

ブラックリング周りの安定束縛軌道

伊形 尚久 (Igata Takahisa)*

大阪市立大学大学院理学研究科 宇宙物理 (重力) 研究室 *D2*

本研究ではブラックリング時空における粒子の安定束縛軌道解析を行った。重力場の次元依存性を反映して、高次元球対称ブラックホール周りを運動する粒子には安定円軌道が存在しないことが知られている。しかしながらブラックリング時空には安定束縛軌道が存在し、特にリング形状に依存して任意に大きいサイズの束縛軌道が存在するということを明らかにした。

I. 導入

力の統一理論の有力候補である超弦理論は、我々の世界が4次元時空ではなく余剰次元をもつ高次元時空であると予言する。弦理論から派生し近年盛んに研究されているブレーンワールドモデルは、我々の住む4次元時空がより高次元時空に埋め込まれた膜(ブレーン)であると解釈し、余剰次元サイズの大きい時空が矛盾なく許容される点で特徴的である。現在のところ Newton 重力の逆二乗則の実験的制限から、余剰次元サイズ ℓ は $\ell \leq 0.1\text{mm}$ という上限値が与えられるに留まっている。このモデルが注目を集めている大きな理由に、近年運用を開始した CERN の Large Hadron Collider 実験において、陽子衝突により加速器内に高次元ブラックホールの生成の可能性が指摘されていることが挙げられる。加速器実験で形成の可能性が示唆されている高次元ブラックホールは、 D 次元時空におけるプランク長を $l_{\text{P}}^{(D)}$ 、加速器内で生成される D 次元ブラックホールの半径 $r_{\text{BH}}^{(D)}$ とすると、 $l_{\text{P}}^{(D)} \ll r_{\text{BH}}^{(D)} \ll \ell$ を満たし得るため、ブレーンの影響が無視できるほど小さいとすれば、古典 Einstein 重力で記述される漸近的平坦なブラックホール解がモデルとして良い近似になる。

高次元一般相対論の枠組みでホライズンをもつ漸近的平坦解はブラックオブジェクトとよばれ、球状の回転ブラックホール解とリング形状のブラックリング解が存在する。4次元真空時空の定常ブラックホールは質量・角運動量のみで特徴付けられる球状回転ブラックホール唯一つに限られるが、ブラックリング解の存在は、高次元時空においてブラックホールの一意性が成り立たないことを示している。したがってブラックホールを同定するには質量・角運動量の情報のみならず、主に粒子軌道などに反映される周辺の重力場に関する情報が必要である。

ブラックホール時空の粒子軌道は、粒子の動径運動の有効ポテンシャルの議論から定性的な振る

*Electronic address: igata@sci.osaka-cu.ac.jp

舞いが理解できる．例えば D 次元 Schwarzschild 時空中の粒子の有効ポテンシャル $V_{\text{eff}}^{(D)}$ は，

$$V_{\text{eff}}^{(D)}(r) = \frac{L^2}{r^2} - \frac{M}{r^{D-3}} + O\left(\frac{1}{r^{D-1}}\right), \quad (1)$$

と与えられる．ここで第一項は遠心力ポテンシャル項，第二項は Newton 重力ポテンシャル項，第三項は Newton 重力からの相対論的補正を表す項である． $D = 4$ の場合，遠心力と Newton 重力のつり合いにより安定束縛軌道が存在し得るが， $D \geq 5$ の場合，Newton 重力ポテンシャルの冪が次元とともに増加するため安定束縛軌道は存在し得ない．この例からもわかるように重力の次元性は，粒子軌道に大きく反映される．

本研究ではブラックリング解を用いた粒子軌道解析を行った．ブラックリングの測地線方程式は現在のところ変数分離ができていない．そこで我々は，ブラックリング周辺の自由粒子の安定束縛軌道に着目しブラックリングの重力場の性質を調べた．その結果，非自明な安定束縛軌道の存在が明らかとなり，ブラックホール時空とは異なる重力場の特質が明らかとなった．さらに安定束縛軌道の存在領域に関係したリング形状パラメーターの臨界値を得た．

II. ブラックリング時空構造

ブラックリング解 [1] は 5 次元 Einstein 方程式の真空解で，その時空計量 $g_{\mu\nu}$ は次で与えられる：

$$ds^2 = -\frac{F(y)}{F(x)} \left(dt - CR \frac{1+y}{F(y)} d\Psi \right)^2 + \frac{R^2 F(x)}{(x-y)^2} \left[-\frac{G(y)}{F(y)} d\Psi^2 - \frac{dy^2}{G(y)} + \frac{dx^2}{G(x)} + \frac{G(x)}{F(x)} d\Phi^2 \right], \quad (2)$$

ここで，

$$F(\xi) = 1 + \lambda\xi, \quad G(\xi) = (1 - \xi^2)(1 + \nu\xi), \quad C = \sqrt{\lambda(\lambda - \nu) \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}}, \quad (3)$$

である．この解を特徴付ける R と ν は，それぞれブラックリングの半径とブラックリングの太さに関係するパラメーターである．パラメーター λ はリングの回転速度に関係するが，解の正則性を要求することにより， $\lambda = 2\nu/(1 + \nu)$ という値に定まる．ブラックリング解は， $y = -1/\nu$ の位置にホライズンをもつ．そのトポロジーは $S^2 \times S^1$ で，これがブラックリングとよばれる所以である．

III. ブラックリング時空における安定束縛軌道

ブラックリング時空のもつ定常性と 2 つの軸対称性より，粒子は対応する 3 つの保存量，エネルギー E ，軌道角運動量 l_Φ, l_Ψ をもつ．自由粒子系のハミルトニアンは，これらの保存量を用いて

$$H = K + E^2 \left[U_{\text{eff}}(\zeta, \rho; l_\Phi, l_\Psi) + \frac{1}{E^2} \right], \quad (4)$$

と書かれる．ここで K は運動項， U_{eff} は有効ポテンシャルで，

$$U_{\text{eff}} \equiv g^{tt} + g^{\Phi\Phi} \ell_{\Phi}^2 + g^{\Psi\Psi} \ell_{\Psi}^2 - 2g^{t\Psi} \ell_{\Psi}. \quad (5)$$

で与えられる． (ζ, ρ) は 2 つの独立な平面における極座標の動径座標をそれぞれ表しており，(2) における (x, y) 座標と次で関係付けられている：

$$\zeta = R \frac{\sqrt{y^2 - 1}}{x - y}, \quad \rho = R \frac{1 - x^2}{x - y}. \quad (6)$$

安定束縛軌道の存在を議論するためには， U_{eff} の極小点に着目すればよい．FIG.1 は， U_{eff} の極小点が存在し得る領域を数値的に調べたものである．5次元ブラックホール周りには安定束縛軌道は存在しなかったのに対して，5次元ブラックリング周りにはそれが存在することが分かる．この図が示

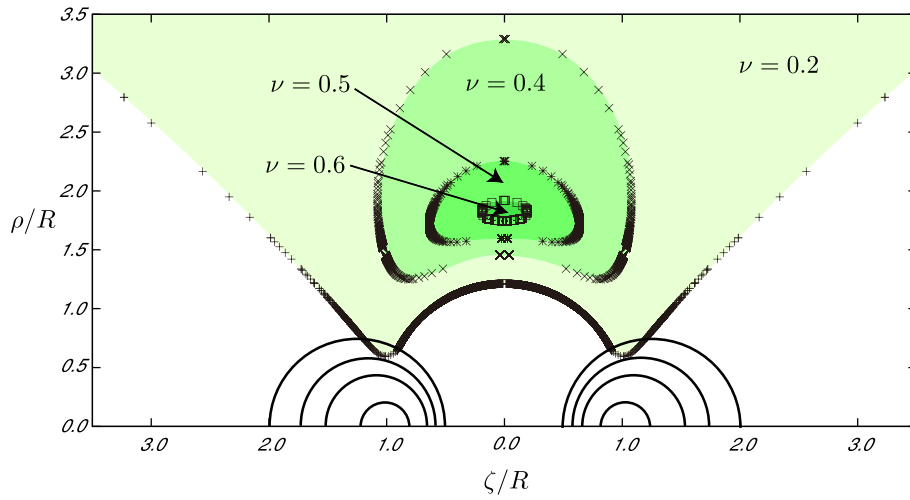


FIG. 1: ζ - ρ 面における安定束縛軌道の存在領域

唆していることは， U_{eff} の極小点が存在しなくなる（すなわち安定束縛軌道が存在しなくなる） ν の臨界値 ν_0 が存在することである．我々はリングの軸上における 1次元ポテンシャル解析により，この臨界値 ν_0 の値を解析的に求めた：

$$\begin{aligned} \nu_0 = & \frac{13}{2} + \frac{1}{2} \left[145 - 24 \left(\frac{2}{3 + \sqrt{41}} \right)^{1/3} + 6 \left(4(3 + \sqrt{41}) \right)^{1/3} \right]^{1/2} - \left[\frac{145}{2} + 6 \left(\frac{2}{3 + \sqrt{41}} \right)^{1/3} \right. \\ & \left. - 3 \left(\frac{3 + \sqrt{41}}{2} \right)^{1/3} + \frac{1783}{2} \left(145 - 24 \left(\frac{2}{3 + \sqrt{41}} \right)^{1/3} + 6 \left(4(3 + \sqrt{41}) \right)^{1/3} \right)^{-1/2} \right]^{1/2} \\ = & 0.65379 \dots \end{aligned} \quad (7)$$

つまりブラックリングのパラメーターが $0 < \nu < \nu_0$ をとる場合には，角運動量パラメーターを適切に選ぶことにより安定束縛軌道が存在する．一方， $\nu_0 < \nu < 1$ のブラックリング周りには安定束縛軌道が存在しない．

図1が示唆するもうひとつの点は、 $\nu = 0.2$ の場合に極小点の位置を示す領域が十分大きく見えることからわかるように、安定束縛軌道が無制限遠方まで存在する可能性があることである。これを確認するためにリング軸上の U_{eff} の漸近展開形をみると、

$$U_{\text{eff}}(\zeta = 0, \rho) \simeq -1 - \frac{4\nu R^2 - (1-\nu)l_\phi^2}{(1-\nu)^2} \frac{1}{\rho^2} + \frac{2\nu R^2(2R^2 - l_\phi^2)}{(1-\nu)^2} \frac{1}{\rho^4}, \quad (8)$$

と書くことができる。よって十分遠方の安定点の位置 ρ_s は、

$$\rho_s = \alpha \times \frac{\nu - 1/3}{l_\phi^2 - \frac{4\nu R^2}{1-\nu}}, \quad (9)$$

ここで、 α は正の定数。 $l_\phi^2 \rightarrow 4\nu R^2/(1-\nu)$ のときに $\rho_s \rightarrow \infty$ に近づく。ただしこれが成立するには $0 < \nu < 1/3$ を満たさなければならない。すなわち $0 < \nu < \nu_\infty = 1/3$ のときに無限遠方まで安定束縛軌道が存在することがわかる。この遠方における安定束縛軌道は、重力ポテンシャルと遠心力ポテンシャルを表す $1/\rho^2$ 項と高次の $1/\rho^4$ 項がつり合うことで存在するため、4次元ブラックホールの場合とは本質的に異なるつり合いをなしている。

IV. 結論

我々は、5次元ブラックリング周りの粒子の安定束縛軌道について議論した。粒子運動のハミルトニアン拘束条件を用いることで、安定束縛軌道の有無の問題は、2次元有効ポテンシャルの極値問題に帰着する。その結果、ブラックリング周りにおける安定束縛軌道の存在が明らかとなり、さらに安定束縛軌道の存在領域に表れる違いからリング形状を決定するパラメータ ν の臨界値を決定した。 $0 < \nu < \nu_0 = 0.65379\dots$ の場合、数値計算の結果から時空領域内に安定束縛軌道をもつ。一方で $\nu_0 < \nu < 1$ の場合、安定束縛軌道は存在しないが、これは5次元ブラックホールにおける安定束縛軌道は存在しないことから考えると、 ν が1に近づくのはブラックリングがブラックホールに近づく方向であることから理解できる。安定円軌道が存在するパラメータ領域の中で特に $0 < \nu < \nu_\infty = 1/3$ の場合、半径無限大の安定束縛軌道が存在し得る。このときポテンシャル極小点は、遠方でNewton重力と遠心力を表す主要項とブラックリング時空の特質を表す高次項とのつりあいによって形成される。

-
- [1] R. Emparan and H. S. Reall, Phys. Rev. Lett. **88**, 101101 (2002) [arXiv:hep-th/0110260].
 - [2] J. Hoskisson, Phys. Rev. D **78**, 064039 (2008) [arXiv:0705.0117 [hep-th]].
 - [3] T. Igata, H. Ishihara and Y. Takamori, arXiv:1006.3129 [hep-th].