SCHWARZSCHILD BH摂動と準固有振動

T.Regge&Wheeler Phys.Rev.108,1063-1069(1957)
S.Chandrasekhar Proc.R.Soc.Lond.A.344,441-452(1975)　のレビュー

大阪市立大学
宇宙・重力研究室　M1　　荒木彩人（あらき　あやと）

目次

イントロダクション

ブラックホール摂動

摂動で考える現象
ブラックホール（BH）に物質が落ち込む

↓

時空が変化

↓

重力波を放出しエネルギーが散逸

この過程に注目

安定なBHに落ち着く

BH　　強重力により光さえ抜け出せない領域

重力波　時間的に変化する時空の歪みが波となって伝わっていく現象

BH準固有振動

BH時空の時間変化において、重力波によりエネルギーが外部に散逸して減衰振動となるもの

特徴

- 振動数が複素数
- 振動数の虚部が負

重力波の典型的な減衰時間は

$$\tau[s] \approx 5\times 10^{-6}\,\frac{m}{m_{\circledcirc}}$$

$m_{\circledcirc}$：太陽質量

m　：BH質量

重力波によりBH質量を推察できる！

Schwarzschildで実際に計算してみる

SCHWARZSCHILD BH摂動

SCHWARZSCHILD計量と摂動

Schwarzschild計量の特徴　　真空解　静的　球対称

$$ds^2 = -\Delta dt^2 + \Delta^{-1} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

$$= \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \qquad \Delta = 1 - \frac{2m}{r}$$

摂動が加わった時空を考える

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \qquad (|\bar{g}_{\mu\nu}| >> |h_{\mu\nu}|)$$

真空において解く方程式は

$$R_{\mu\nu} = \cancel{\bar{R}_{\mu\nu}} + \boxed{\delta R_{\mu\nu} = 0}$$

方程式の解き方

解く方程式：4変数偏微分方程式

背景時空の対称性とゲージ自由度を用いる

・球面調和展開　　θ, φ の分離、Odd･Even分解

・フーリエ展開　　t の分離

・ゲージ固定（RWゲージ）　変数の消去

以上の操作を行うことで

解く方程式：1変数常微分方程式　　解くことができる！

求める解の形

求める解の形は（oddの場合）

$$h_{\mu\nu}^{odd} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & h_0(r) \\ 0 & 0 & 0 & h_1(r) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & h_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sin\theta \partial_\theta P_L(\cos\theta) e^{-ikt}$$

$P_L(\cos\theta)$：ルジャンドル多項式

摂動の結果

先の $h_{\mu\nu}^{odd}$ について各々の L で方程式を解いてやると

L=0　⇒　**摂動ゼロ**（Schwarzschild BH**から変化なし**）

L=1　⇒　Kerr BH（slow rotation）

L≧2 **の時は次の方程式に従う**

$$\boxed{\frac{d^2}{dr_*^2}Q+\left(k^2-V\right)Q=0} \quad , \quad \frac{d}{dr_*}=\Delta\frac{d}{dr}$$

$$V=\frac{L(L+1)}{r^2}\Delta+\frac{6m}{r^3}\Delta \quad , \quad Q=\Delta\frac{h_1}{r}$$

Schwarzschild BH **の摂動が従う方程式がわかった！**

準固有振動

解の級数展開と境界条件

$$\frac{d^2}{dr_*^2}Q+\left(k^2-V\right)Q=0$$

解を級数展開の形でおく

$$Q=e^{ikr_*}\sum_{j=0}^{\infty}a_j\Delta^{n+j} \qquad r_*=r+2m\log\left(\frac{r}{2m}-1\right)$$

また、境界条件として

$r\to\infty$ で外向きの波 $Q\sim e^{ikr_*}$

$r\to 2m$ で内向きの波 $Q\sim e^{-ikr_*}$

連分数

Δ の冪ごとの係数条件式より連分数が得られる

$$0 = \beta_0 + \cfrac{\alpha_0 \gamma_1}{\beta_1 + \cfrac{\alpha_1 \gamma_2}{\beta_2 + \cdots}}$$

$$s = -2imk$$

$$\alpha_j = j^2 + (2s+2)j + 2s + 1$$

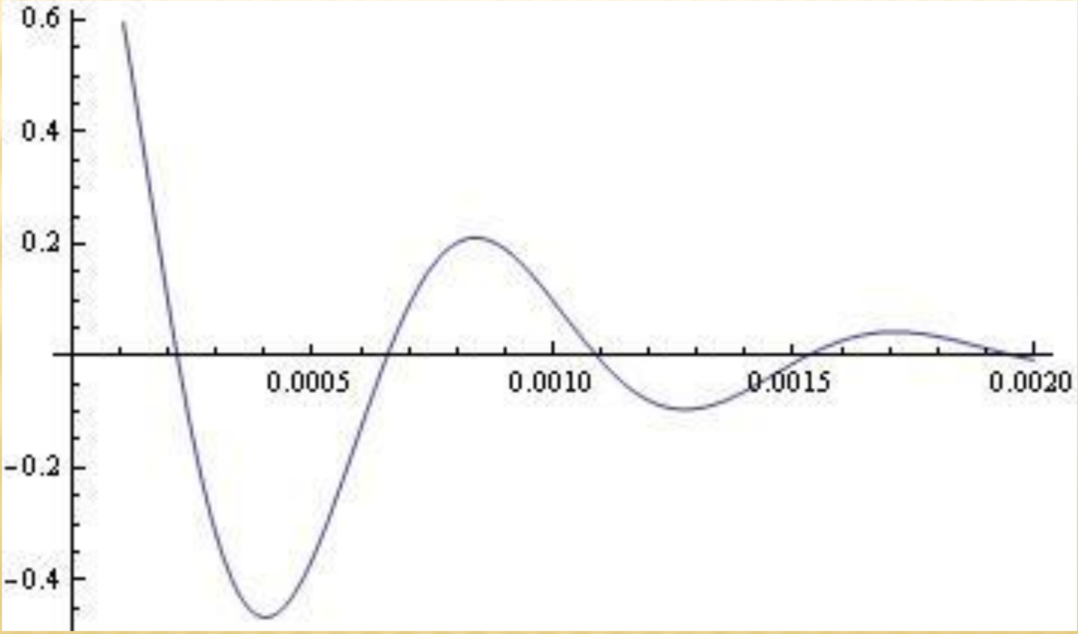
$$\beta_j = -\{2j^2 + (8s+2)j + 8s^2 + 4s - 3 + L(L+1)\}$$

$$\gamma_j = j^2 + 4sj + 4s^2 - 4$$

L をパラメーターとし、s を数値計算で求める

数値計算

L	j=2でのsをi/2倍したもの（＝mk）		
L=2	0.37323 - 0.08746 i	0.33126 - 0.26986 i	
L=3	0.59940 - 0.09262 i	0.58098 - 0.28093 i	0.54166 - 0.48348 i
L=4	0.54166 - 0.48348 i	0.79593 - 0.28334 i	0.76396 - 0.47706 i
	0.70445 - 0.68750 i		



L=2
縦　振幅
横　時間[**秒**]

まとめ

- Schwarzschild BHの摂動は波動方程式に従う
- 波動方程式には準固有振動が存在
- 振動数は複素数であり、BH特有のパラメーターに依存