2 体の Timelike Shell の衝突

大阪市立大学

加納　有規

今回の発表は K.Nakao,D.Ida and N.Sugiura,Prog.Theor.Phys.101(1999),47. のレビューであり、無衝突粒子で構成された 2 体の球対称 timelike shell の衝突を真空な時空で扱っている。まずは 1 体の shell がどの様な運動をするかを形式化し、その後に無衝突粒子で構成されている shell の性質を用いて shell の衝突を形式化している。その結果、Newton 力学の状況と比べて衝突によるエネルギー移動と運動量変化の違いがみられた。

1　Introduction

宇宙初期の密度揺らぎが重力の相互作用により現在観測されている構造にまで発展している。密度揺らぎの発展を考える上で非線形な密度揺らぎの発展を解析的に扱うことは難しいため N 体シュミレーションが多く用いられている。しかし、Newton 力学の範囲内で球対称な系を考えることにより解析的に取り扱うことが可能である。無衝突粒子を球対称な shell として置きなおし、N-shell 系で shell の運動・衝突のよって密度揺らぎの発展を考えている。これは N.Gouda ,Prog.Theor.Phys.81(1989),648. によって調べられている。

レビューする論文では重力理論として相対論を適用し同様の状況で密度揺らぎの発展を考える足掛かりとして 2 体の場合の shell の運動・衝突を形式化している。

2　Shell の運動

ここでは shell の運動を形式化していく。Shell とは無限に薄く密度が発散している球殻で無衝突粒子によって構成されている。Shell の軌跡は 3 次元空間になるため 4 次元時空中の 3 次元超曲面と見ることができる。よって、面密度をもつ 3 次元超曲面が満たすべき方程式により shell の運動を記述することができる。定義として、添え字が $\alpha, \beta, ...$ は

時空の座標で表しており、$a, b, ..$ は超曲面上の座標で表している。

2.1 接続条件

超曲面が面密度をもっているため、超曲面の外側の時空と内側の時空では計量が異なっている。時空全体の計量を表すと

$$g_{\alpha\beta} = g^{(+)}_{\alpha\beta}\Theta(\ell) + g^{(-)}_{\alpha\beta}\Theta(-\ell)$$

と表すことができる。$g_{\alpha\beta}$ が時空全体の計量、$g^{(\pm)}_{\alpha\beta}$ は外側の時空または内側の時空の計量、$\Theta(\ell)$ は時空全体で定義されている階段関数である。ここで超曲面の両側で異なった計量が超曲面上で連続になるという条件を課す。この条件が接続条件である。

$$[g_{\alpha\beta}] = 0 \qquad\qquad (\text{接続条件})$$

上の記法は超曲面の外側と内側での物理量の差を表している。

時空全体のエネルギー運動量テンソルは超曲面上で密度が発散しているため

$$T_{\alpha\beta} = T^{(+)}_{\alpha\beta}\Theta(\ell) + T^{(-)}_{\alpha\beta}\Theta(-\ell) + S_{\alpha\beta}\delta(\ell)$$

と表すことができる。$T_{\alpha\beta}$ は時空全体のエネルギー運動量テンソル、$T^{(\pm)}_{\alpha\beta}$ は超曲面の外側の時空または内側の時空のエネルギー運動量テンソル、$S_{\alpha\beta}$ 上のエネルギー運動量テンソルである。時空全体で Einstein 方程式 $R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = 8\pi T_{\alpha\beta}$ を満たすべきなので、

$$S_{ab} = -\frac{1}{8\pi}\big([K_{ab}] - h_{ab}[K]\big) \tag{1}$$

となる。h_{ab} は超曲面上の計量で K_{ab} は外的曲率 (超曲面の曲がり具合を表す量である) である。この方程式が超曲面の満たすべき方程式となり、この方程式によって shell の運動が決定する。

2.2 エネルギー方程式

状況設定をしていく。時空の座標として (t, r, θ, ϕ)、超曲面の座標として (τ, θ, ϕ) を用いると shell を構成している粒子の 4 元速度は

$$u^\alpha\big|_\pm = \Big(\frac{dt_{(\pm)}}{d\tau}, \frac{dr}{d\tau}, 0, 0\Big)$$

と表すことができる。球対称、真空という条件からバーコフの定理より Schwarzschild 計量を用いる。

$$ds^2 = -\Big(1 - \frac{2M}{r}\Big)dt^2 + \Big(1 - \frac{2M}{r}\Big)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

M は Schwarzschild 時空の重力の質量パラメータである。これらにより超曲面上の計量と外的曲率を導出する。

超曲面上のエネルギー運動量テンソルは完全流体型のエネルギー運動量テンソルを用いる。

$$S^{ab} = \sigma u^a u^b + P(h^{ab} + u^a u^b)$$

σ を超曲面上の面密度、P を超曲面に接している圧力である。従って方程式 (1) は

$$\Big(\frac{dr}{d\tau}\Big)^2 = E^2 - 1 + \frac{M}{r} + \Big(\frac{m}{2r}\Big)^2 \qquad \text{(エネルギー方程式)}$$

となる。$m = 4\pi r^2\sigma$ で shell の固有質量、$E = \frac{M}{m}$ で shell の全エネルギーと静止エネルギーとの比と見ることができる。

$m = \text{const}$ の場合 E は定数となり shell の運動が決定される。$E^2 < 1$ の場合での shell は束縛運動、$E^2 \geq 1$ の場合での shell は非束縛運動となる。また、$E^2 < 1$ の場合での shell の最大半径 R は

$$R = \frac{1}{2(1 - E^2)}[M + \sqrt{M^2 + m^2(1 - E^2)}]$$

となる。

Shell が 2 体の状況でも同様に考えることができ、衝突前後の shell の運動が決定される。

3 Shell の衝突

ここでは同心球状に配置した無衝突粒子で構成されている 2 体の shell の衝突について形式化していく。衝突前の内側の shell を shell 1、外側の shell を shell 2 とし、衝突後の内側の shell を shell 4 外側の shell を shell 3 と表す。数字が明記されている添え字は shell のラ番号を表しており、添え字 I も同様に shell の番号を表している。

無衝突粒子で構成されている shell が衝突時に満たすべき条件は

(1) shell 1 と shell 3、shell 2 と shell 4 は同一視できる。

(2) それぞれの shell の固有質量は衝突によって変化しない。

(3) それぞれの shell の 4 元運動量は衝突によって変化しない。

以上の 3 つの条件である。条件 (1) と (2) より衝突時

$$m_1 = m_3 \qquad m_2 = m_4$$

条件 (1) と (3) より衝突時

$$u_1^\alpha = u_3^\alpha \qquad u_2^\alpha = u_4^\alpha$$

これらより shell の 4 元運動量は保存されている。衝突の条件より

$$\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_1 - \Delta\mathcal{E}$$
$$\mathcal{E}_4 = \mathcal{E}_2 + \Delta\mathcal{E}$$

を導くことができる。$\mathcal{E}_I$ は shell の全エネルギーを表している。従って、これらの式より系全体のエネルギーは保存されていることが分かる。$\Delta\mathcal{E}$ は常に正であるため、Shell 1 は常にエネルギーを放出し shell 2 は常にエネルギーを得ている。

4 元運動量の動径成分 p_I を調べると

$$p_3 = p_1 - \Delta p$$
$$p_4 = p_2 - \Delta p$$

が導出される。Δp が正であるならば 4 元運動量の動径成分は減少することになる。Newton 近似をした場合、$\Delta p \sim 0$ となり相対論特有の性質であることが分かる。衝突時による 4 元運動量の動径成分の減少は Ricci focusing effect の一種であると思われる。Ricci focusing effect とは、広がっている測地線の束が強いエネルギー領域に侵入することにより広がりが減少することである。広がりの減少が 4 元運動量の減少と結びついていると思われる。

$\Delta\mathcal{E}, \Delta p$ は衝突の状況、つまり衝突前の shell の 4 元速度によって決定されることも計算の結果導かれる。

4 Summary

無衝突粒子で構成されている 2 体の shell の衝突を扱った。衝突によりエネルギー移動、4 元運動量の動径成分の変化が生じ、この変化の量は衝突前の shell の 4 元速度によって決定される。Introduction で述べたように、これらの性質を用いて今後は N-shell 系で考えていく。