

k-inflation 模型における密度ゆらぎの成長と 観測からの制限

東京理科大学 辻川研究室：修士2年 大橋 純子

1 研究背景

ビッグバン宇宙論の地平線問題や平坦性問題を解決するために、宇宙初期に急激な加速膨張期があったというインフレーション理論が提唱されている。インフレーション理論では、宇宙初期に存在した量子ゆらぎが急激な膨張で引き延ばされて古典的なゆらぎになったと考えられ、このように理論的に予言されるスカラーゆらぎが、WMAPなどの観測から得られる宇宙背景放射の温度ゆらぎとよく一致したことから、インフレーション理論は初期宇宙を記述する現実的な理論として強く信じられるようになり、現在まで様々なインフレーション模型が提唱されている。このゆらぎは理論的には、インフレーションを引き起こすインフラトンのゆらぎと計量のゆらぎを考慮することで得られる摂動アインシュタイン方程式を解くことで記述でき、スカラー型、ベクトル型、テンソル型のゆらぎがそれぞれ存在する。重要なのはスカラー型とテンソル型のゆらぎで、スカラーモードの曲率ゆらぎは宇宙背景放射の温度ゆらぎや大規模構造の密度ゆらぎに対応していて、テンソルモードのゆらぎは原始背景重力波に対応している。重力波は透過性が強いので、初期宇宙を探る道具として注目されているが、未だ直接的には観測されていない。これらのゆらぎに対して以下の観測パラメータ

$$\left\{ \begin{array}{ll} n_s = 0.963 \pm 0.012 \text{ (68\%CL)} & : \text{Spectral Index} \\ r < 0.20 \text{ (95\%CL)} & : \text{Scalar-Tensor Ratio} \\ f_{nl} < 26 \pm 140 \text{ (68\%CL)} & : \text{Non-Gaussianity} \end{array} \right.$$

が導入されていて、様々な理論模型を評価する指標となっている。ここにあげた数値は現在の観測的な制限を示している [1]。この中でも3つめのノンガウシアニティという、ゆらぎの三点相関から得られる非線形性を示すパラメータが最近注目されている。このパラメータによって始めて区別される模型もあり、様々な理論模型を区別する新しいパラメータとして今後有用であると期待される。

2 研究目的

ラグランジアンが運動エネルギー項 - ポテンシャル項 $p(X, \phi) = X - V(\phi)$ (但し $X = -1/2 g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$) の標準スローロールインフレーション模型では、ノンガウシアニティの値が1より十分小さくなるのが分かっているが (スローロールのオーダー)、現在の観測の制限ではノンガウシアニティが1より十分大きな値もまだ許されており、ラグランジアンが一般形 $p(X, \phi)$ で、運動エネルギーの非線形項を含むようなk-inflation と呼ばれるタイプの模型では、ノンガウシアニティが1より十分大きくなり得る可能性があるため、これによってモデルの区別ができることから、本研究ではk-inflation 模型における観測パラメータについて議論する。

3 k-inflation 模型

ラグランジアン的一般形を用いた次の作用

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{16\pi G} + p(X, \phi) \right) \quad (1)$$

から出発する。ただし、 $X = -1/2 g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$ 。

3.1 Back ground equation

ラグランジアン密度の一般形 $p(X, \phi)$ からエネルギー運動量テンソルを計算すると、密度 ρ と圧力 P は

$$\rho = 2X p_{,X} - p \quad (2)$$

$$P = p(X, \phi) \quad (3)$$

となる (ただし $_{,X}$ は X での偏微分)。アインシュタイン方程式より

$$3h^2 = 8\pi G a^2 \rho \quad (4)$$

$$h' - h^2 = -4\pi G a^2 (\rho + p) \quad (5)$$

が得られ (ただし、 $'$ は共形時間 $\eta = \int a^{-1} dt$ での微分を表し、 $h = \frac{a'}{a}$)、連続方程式は

$$\rho' + 3h(\rho + p) = 0. \quad (6)$$

また、作用の ϕ についての変分より運動方程式が

$$\frac{1}{a^2} (\phi'' - \phi' h) \left(p_{,X} + \frac{\phi'^2}{a^2} p_{,XX} \right) + 3 \frac{h}{a^2} p_{,X} \phi' + \frac{\phi'^2}{a^2} p_{,X\phi} - p_{,\phi} = 0 \quad (7)$$

となる。またここで、音速 c_s が

$$c_s^2 \equiv \frac{p_{,X}}{\rho_{,X}} = \frac{\rho + p}{2X \rho_{,X}} = \frac{p_{,X}}{p_{,X} + 2X p_{,XX}} \quad (8)$$

と定義され、標準スローロールインフレーション模型では $p_{,X} = 1$ で $c_s^2 = 1$ なのに対し、k-inflation 模型では一般に c_s は 1 ではなくて変化する。

3.2 Perturbations

計量対して、次のような摂動を考える。

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \delta g_{\mu\nu} \quad (9)$$

$\delta g_{\mu\nu}$ にはスカラー、ベクトル、テンソル型の摂動があり、スカラー量 A, B, ψ, E 、ベクトル量 S_i, F_i 、テンソル量 h_{ij} を用いて

$$\delta g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} -2A & B_{|i} - S_i \\ B_{|j} - S_j & -2(\psi \gamma_{ij} - E_{|ij}) + (F_{i|j} + F_{j|i}) + h_{ij} \end{pmatrix} \quad (10)$$

と書ける。ただし、ここでは共形時間 $\eta = \int a^{-1} dt$ を用いており、 $_{|i}$ は共変微分を表している。これよりアインシュタインテンソルを計算すると次のようになる。

$$\delta G_0^0 = \frac{2}{a^2} [3h(hA + \psi') - \nabla^2(\psi + h(E' - B))] \quad (11)$$

$$\delta G_i^0 = -\frac{2}{a^2} [hA_{|i} + \psi'_{|i}] \quad (12)$$

$$\delta G_j^i = \frac{2}{a^2} \delta_j^i [A(2h' + h^2) + hA' + \psi'' + 2h\psi'] + \frac{1}{a^2} [\nabla^2 D \delta_j^i - D_{|j}^i] \quad (13)$$

ただし、 $D = [A - \psi - (E' - B)' - 2h(E' - B)]$ とした。

次に、インフラトン場の摂動

$$\phi = \phi^{(0)} + \delta\phi \quad (14)$$

を考慮してエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ の摂動を計算すると次のようになる。

$$\delta T_0^0 = p_{,X} \frac{\phi'}{a^2} (A\phi' - \delta\phi') + p_{,XX} \frac{\phi'^3}{a^4} (A\phi' - \delta\phi') + p_{,\phi} \delta\phi - \frac{\phi'^2}{a^2} p_{,X\phi} \delta\phi \quad (15)$$

$$\delta T_i^0 = -\frac{1}{a^2} p_{,X} \delta\phi_{|i} \phi' \quad (16)$$

$$\delta T_j^i = \left[\frac{\phi'}{a^2} p_{,X} (-A\phi' + \delta\phi') + p_{,\phi} \delta\phi \right] \delta_j^i \quad (17)$$

以上より、アインシュタインテンソルとエネルギー運動量テンソルを組み合わせることによって、摂動アインシュタイン方程式 $\delta G_\mu^\nu = 8\pi G \delta T_\mu^\nu$ が得られる。

3.2.1 Scalar perturbations

はじめにスカラー摂動の式は、spacially flat ゲージ ($\psi = E = 0$) を用いると、摂動アインシュタイン方程式の $(0, 0)$, $(0, i)$, (i, j) 成分から、

$$3h^2 A + h \nabla^2 B = 4\pi G a^2 \left[\frac{\rho + p}{c_s^2} \left(A - \left(\frac{\delta\phi}{\phi'} \right)' - \frac{\delta\phi}{\phi'} h \right) + 3h \frac{\rho + p}{\phi'} \delta\phi \right] \quad (18)$$

$$hA = 4\pi G a^2 \frac{\rho + p}{\phi'} \delta\phi \quad (19)$$

$$A + B' + 2hB = 0 \quad (20)$$

が得られる。ここで $\Psi \equiv \psi + h(E' + B)$ で定義されるゲージ不変量を用いてこれらの式を書き直すと、

$$\nabla^2 \Psi = \frac{4\pi G a^2 (\rho + p)}{c_s^2 h} \left(h \frac{\delta\phi}{\phi'} \right)' \quad (21)$$

$$\left(\frac{a^2 \Psi}{h} \right)' = \frac{4\pi G a^4 (\rho + p)}{h^2} h \frac{\delta\phi}{\phi'} \quad (22)$$

という形になる。新しい量

$$v \equiv z \left(h \frac{\delta\phi}{\phi'} \right) \quad (23)$$

$$z \equiv \frac{a^2 (\rho + p)^{1/2}}{c_s h} \quad (24)$$

を定義してさらに変形すると,

$$v'' - c_s^2 \Delta v - \frac{z''}{z} v = 0 \quad (25)$$

が得られる. ここで今, 曲率 $\mathcal{R} = h\delta\phi/\phi'$ と対応しており, $v = z\mathcal{R}$ である. このゆらぎの式をフーリエモード

$$v(\mathbf{x}, \eta) = \frac{1}{(2\pi)^{2/3}} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} v_k(\eta) d^3k \quad (26)$$

で展開すると

$$v_k'' + \left(c_k^2 k^2 - \frac{z''}{z} \right) v_k = 0 \quad (27)$$

のようになり, スローロール近似では $z''/z \sim 2(aH)^2$ であるので, $v_k'' + (c_s^2 k^2 - 2(aH)^2) v_k = 0$ について解を見積もると, 漸近的な過去 ($c_s k \gg aH$) において解は

$$v_k = \frac{e^{-ic_s k \eta}}{\sqrt{2c_s k}} \quad (28)$$

となり, 長波長極限 ($c_s k \ll aH$) では

$$v_k = Cz \quad (C \text{ は定数}) \quad (29)$$

でほぼスケール不変のゆらぎとなる. この二つの解を, horizon-crossing ($c_s k = a_* H_*$) で合わせると,

$$|C|^2 = \frac{1}{2c_s k z_*^2} \quad (30)$$

となる. したがって large-scale での曲率ゆらぎのパワースペクトルは, horizon-crossing の値で計算すれば,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathcal{R}} &\equiv \frac{k^2}{2\pi^2} |\mathcal{R}|^2 = \frac{k^2}{2\pi^2} \frac{|v_k|^2}{z^2} \\ &\sim \frac{H^2}{m_{pl}^2 \pi c_s \epsilon_s} \Big|_{c_s k = a_* H_*} \end{aligned} \quad (31)$$

ただし, ϵ_s はスローロールパラメータ $\epsilon_s \equiv -\dot{H}/H^2$. このスペクトルは実際は少しずつ変化しているので, 波数 k に依存する. その依存性はスペクトル指数 n_s というパラメータで表され,

$$n_s - 1 \equiv \frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \ln k} \Big|_{c_s k = a_* H_*} \quad (32)$$

$$= -2\epsilon_s - \eta_s - s$$

$$\therefore n_s = 1 - 2\epsilon_s - \eta_s - s \quad (33)$$

となる. ただしここでスローロールパラメータ

$$\epsilon_s \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad \eta_s \equiv \frac{\dot{\epsilon}_s}{H\epsilon_s}, \quad s \equiv \frac{\dot{c}_s}{Hc_s} \quad (34)$$

を用いた.

3.2.2 Tensor perturbations

摂動論により、摂動のテンソル部分 h_{ij} には

$$h_{ij}^j = 0 \quad \text{transverse} \quad (35)$$

$$h_i^i = 0 \quad \text{traceless} \quad (36)$$

という条件が付き、これよりテンソル摂動は2つの自由度を持つので、この自由度を $\lambda = +, \times$ と表し、これに対応する偏光テンソル e_{ij}^λ を導入すれば、 h_{ij} は次のように書ける。

$$\begin{aligned} h_{ij} &= h_\lambda e_{ij}^\lambda \\ &= h_+ e_{ij}^+ + h_\times e_{ij}^\times \end{aligned} \quad (37)$$

摂動アインシュタイン方程式より、テンソル摂動の式は

$$\frac{1}{2a^2} [(h_{ij})'' + 2h(h_{ij})' - \nabla^2 h_{ij}] = 0 \quad (38)$$

となるので、

$$h_{ij}'' + 2hh_{ij}' - \nabla^2 h_{ij} \quad (39)$$

を得る。ここで、 $h_{ij} = h_\lambda e_{ij}^\lambda$ をフーリエ展開

$$h_\lambda e_{ij}^\lambda = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k h_{\lambda,k} e_{ij}^\lambda e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (40)$$

すると、テンソル摂動の式は

$$h_{\lambda,k}'' + 2hh_{\lambda,k}' + k^2 h_{\lambda,k} = 0 \quad (41)$$

となり、新たな量 $u_\lambda \equiv ah_{\lambda,k}/\sqrt{16\pi G}$ を導入して変形すると

$$u_\lambda'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right) u_\lambda = 0 \quad (42)$$

と書ける。スローロール近似では $a''/a \sim 2(aH)^2$ であるので、 $u_\lambda'' + (k^2 - 2(aH)^2) u_\lambda = 0$ となる。この式は、スカラー摂動で出て来た式と同じ形なので、同じようにテンソル摂動のパワースペクトルが計算でき、

$$\mathcal{P}_T \sim \frac{16H^2}{m_{pl}^2 \pi} \Big|_{k=a_* H_*} \quad (43)$$

となる。 \mathcal{P}_T のスケール依存性を $\mathcal{P}_T \propto k^{n_T}$ とし、スペクトル指数は

$$n_T \equiv \frac{d \ln \mathcal{P}_T}{d \ln k} \Big|_{k=a_* H_*} = -2\epsilon_s \quad (44)$$

と求まる。

以上より、スカラーテンソル比 r は

$$r \equiv \frac{\mathcal{P}_T}{\mathcal{P}_R} \sim 16\epsilon_s c_s \quad (45)$$

となる。

また、重要な観測パラメータとして非ガウス性 f_{nl} があり、これは先攻研究で計算されていて [2],

$$f_{nl} = -0.28 \left(1 - \frac{1}{c_s^2}\right) + 0.02 \frac{\epsilon_s}{\epsilon_X} s - 1.53\epsilon_s - 0.42\eta_s \quad (46)$$

となっている (ただし $\epsilon_X = -\frac{\dot{X}}{H^2} \frac{\partial H}{\partial X}$) .

4 まとめ

以上より、k-inflation 模型における観測パラメータをまとめてみると、

$$\begin{cases} n_s = 1 - 2\epsilon_s - \eta_s - s & : \text{Spectral Index} \\ r = 16\epsilon_s c_s & : \text{Scalar-Tensor ratio} \\ f_{nl} = -0.28 \left(1 - \frac{1}{c_s^2}\right) + 0.02 \frac{\epsilon_s}{\epsilon_X} s - 1.53\epsilon_s - 0.42\eta_s & : \text{Non-Gaussianity} \end{cases}$$

となる。

ここで注目することは、それぞれのパラメータに音速 c_s が入ってくることで、特にノンガウシアニティを見ると $1/c_s^2$ という形に入っているので、標準スローロール模型で $c_s^2 = 1$ の場合は第一項がゼロ、他項はスローロールパラメータより 1 より十分小さいので、ノンガウシアニティが小さい値になることが分かるが、k-inflation 模型のように、一般に c_s が 1 でない場合、例えば c_s がゼロに近いような値であれば、第一項が 1 より十分大きくなることより、ノンガウシアニティが大きな値を持ち得るということが分かる。

このように、 f_{nl} によって様々なインフレーション模型の区別ができることから、今後はノンガウシアニティを評価することが重要であると考えられる。また、将来的な Planck 衛星の結果により、 f_{nl} の制限が強くなると予想され、観測的に好まれるモデルにつながると期待される。

謝辞

本研究・発表を行うにあたり、熱心な指導・助言をして下さった、東京理科大学・辻川信二先生に心より感謝致します。また、研究発表の機会と場を与えて下さった、夏の学校運営委員の皆様にも心より感謝申し上げます。

今回の貴重な研究の機会です。学んだことを活かし、今後も更なる精進をしていきたいと思っております。

参考文献

- [1] E. Komatsu et al. arXiv:1001.4538, [astro-ph.CO] (2010).
- [2] D. Seery and J. Lidsey, JCAP 0506:003 (2005).
- [3] C. Armendariz-Picon, T. Damour and V. F. Mukhanov, Phys. Lett. B458, 209 (1999).
- [4] J. Garriga and V. F. Mukhanov, Phys. Lett. B458, 219 (1999).
- [5] X. Chen, M. Huang, S. Kachru and G. Shiu, JCAP0701, 002 (2007).