

5次元時空におけるブラックリング形状の時間発展数値解析

大阪工業大学 宇宙物理研究室

山田 祐太 (D1)

概要

我々は5次元ブラックオブジェクト解の形成条件や安定性の解析を目的として、5次元時空でのブラックリング形状の物質分布の時間発展解析を行った。ADM形式(4+1分解)を用いて5次元時空とブラックリング形状(回転なし)の時間発展をシミュレーションし、重力崩壊によって形成されるホライズンのトポロジーや形成条件について調べた。

1 導入

現在、相対論研究の重要なテーマとして高次元時空に関する研究がある。我々の住む4次元時空が高次元に埋め込まれているとするモデルの一つで、素粒子標準理論の階層化問題が解決される可能性([1])が指摘されて以来、高次元空間の重力の振る舞いを調べるのが重要な課題となっている。実際に、LHC加速器による実験で高次元モデルの制限が確認されるのではないかと期待されている。我々は、ここ数年重力波波形の計算のために劇的に進展を遂げている数値相対論手法を高次元時空構造に応用し、高次元での未解決問題に取り組んでいる。

4次元時空では、定常軸対称、漸近平坦を仮定した際に導出されるEinstein方程式の解はKerr解に限られることが知られている(唯一性定理)。また、トポロジー定理より、ホライズンの形状は S^2 に限られることも知られている。一方、5次元時空ではKerrと同様な解の他にトポロジーの異なるブラックリング解[2]が発見されており、時空が軸対称という仮定のもとでは解を一意に決められない。また、5次元時空では他にも様々なトポロジーを持つブラックホール解(ブラックオブジェクト)が発見されている。

5次元ブラックオブジェクトに関する未解決問題は多く存在するが、我々は主に以下の問題に取り組んでいる。

1. ブラックオブジェクトの形成条件

ブラックオブジェクトの形成条件はハイパー・フープ仮説[3]で与えられるとされている。しかし、5次元時空での重力崩壊の際にブラックオブジェクトが形成されるのかどうか、また、ハイパー・フープ仮説が成り立つのかどうかは検証されていない。

2. ブラックオブジェクトの安定性解析

ブラックオブジェクト解の安定性の解析は、高次元一般相対論の重要な問題の一つであるが、特殊なトポロジーをもつブラックホール解の安定性解析はほとんど行われていない。

我々は、ブラックリング解の形成条件、及び安定性を数値相対論によって解明することを目的に、5次元時空でのブラックリング形状の物質分布の初期値解の数値解析[4]、及び、時間発展解析を行っている。今回は、ブラックオブジェクト解の形成条件問題に着目し、ADM形式(4+1分解)を用いて5次元時空とブラックリング形状に分布した(回転なし)無衝突粒子の時間発展をシミュレーションし、重力崩壊によって形成されるホライズンのトポロジーについて調べた。

2 ADM形式(4+1分解)

一般相対論は任意の座標変換に対して共变的であり、どのような座標系を設定するかは自由である。よって、数値計算の際に、特定の時間座標を設定して、時間発展を追っていく必要がある。今回は、空間座標と時間座標を分離する一般的な方法であるADM形式を用いて時間発展を追った。ADM形式では、アインシュタイン方程式を発展方程式と時間一定面で満たすべき拘束方程式とに分解されている。時間微分を含まない拘束方程式はそれぞれHamiltonian constraint、momentum constraintと呼ばれ、

$$R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 24\pi^2\rho_H, \quad (1)$$

$$D_j K^j{}_i - D_i K = 12\pi^2 J_i, \quad (2)$$

$$(3)$$

と書ける。また、5次元時空において発展方程式は

$$\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial t} = -2\alpha K_{ij} + D_i\beta_j + D_j\beta_i \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{ij}}{\partial t} = & \alpha({}^{(4)}R_{ij} + K K_{ij}) - 2\alpha K_{il}K^{lj} - 12\pi^2\alpha(S_{ij} + \frac{1}{3}\gamma_{ij}(\rho - S)) \\ & - D_i D_j \alpha + D_i \beta^m K_{mj} + D_j \beta^m K_{mi} + \beta^m D_m K_{ij} \end{aligned} \quad (5)$$

と書ける。 γ_{ij} は空間計量を、 K_{ij} は時間一定面が時空にどのように埋め込まれているかを表す extrinsic curvature という量である。 α はラプス関数と呼ばれ、時間座標のとり方を表す。また、 β^i はシフトベクトルと呼ばれ、空間座標のとり方を表す。さらに、 ρ 、 S_{ij} はそれぞれエネルギー密度とストレス・テンソルを表す。通常は拘束方程式で初期値を求め、その後、発展方程式を解く。

2.1 座標条件

どのような座標系を採用するかは解く問題によってかわってくるが、今回は重力崩壊を数値計算することを念頭におき、特異点出現を回避するスライス条件としてよく採用される maximal time slicing 条件を用いる。maximal time slicing は extrinsic curvature のトレースが超曲面上で

$$\frac{\partial}{\partial t}(\gamma^{ij}K_{ij}) = 0 \quad (6)$$

の条件を満たすように時間発展させる方法で、5次元では

$$D^i D_i \alpha = \alpha(K_{ij}K^{ij} + 8\pi^2\rho + 4\pi^2\kappa S) \quad (7)$$

と書ける。重力崩壊で発生する特異点の近くでは、右辺の項が大きくなるためラプス関数の値は小さくなる。

シフトベクトル β_i に関しては、計算の簡略化のため β_i と固定した。

2.2 数値解析の手順

今回の時間発展数値解析では、4次元リング形状の重力崩壊を追う(但し、回転はなし)。物質の取り扱いを簡単にするため、リング形状を無衝突粒子分布で近似し、それらの粒子の測地線方程式を解いて物質を時間発展させる。リング形状の分布は以下のように表される。

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R_c\right)^2 + \left(\sqrt{w^2 + z^2}\right)^2 \leq R_r^2 \quad (8)$$

ここで R_c はリング形状の大円の半径, R_r は小円の半径を表している。

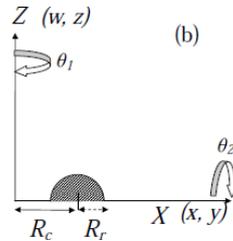


図 1: リング形状分布のイメージ図

初期値は時間反転対称、漸近平坦を仮定し Hamiltonian constraint を解いて求める(初期値設定の詳細は [4] を参照のこと)。以下に数値計算のフローチャートを示す。

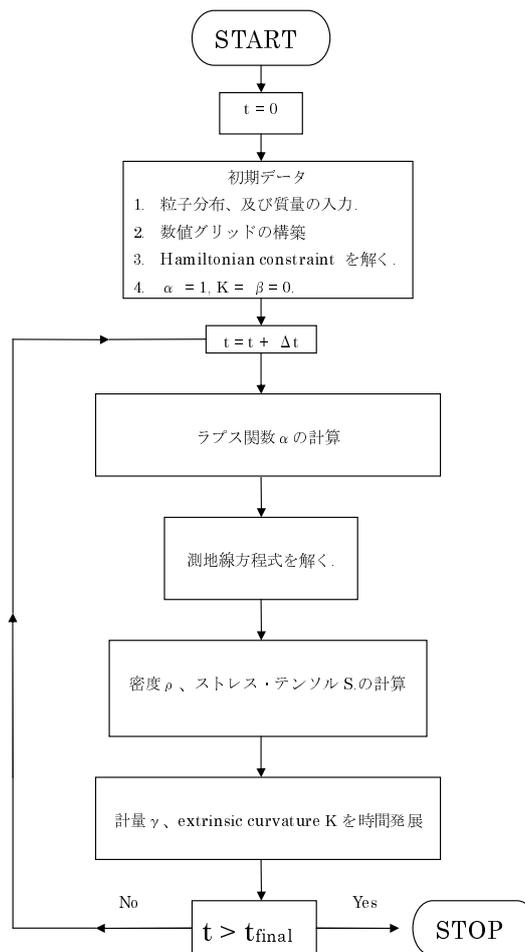
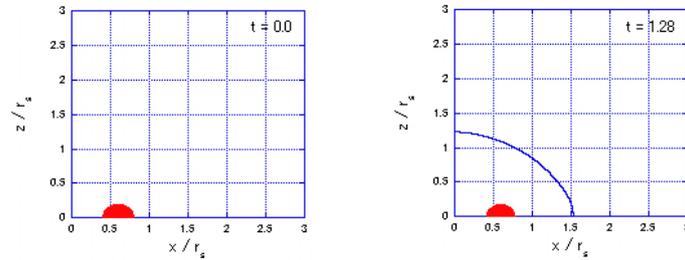


図 2: 非衝突粒子の時間発展数値計算の流れ

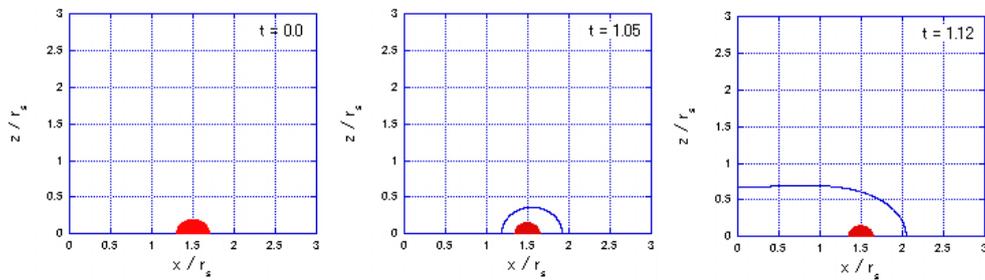
3 結果

5次元時空において、リング形状分布の重力崩壊をシミュレーションした結果、初期のリング形状の大円半径の違いによって、以下に示す3つの特徴的なケースが存在することがわかった。

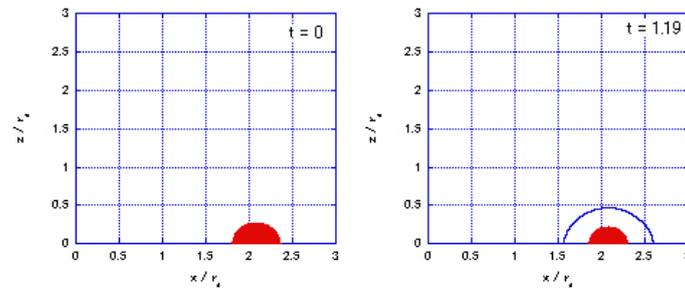
- **Case1.** 初期のリング半径が小さい場合、リング形状全体を覆う S^3 apparent horizon が形成される。



- **Case2.** リング horizon が形成された後、 S^3 horizon に変化する可能性がある。



- **Case3.** 初期のリング半径が大きい場合、リング horizon が形成され、そのまま時間発展する。



4 今後の課題

我々は今後、回転を入れた場合の初期値を数値的に用意し、本格的にブラックリング解の安定性の解析を行う予定である。

Acknowledgements

The numerical calculations were carried out on Altix 3700 BX2 at YITP in Kyoto University.

参考文献

- [1] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999).
- [2] R. Emparan and H. S. Reall, Phys. Rev. Lett. **88**, 101101(2002).
- [3] D. Ida and K. Nakao, Phys. Rev. D. **66**, 064026 (2002).
- [4] Y. Yamada and H. Shinkai, Class. Quant. Grav. **27**, 045012(2010).