CMB PORALIZATION IN EISNTEIN-AETHER THEORY

中島　正裕
The University of Tokyo, RESCEU

Work in progress with 小林努(RESCEU)

2010年度　第40回　天文･天体物理若手夏の学校@豊橋

Introduction to Einstein-Aether theory

- DMや宇宙の加速膨張→修正重力理論≒GR＋new fields
- Lorentz-invarianceを自発的に破るmodel
- Vector Fieldの宇宙論への応用
- Effective Field Theory としての議論

Vector Field!!

“Einstein-Aether Theory”

$$S = \frac{M_p^2}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\,[R+\mathcal{L}_A] + \int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}_m$$

ただし、$\mathcal{L}_A = -[c_1\nabla_a A^b\nabla^a A_b + c_2\nabla_a A^a\nabla_b A^b + c_3\nabla_a A^b\nabla_b A^a + c_4 A^a A^b\nabla_a A^c\nabla_b A_c] + \boxed{\lambda(A^a A_a - 1)}$

Fixed Norm

注）$A_a \longrightarrow \partial_a\phi$と書ける場合、Horava-Lifshitz Gravityとの対応。

Basic quantities for Aether Field

- Energy-Momentum Tensor : $T^{(A)}_{ab} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_A)}{\delta g^{\mu\nu}}$

$$T^{(A)}_{ab} = \nabla_c\left(J_{(a}{}^{c}A_{b)} - J^{c}{}_{(a}A_{b)} - J_{(ab)}A^c\right) + Y_{ab} + \frac{1}{2}g_{ab}\mathcal{L}_A + \lambda A_a A_b + c_4 A^c A^d(\nabla_c A_a)(\nabla_d A_b)$$

$$\left(\begin{aligned} J^a{}_b &= -[c_1\nabla^a A_b + c_2\delta^a_b\nabla_c A^c + c_3\nabla_b A^a + c_4 A^a A^c\nabla_c A_b] \\ Y_{ab} &= -c_1[(\nabla_c A_a)(\nabla^c A_b) - (\nabla_a A_c)(\nabla_b A^c)] \end{aligned}\right)$$

- Equation of Motion for Aether Field :

$$c_1\nabla_c\nabla^c A_a + c_2\nabla_a\nabla_b A^b + c_3\nabla_b\nabla_a A^b + c_4[\nabla_b(A^b A^c\nabla_c A_a) - A^b(\nabla_b A_c)(\nabla_a A^c)] = -\lambda A_a$$

- Fixed Norm Constraint : $A_a A^a = 1$
- Einstein Equation : $G_{ab} = T^{(A)}_{ab} + 8\pi G T^{(m)}_{ab}$

☆以下では、 $c_{13} = c_1 + c_3, \quad c_{14} = c_1 + c_4, \quad \alpha = c_1 + 3c_2 + c_3$ という記法を用いる。

Vector Mode in Einstein-Aether Theory

- Background を flat FRWとすると通常通り Scalar/Vector/Tensor に分解できる

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[-(1+2\phi)d\eta^2 + 2(B_{,i}+S_i)d\eta dx^i + (\delta_{ij} - 2\psi\delta_{ij} + E_{,ij} + F_{i,j} + F_{j,i} + h_{ij})dx^i dx^j\right]$$

$$A^0 = \frac{1}{a}(1-\phi), \qquad A^i = \frac{1}{a}(C_{,i} + \boxed{V_i} - S_i)$$

General Relativity では存在しない、新たな Vector Mode が出現！

- CMB Polarization 特に B-mode は Vector or Tensor Mode から生成されるが、普段は Decaying mode しかない Vector mode 起源のものは無視されている

Aether によって出現したVector Modeが、新たに B-mode を生み出す可能性

Our Works

- Einstein-Aether Theory における linear perturbation の vector mode を Covariant Formalismを用いて定式化

- Aether と Massless Neutrino を考慮した場合の Initial Conditionの導出

- 新たに加わった Dynamical な Vector Mode によって生成される CMB 偏光の Spectrum (EE & BB) を数値的に計算

Background Cosmology [Carrol & Lim, PRD (2004)]

$$ds^2 = a^2(\eta)[-d\eta^2 + d\vec{x}^2], \quad A^a = \left(\frac{1}{a}, 0, 0, 0\right)$$ のとき、

Friedman equations : $\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G_{cos}}{3} a^2 \rho, \quad \mathcal{H}' = -\frac{4\pi G_{cos}}{3}(\rho + 3p)a^2$

ただし、$G_{cos} = \frac{G}{1-(c_1+3c_2+c_3)/2}$ ⇒Aetherの効果は重力定数に繰りこめる。

Background Friedman eqs で登場する重力定数と、
Perturbation eqs で登場する重力定数が異なることに注意

☆Local Experimentの測る重力定数は $G_N = \frac{G}{1+(c_1+c_4)/2}$

➡ BBNからの制限：$\left|\frac{G_{cos} - G_N}{G_N}\right| < 0.1$

Covariant Formalism

- Fundamental 4-velocity $u_a \ (u_a u^a = 1)$ と Projection tensor $h_{ab} = g_{ab} - u_a u_b$

  によって、1+3 分解
- 基本変数 ：

  ✓ Energy-Momentum の分解 $\longrightarrow \rho = T_{ab}u^a u^b, \ p = \frac{1}{3}h_{ab}T^{ab}, \ q_a = -T_{cb}u^b h^c_a, \ \pi_{ab} = \left[h_{(a}{}^c h_{b)}{}^d - \frac{1}{3}h^{cd}h_{ab}\right]T_{cd}$

  ✓ 4-velocity の微分の分解 $\longrightarrow A_a = \dot{u}_a = u_c \nabla^c u_a, \ \Theta = D^a u_a, \ \sigma = D_{\langle a}u_{b\rangle}, \ \omega_{ab} = D_{[a}u_{b]}$

  ✓ Weyl Tensor の分解 $\longrightarrow E_{ab} = C_{acbd}u^c u^d, \ H_{ab} = \frac{1}{2}\epsilon_{acd}C^{cd}{}_{be}u^e$

- Projected Covariant Derivative

$$\dot{Q}^{a\cdots}{}_{b\cdots} = u^c \nabla_c Q^{a\cdots}{}_{b\cdots}$$

$$D_c Q^{a\cdots}{}_{b\cdots} = h^f{}_c h^a{}_d \cdots h^e{}_b \cdots \nabla_f Q^{d\cdots}{}_{e\cdots}$$

FRW metric からの Perturbation を Gauge independent に解析できる

Basic Equations -Einstein&Bianchi-

Constraint eqs.

$$D^a\sigma_{ab}-\frac{1}{2}\mathrm{curl}\Omega_a-\frac{2}{3}D_b\Theta-\kappa q_b=0$$

$$D^aE_{ab}-\kappa\left(\frac{\Theta}{3}q_b+\frac{1}{3}D_b\rho+\frac{1}{2}D^a\pi_{ab}\right)=0$$

$$D^aH_{ab}-\frac{1}{2}\kappa\left[(\rho+p)\Omega_b+\mathrm{curl}q_b\right]=0$$

$$H_{ab}-\mathrm{curl}\sigma_{ab}+\frac{1}{2}D_{\langle a}\Omega_{b\rangle}=0$$

Evolution eqs.

$$\dot{\Omega}_a+\frac{2}{3}\Theta\Omega_a=\mathrm{curl}A_a$$

$$\dot{\sigma}_{ab}+\frac{2}{3}\Theta\sigma_{ab}=-E_{ab}-\frac{1}{2}\kappa\pi_{ab}$$

$$\dot{E}_{ab}+\Theta E_{ab}=\mathrm{curl}H_{ab}+\frac{\kappa}{2}\left[\dot{\pi}_{ab}-(\rho+p)\sigma_{ab}+\frac{\Theta}{3}\pi_{ab}\right]$$

$$\dot{H}_{ab}+\Theta H_{ab}=-\mathrm{curl}E_{ab}-\frac{\kappa}{2}\mathrm{curl}\pi_{ab}$$

Conservation of Energy-Momentum Tensor

$$\dot{q}_a+\frac{4}{3}\Theta q_a+(\rho+p)A_a-D_ap+D^b\sigma_{ab}=0$$

☆以上の式で、FRWからのPerturbationで高次の項は無視している

Aether Field in Covariant Formalism

- Fundamental 4-velocity を使って、Aether Field を $A_b = u_b + D_b V^{(s)} + V_b$ と分解

Perturbation の Scalar Part

Perturbation の Vector Part ($D_b V^b = 0$)

- Aether の運動方程式から、

$$c_{14}\left(\dot{\chi}_a + \frac{2}{3}\Theta\chi_a\right) = -\left(c_{13}D^b\sigma_{ab} + c_1 D^2 V_a + c_3 D_b D_a V^b\right) + \frac{\alpha}{3}\dot{\Theta}V_a \longleftarrow \boxed{\chi_a = \dot{V}_a + \frac{1}{3}\Theta V_a}$$

- Aether の Energy-Momentum Tensor から各成分を読み取ると、

$$\rho^{(A)} = \frac{\alpha}{6}\Theta^2, \quad p^{(A)} = -\frac{\alpha}{6}\left(2\dot{\Theta} + \Theta^2\right) \longrightarrow \text{Background の重力定数を変更}$$

$$q_a^{(A)} = -c_{13}D^b\left[\sigma_{ab} + D_{(a}V_{b)}\right] \longrightarrow \text{Momentum Constraint への補正}$$

$$\pi_{ab}^{(A)} = c_{13}\left\{\dot{\sigma}_{ab} + \Theta\sigma_{ab} + \left[D_{(a}V_{b)}\right]^{\cdot} + \Theta D_{(a}V_{b)}\right\}$$

Basic Equations for Vector Mode in Einstein-Aether Theory

- 基本変数を $Q^m_{a_1 a_2 \cdots a_m}$ $\left(D^2 Q^m_{a_1 a_2 \cdots a_m} = \frac{k^2}{S^2} Q^m_{a_1 a_2 \cdots a_m}\right)$ で展開（特に Vector Part $m=1$ に注目）

$$V_a = \sum V Q^1_a, \quad \sigma_{ab} = \sum \frac{k}{S} \sigma Q^1_{ab}, \quad H_{ab} = \sum \frac{k^2}{S^2} H Q^1_{ab}, \quad q_a = \sum q Q^1_a, \quad \pi_{ab} = \sum \Pi Q^1_{ab}$$

- 展開係数を用いて、基本方程式の Vector Part は次のように書き直される

$$H = \frac{1}{2}\sigma$$

$$q' + 4\mathcal{H} q + \frac{k}{2}\Pi = 0$$

$$k^2 \sigma = \frac{1}{1 + c_{13}} \left(2\kappa S^2 q - c_{13} k^2 V\right)$$

$$\underline{c_{14}\left[V'' + 2\mathcal{H}V' + \left(\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}'\right)V\right] + \alpha\left(\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}'\right)V + c_1 k^2 V} = -\frac{c_{13}}{2} k^2 \sigma$$

subhorizon で 振動、superhorizon で成長解が存在

以上で、
$\Omega_a = \mathrm{curl} u_a = 0$
[zero-vorticity frame]
を選んでいる

Initial Conditions in early R.D. epoch

Conformal timeで級数展開、$S = \frac{\Omega_m \mathcal{H}_0^2}{\omega^2}\left(\omega\eta + \frac{1}{4}\omega^2\eta^2 + \cdots\right)$ を使って、

$$\sigma = \sigma_0\left(1 - \frac{15}{2}\frac{\omega\eta}{4R_\nu^* + 15}\right) - \frac{\nu^*}{\nu^* + 4R_\nu^*}\frac{c_{13}}{1+c_{13}}\mathcal{A}(k\eta)^\nu$$

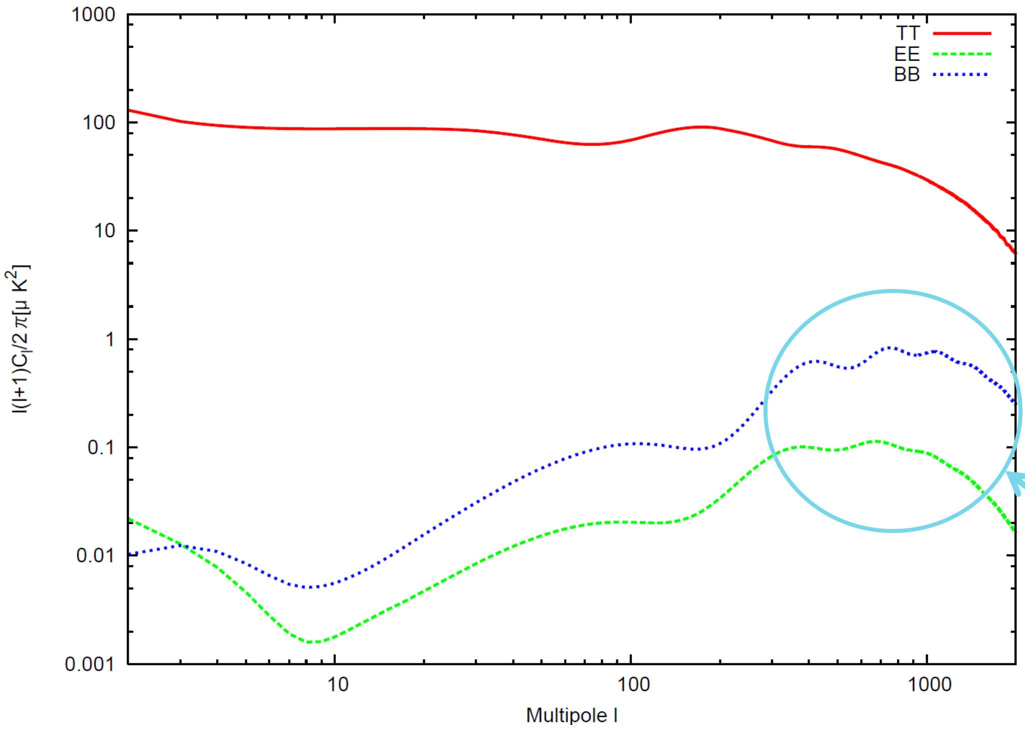
$$v_\gamma = \frac{\sigma_0}{4}\frac{4R_\nu^* + 5}{R_\gamma^*}\left(1 - \frac{3R_b}{4R_\gamma}\omega\eta\right)$$

$$v_\nu = -\frac{\sigma_0}{4}\frac{4R_\nu^* + 5}{R_\nu^*} + \mathcal{O}(\eta^2)$$

$$\frac{\Pi_\nu}{\rho_\nu} = -\frac{2\sigma_0}{3}\frac{k\eta}{R_\nu^*}\left(1 + \frac{3R_\nu^*}{15 + 4R_\nu^*}\omega\eta\right) - \frac{8}{15(1+\nu)}\frac{\nu^*}{\nu^* + 4R_\nu^*}\frac{c_{13}}{1+c_{13}}\mathcal{A}(k\eta)^{1+\nu}.$$

ただし、$R_\nu = \frac{\Omega_\nu}{\Omega_\gamma + \Omega_\nu},\ R_\gamma = \frac{\Omega_\gamma}{\Omega_\gamma + \Omega_\nu},\ R_b = \frac{\Omega_b}{\Omega_{DM} + \Omega_b},\ \nu = \frac{-1 + \sqrt{1 - 8\alpha/c_{14}}}{2},\ R_i^* = \frac{1 - \alpha/2}{1 + c_{13}}R_i,\ \nu^* = \frac{5}{2}(1+\nu)(2+\nu)$

Numerical Result from Modified CAMB



☆Primordial Spectrumは通常のScalar Partと同じものを仮定

$$\mathcal{P}_V(k) = 2.41 \times 10^{-9} \left(\frac{k}{0.05}\right)^{n_s - 1}$$

$$\begin{pmatrix} n_s = 0.963,\ \omega_b = 0.0273, \omega_c = 0.1099, \\ h = 0.71, \tau = 0.087, \\ \alpha = -c_{14} = 0.2,\ c_{13} = -0.3,\ c_1 = 0.1 \end{pmatrix}$$

Subhorizon での Aether Vector Mode の振動を反映している

Appendix -note on scalar & tensor mode-

Assuming single scalar field inflation [Armendariz-Picon et al. (2010)]

☐Scalar

- ◆ 2つのdynamicalなゲージ不変量を構成できる

  → inflaton と aether field の自由度に対応
- ◆ 長波長と短波長で都合の良い変数が異なる

  →長波長の独立な二つのmodeはそれぞれ adiabatic mode と isocurvature mode に対応
- ◆ isocurvature modeはパラメータの値によって多様な振る舞い

☐Tensor

- ◆ 伝搬速度が $c_t^2 = \dfrac{1}{1+c_1+c_3}$ となる → 安定性条件は $1+c_1+c_3>0$