

モファット重力による 楕円銀河の力学進化シミュレーション

理工学研究科自然科学基盤系専攻博士後期課程 2 年
素粒子理論・宇宙論研究室 鈴木 隆之

1. 研究の動機と基礎理論

1.1 モファットの重力理論「スカラー・テンソル・ベクトル」重力理論とは

スカラー・テンソル・ベクトル重力理論はモファットが考案した、ダークマターやダークエネルギーと言った所謂「宇宙のダークサイド」を仮定せずに宇宙の進化を説明するとされる重力理論である。以下の作用で書き下される。(本節の内容は2009 Class. Quantum Grav. 26 :085002に基づく。)

$$\begin{aligned} S_G &= -\frac{1}{16\pi} \int \frac{1}{G} (R + 2\Lambda) \sqrt{-g} d^4x, \\ S_\phi &= -\int \omega \left[\frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mu^2 \phi_\mu \phi^\mu + V_\phi(\phi) \right] \sqrt{-g} d^4x, \\ S_s &= -\int \frac{1}{G} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{\nabla_\mu G \nabla_\nu G}{G^2} + \frac{\nabla_\mu \mu \nabla_\nu \mu}{\mu^2} - \nabla_\mu \omega \nabla_\nu \omega \right) + \frac{V_G(G)}{G^2} + \frac{V_\mu(\mu)}{\mu^2} + V_\omega(\omega) \right] \sqrt{-g} d^4x. \end{aligned} \quad (1)$$

(当然のことながら、これらに加えて、物質場の作用も存在する) アインシュタイン重力のテンソル場に加えて、三つのスカラー場とベクトル場があるのでスカラー・テンソル・ベクトル重力と称される。ここで、これらのスカラー場やベクトル場の物理的意味は以下のようなものになる。

- ・ ϕ_μ : 質量のあるベクトル場→物質場と直接結合をもつ
- ・ G : スカラー場 (重力定数に相当) →変化する G
- ・ ω : スカラー場 (ベクトル場と物質の結合を決定)
- ・ μ : スカラー場 (ベクトル場の質量に相当)
- ・ $B_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi_\nu - \partial_\nu \phi_\mu$
- ・ $V_\phi(\phi)$, $V_G(G)$, $V_\omega(\omega)$, $V_\mu(\mu)$ 自己相互作用ポテンシャル

重要な点としてはベクトル場が質量をもっていて、

$$J^\nu = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta \phi_\nu} \quad (2)$$

という形で直接物質と結合していることが挙げられる。

そのため、この理論では物質に対し第五の力として湯川型のものが加わり、それは斥力として導入されている。湯川型の力の「有効到達距離」を与えるベクトル場の質量 μ はスカラー場であり、一定ではなくその時々状況に応じて変化する点もこの理論の特色である。

(後述にあるとおり重力源の質量に依存する)

この作用から重力場方程式を導き、測地線方程式を書き下すと以下の式で与えられる。

$$m \left(\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta \right) = -\alpha \kappa \omega m B^\mu{}_\nu u^\nu. \quad (3)$$

一般相対論とは違い右辺は0ではなく、ベクトル場起因の外力項が加わる。

弱場に於いての質点による重力加速の方程式は以下のように書き下される。

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G_N M}{r^2} \left[1 + \alpha - \alpha(1 + \mu r) e^{-\mu r} \right] \quad (4)$$

これは前述の通り、逆二乗則に、湯川項が付加されるものになっている。

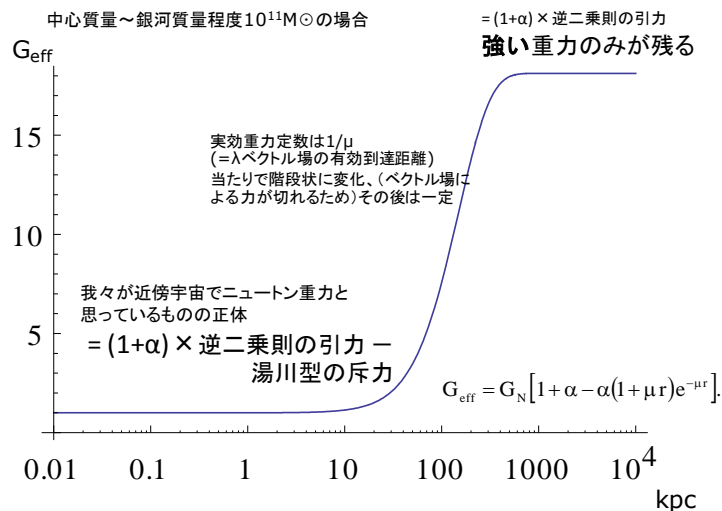


図1 モファット重力による実効重力定数の変化の概念図

式(4)の[]内を実効重力定数の変化と解釈することも可能で、それを図示すると図1のようなものになる。重力源近傍では通常のニュートン重力として振る舞うが、中心天体の質量で決定される典型スケールから実効的重力定数が上昇し、その後ある値で一定になる。より基礎理論に立ち返った説明を行うと、私たちが太陽系スケールで「ニュートン重力」と認識しているものの正体は、逆二乗則の「強い重力」から質量をもつベクトル場によって生じる湯川型の斥力が差し引かれたものであり、ベクトル場の有効到達距離が近づくと斥力が届かなくなり結果的に強い重力のみが残るということを示している。この「強い重力」をダークマターと我々が認識しているとするのが、モファットらの主張である。

中心天体の質量に応じて、典型スケールとGの最大値が変化する！！

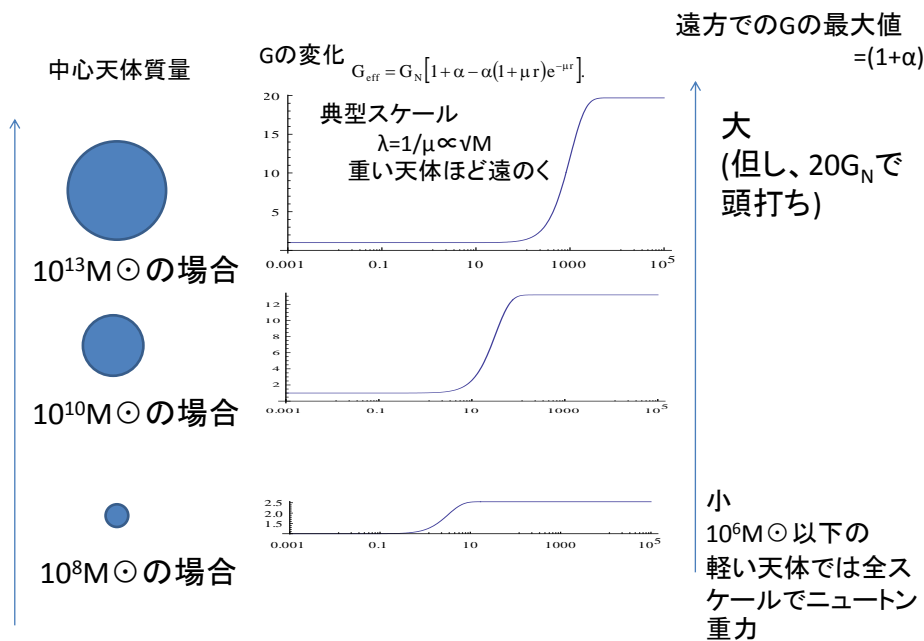


図2 モファット重力による実効重力定数の変化
中心天体の質量に依存する典型スケールと重力定数の増分

ここで、湯川項の典型スケール μ と無限遠に於ける実効重力定数の増分 α は

$$\mu = \frac{D}{\sqrt{M}}, \alpha = \frac{19M}{(\sqrt{M} + E)^2} \quad (5)$$

で与えられ、重力源となる天体の質量が大きいものほど、典型スケールは大きくなり、また無限遠での実効重力定数も大きくなることを示している。(ただし、ニュートン重力の20倍で頭打ちとなる)

ダークマターは宇宙のあらゆるスケールに付随するがその存在比（質量光度比として観測される）はスケールを広げていくと上昇する。だが、銀河団以上のスケールに於いては臨界密度の三割程度で頭打ちになり、これは所謂宇宙論的な意味に於ける宇宙全体のダークマター存在比に一致する。（→図3）

これまでも湯川型の重力でダークマターを説明しようと試みる取り組みはあったが、典型スケールを固定したものでは特定のスケールに於いてのダークマターのみしか説明できず、色々なスケールの天体に付随するダークマターを全て満足に説明することはできない。

モファットの理論に於ける、実効重力定数と天体の質量・大きさの関係を図4に示した。中心天体が重くなればなるほど典型スケールを越えた時の実効重力定数は強くなるが $20G_N$ で頭打ちになっている。モファット重力は観測から推定されるダークマターの存在比の特色を再現し、銀河・銀河団・宇宙論に於けるあらゆるスケールのダークマターによる効果を説明できるとされている。

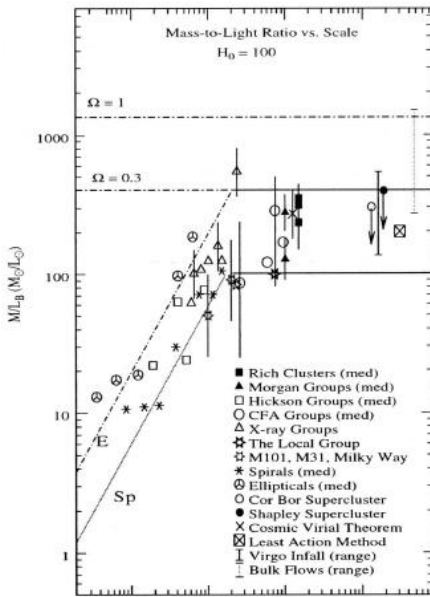


図 3

距離スケールと質量光度比の関係

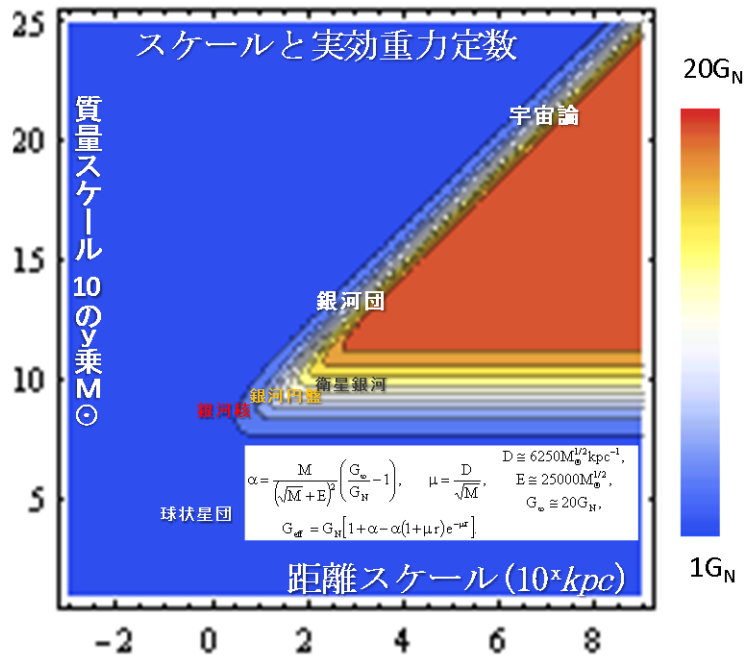


図 4

モファット重力での“スケール”と実効重力定数の関係

大きなスケールほど、ダークマターが
たくさん存在するようになり、ある値で頭打ちになる事も
自然に説明される。

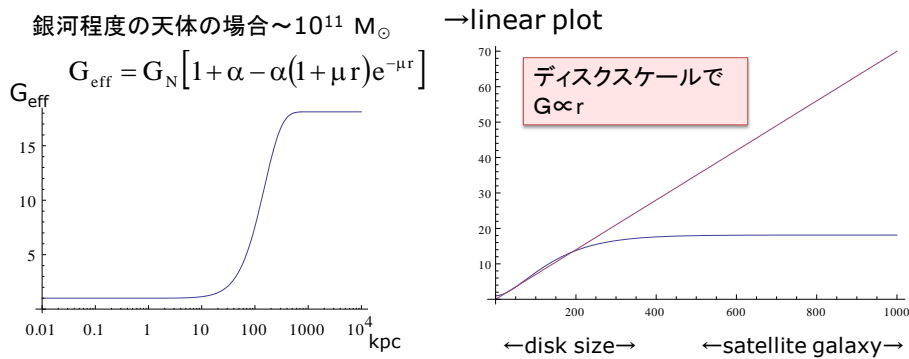
式(5)の D と E は典型スケールや遠方での実効重力定数に関するパラメータである。様々な観測データを考慮した結果、 $D \cong 6250 M_{\odot}^{1/2} \text{ kpc}^{-1}$, $E \cong 25000 M_{\odot}^{1/2}$ と一意に決定され、不定なパラメータは存在しない。したがって、高い予測能力を持つ理論となっている。ダークマターを重力理論の修正で説明する最初の取り組みとなった1980年代のMOND(Modified Newton Dynamics:修正ニュートン力学)とは違い、場当たりの現象論ではなく、先述のとおり作用原理から書き下される相対論的重力理論であり、ここでは詳細には触れないが、宇宙膨張や重力レンズ等の相対論的天体現象にも適応することができる。ダークエネルギーなしに加速膨張宇宙も実現され、現段階でCMB・SDSSのパワースペクトル・Ia型超新星の光度距離など主要な宇宙論的観測データとの比較が行われ概ね一致しているとされている。(arXiv:0710.0364)これらはモファットやその共同研究者による主張であり、客観的な視点での検証を試みる事が本研究の大局的な目標である。

1.2 銀河スケールでのモファット重力

前節では、モファット重力の概要を説明したが、本節では銀河スケールでのモファット重力とそれによるダークマターに対する説明を紹介する。

その前に、なぜ銀河にダークマターが付随すると考えられるようになったのかを振り返る。電磁波で観測される銀河は中心付近に殆どの光源が集中し、中心から離れるに従い急激に明るさは減衰するとされる。(銀河の輝度分布は円盤銀河では $\exp(-r)$ 、楕円銀河では $\exp(-1/4 r)$ とされる。)もし、光っている物質が重力源の全てであれば、中心から離れた部分における回転速度は太陽系等と同じくケプラー則で減衰すると考えられる。ところが、ドップラー効果などを用い、実際に円盤銀河の回転運動を測定すると、銀河中心から離れた部分に於いても回転速度は減衰せず、観測された回転速度と中心からの距離をグラフにすると「平らな回転曲線」が描かれたのであった。これを説明するには、重力源となる光らない未知の物質を仮定する必要がある。

図5 どうして、MOGなら銀河のダークマターなしに平らな回転曲線が説明できるか？



cf:ケプラー運動の式

$$\frac{GM}{r^2} = \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

もし $G \propto r$ なら、 v は定数になる!

それに対するモファット重力による説明は次のとおりである。前節で述べたとおり、モファット重力では中心天体の質量によって決まる典型スケールに於いて実効重力定数の上昇が起こる。銀河程度の質量の場合、実効重力定数の変化は図5の様になる。銀河のディスクスケールに於いて実効重力定数は中心からの距離に比例するようになる。そして、重力定数が中心からの距離に比例しているならば、ケプラー運動に於ける回転速度は一定となる。

以上は単純かつ定性的な説明に留まるが、実際の銀河の観測データを用いた検証も行われている。Brownstein, J. R.; Moffat, J. W. (2006), *Astrophys. J.* 636 に於いては101の渦巻銀河について、恒星やガスの輝度分布からモファット重力に基づき予測した回転曲線をドップラー効果を用いて直接見積もった回転曲線と比較し、良く一致する事が主張されている。

近年は、渦巻銀河の回転曲線のみならず、楕円銀河内の恒星の速度分散を観測から知ることができるようになり、楕円銀河についても力学的にダークマターの存在が示唆されるようになった。(それ以前から楕円銀河を取り巻く高温ガスの温度からダークマターの量はある程度見積もられていた。)これについても、J. W. Moffat and V. T. Toth 2009 *Class. Quantum Grav.* 26 085002 に於いて、ろ座銀河団のCD銀河となる楕円銀河NGC1399の速度分散の観測データとバリオンだけのモファット重力による理論値の比較も示され、良い一致を見ている。(図参照。点は観測値、赤線がニュートン重力による予測、青線はモファット重力による予測)

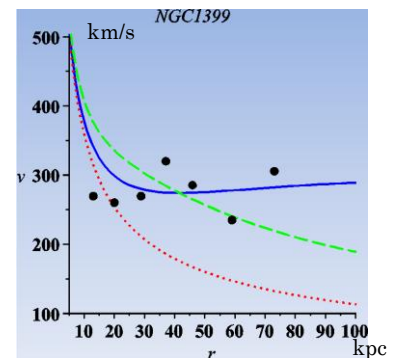


図6 NGC1399の回転曲線

観測値と理論値の比較

2. 本研究の概要と手法

先述のとおり、モファット重力は銀河スケールのダークマターによる効果を合理的に説明している。しかし、これら全て銀河の「静」力学的な観点からの議論であり、銀河の動的な進化や安定性が検証されたわけではない。そういった検証はN体シミュレーションを用いて行われるもので、標準的なダークマターによる銀河モデルの力学進化に関する研究も様々行われている。しかし、モファット重力によるN体シミュレーションによる検証はこれまで殆ど行われていない。そこで今回、銀河スケールにおけるN体シミュレーションを行い、動的な重力多体の振る舞いから理論の検証を試みた。

具体的には、「cold collapse」と呼ばれる計算を行った。これは速度分散の小さい球状に分布する粒子の時間発展を追うという単純なものである。当然、速度分散をあまり持たない為、粒子の集団は相互の重力で収縮し、一定時間を経て、力学平衡の状態安定する。

言わば、N体計算の“練習問題”的な単純なシミュレーションであるが、これは宇宙構造形成期における楕円銀河形成の素過程を示すものとして現在でも重要な意味をもっている。(ただし、銀河団のCD銀河等の大きな楕円銀河は一回のcold collapseで形成されたのではなく、多数の銀河の衝突によって形成されたとする説が主流になっている。) 実際、楕円銀河の輝度分布が $\exp(-1/4 r)$ で減衰するとしているドヴォークルール則はcold collapseの結果と再現されると主張する論文もある。(Aguilar, Merriitt 1990, ApJ, 354, 33)

そのcold collapseについて粒子間相互に働く重力を通常のニュートン重力から

$$\mathbf{a}_i = -G_N \sum_j \frac{(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) m_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} \left\{ 1 + \alpha_{ij} (1 - (1 + \mu_{ij} |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) e^{-\mu_{ij} (|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|)}) \right\} \quad (6)$$

と記述されるモファット重力での加速方程式に変更して行ったのが本研究である。

これは一見するとプログラムコードを一行変更するだけで可能なものに思われるが、そうではない。

N体計算を行う際の α と μ の扱いについて検討が必要になる。

先述の通り、モファット重力の特“長”は「中心天体の質量に依存し、重力が強くなる典型スケール μ (M) やその重力の増分 α (M) が決定される(式(5))」ために、あらゆるスケールに付随するダークマターの効果を説明できるというものであったが、これには大きな自己矛盾を伴うことになる。

重い天体と軽い天体で α と μ が異なるが、そもそも重い天体も軽い天体の集合体と考える事が出来る。実効重力定数の変化について、天体を小割りにして考えると話が変わってくるということである。

もう少し、分かりやすい例をあげると、質量 $2M$ の天体を作る重力場と質量 M の天体が殆ど近接して二つある時に周りに作られる重力場が全く別のものになるということである。この様な事はありえない。

これは、モファット重力の完全な形でのポアソン方程式は現段階では、書き下されていないことによるものであり、式(4)・(5)は点源の発する重力場のみに適応されるものである。

球対称な系や軸対称な系については、 α (M) や μ (M) を決定する質量 M をその半径 r の内部の質量 $M(r)$ と考えた上で記述することができ、1-2節の銀河回転に関する予測はその様な手法で行っている。

モファット重力で対称性のない一般の系を考える場合はどのようにしたら良いのか、モファットらはMNRAS 397 (2009) 1885-1992に於いて、一般の系に於ける α と μ の与え方を記述している。論文では連続な質量分布について記述されているが、それを元に離散的な粒子分布の場合を記述すると以下の様なものになる。式(6)で $\alpha_{ij} \cdot \mu_{ij}$ と記述したがモファット重力の特色である α と μ は各粒子の組み合わせごとと与えられる。

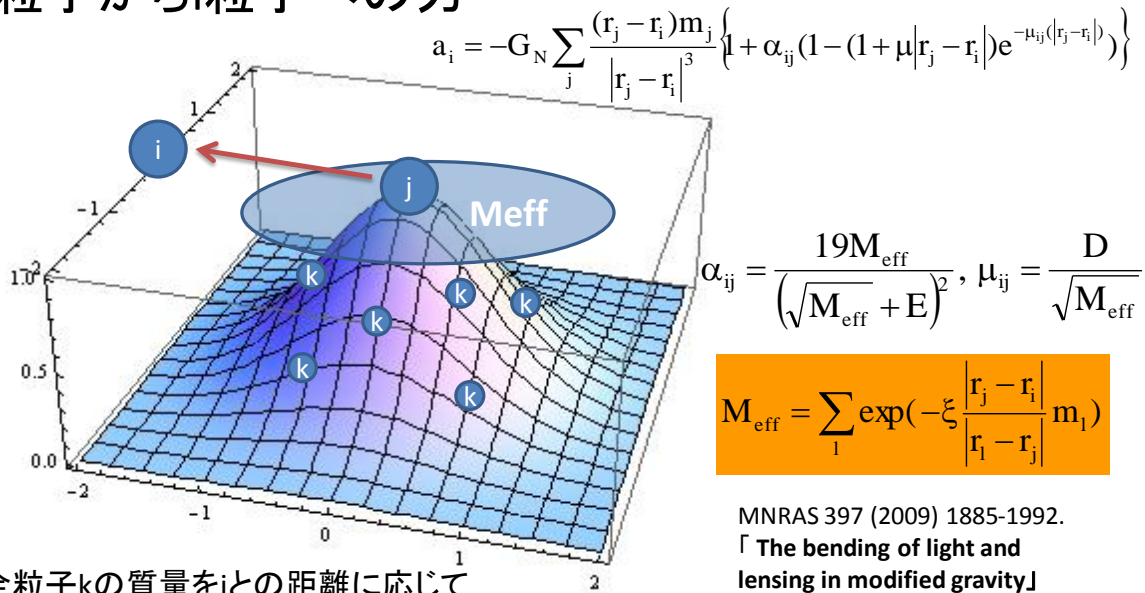
$$\alpha_{ij} = \frac{19M_{\text{eff}}}{(\sqrt{M_{\text{eff}}} + E)^2}, \mu_{ij} = \frac{D}{\sqrt{M_{\text{eff}}}} \quad (7)$$

そしてそれを決定する M はその粒子の質量ではなく、その粒子を含め全粒子 k の質量を ij 間の距離を基準に $\exp(-r)$ で“軽み付け”をして足し上げた、 M_{eff} で与えられる。

$$M_{\text{eff}} = \sum_k \exp(-\xi \frac{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j|}) m_k \quad (8)$$

もう少し定性的な説明を行うと、j粒子がi粒子に与える力を計算する際に用いる、 M_{eff} はj粒子の“周囲”(i粒子を基準にみて)にどのくらい粒子が存在しているかで決定されるということである。j粒子の近傍に何もなければ、 M_{eff} はj粒子の質量に等しくなり、逆に周囲に多数の粒子が近接しているのであれば(そしてその周りには何もなければ)jを含め近接している粒子を足し上げた質量に殆ど等しくなる。

モファット重力でN体計算するには j粒子からi粒子への力



全粒子kの質量をjとの距離に応じて
 $\exp(-r)$ で軽み付けをしたうえで、
足し上げて、 M_{eff} とする。

MNRAS 397 (2009) 1885-1992.
「The bending of light and
lensing in modified gravity」
Authors: [J. W. Moffat](#), [V. T. Toth](#)

二体間の力を計算するために、全粒子の情報がその都度必要 → **N^3 の計算量**

図7 モファット重力のN体計算の概念図

プログラムコードを書く際には、 M_{eff} の計算を行う部分を付加すれば良いので、標準的なN体シミュレーションのコードに対し複雑な修正を加えるものではない。問題はその計算量である。

通常のN体計算の場合、ある粒子に掛かる力を計算するために、その粒子以外からかかる全ての重力相互作用を計算するため、粒子数をNとすると $N \times (N - 1) \sim N^2$ の計算量が必要になる。(作用・反作用の法則を考えると1/2になる。)しかし、この理論の場合、ある二粒子間の力を考える際の α と μ を決定する M_{eff} をその都度考える必要があるため、更にN倍の計算量が必要になり、全体で N^3 の計算量となる。通常のニュートン重力によるN体計算の場合は、国立天文台の天文シミュレーションプロジェクトが運営しているGRAPE等の専用計算機による高速化が可能であり、現在、銀河のシミュレーションはそういった専用計算機を用いて数百万・数千万の粒子を用いた大規模なものが多数行われているが基本法則を変更した場合、そういった専用計算機を利用することはできない。従って、本研究では粒子数を多数用いる事が出来ず、粒子数を2000とした。従って、シミュレーションの解像度や信頼性も近年行われている様々なシミュレーションに比べ大幅に下がる事も予断しておく。

3. 研究結果と考察、今後の課題

モファット重力による cold collapse シミュレーションの結果を以下に述べる。力学平衡に至った粒子分布の速度分散と中心からの距離の関係を考察した。モファット重力でのシミュレーション結果はニュートン重力で行った結果より回転速度が速くかつ中心部から離れた部分でも平坦になりダークマターの効果を再現することは確認された。

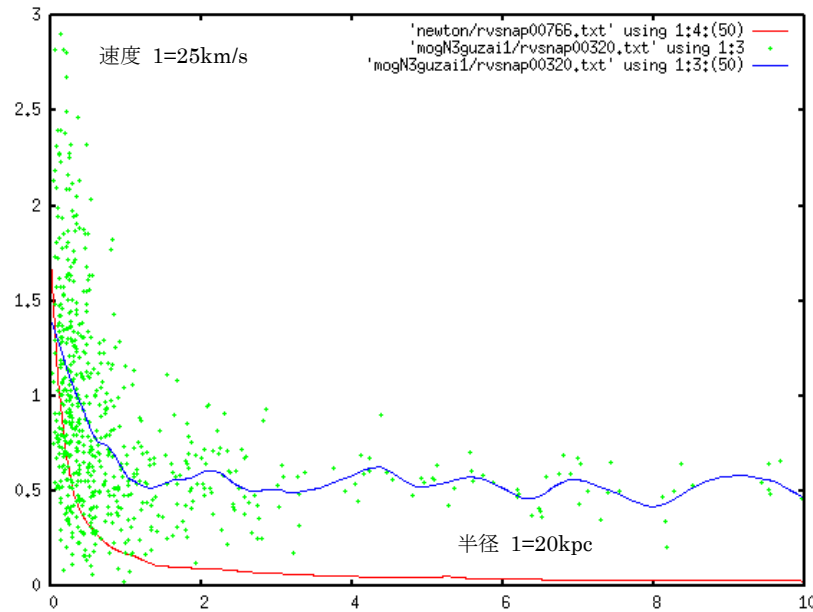


図8 モファット重力で cold collapse をさせた計算例

その一例を示す。図8は質量: $10^9 M_{\odot}$ 半径:20kpc 初期ビリアル比:0.01 の等密度球を初期条件として力学平衡に至った際、の速度分散を示している。(銀河としては比較的小さなものを見ている)縦軸は動径成分の速度、横軸が重心からの距離である。単位系は規格化されているが、速度は $1=25\text{km/s}$ 、半径は $1=20\text{kpc}$ となる。緑色の各点は一つ一つの粒子のデータで、青線はそれらを平均化して滑らかに結んだものである。比較のための同じシミュレーションをニュートン重力で行った場合の結果を赤線で示した。

粒子の質量分布に関する解析も並行して行っているが、ニュートン重力以上に中心への質量集中が進んでいる傾向がみられる。

本来であれば、様々な初期条件(質量や質量分布や初期速度分散を変更して)からシミュレーションを行った上で、最終的な結果の半径・速度分散の関係をまとめ「基本平面」との関係を議論しなければ、この理論が実際の観測される楕円銀河と同等のものを生成するか否かを判断することはできないが、現段階ではシミュレーション結果のサンプル数が少ないため有意な議論はできない。

(基本平面:様々な楕円銀河を観測し、その半径をx軸、速度分散をy軸、表面輝度をz軸のように三次元グラフ上に描いたところ、一つの平面に乗る事がわかっており、それを基本平面と呼ぶ。)

また、粒子数が少なく、現段階では「toy simulation」に留まるのも事実である。前章で説明した N^3 の計算量をこなすシミュレーションを行う必要があり、どうしても解像度(\propto 粒子数)を上げる事が出来ない基本的な問題も解決する必要がある。逆二乗則に限定しない、自由な多体間力が可能になるとされる GRAPE-DR(本年度より試験公開)の利用やGPUなどを用いた並列計算も現在検討している。