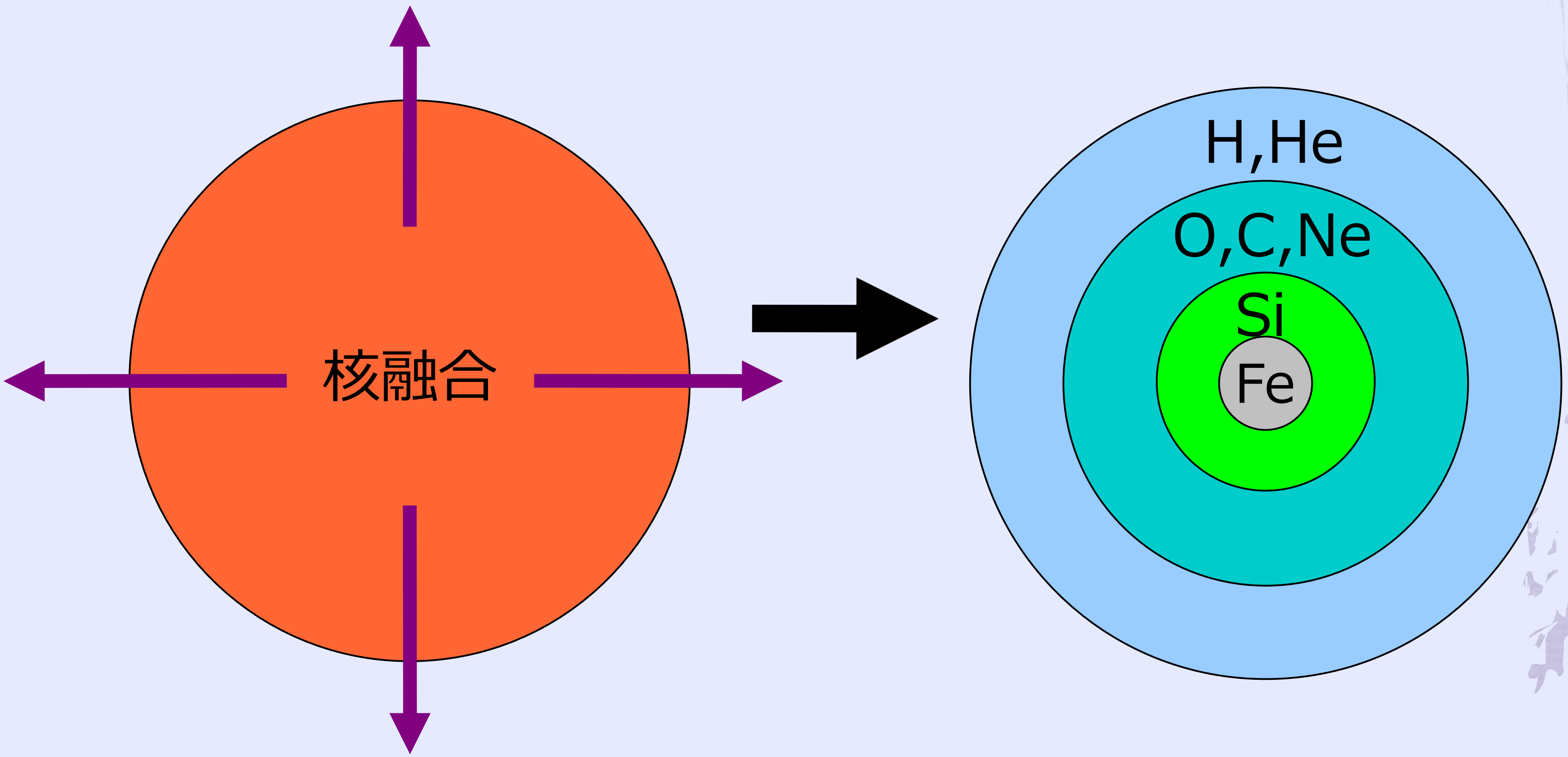
重力崩壊の数値相対論的シミュレーション

新潟大学　宇宙物理学研究室
D1　中川恵介

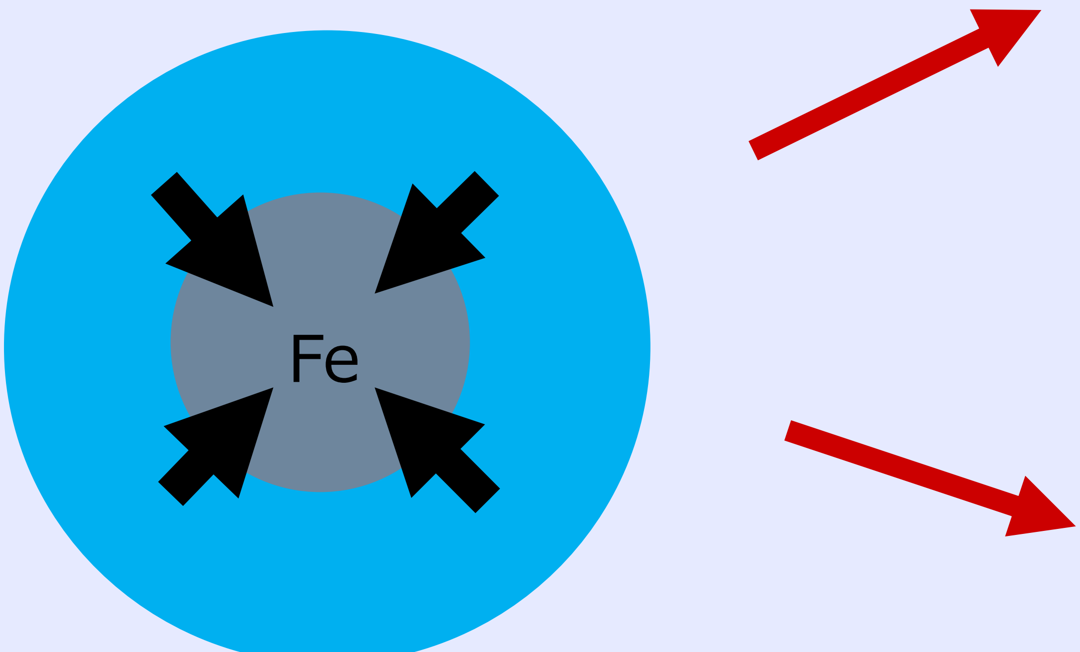
研究背景

重い星は進化の最後に鉄のコアを形成する。



研究背景

鉄の光分解によって崩壊



中性子星となったコアから衝撃波(超新星爆発)

爆発に失敗
中性子星に物質が降り積もり
ブラックホールに

補足

- 本研究では、爆発メカニズムではなく
ブラックホール形成メカニズムに焦点をあてる。

研究背景

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

重力場

物質(ガス)

ニュートリノ

重力場を記述するアインシュタイン方程式を解けばよい

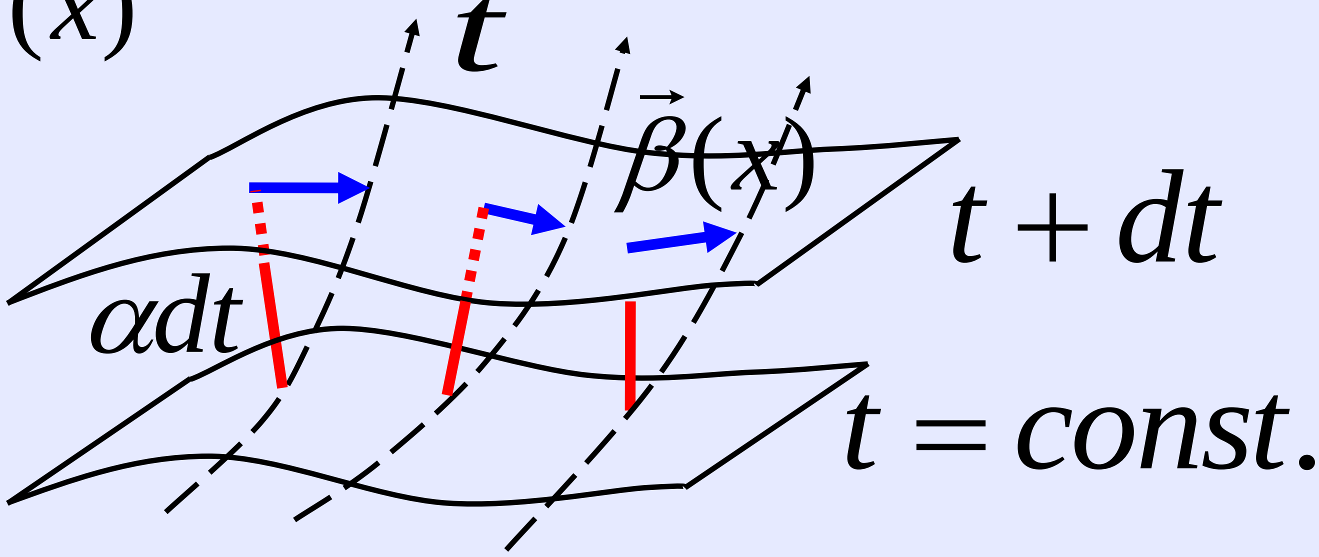
数値相対論

ラプス関数　・・・三次元超曲面の形を決める.

$\alpha(x)$

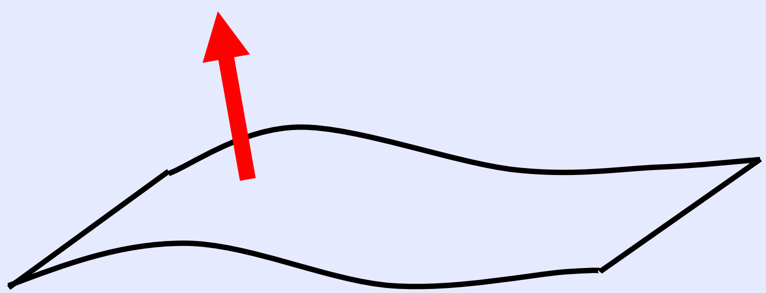
シフトベクトル・・・時間軸の取り方を決める.

$\vec{\beta}(x)$



数値相対論

$$\vec{n} = \left(\frac{1}{\alpha}, -\frac{\beta}{\alpha} \right)$$



$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu$$

基本変数は3-metricと
extrinsic curvature

$$\boxed{(\gamma_{ij}, K_{ij})}$$

$$\boxed{K \sim \dot{\gamma}} \quad cf, (x, p)$$

数値相対論

$$
\begin{aligned}
n^\mu n^\nu G_{\mu\nu} &= 8\pi T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu \equiv 8\pi \rho_H \\
n^\mu \gamma_i^\nu G_{\mu\nu} &= 8\pi T_{\mu\nu} n^\mu \gamma_i^\nu \equiv 8\pi S_i \\
\gamma_i^\mu \gamma_j^\nu G_{\mu\nu} &= 8\pi T_{\mu\nu} \gamma_i^\mu \gamma_j^\nu
\end{aligned}
$$

$$R - K_{ij}K^{ij} + K^2 = 16\pi T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu$$

$$\nabla_i K_j^i - \nabla_j K = -8\pi T_{\mu\nu} n^\mu \gamma_j^\nu$$

Constraint!!

$$
\begin{aligned}
\partial_t K_{ij} &= \alpha(R_{ij} + KK_{ij} - 2K_{ij}K_j^i) - \nabla_i \nabla_j \alpha + L_\beta K_{ij} \\
&\quad - 8\pi\alpha T_{\mu\nu}(\gamma_i^\mu \gamma_j^\nu - \frac{1}{2}(\gamma^{\mu\nu} - n^\mu n^\nu))\gamma_{ij}
\end{aligned}
$$

Metricの二階時間微分!!

テクニック(constraint)

Conformal decomposition

$$\gamma_{ij} = \psi^4 \bar{\gamma}_{ij}$$

$$K_{ij} = A_{ij} + \frac{1}{3}\gamma_{ij} K.$$

$$A^{ij} = \psi^{-10} \bar{A}^{ij}$$

$$\rightarrow \quad D_j S^{ij} = \psi^{-10} \bar{D}_j (\psi^{10} S^{ij}).$$

$$R - K_{ij}K^{ij} + K^2 = 16\pi T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu$$

$$\nabla_i K^i_j - \nabla_j K = -8\pi T_{\mu\nu} n^\mu \gamma^\nu_j$$

Flatを仮定すると、ψとAだけの方程式になる。

補足

- Conformal decompositionはconstraintの式を解きやすくするためのテクニックである。

テクニック(evolution)

BSSN　formulation

$$
\begin{aligned}
\partial_t K_{ij} &= \alpha(R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ij}K^i_j) - \nabla_i \nabla_j \alpha + L_\beta K_{ij} \\
&\quad - 8\pi\alpha T_{\mu\nu}(\gamma^\mu_i \gamma^\nu_j - \frac{1}{2}(\gamma^{\mu\nu} - n^\mu n^\nu))\gamma_{ij}
\end{aligned}
$$

リッチテンソルの中にmetricの二階空間微分 $\partial\partial\gamma_{ij}$を含む。→誤差を増大させる。

$$
\bar{\Gamma}^i \equiv \bar{\gamma}^{jk}\bar{\Gamma}^i_{jk} = -\bar{\gamma}^{ij}{}_{,j},
$$

独立な変数として新しく定義。

補足

- BSSN formulationは、安定して長時間の時間発展をさせるための定式化である。

Neutrino

$$
\begin{aligned}
e^- + p &\longrightarrow \nu_e + n \\
e^+ + n &\longrightarrow \bar{\nu}_e + p \\
A + e^- &\longrightarrow \nu_e + A' \\
e^+ + e^- &\longrightarrow \nu + \bar{\nu}
\end{aligned}
$$

バウンス後、ニュートリノバーストが起きる。特に、一番下の反応は重力エネルギーの99%に相当し、中性子星を冷やす。

補足

- Neutrino radiationは、重力場の源になるだけでなく、エネルギーの輸送も担っており、非常に重要な役割を果たす。

Neutrino

ニュートリノ分布関数 → $f(t, x, p) = \frac{dN}{dVdP}$

ボルツマン方程式

$$p^{\mu} \frac{\partial f}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\nu}{}_{\mu\sigma} p_{\nu} p^{\sigma} \frac{\partial f}{\partial p_{\mu}} = \left(\frac{df}{d\lambda} \right)_{coll}$$

補足

- Boltmann方程式を解くことで、Neutrinoのエネルギー輸送を求める。

アルゴリズム

変数→ $\boxed{\gamma_{ij}, A_{ij}, K, \Gamma^i, \alpha, \beta^i, \rho, e, f}$

Conformal deconpositionを行い、与えられた状態量に対してConstraintを解く。

$\downarrow$

得られたconformal factor ψにより、変数を元に戻し、時間発展させていく。

Metric evolution ＋ Boltzmann equation
＋ Conservation law ＋ Gauge condition
＋ EOS

Ex,球対称(コード作成中)

$$R - K_{ij}K^{ij} + K^2 = 16\pi T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu$$
$$\nabla_i K^i_j - \nabla_j K = -8\pi T_{\mu\nu}n^\mu \gamma^\nu_j$$

シュバルツシルト時空を境界条件にして端から順に解いていく。

↓

Evolution $\partial_t g_{rr}, \partial_t g_{\theta\theta}, \partial_t A_{rr}, \partial_t K, \partial_t \Gamma^r$

Boltzmann 4次元位相空間(直接解けそう)

Conservation $\partial_t \rho, \partial_t e$

Gauge $\partial_t \alpha, \partial_t \beta^r$

EOS 縮退圧＋ガス圧(理想気体)

$R = \sqrt{g_{\theta\theta}}, \rho$ の時間発展を追うことが最終目的。

まとめ

数値相対論の手法を、重力崩壊に応用することにより、ブラックホール形成のメカニズムを明らかにすることが出来ると考えられる。

今後は、作成したコードを

現実的状態方程式→ニュートリノ輸送→流体の非球対称化の順に拡張していく。