Dyer-Roder 近似の α と赤方偏移 z の関係

中島友樹
立教大学

2011 年 8 月 30 日

1　はじめに

現在の宇宙は大局的には一様等方としてよいが、実際には銀河団などの構造があり、非一様である。赤方偏移から距離を決定するときには、距離と赤方偏移の関係を正確に理解する必要があり、この際に非一様性を考慮し補正する必要がある。非一様性の補正の仕方のひとつに Dyer-Roeder 近似があり、ここではこれを用いて非一様性について研究する。ここでは R .C. Santos and J. A. S. Lima, Phys. Rev. D 77, 080735 (2008) に基づいて議論する。

2　一様等方宇宙

宇宙は一様等方で平坦であるとして以下の Robertson-Walker 時空に従う。ここで宇宙は非相対論的物質とダークエネルギーからなるとする。また $c = 1$ とする。

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2) \tag{1}$$

ここで $R(t)$ はスケールファクターを表す。またエネルギー運動量テンソルは、

$$T^{\mu\nu} = [\rho_M + (1+\omega)\rho_x]U^\mu U^\nu - \omega\rho_x g^{\mu\nu} \tag{2}$$

となる。ここで物質を M, ダークエネルギーを x とし、それらのエネルギー密度を ρ_M, ρ_x とする。また共動座標をとるので $U^\mu = \delta^\mu_0$ となる。ω はダークエネルギーの密度と圧力の係数で以下の状態方程式で与えられる。

$$p_x = \omega\rho_x \tag{3}$$

アインシュタイン方程式は

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 8\pi G T^{\mu\nu} \tag{4}$$

である。$\dot{R} = dR/dt$、現在のハッブルパラメータを H_0 とてこれらの式から以下の式が得られる。

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = H_0^2\left[\Omega_M\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 + \Omega_x\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3(1+\omega)}\right] \tag{5}$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{1}{2}H_0^2\left[\Omega_M\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 + (3\omega+1)\Omega_x\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3(1+\omega)}\right] \tag{6}$$

ここで R_0 は現在のスケールファクターであり、Ω_M, Ω_x はそれぞれ物質とダークエネルギーの密度パラメーターで以下のように表される。

$$\Omega_M = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_{M0}, \Omega_x = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_{x0} \tag{7}$$

また、平坦なので $\Omega_M + \Omega_x = 0$ である。ここで ρ_{M0}, ρ_{x0} は現在の ρ_M, ρ_x を表し、

$$\rho_M = \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 \rho_{M0}, \rho_x = \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3(1+\omega)} \rho_{x0} \tag{8}$$

となる。

3 Dyer-Roeder 近似

Dyer-Roeder 近似は天体から光が伝搬してくるときに宇宙の非一様性を考慮し、距離と赤方偏移の関係を補正する。この時、非一様性を表す量として smoothness parameter α を導入する。

ここで光の伝搬による像の拡大を求める。光線の接ベクトルを k^μ とし、影の面積を A とする。ここで影の変化率は以下のようになる。

$$\theta_{;\nu}k^\nu = \frac{1}{2}k^\mu_{;\mu;\nu}k^\nu = \frac{1}{2}(k^\mu_{;\mu;\nu}k^\nu - k^\mu_{;\nu;\mu}k^\nu) + \frac{1}{2}k^\mu_{;\nu;\mu}k^\nu = -\theta^2 - \sigma^2 + \omega^2 + \frac{1}{2}R_{\mu\nu}k^\nu k^\nu \tag{9}$$

ここで回転とずれは無視できるので式 (9) に $\sigma = \omega = 0$ とし、光線に沿った微分なのでアフィンパラメータ λ のの微分であらわせる。よって光の伝搬による像の拡大は

$$\frac{d^2\sqrt{A}}{d\lambda^2} + \frac{1}{2}R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \sqrt{A} = 0 \tag{10}$$

となる。

式 (10) から角径距離 D_A と赤方偏移 z の関係を求める。赤方偏移は $R_0/R = 1 + z$ であり、また Robertson-Walker 時空なので $d\lambda \propto Rdt$ である。これらと式 (5) から $dz/d\lambda$ は以下の式 (11) のようになる。

$$\frac{dz}{d\lambda} = -(1+z)^2[\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_x(1+z)^{3(1+\omega)}]^{1/2} \tag{11}$$

また式 (10) の左辺第 2 項のリッチテンソルをアインシュタイン方程式 (4) を用いてエネルギー運動量テンソルにする。このとき、smoothness parameter α をもちいてエネルギー運動量テンソルにおいて物質の密度 ρ_M に非一様性を課す。式 (2) は

$$T^{\mu\nu} = [\alpha\rho_M + (1+\omega)\rho_x]U^\mu U^\nu - \omega\rho_x g^{\mu\nu} \tag{12}$$

となる。ここで α は 0 から 1 までの範囲を取り、式 (10)(11)(12) を用いて D_A と z の関係を求めると以下のようになる。

$$(1+z)^2\mathcal{F}\frac{d^2D_A}{dz^2} + (1+z)\mathcal{G}\frac{dD_A}{dz} + \mathcal{H}D_A = 0 \tag{13}$$

ここで $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ は以下のようになる。

$$\mathcal{F} = \Omega_M(1+z)^3 + (1-\Omega_M)(1+z)^{3(\omega+1)}$$

$$\mathcal{G} = \frac{7}{2}\Omega_M(1+z)^3 + \frac{3\omega+7}{2}(1-\Omega_M)(1+z)^{3(\omega+1)}$$

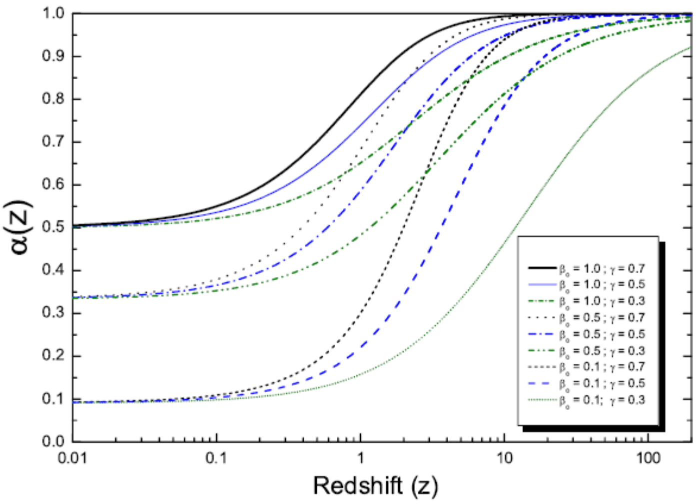

図 1　角径距離 D_A と赤方偏移 z の関係 Santos and Lima (2008)

$$\mathcal{H} = \frac{3\alpha}{2}\Omega_M(1+z)^3 + \frac{3(\omega+1)}{2}(1-\Omega_M)(1+z)^{3(\omega+1)} \tag{14}$$

また初期条件は $z = 0$ で

$$D_A = 0, \frac{dD_A}{dz} = 1 \tag{15}$$

である。

4　赤方偏移 z における smoothness parameter α

赤方偏移 z における smoothness parameter α の関係について議論する。Smoothness parameter は光の伝搬する経路の物質の密度によって 0 から 1 までの値をとる。光が真空中を伝搬するときに 0、完全に一様等方な宇宙を伝搬するときに 1 となるように α をとる。ここで観測者の近傍の低赤方偏移の部分では銀河などの構造があり、0 に近くなる。よって以下のように α と z の関係を仮定する。

$$\alpha = \frac{\beta_0(1+z)^{3\gamma}}{1+\beta_0(1+z)^{3\gamma}} \tag{16}$$

ここで β_0, γ は任意のパラメータである。β_0, γ の値を変えることで α の振る舞いを変えることができる。α の赤方偏移 z の関係を図 1 に示す。

ここで式 (13)(14) に式 (16) を用いて、角径距離 D_A、smoothness parameter α、赤方偏移 z の関係を求める。赤方偏移と角径距離のグラフを図 2 に示す。図 2 より、α の振る舞いによって角径距離 D_A が同じ赤方偏移 z でも異なった値をとる。また赤方偏移が大きいところでは D_A の差が大きい。

5　まとめ

以上のように smoothness parameter を変えるとその赤方偏移での角径距離も変わることがわかる。このことから一様等方宇宙での拡径距離と比較することでその赤方偏移での非一様の度合いが求められると思われる。

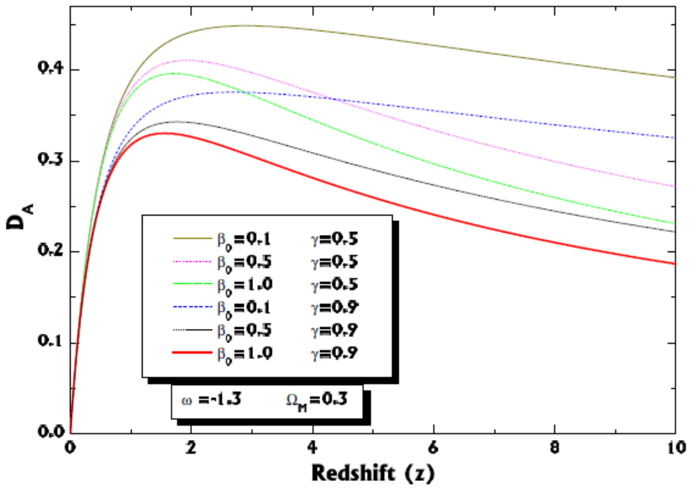

図 2　角径距離 D_A と赤方偏移 z の関係 Santos and Lima (2008)

6　参考文献

[1]R .C. Santos and J. A. S. Lima, Phys. Rev. D 77, 080735 (2008)

[2]C. C. Dyer and R. C. Roeder, ApJ 180 L31 (1973)

[3]C. C. Dyer and R. C. ROeder, ApJ 174 L115 (1972)

[4] **富田憲二『相対性理論』丸善株式会社**