ホジャバ・リフシッツ重力理論におけるブラックホールと星

立教大学 塚本直樹

最近、ホジャバによってローレンツ不変でない新しい量子重力理論が提案された [1],[2]。この理論の低エネルギー極限において、球対称静的真空解は一般相対性理論とは異なることを示した [3]。また、泉・向山によって、この理論では物理的に妥当な条件のもとで球対称静的な星の解は存在しないことが示された。今回は [3] に基づく研究発表と [4] のレビューを行う。

1. はじめに

重力の理論である一般相対性理論はマクロなスケールで、電磁気力、強い力、弱い力の３つの力の理論である大統一理論はミクロなスケールでそれぞれ見事な成果を納めてきた。それぞれのスケールでの理論の研究が進められてきた一方で、両方でのスケールの現象を説明できる究極の理論の研究も進められてきた。しかし、重力と他の力の統一の研究はファラデー、アインシュタインらによって始められたが、今日までのすべての物理学者の挑戦をしりぞけてきた。そのことがいっそう多くの物理学者を究極の理論へと駆り立て、超弦理論、ループ量子重力理論などの研究がなされている。

他方で、力の統一理論とは異なる二つの理由で、一般相対性理論を修正する機運も高まっている。その第一の理由は一般相対性理論ではダークエネルギー、ダークマターなどの全てを説明することは難しいからである。第二の理由は一般相対性理論が生む特異点が示すように、理論自体に限界があるからである。特異点では一般相対性理論は破綻してしまう。特異点は量子重力理論の古典近似によって生まれるもので、量子重力理論では特異点は生じないと信じられている。重力理論を量子化するための最大の困難は繰り込み可能性を満たすことだと考えられている。一般相対性理論は弱重力近似において繰りこみ不可能であり、他の理論で使われている場の量子論が適用できないことが知られている。

2. ホジャバ・リフシッツ重力理論

最近、ホジャバによってローレンツ不変でない新しい量子重力理論が提案された [1],[2]。ホジャバ・リフシッツ重力理論と呼ばれるこの新しい重力理論は、時間と空間が同等でないことを指導原理にしており、一般座標変換の不変性は破られ、Arnowitt-Deser-Misner(ADM) 形式の時間一定超曲面上での変換のみが不変であるとする理論である。ADM 形式での四次元時空の計量は

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + g_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) \tag{1}$$

と記述される。ここで、N はラプス関数、N^i はシフトベクトルを表している。この理論はパワーカウンティング繰りこみ可能であり、繰りこみを目指したほかの量子重力理論で生じるゴーストや様々な不安定性を避けようとする量子重力理論である。この理論は確率の正定値性を持ち、繰りこみ可能かもしれないと期待されている。

この理論の完全な理解のために、より多くの様々な側面の研究が必要である。ホジャバ・リフシッツ重力理論では詳細釣り合い条件と射影可能条件が本質的な役割をすることが指摘されている。詳細釣り合い条件は繰り込み可能性の観点から重要であり、作用の形を強く制限する。その作用を

$$I = I_m + \frac{M_{Pl}^2}{2}\int dt dx^3 N\sqrt{g}(K^{ij}K_{ij} - \lambda K^2 + \Lambda + R + L_{z>1}) \tag{2}$$

と表す。ここで、I_m は物質の作用、Λ は宇宙定数、R はリッチスカラー、K_{ij} は外部曲率である。

射影可能条件とはラプス関数 $N(t)$ が時間だけの関数であるという条件で、非特殊相対性理論であるこの理論を特徴づける本質的な条件である。射影可能条件によってハミルトニアン拘束条件は

$$\frac{M_{Pl}^2}{2}\int dx^3\sqrt{g}(K^{ij}K_{ij} - \lambda K^2 - \Lambda - R - L_{z>1}) + \int dx^3\sqrt{g}(T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu) = 0 \tag{3}$$

となり、局所的ではなくて、時間一定超曲面上の空間積分として得られる。ただし、$T_{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソル、n^μ は時間一定超曲面に対する単位法線ベクトルを表している。

これらの条件はホジャバ・リフシッツ重力理論では重要であるにもかかわらず、いくつかの先行研究ではこれらの条件を捨て、理論を拡張している。よって、これらの条件を考慮してこの理論の研究する必要がある。

3．球対称静的な真空解

時空が球対称静的で、真空な場合について考える。
時間一定超曲面上での線素は

$$ds^2 = -e^{2w(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

と表せる。発展方程式は

$$\alpha\frac{v^r}{r}\left(2v^{r\prime} + \frac{v^r}{r} + 4w'v^r\right) + \xi\frac{1-e^{-2w}}{r^2} + \frac{1}{2}\sigma = 0$$

$$\alpha\left[\left(v^{r\prime} + w'v^r + \frac{v^r}{r}\right)'v^r + (w'v^r + v^{r\prime})\left(v^{r\prime} + w'v^r + \frac{v^r}{r}\right) + \left(\frac{v^r}{r}\right)^2\right] + \xi\frac{w'}{r}e^{-2w} + \frac{1}{2}\sigma = 0$$

となる。ここで、$v^i \equiv N^i/N$ である。
運動量拘束条件は

$$0 = -4\alpha\frac{1}{r}w'v^r$$

となる。よって $w' = 0$ あるいは $v^r = 0$ である。

・$w = w_0 = const$ のとき
発展方程式とハミルトニアン拘束条件から、コットラー解を得る。

$$ds^2 = -\left[1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2 - \frac{2GM}{c^2 r}\right]c^2dT^2 + \left[1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2 - \frac{2GM}{c^2 r}\right]^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

・$N = const, N^r = 0$ かつ $w = w(r)$ のとき (つまり超静的のとき)
発展方程式から

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{1}{1-\Lambda r^2}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

ハミルトニアン拘束条件

$$H_0 = \begin{cases} \frac{c}{2G}\left[\frac{\arcsin(\sqrt{\Lambda}r)}{\sqrt{\Lambda}} - r\sqrt{1-\Lambda r^2}\right]_{r_{min}}^{r_{max}}, & \Lambda > 0 \\ 0, & \Lambda = 0 \\ -\frac{c}{2G}\left[-r\sqrt{1-\Lambda r^2} + \frac{arcsinh(\sqrt{-\Lambda}r)}{\sqrt{-\Lambda}}\right]_{r_{min}}^{r_{max}}, & \Lambda < 0 \end{cases}$$

を満たす解は、ミンコフスキーである。

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

しかし、ハミルトニアン拘束条件が大域的なので、真空でない領域あるいは静的でない領域からの寄与を考えることで、局所的な球対称静的真空解は、ミンコフスキー解だけでなく超静的解もある。

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{1}{1-\Lambda r^2}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

まとめると、時空がすべての場所で真空であり、球対称静的ならば唯一な解としてコットラー解になる。これは一般相対性理論と同様な結果である。時空が局所的に真空で、球対称静的ならばコットラー解になる可能性だけでなく、時空が局所的に球面上もしくは双曲面上での超静的解かミンコフスキー時空になる可能性もある。これは一般相対性理論と異なる結果である。このことは非特殊相対論的量子重力理論の赤外極限と一般相対性理論との違いが原理的に検証可能であることを示している。なぜなら一般相対性理論の解はすべて非特殊相対論的量子重力理論の解でもあるが、非特殊相対論的量子重力理論の解はすべて一般相対性理論の解ではないからである。

３. ホジャバ・リフシッツ重力理論における星

泉・向山によってホジャバ・リフシッツ重力理論での星についての最初の研究がおこなわれた [4]。物質は完全流体、エネルギー密度が区分的連続であり、圧力が負にならないで、中心において圧力が正だと仮定する。

運動量保存則は

$$0 = \frac{1}{N}(\partial_t - N^j D_j)H_{mi} + KH_{mi} - \frac{1}{N}H_{mj}D_i N^j - D^j \varepsilon_{mij}$$

ここで、$H_{mi} \equiv T_{i\mu}n^\mu$ である。計量は

$$N^i \partial_i = \beta(x)\partial_x$$
$$g_{ij}dx^i dx^j = dx^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

とする。外部曲率

$$K = -\frac{(r^2\beta)'}{r^2}$$

は時間一定超曲面上で正則でなければならない。よって β' は正則である。このことと運動量保存則

$$P'(1-\beta^2) + (\rho + P)(1-\beta^2)' = 0$$

から P' も正則である。以上のことと、$\rho(P)$ は区分的連続という仮定から、$\rho + P$ は x の区分的連続な関数であることがわかる。運動量保存則に $(\rho + P)(1-\beta^2)$ を掛けて、星の中心 x_c から端 x_0 まで積分すると

$$\log(1-\beta_0^2) - \log(1-\beta_c^2) = -\int_{x_c}^{x_0 - 0} \frac{P'}{\rho + P}dx$$

この左辺は負であり、右辺は正である。これは明らかな矛盾である。

よって、物質は完全流体とし、エネルギー密度が区分的連続であり、圧力が負にならないで、中心において圧力が正である仮定のもとでは球対称で大域的に静的な解が存在しないことが示された。

5. 参考文献

[1] P. Hořava, Phys. Rev. D79, 084008 (2009)
[2] P. Hořava, JHEP 0903, 020 (2009).
[3] T. Harada, U. Miyamoto and N. Tsukamoto ,arXiv:0911.1187,(2009)
[4] K. Izumi and S. Mukohyama, Phys. Rev. D 81, 044008(2010)