高次元Taub-NUT空間上の Einstein-Maxwell系の厳密解

大阪市立大学
宇宙物理研究室
たつおか たかみつ
龍岡 聖満

目次like

1. Introductionとmotivation（高次元時空について）
2. 考える系と方程式（Einstein-Maxwell系）
3. 簡単な例（extreme Reissner-Nordström時空）
4. 5次元extreme charged squashed Kaluza-Klein時空
5. **もっと高次元へ！（本題）**
6. まとめ

なぜ高次元なのか

・重力を含む統一理論の候補である超弦理論が高次元で定式化されている

・重力の逆２乗則はサブミリメートルまでで確認されている

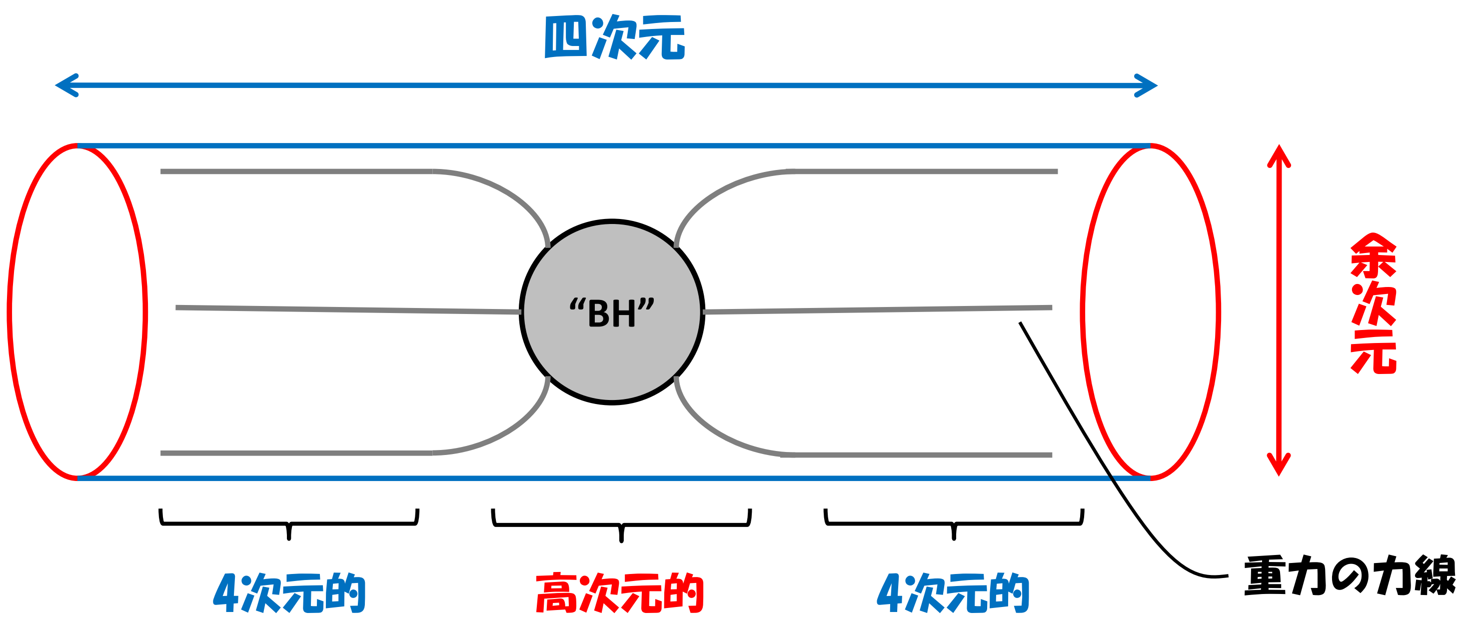
→　それより小さいスケールでは逆３，４，…則の可能性あり（高次元の可能性）
まだ古典論が適用できるスケール

・加速器実験で高次元マイクロブラックホールが生成される可能性あり

コンパクト化された余剰次元

大きいスケールでは4次元的，小さいスケールでは高次元的に振る舞うモデルはどんなモデルか？

（非相対論での**イメージ**）

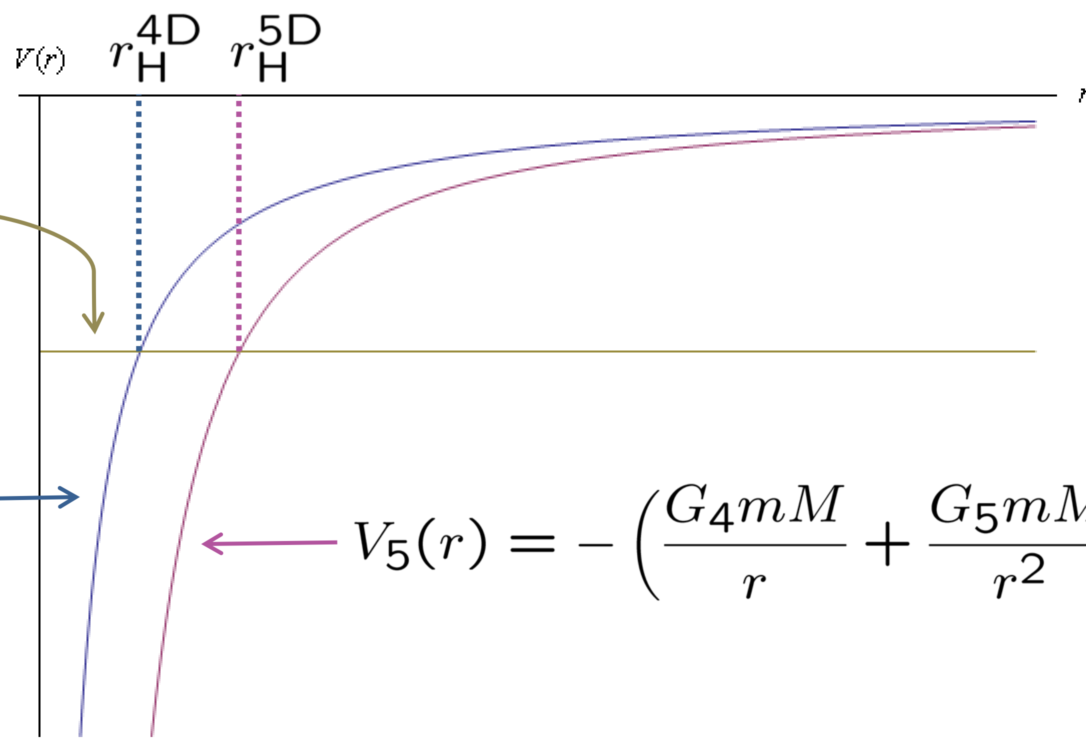


高次元マイクロブラックホール

コンパクトな余剰次元があればなぜ高次元マイクロBHができやすいのか？

（非相対論的でのイメージ）

$$V = -\frac{1}{2}mc^2$$



$$V_4(r) = -\frac{G_4 mM}{r}$$

$$V_5(r) = -\left(\frac{G_4 mM}{r} + \frac{G_5 mM}{r^2}\right)$$

コンパクト化の影響

Schwarzschild解や, Reissner-Nordström解を高次元に拡張したものは，高次元でもBH解になっている。

コンパクトな余剰次元を持つ高次元解の中で6次元以上だとBHにならないものがある（5次元だとBH）

… コンパクトな余剰次元の影響？

今回扱う高次元解もコンパクトな余剰次元を持つ

↓

コンパクトな余剰次元の影響をみたい！

Actionと方程式

Action（D 次元）

$$S = \int \left(R - \frac{1}{16} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \sqrt{-g} d^D x$$

方程式

$$G_{\mu\nu} - 2T_{\mu\nu}(F) = 0$$ (**Einstein方程式**)

$$\nabla^\nu F_{\mu\nu} = 0$$ (**Maxwell方程式**)

ここで $T_{\mu\nu}(F) = F_\mu{}^\alpha F_{\alpha\nu} - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g_{\mu\nu}$

D 次元解の作り方(★)

Einstein方程式を一般に解くのは難しい
しかし dl^2 がRicci平坦な $(D-1)$ 次元空間の計量なら

$$\boxed{\begin{aligned} ds^2 &= -H^{-2}(\mathrm{x})dt^2 + H^{\frac{2}{D-3}}(\mathrm{x})dl^2 \\ A_\mu dx^\mu &= \pm\left[\frac{D-2}{2(D-3)}\right]^{1/2}\frac{dt}{H(\mathrm{x})} \end{aligned}}$$

(x: 空間座標)

の満たすEinstein方程式とMaxwell方程式はともに

$$\boxed{\triangle_{D-1}H(\mathrm{x}) = 0}$$

に帰着する ($\triangle_{D-1}$ は $(D-1)$ 次元空間のLaplacian)

簡単な例

dl^2が平坦な$(D-1)$次元空間の計量なら

$$H(r) = 1 + \frac{\mu}{r^{D-3}} \qquad (\mu > 0)$$

となる（Hは動径座標rのみによると仮定）

このときD次元E-M系の厳密解は（適当な座標変換をして）

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\mu}{r^{D-3}}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{\mu}{r^{D-3}}\right)^{-2} dr^2 + r^2 d\Omega_{D-2}^2$$

$$A_\mu dx^\mu = \pm \left[\frac{D-2}{2(D-3)}\right]^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\mu}{r^{D-3}}\right) dt$$

となる（D次元extreme Reissner-Nordström解）

(Euclidean)Taub-NUT空間

Taub-NUT空間（4次元空間）の計量（Ricci平坦）

$$dl^2 = \left(1 + \frac{2L}{r}\right) dr^2 + \underbrace{r(r+2L)d\Omega_2^2}_{\text{base } S^2} + \underbrace{L^2 \left(1 + \frac{2L}{r}\right)^{-1} (d\tilde{\chi} + 2\cos\theta d\phi)^2}_{\text{fiber } S^1}$$

$r \simeq 0$ のとき（適当な座標変換をして）

$$dl^2 \simeq d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_3^2 \quad \text{（4次元空間）}$$

$r \gg L$ ならば

$$dl^2 \simeq \underbrace{dr^2 + r^2 d\Omega_2^2}_{\text{3次元空間}} + \underbrace{\boxed{L^2 (d\tilde{\chi} + 2\cos\theta d\phi)^2}}_{\text{コンパクトな余剰次元}}$$

TNUT空間はより高い（偶数）次元に拡張できる（後述）

5D extreme charged squashed Kaluza-Klein black hole

4次元TNUT空間に「D 次元解の作り方」(★) を使うと

$$ds^2 = -\left(1+\frac{\mu}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1+\frac{\mu}{r}\right)^{-1} dl^2_{\mathrm{4D\ TNUT}}$$

$$A_\mu dx^\mu = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{\mu}{r}\right)^{-1} dt$$

が得られる。

特徴：ブラックホール解

小さいスケールでは5次元的に振る舞う

大きいスケールでは4次元的に振る舞う

5D extreme sqKK spacetimeの漸近的な振る舞い

$r \simeq 0$ で $(r_{\mathrm{H}} = 8L\mu)$

$$ds^2 \simeq -\exp\left(\frac{4\tilde{r}}{r_{\mathrm{H}}}\right) d\tilde{t}^2 + d\tilde{r}^2 + r_{\mathrm{H}}^2 d\Omega_3^2$$

$$A_\mu dx^\mu \simeq \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\exp\left(\frac{2\tilde{r}}{r_{\mathrm{H}}}\right) d\tilde{t}$$

2次元AdS×3次元球

$L \to \infty$ で

$$ds^2 \simeq -\left(1 - \frac{r_{\mathrm{H}}^2}{\rho^2}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_{\mathrm{H}}^2}{\rho^2}\right)^{-2} d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_3^2$$

$$A_\mu dx^\mu \simeq \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{r_{\mathrm{H}}^2}{\rho^2}\right) dt$$

5次元

$r \gg L, \mu$ で $(\sigma = d\chi + 2\cos\theta d\phi)$

$$ds^2 \simeq -\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2L+\mu}{r}\right) dr^2 + r^2\left(1 + \frac{2L+\mu}{r}\right) d\Omega_2^2 + L^2\left(1 - \frac{2L-\mu}{r}\right)\sigma^2$$

$$A \simeq \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{\mu}{r}\right) dt$$

4次元的

ホライズン上の曲率

もともとの計量をみるとg_{rr}が$r=0$で発散している
しかしKretschmannスカラーを計算すると，$r=0$で

$$R_{\mu\nu\rho\lambda}R^{\mu\nu\rho\lambda}|_{r=0}=\frac{19}{16L^2\mu^2}$$

よって座標か曲率のどちらかが悪い
Eddington-Finkelstein座標にすると$g_{\mu\nu}$は$r=0$でC^{∞}

$$\downarrow$$

g_{rr}の発散は座標系の悪さに起因している（5次元）

高次元Taub-NUT空間

Taub-NUT空間はより高次元に拡張できる（$D-1=2n+2$）

$$dl^2 = \frac{dr^2}{F(r)} + r(r+2L)d\Sigma_n^2 + L^2F(r)(d\chi + A_n)^2$$

ここで

$$F(r) = \frac{r\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{n-k+1}(n+1)!}{(n+k+2)(n+k+1)(n-k)!k!}L^{n-k}r^k}{(r+2L)^{n+1}}$$

$$d\Sigma_n^2 = (2n+2)\left[d\xi_n + \sin^2\xi_n\cos^2\xi_n\left(d\psi_n + \frac{1}{2n}A_{n-1} + \frac{1}{2n}\sin^2\xi_n d\Sigma_{n-1}^2\right)\right]$$

$$A_n = (2n+2)\sin^2\xi_n\left(d\psi_n + \frac{1}{2n}A_{n-1}\right)$$

$$d\Sigma_1^2 = 4\left(d\xi_1^2 + \sin^2\xi_1\cos^2\xi_1 d\psi_1^2\right), \quad A_1 = \sin^2\xi_1 d\psi_1$$

7D extreme charged squashed Kaluza-Klein black hole

高次元Taub-NUT空間に「D次元解の作り方」(★) を使うと

$$ds^2 = -\frac{dt^2}{H^2(r)}dt^2 + H^{\frac{2}{D-3}}dl^2_{\mathrm{TNUT}}$$

$$A_\mu dx^\mu = \pm\left[\frac{d-2}{2(d-3)}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{H(r)}$$

ここで

$$H(r) = 1 - \int \frac{\mu^{2n-3}}{[r(r+2L)]^{n-1}F(r)}dr \qquad (\mu > 0)$$

特徴：小さいスケールでは7次元的に振る舞う

大きいスケールでは6次元的に振る舞う

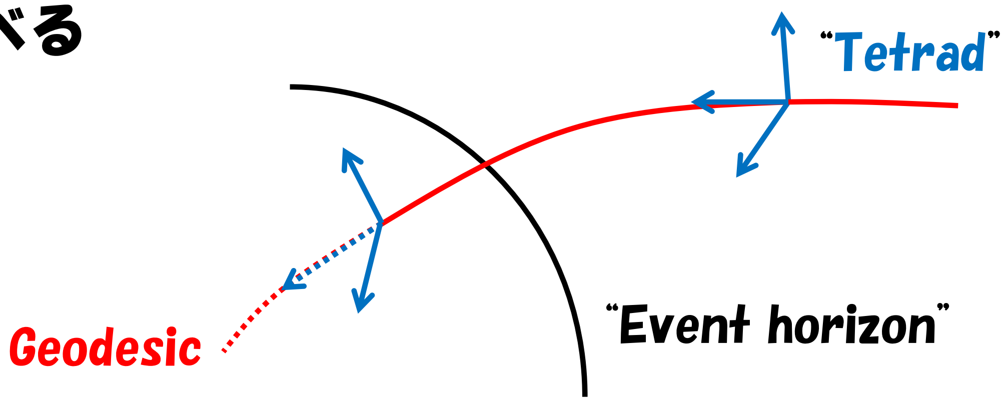
ブラックホール？

5次元の場合と同様に$r=0$でg_{rr}は発散している

しかし，Kretschmannスカラーは有限の値をとる

Eddington-Finkelstein座標をとるとg_{rr}は有限になるが，
Riemannテンソルの発散は解消できない

そこで*parallelly propagated curvature singularity*を使って
$r=0$での特異性を調べる



Parallelly propageted curvature singularity

1. ある測地線を考える（今の場合は下の通り）

$$e^{(0)} = -dt - \sqrt{\frac{(1+g_{tt})g_{rr}}{-g_{tt}}}dr, \quad e^{(0)}_{\mu}\nabla^{\mu}e^{(0)}_{\nu} = 0, \quad e^{(0)}_{\mu}e^{(0)\mu} = -1$$

2. 測地線に沿って平行に移動する“テトラド”を用意する

$$e^{(0)}_{\mu}\nabla^{\mu}e^{(i)}_{\nu} = 0, \quad e^{(0)}_{\mu}e^{(i)\mu} = 0, \quad e^{(i)\mu}e^{(j)}_{\mu} = \delta^{(i)(j)}$$

3. その“テトラド”から曲率テンソルをつくる

$$R_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)} = \left(e_{(\alpha)\mu;\nu;\lambda} - e_{(\alpha)\mu;\lambda;\nu}\right) e^{\mu}_{(\beta)}e^{\nu}_{(\gamma)}e^{\lambda}_{(\delta)}$$

“ホライズン” 上での曲率

$r=0$でのparallelly propagated curvature singularityを計算

$$R_{(0)(2)(0)(2)} \propto \frac{\mu^{2n+1}\left(\frac{\mu^{2n+1}}{L^n}\right)^{\frac{n}{n+1}}}{L^{n+2}r^{2n+1}} \to \infty$$

$$\left(e^{(2)}_\mu dx^\mu = \sqrt{g_{\xi_n\xi_n}}d\xi_n\right)$$

この発散は曲率の悪さによるもの

高次元extreme Reissner–Nordström解の場合はこの発散はない

→ $\boxed{\text{コンパクトな余剰次元の影響で発散が起こった}}$

まとめ

コンパクトな（ひねられた）余剰次元を持つ場合，
高次元（6次元以上）においてはブラックホールにならない
可能性が示唆できた。

課題：
・　コンパクトな余剰次元をもっと増やす
・　その場合はブラックホールになるのかならないのか

など

ありがとうございましたm(_ _)m