

# インフレーション中の初期ゆらぎのエンタングルメント

大隅雄司 南部保貞  
名古屋大学理学研究科 CG 研

## 1 Introduction

インフレーションシナリオは、現代の宇宙論において、もっとも有力なシナリオである。宇宙初期に加速的な宇宙の膨張があったとすることで、ビッグバンシナリオが抱えていた平坦性問題や地平線問題が解決できる。さらにインフレーションシナリオは、現在の宇宙の大規模構造の由来まで説明することができる。つまり、加速膨張期の場の量子ゆらぎにより質量エネルギー密度ゆらぎが生じ、それが重力不安定性により進化することで大規模構造が生まれたと考えられる。このアイデアは、定量的によく検証されている。

ここで問題になるのが、ゆらぎの古典化の問題である：インフレーション中に生じたゆらぎが量子ゆらぎであるのに対し、インフレーション後を扱う構造形成論ではゆらぎは古典的な確率変数として扱われている。ここで古典的な確率変数とは、ある規格化された正定値の分布関数があり、それによって関連する統計量が計算されるような量のことを指す。たとえば、ある変数  $x$  が古典的な確率変数であるなら、次の条件

$$\int \rho(x) dx = 1 \text{ and } \rho \geq 0 \quad (1)$$

を満たす分布関数  $\rho(x)$  が存在し、平均値  $\langle x \rangle$  や分散  $\langle \Delta x^2 \rangle$  は

$$\langle x \rangle = \int x \rho(x) dx \quad (2)$$

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \int x^2 \rho(x) dx - \langle x \rangle^2 \quad (3)$$

で与えられる。

問題は、量子力学に従う系を古典分布関数を使って記述できるかどうかである。この点に関して示唆的なのが Bell の定理である [1, 2]。この定理によると、系が量子力学特有の相関、いわゆるエンタングルメントを持っているとき、その系を記述できる確率分布は存在しない。たとえば2つのスピン A, B からなる系が、量子状態

$$|\psi_{\text{Bell}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|-\rangle_A |-\rangle_B + |+\rangle_A |+\rangle_B) \quad (4)$$

にあるとする。ここで  $\{|\pm\rangle_{A,B}\}$  は、スピン A, B の  $z$  成分の固有状態である。この状態は Bell 状態と呼ばれ、後に見るように、このとき2つのスピンはエンタングルしている。A, B のスピン変数  $\sigma_{A,x}, \sigma_{A,y}, \sigma_{B,x}, \sigma_{B,y}$  を用いて新しい物理量  $\Sigma$  を

$$\Sigma := \sigma_{A,x} \otimes (\sigma_{B,x} + \sigma_{B,y}) + \sigma_{A,y} \otimes (\sigma_{B,x} - \sigma_{B,y}) \quad (5)$$

と定義すると、 $\Sigma$  の平均値は

$$|\langle \Sigma \rangle| = 2\sqrt{2} \quad (6)$$

となる。一方、スピン変数  $\sigma_{A,x}, \sigma_{A,y}, \sigma_{B,x}, \sigma_{B,y}$  の測定値が古典確率分布にしたがって  $\pm 1$  のいずれかの値をとるとすると、任意の確率分布に対して次の不等式が成り立つ [1] :

$$|\langle \Sigma \rangle| \leq 2. \quad (7)$$

したがって、Bell 状態における物理量  $\Sigma$  の平均値を再現できる古典分布関数は存在しない。この不等式は Bell の不等式と呼ばれる。同様の不等式は、物理量が連続固有値をとる場合にも拡張されている [2].

Bell の定理から、初期ゆらぎが古典分布関数で記述されるのには、初期ゆらぎがエンタングルしていないことが必要である。我々は空間的に離れた 2 点上の場について、その間のエンタングルメントが消える宇宙論的な条件を調べている。本発表では Toy モデルとして、Minkowski 真空、および de Sitter 時空上の共形真空状態にある零質量スカラー場を考え、それらのエンタングルメントを 2 つのモノポール測定器を用いて評価する。

## 2 Entanglement

以降、2 つの 2 準位系についてのみ議論する。

エンタングルした状態の定義は、系の状態が純粋状態なのか混合状態なのかで異なっている。系が純粋状態にある場合、系全体の状態が部分系 A, B の量子状態の直積で書けるのであれば系はセパラブルであるという :

$$|\Psi_{\text{sep}}\rangle = |\psi\rangle_A |\phi\rangle_B. \quad (8)$$

他方、系全体の状態がこのような形に書けないとき、系はエンタングルしているという :

$$|\Psi_{\text{ent}}\rangle \neq |\psi\rangle_A |\phi\rangle_B. \quad (9)$$

たとえば Bell 状態

$$|\psi_{\text{Bell}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|-\rangle_A |-\rangle_B + |+\rangle_A |+\rangle_B) \quad (10)$$

は直積の形に因数分解できないのでエンタングルしている。一方、次の状態は因数分解可能なのでセパラブルである :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} (|-\rangle_A |-\rangle_B + |-\rangle_A |+\rangle_B + |+\rangle_A |-\rangle_B + |+\rangle_A |+\rangle_B) = \frac{1}{2} (|-\rangle_A + |+\rangle_A) (|-\rangle_B + |+\rangle_B). \quad (11)$$

系が混合状態にある場合、セパラブル状態は以下のような形に書ける状態であると定義する。

$$\rho_{\text{sep}} = \sum_n p_n \rho_n^{(A)} \rho_n^{(B)} \quad (12)$$

ここで、 $\rho_n^{(I)}$  は部分系 I の密度演算子、 $p_n$  は系が直積状態  $\rho_n^{(A)} \otimes \rho_n^{(B)}$  にある統計的重みを表し、 $p_n \geq 0, \sum_n p_n = 1$  を満たす。エンタングル状態は、このような形に書けない状態であると定義する。

与えられた状態が直積の形に因数分解できるかどうかを判定するのは、一般に簡単ではない。しかし系のエンタングルの度合いを表す測度があれば、それを計算することで系がエンタングルしているかどうかを系統的に調べることができる。系が純粋状態である場合、そのような量として、エンタングルメント・エントロピー  $S$  がもっとも基本的である；

$$S[\rho] := -\text{Tr}[\rho_A \ln \rho_A]. \quad (13)$$

ここで  $\rho$  は系全体に対する密度演算子、 $\rho_A$  は部分系 A に対する密度演算子で、 $\rho$  を部分系 B についてトレースをとることにより得られる：

$$\rho_A := \text{Tr}_B \rho \quad (14)$$

こうして定義されたエンタングルメント・エントロピー  $S$  は、系がセパラブルであれば 0、エンタングルしていれば正の値をとる。実際、Bell 状態に対しては  $S(|\psi_{\text{Bell}}\rangle\langle\psi_{\text{Bell}}|) = \ln 2 > 0$  となる。

しかし系が混合状態にある場合、エンタングルメント・エントロピーはエンタングルメントの測度としては一般には使えない。なぜなら、セパラブルな状態に対しても 0 でない値を取り得るから。このため混合状態に対しては、系がエンタングルしているかどうかを判定する別の方法が必要になる。そのような判定方法の一つに PPT (Positive Partial Transpose) 条件がある [3, 4]。部分系 B についての部分転置を以下のように定義する；

$$(\rho^{T_B})_{\mu\alpha;\nu\beta} := \rho_{\mu\beta;\nu\alpha}. \quad (15)$$

ここで、セミコロンの前の添え字が行の、後ろの添え字が列の成分を表す。今考えている系は 2 体系なので、密度行列の添え字は 4 つになっている。ここでは部分系 B に対応する添え字を  $\alpha, \beta$  で表した。明らかに部分転置は行列のトレースを変えない： $\text{Tr} \rho^{T_B} = \text{Tr} \rho$ 。したがって、 $\text{Tr} \rho^{T_B} = 1$ 。このとき PPT 条件は以下の通り：もし  $\rho^{T_B}$  が負の固有値を持つなら、系はエンタングルしている。これはエンタングルメントの十分条件であるが、今考えているような 2 体の 2 準位系については必要十分条件となる。したがって、与えられた密度行列を部分転置した行列の固有値を調べれば、系がエンタングルしているかどうか分かる。エンタングルメントの測度 Negativity を、以下のように定義する：

$$\mathcal{N}(\rho) := \|\rho^{T_B}\| - 1 \quad (16)$$

ここで  $\|A\|$  は、演算子  $A$  の固有値の絶対値の和である。 $\text{Tr} \rho^{T_B} = 1$  だから、系がエンタングルしているとき、またその時にかぎり、 $\|\rho^{T_B}\| > 1$ 。したがって、Negativity は系がエンタングルしているとき、またその時にかぎり、正の値をとる。

### 3 Detector model

我々は初期量子ゆらぎがエンタングルしているかどうかを評価したい。しかし量子場は本質的には多体系であり、また物理量の固有値は連続的な値をとる。現在のところ、多体系がエンタングルメントしているかどうかを判定する一般的な方法は見つかっておらず、粗視化する、あるいは2つの自由度を抜き出してくるなどして、系の自由度を2つに落とす必要がある。

ここでは、スカラー場と結合する2つの粒子測定器を通して間接的にスカラー場のエンタングルメントを評価する [5]。粒子測定器とは、古典的な測地線に沿って運動する質点で、場と量子力学的に結合する2準位からなる内部自由度を持つ。測定器の状態が上の準位から下の準位へ遷移すると、そのエネルギーギャップ分だけのエネルギーを持った場の量子が放出され、逆に場の量子を吸収すると準位が上がる。測定器とスカラー場の相互作用描像での相互作用ハミルトニアンは

$$H_{\text{int}} := g(\tau) M(\tau) \phi(\tau, \mathbf{x}(\tau)), \quad (17)$$

$$M(\tau) := e^{i\Omega\tau} \sigma_+ + e^{-i\Omega\tau} \sigma_-, \quad (18)$$

$$g(\tau) := \exp \frac{-\tau^2}{2\sigma^2}. \quad (19)$$

ここで、 $\tau$  は測定器の固有時、 $\mathbf{x}(\tau)$  は測定器の世界線、 $\Omega$  は測定器の2つの準位間のエネルギーギャップ、 $\sigma_{\pm}$  は測定器の Hilbert 空間上の昇降演算子である。 $g(\tau)$  は結合定数に相当する因子であるが、時間に依存する。これを仮に定数にすると、測定器の相関関数などに紫外発散が現れるため、有限の時間間隔においてだけ有限の値を持つような関数にする必要がある。ここでは簡単のため Gaussian とした。この因子は、測定器のスイッチの on/off を表していると解釈できる。

Minkowski 真空状態にある場に2つの測定器 A, B が結合しているという状況を考える。ただし測定器の初期状態は  $|- \rangle_A |- \rangle_B$  で、2つの測定器のスイッチは同時に入れる、つまり結合因子  $g_A(\tau)$ ,  $g_B(\tau)$  の時間の原点をそろえる。また、2つの測定器は直接は相互作用しないとする。エンタングルメントは局所的なユニタリ発展だけでは生じ得ないので、もし測定器がエンタングルするようになったら、それは場を通じた間接的な相互作用によるものと見なさなければならない。我々はこれを、場が元々持っていたエンタングルメントを測定器が抽出したと解釈する。

したがって、計算の手順は以下の通り。上記の初期条件で、1次の摂動を計算する。測定器の間のエンタングルメントが見たいので、場の自由度をトレースアウトする。こうして得られた2つの測定器に対する密度行列について、Negativity を計算する。2つの測定器の状態は一般に混合状態なので、これらの間のエンタングルメントはエンタングルメント・エントロピーでは評価できないことに注意。2つの測定器が座標系に対して静止している場合、Negativity の表式は次のようになる：

$$\mathcal{N} = |Y| - X \quad (20)$$

$$Y := -2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t_1} g(t_1) g(t_2) e^{i\Omega(t_1+t_2)} \langle 0 | \phi(t_1, \mathbf{x}_A) \phi(t_2, \mathbf{x}_B) | 0 \rangle dt_2 dt_1 \quad (21)$$

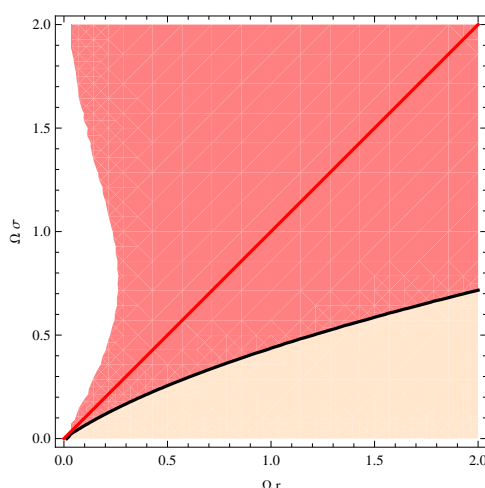
$$X := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t_1) g(t_2) e^{-i\Omega(t_1-t_2)} \langle 0 | \phi(t_1, \mathbf{x}_A) \phi(t_2, \mathbf{x}_B) | 0 \rangle dt_2 dt_1 \quad (22)$$

ここで  $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B$  は測定器 A, B の位置座標. Minkowski 真空の場合, 伝搬関数は

$$\langle 0 | \phi(t_1, \mathbf{x}_A) \phi(t_2, \mathbf{x}_B) | 0 \rangle = -\frac{1}{(t_1 - t_2 - i\varepsilon)^2 - r^2}. \quad (23)$$

ただし,  $r := |\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B|$ .  $Y$  は伝搬関数を含んでいるので, 2つの測定器が量子を交換する確率を意味する.  $X$  は場の自己相関を含んでいるので, 1つの測定器が量子を放出または吸収し, 再び吸収または放出する確率を意味する. したがって Negativity の表式から, エンタングルメントは測定機関の量子の交換によって生成されると解釈できる.

測定器間の距離  $r$  を横軸, 測定時間  $\sigma$  を縦軸にとって Negativity をプロットすると以下のようなになる.



(a)

ここでは黒い太線が Negativity 0 の境界を表しており, その下の領域では系はセパラブル, 上の領域ではエンタングルしている. 紅い太線はヌルコーンを表しており, ヌルコーンからエンタングルメントがしみ出してきていることがわかる. これは一見因果律を破っているように見えるが, エンタングルメントを使って古典的な情報をやりとりすることはできないので, 因果律は破られていない.

## 4 Entanglement of the primordial perturbation

本節では曲がった時空の上の量子場として, de Sitter 時空上の共形結合する零質量テスト実スカラー場を考え, 前節と同じ要領で2点間のエンタングルメントを評価する.

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 d\mathbf{x}^2; \quad (a := e^{Ht}) \quad (24)$$

$$S = \frac{-1}{2} \int \left( \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{6} R \phi^2 \right) \sqrt{-g} d^4 x. \quad (25)$$

ここで、 $R$  は時空の Ricci スカラー、 $g$  はメトリックの行列式である。共形時間  $d\eta := (1/a)dt$  と共形変数  $\chi := a\phi$  を導入する。このとき Fourier モード  $\chi_{\mathbf{k}}$  に対するモード方程式は

$$\chi_{\mathbf{k}}'' + \mathbf{k}^2 \chi_{\mathbf{k}} = 0. \quad (26)$$

モード関数に対する規格化条件

$$\chi_{\mathbf{k}} \chi_{\mathbf{k}'}'^* - \chi_{\mathbf{k}'}^* \chi_{\mathbf{k}}' = i \quad (27)$$

からモード関数は一般に

$$\chi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{2k}} (\cosh \Theta_{\mathbf{k}} e^{-ik\eta} + \sinh \Theta_{\mathbf{k}} e^{ik\eta}). \quad (28)$$

ここで  $\Theta_{\mathbf{k}}$  は任意実数。ここでは正振動数解を選ぶ：

$$\chi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\eta}. \quad (29)$$

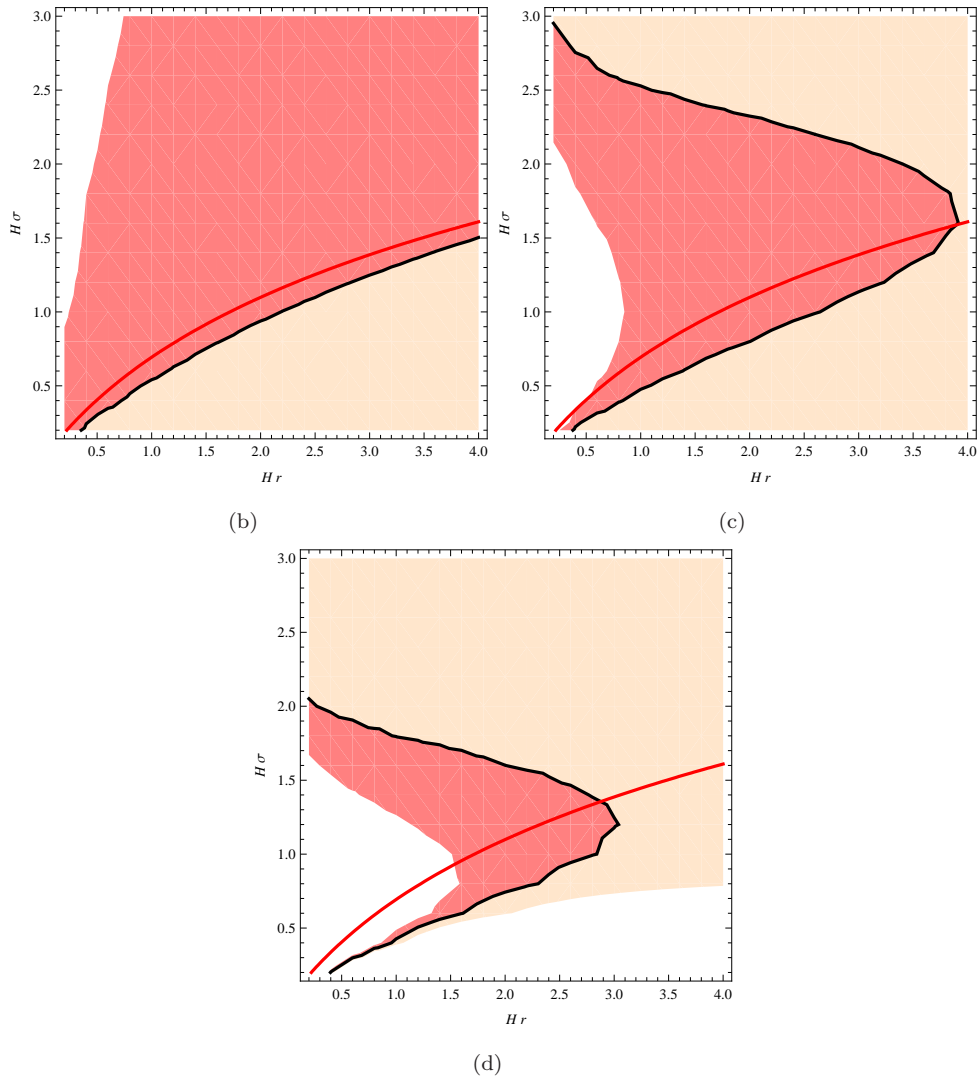
このモード関数に対応する消滅演算子  $a(\mathbf{k})$  によって定義される真空（共形真空）を場の状態に選ぶ：

$$a(\mathbf{k})|0\rangle = 0 \quad (30)$$

次に、2つの測定器 A, B を共動距離  $r$  だけ離して設置する。状況設定として、前節同様2つの測定器の初期状態を  $|-\rangle_A |-\rangle_B$  とし、これらは直接相互作用しないものとする。また A, B と場の結合因子  $g_A(\tau)$ ,  $g_B(\tau)$  の時間の原点はそろえる。このとき Negativity の表式は Minkowski 真空の場合と同じになる。ただし場の2点関数として de Sitter 時空上の零質量スカラー場に対する Wightman 関数を用いる：

$$D^+(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B) = -\frac{H^2}{(2\pi)^2} \frac{\eta_1 \eta_2}{(\eta_1 - \eta_2 - i\varepsilon)^2 - r^2}. \quad (31)$$

これを用いて計算した結果が次のグラフである：



グラフはそれぞれ  $\Omega = 0.5H$ ,  $\Omega = H$ ,  $\Omega = 1.5H$  の場合である。ここで再び、横軸が測定器間の距離  $r$ 、縦軸が測定時間  $\sigma$ 、赤い領域がエンタングルしている領域、赤い太線が光の測地線である。Minkowski 真空の場合と同様ヌルコーンからエンタングルメントがしみ出してきているが、 $\Omega = H$ ,  $\Omega = 1.5H$  の場合はその領域がホライズンの数倍のスケールで止まり、再びセパラブルな状態に戻ることがわかる。このことから、これらの場合においてはホライズンの数倍のスケールにおいては古典的なゆらぎに近づいていると考えられる。一方、 $\Omega = 0.5H$  の場合にもそのようなエンタングルメントの広がりがあるかどうかは今のところわかっていない。また、 $\Omega$  が大きいほど測定器は振動数が大きいモードと結合しており、その意味において局所的な場の性質が見えていくと考えられるが、直感的には局所的になるほど膨張の効果は効きにくくなり、古典化しにくいと考えられるが、結果は逆になっている。このことの解釈は今後の課題である。

## 参考文献

- [1] J. S. Bell, Physics 1, 195, 1964

- [2] E. G. Cavalcanti, C. J. Foster, M.D. Reid, and P. D. Drummond, *Phys. Rev. Lett.* 99, 210405 (2007)
- [3] A. Peres, *Phys. Rev. Lett.* 77, 1413 (1996)
- [4] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, *Phys. Lett. A* 223, 1 (1996)
- [5] B. Reznik, [quant-ph/0008006v1](#); *Found. Phys.* 33, 167 (2003); B. Reznik, Alex Retzker, and Jonathan Silman, *Phys. Rev. A* 71, 042104 (2005)