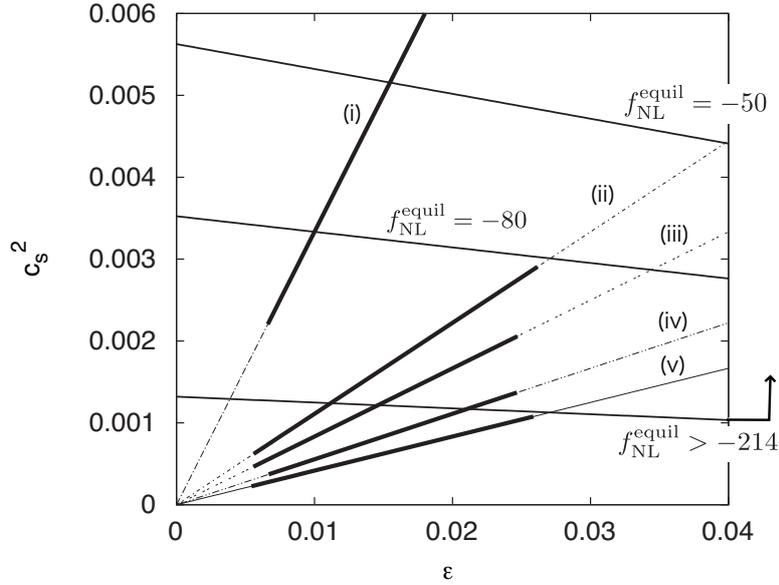


図 5: Class(i)

$p = 1$, (iv) $p = 2$, (v) $p = 3$ に対応している。太線で示されている領域は、それぞれの場合において likelihood 解析をした観測の制限 (95 % CL) で、non-Gaussianity パラメータの制限 $f_{nl}^{equil} > -214$ も加えてある。これより、 $p \geq 3$ ですべての観測を満たすパラメータ領域が存在しないことが分かる。

6.2 Class(ii)

次に、 ϵ と c_s の分母が十分大きくなる場合を考える。DBIモデル $g(Y) = -\sqrt{1-2Y}/Y - c/Y$ の一般化として、

$$g(Y) = -\frac{1}{Y}[c + (1-2Y)^m] \quad (43)$$

という任意関数を考えれば、 ϵ と c_s の関係が

$$c_s^{2(1-m)} \simeq \frac{3m}{c[2(1-m)]^{1-m}} \frac{1}{\epsilon} \quad (44)$$

と得られる。これについてグラフにしたのが図6で、それぞれ (i) $m = 0.3$, (ii) $m = 0.5$, (iii) $m = 0.7$, (iv) $m = 0.9$ に対応しており、左のグラフは $c = 10^3$ でプロットしたもの、右のグラフは $c = 10^4$ でプロットしたものである。先ほどと同じように太線で示されている領域は、それぞれの場合において likelihood 解析をした観測の制限 (95 % CL) で、non-Gaussianity パラメータの制限 $f_{nl}^{equil} > -214$ も加えてある。これを見ると、 c の値が大きいくほど観測的に可能なパラメータ領域が狭くなり、 $c = 10^3$ の場合は $m \geq 0.9$, $c = 10^4$ の場合は $m \geq 0.5$ のモデルが観測の制限から棄却されることが分かる。

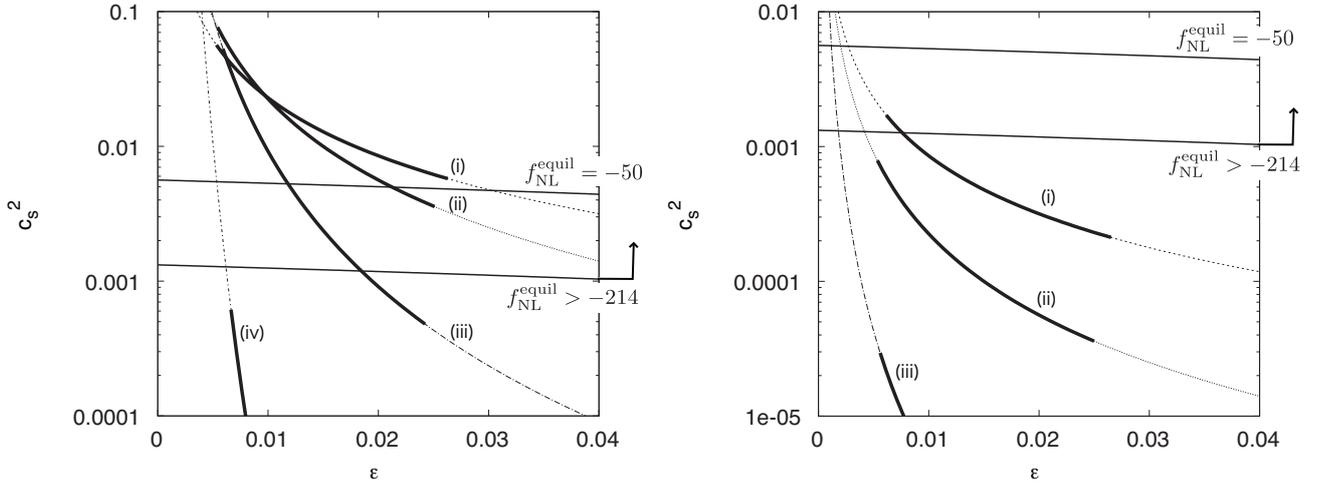


図 6: Class(ii)

7 結論

本研究では、Assisted k-inflation 模型について、インフレーションで生成されるゆらぎに関する三つの観測パラメータの理論予測をし、観測データを用いた likelihood 解析からモデルに対する制限を行った。また、 n_R と r の観測を満たし、かつ $f_{nl} \gg 1$ となる Assisted ラグランジアン $P = Xg(Y)$ の性質から、観測的に好まれる任意関数 $g(Y)$ の一般的な関数形について議論した。

今後は、他のインフレーションモデルについても解析を行い、将来的な観測と比較していくことで、観測的に好まれる現実的なモデルにつながることを期待される。

謝辞

本研究・発表を行うにあたり、熱心な指導・助言をして下さった、東京理科大学・辻川信二准教授に心より感謝致します。また、研究発表の機会と場を与えて下さった、夏の学校運営委員の皆様にも心より感謝申し上げます。

今回の貴重な研究の機会です。学んだことを活かし、今後も更なる精進をしていきたいと思ひます。

参考文献

- [1] C. Armendariz-Picon, T. Damour and V. F. Mukhanov, Phys. Lett. B **458**, 209 (1999).
- [2] E. Komatsu et al. arXiv:1001.4538, [astro-ph.CO] (2010).
- [3] A. R. Liddle, A. Mazumdar and F. E. Schunck, Phys. Rev. D **58**, 061301 (1998).
- [4] F. Piazza and S. Tsujikawa, JCAP **0407**, 004 (2004); S. Tsujikawa and M. Sami, Phys. Lett. B **603**, 113 (2004).

- [5] D. Seery and J. Lidsey, JCAP 0506:003 (2005).
- [6] J. Garriga and V. F. Mukhanov, Phys. Lett. B458, 219 (1999).
- [7] X. Chen, M. Huang, S. Kachru and G. Shiu, JCAP0701, 002 (2007).