

Galileon 修正重力理論における球対称崩壊

木村蘭平

1 INTRODUCTION

近年の様々な観測 (Ia 型超新星、宇宙背景放射、弱い重力レンズ) などから現在の宇宙が加速膨張しているということが示唆されている。この加速膨張を説明するために、宇宙項をアインシュタイン方程式に加えることで現在のところ様々な観測をパスしている。しかし、この宇宙項が一体何であるのかは今のところ分かっておらず、これを量子場の理論における真空のエネルギーとして考えると 120 桁ものオーダーで食い違うという宇宙項問題がある。この宇宙の加速膨張を説明するには宇宙項を導入する以外に新しい未知の物質源 (クインテッセンスなど) を仮定することで説明しようとする試みと、重力理論自身を変更することによって現在の宇宙を記述しようという試みがある。後者の場合、太陽系スケールでは十分に一般相対性理論が有効な理論として実証されているため、小さいスケールでは相対性理論からのずれは非常に小さい必要があり、初期宇宙においてもビッグバン元素合成の水素・ヘリウムの存在比から同様にほぼずれがないような理論を構成する必要がある。つまり、非常に大きいスケールにおいてのみ変更を受けるような理論である必要がある。理論の検証については、大規模構造・Ia 型超新星の観測をパスしてから初めて有効な理論であるといえる。

2 GALILEON SCALAR-TENSOR THEORY

ここでは Brans-Dicke Theory に自己相互作用をもつような非線形スカラー場の項を加えた理論を考える。その作用は次のように与えられる [2][3][4]。

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\phi R - \frac{\omega}{\phi} (\nabla\phi)^2 + \frac{\lambda^2(\phi)}{\phi^2} \square\phi (\nabla\phi)^2 + \mathcal{L}_m \right], \quad (2.1)$$

ここで ω は BD parameter, $\lambda(\phi)$ は coupling function, \mathcal{L}_m 物質のラグランジアン, $\square\phi = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi$, and $(\nabla\phi)^2 = \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi$ である。この作用は Jordan Frame で記述されているため、一般のエネルギー運動量保存が成り立つ。このラグランジアンにはスカラー場に対する 2 階微分を含むが運動方程式には 3 階微分方程式は含まれない。この非線形な項は $\partial_\mu \phi \rightarrow \partial_\mu \phi + b_\mu$ という対称性の元でラグランジアンが不変であるという要求をミンコフスキー時空上で課すことで得られるラグランジアンの一般的な拡張となっている [1]。この作用から、変分を取ることで、アインシュタイン方程式と Galileon field の方程式はそれぞれ、

$$G_{\mu\nu} = \frac{T_{\mu\nu}}{2\phi} + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square\phi) + \frac{\omega}{\phi^2} \left[\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla\phi)^2 \right] - \frac{1}{\phi} \left[\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \left[\frac{\lambda^2}{\phi^2} (\nabla\phi)^2 \right] \nabla^\lambda \phi + \nabla_\mu \left[\frac{\lambda^2}{\phi^2} (\nabla\phi)^2 \right] \nabla_\nu \phi - \frac{\lambda^2}{\phi^2} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi \square\phi \right], \quad (2.2)$$

$$R + \omega \left[\frac{2\square\phi}{\phi} - \frac{(\nabla\phi)^2}{\phi^2} \right] + \frac{2\lambda^2}{\phi^2} [\nabla_\mu \nabla_\nu \phi \nabla^\mu \nabla^\nu \phi - (\square\phi)^2 + R_{\mu\nu} \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi] + \left(\frac{\lambda^2}{\phi^2} \right)'' (\nabla\phi)^2 (\nabla\phi)^2 + 4 \left(\frac{\lambda^2}{\phi^2} \right)' \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi \nabla^\mu \nabla^\nu \phi = 0 \quad (2.3)$$

となる。ここでダッシュは ϕ による微分を表す。以下、次のような coupling function

$$\lambda^2(\phi) = r_c^2 \left(\frac{2\phi}{M_{PL}^2} \right)^\alpha. \quad (2.4)$$

を考える。ここで、 r_c^2 は crossover scale と呼ばれ、おおざっぱにハッブルホライズン H^{-1} のオーダーととり、 α はモデルパラメータである。また、プランク質量 $M_{PL}^2 = (8\pi G)^{-1}$ という記法を用いる。

3 BACKGROUND EVOLUTION

ここでは背景時空での宇宙の進化を考える。曲率をゼロと仮定すると平坦な FRW 計量は

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j, \quad (3.1)$$

で与えられる。このとき、アインシュタイン方程式と場の方程式は

$$3H^2 = \frac{\rho}{2\phi} - 3HI + \frac{\omega}{2}I^2 + \lambda^2(\phi) \left(3H - \frac{\alpha-2}{2}I\right) I^3 \quad (3.2)$$

$$-3H^2 - 2\dot{H} = \frac{p}{2\phi} + \dot{I} + I^2 + 2HI + \frac{\omega}{2}I^2 - \lambda^2(\phi) \left(\dot{I} + \frac{\alpha}{2}I^2\right) I^2 \quad (3.3)$$

$$6 \left(2H^2 + \dot{H}\right) - \omega \left(2\dot{I} + I^2 + 6HI\right) \quad (3.4)$$

$$- \lambda^2(\phi) \left[6 \left(2HI + \dot{H}I + 2HI^2 + 3H^2I\right) I - 4(\alpha-2)I^2\dot{I} - (\alpha-2)(\alpha+1)I^4\right] = 0$$

となる。ここで、 H ハッブルパラメーター、 ρ は物質のエネルギー密度、 p 物質の圧力、また、 $I = \dot{\phi}/\phi$ と定義した。

3.1 Self-accelerating Solutions

加速膨張解をもつようなパラメータを探すためここでは self-accelerating solution を探す。このとき $\rho = p = 0$ とし、また、 $s = I/H$ を定数、さらに非線形項が現在において支配的になると仮定する。すると、

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{1}{2}\alpha s, \quad (3.5)$$

となり、

$$s = \frac{-(2-\alpha) \pm \sqrt{-6\omega - (2-\alpha)(4+\alpha)}}{\omega + 2 - \alpha} \quad (3.6)$$

を得る。この s が解を持つためには、ルートの中が正である必要があるので、その条件は $\omega < -(2-\alpha)(4+\alpha)/6$ である。さらに加速膨張であるための条件は $\ddot{a} > 0$ なので、これから

$$H^2 + \dot{H} = 1 - \frac{1}{2}\alpha s > 0 \quad (3.7)$$

であることがわかる。この Self-accelerating 解を持つようなパラメータ領域を図 1 に示してある。

3.2 Early-time Solutions

初期宇宙において、一般相対論と一致するためには初期条件として $I \ll H$ である必要がある。すると、

$$\lambda^2(\phi)I^2 \approx \frac{2H^2 + \dot{H}}{3H^2 + \dot{H}} \quad (3.8)$$

一般相対論の解と一致するには $H \approx 2t/3$ となればよいので、これから、 $\lambda^2(\phi)I^2 \approx 1/3$ となる。このとき、 I はほとんど一定で、これが I の初期条件を与える。よって初期宇宙においては、通常の Friedmann 方程式

$$H^2 = \frac{\rho}{2\phi} \quad (3.9)$$

$$-3H^2 - 2\dot{H} = \frac{p}{2\phi}. \quad (3.10)$$

となり、これが初期宇宙における VainshteinMechanism である。

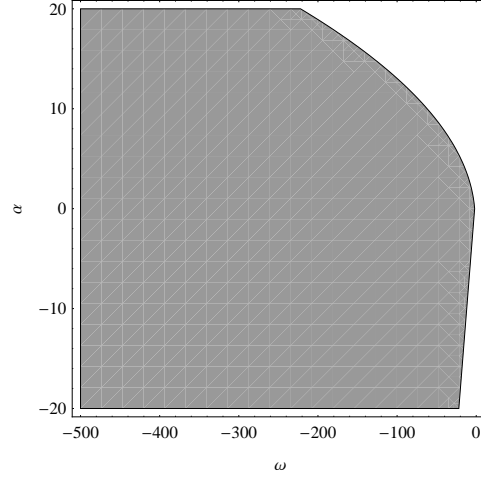


図1 加速膨張を起こすパラメーター領域

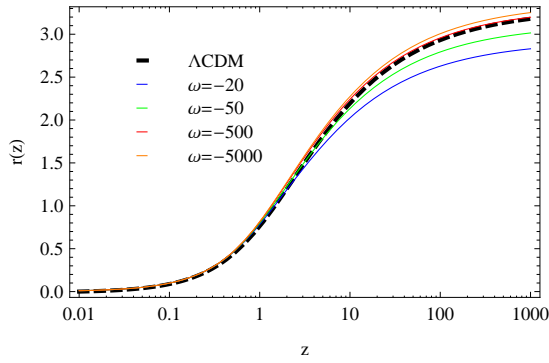


図2 共同座標距離

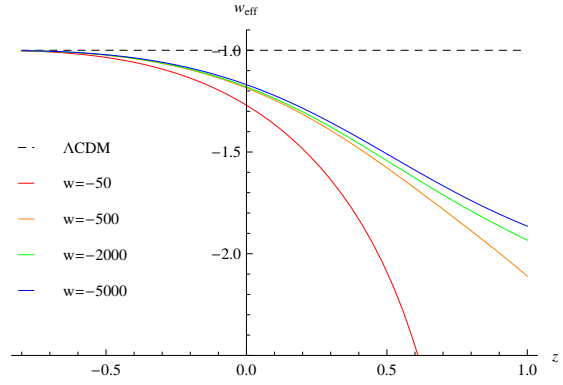


図3 状態方程式

4 Ia型超新星からの制限

Ia型超新星は距離指標となるため、この模型におけるモデルパラメーター ω と α 、物質密度 Ω_m に制限をつけることができる。SCP Union2 Compilation の 557 個の Ia 型超新星のデータから得られた制限が図 4,5,6 である。

5 GHOST INSTABILITY CONDITION

Galileon scalar-tensor theory が GhostFree で安定であることを示す。まず、Galileon Field に摂動 $\phi \rightarrow \phi(1 + \varphi)$ を加え、ホライズンより十分内側であり、さらに Friction term を無視すると、

$$\kappa(t)\ddot{\varphi} - \beta(t)\frac{\nabla^2}{a^2}\varphi = 0 \quad (5.1)$$

となる。ここで、

$$\kappa(t) = 3 + 2\omega + \lambda^2(\phi) (12HI + 2(1 - 2\alpha)I^2 + 3\lambda^2(\phi)I^4). \quad (5.2)$$

$$\beta(t) = 3 + 2\omega + \lambda^2(\phi) (4\dot{I} + 2I^2 + 8HI - \lambda^2(\phi)I^4). \quad (5.3)$$

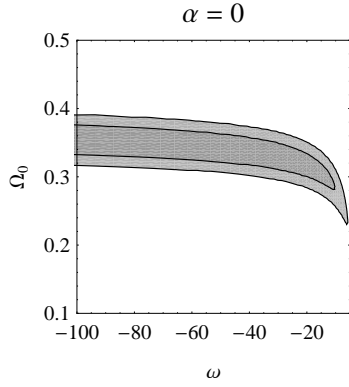


図 4 $\alpha = 0$

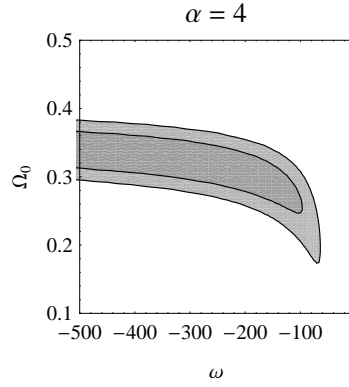


図 5 $\alpha = 4$

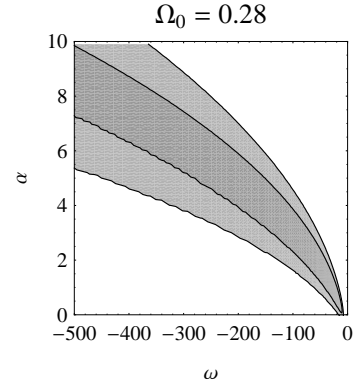


図 6 $\Omega_m = 0.28$

とおいた。ゴーストが現れない条件は $\kappa > 0$ であり、安定な条件は $\beta/\kappa > 0$ である。また、この音速 $c_s^2 = \beta/\kappa$ が光速を超えないような条件は $c_s^2 < 1$ である。

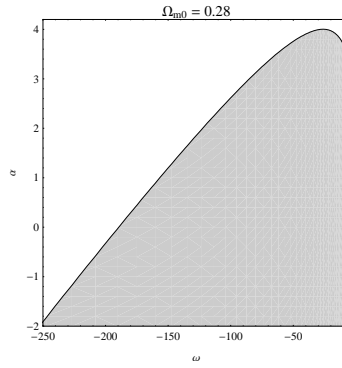


図 7 Galileon field の音速が光速を超えないパラメータ領域

6 COSMOLOGICAL PERTURBATION

ここでは線形摂動を考える。計量は conformal Newtonian gauge、

$$ds^2 = -(1 + 2\Psi)dt^2 + a^2(t)(1 + 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j. \quad (6.1)$$

を用いる。エネルギー密度、Galileon field の揺らぎはそれぞれ $\rho(x, t) = \rho(t)(1 + \delta(x, t))$ 、 $\phi(x, t) = \phi(t)(1 + \varphi(x, t))$ と定義する。エネルギー運動量保存は変更を受けないので、密度揺らぎの進化の式は

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} = \frac{\nabla^2}{a^2}\Psi \quad (6.2)$$

で与えられる。これからはホライズンの十分内側でさらに quasi-static 近似を用いる。すると、アインシュタイン方程式からは

$$\Psi + \Phi = -\varphi, \quad (6.3)$$

$$\frac{\nabla^2}{a^2}\Phi = -\frac{\rho\delta}{4\phi} - \frac{1}{2} [1 - \lambda^2(\phi)I^2] \frac{\nabla^2}{a^2}\varphi, \quad (6.4)$$

が得られ、Galileon field の場の方程式からは

$$\beta(t) \frac{\nabla^2}{a^2} \varphi = - [1 + \lambda^2(\phi) I^2] \frac{\rho \delta}{2\phi} \quad (6.5)$$

が得られる。これらを組み合わせると、ポアソン方程式に対応する方程式、

$$\frac{\nabla^2}{a^2} \Psi = \frac{\rho \delta}{4\phi} - \frac{1}{2} [1 + \lambda^2(\phi) I^2] \frac{\nabla^2}{a^2} \varphi \quad (6.6)$$

が得られる。これを用いると、密度揺らぎの進化の式は、

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} = 4\pi G_{\text{eff}} \rho \delta \quad (6.7)$$

となり、有効重力定数を

$$4\pi G_{\text{eff}} = \left[1 + \frac{(1 + \lambda^2(\phi) I^2)^2}{\beta(t)} \right] \frac{1}{4\phi}. \quad (6.8)$$

と定義できる。一方、非常に小さなスケールでは φ の非線形項が効いてくるため、次のオーダーまで考える必要がある。このときの場の方程式は、

$$\beta(t) \frac{\nabla^2}{a^2} \varphi + \frac{2\lambda^2(\phi)}{a^4} [(\nabla_i \nabla_j \varphi)(\nabla^i \nabla^j \varphi) - (\nabla^2 \varphi)^2] = - [1 + \lambda^2(\phi) I^2] \frac{\rho \delta}{2\phi} \quad (6.9)$$

で与えられる。このときのアインシュタイン方程式は線形摂動と同じ方程式系となる。線形摂動の式から $\varphi \sim H^2 a^2 \delta / k^2 \beta$ であり、 $H^2 \sim \rho / 2\phi$ 、 $I^2 \ll H^2$ から、この非線形な項は $\varphi > \beta a^2 / k^2 \lambda^2$ となるときに効いてくる。これから $\delta > \beta^2 / H^2 \lambda \sim O(1)$ であることが分かるので、 $\delta > 1$ となるときに非線形項を考慮する必要がある、この項が Vainshtein Mechanism において重要な役割を果たす。

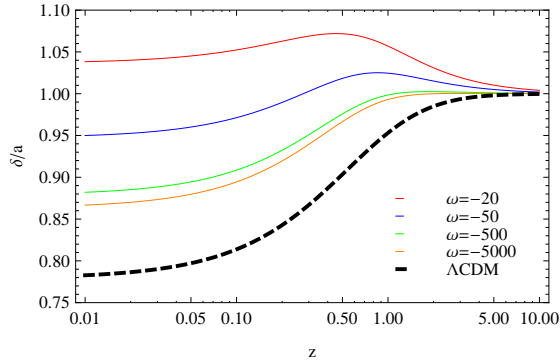


図 8 線形理論での密度揺らぎの成長率

7 VAINSHTEIN MECHANISM

小さいスケールでの Galileon field の振る舞いをみるため、非線形項を含んだ場の方程式を考える。前の式の共同座標における ∇ を物理的な座標での ∇ におきかえると、

$$\beta(t) \nabla^2 \varphi + 2\lambda^2(t) [(\nabla_i \nabla_j \varphi)(\nabla^i \nabla^j \varphi) - (\nabla^2 \varphi)^2] = - [1 + \lambda^2(t) I^2] \frac{\delta \rho}{2\phi}. \quad (7.1)$$

と書ける。ここで物質ゆらぎの分布が球対称であると仮定すると、 $d\varphi/dr$ について解くことができ、その解は

$$\frac{d\varphi}{dr} = - \frac{r_* \beta(t)}{8\lambda^2(t) g} \left(\frac{r}{r_*} \right) \quad (7.2)$$

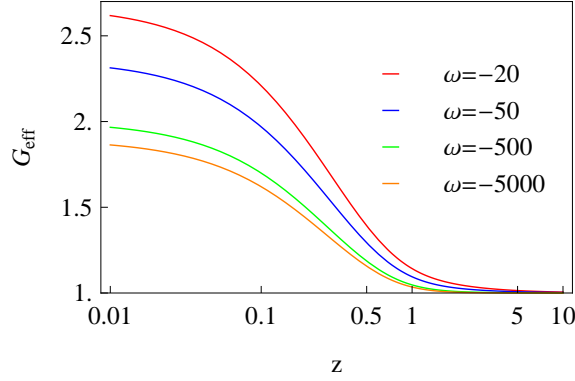


図9 線形理論での有効重力定数

で与えられる。ここで、半径 r 内のゆらぎの質量

$$m(r) = 4\pi \int_0^r r'^2 \delta\rho(r') dr' \quad (7.3)$$

とおき、

$$\gamma(t) = \frac{16\pi G\phi}{1 + \lambda^2(t)I^2} \quad (7.4)$$

$$g(x) = x \left[\sqrt{1 + x^{-3}} - 1 \right] \quad (7.5)$$

$$r_* = \left(\frac{32Gm(r)\lambda^2(t)}{\beta^2(t)\gamma(t)} \right)^{1/3} \quad (7.6)$$

と定義した。ここで r_* は Vainshtein radius と呼ばれ、この半径より大きい領域は φ の線形領域に対応し、小さい領域は非線形領域に対応している。

7.1 TOP-HAT PROFILE

密度ゆらぎの分布が Top-hat

$$\rho(r) = \begin{cases} \bar{\rho} + \delta\rho & r \leq R \\ \bar{\rho} & r > R \end{cases} \quad (7.7)$$

であるという仮定をする。このとき、 $r \leq r_*$ のときと $r > r_*$ のときの場合分けができる。これを評価すると、Galileon field による力は、

$$F_\varphi \sim \begin{cases} \frac{2}{\beta\gamma} F_N & r > r_* \\ \frac{2}{\beta\gamma} \left(\frac{r}{r_*} \right)^{3/2} F_N & r \leq r_* \end{cases} \quad (7.8)$$

となり、この Vainshtein 半径より内側では Galileon field による力は非常に小さいことがわかる。また Vainshtein 半径より十分外側では、Newtonian の重力とほぼ同じ程度のオーダーの力として働くことが分かり、長距離での重力が修正されているのが分かる。ここで、例として Point source としてこの Vainshtein 半径を評価すると、 $\omega = -50$ 、 $\alpha = 0$ のとき、

$$r_* = \left(\frac{16r_g \lambda^2(t)}{\beta^2(t)\gamma(t)} \right)^{1/3} = 2.28 \times 10^2 \left(\frac{M}{M_\odot} \right) pc \quad (7.9)$$

となる。ここで、 β 、 γ については現在の値で評価した。太陽系スケールの場合、Vainshtein 半径は 100pc 程度であることから一般相対論からのずれは非常に小さいと考えられる。さらに銀河・銀河団スケールではそれぞれ 1Mpc・10Mpc となることから、この場合も十分ずれは小さいと考えられる。

7.1.1 φ solution at $r = R$

ここでは、半径 $r = R$ のときの Galileon field の解を後に考える球対称崩壊の前に導出しておく。このとき、場の方程式は

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{16\pi G}{\beta(t)\gamma(t)} x^2 g(x) \quad (7.10)$$

となる。ここで、 $x = r/R_*$ である。すると、ポアソン方程式に対応する方程式は

$$\nabla^2 \Psi = 4\pi G_{\text{eff}}^{\text{NL}} \rho \delta \quad (7.11)$$

とかけ、ここで、Galileon field の非線形な効果も含んだ有効重力定数 $G_{\text{eff}}^{\text{NL}}$ は

$$4\pi G_{\text{eff}}^{\text{NL}} = [1 + 16\pi G_\varphi \phi] \frac{1}{4\phi} \quad (7.12)$$

で与えられ、 $G_\varphi(x)$ は

$$G_\varphi(x) = \frac{2}{\beta(t)\gamma(t)} g(x) x^2 G (1 + \lambda^2(\phi) I^2) \quad (7.13)$$

で定義される。

8 SPHERICAL COLLAPSE

非線形領域での密度揺らぎの進化を追うために、最も単純な近似として球対称崩壊を考える。球対称崩壊において、それぞれの Shell は交わらないと仮定し、Galileon field については非線形項を含んだ方程式系で解いていく。まず、密度揺らぎの進化を与える方程式は、エネルギー・運動量保存から

$$\ddot{\delta} - \frac{4}{3} \frac{\dot{\delta}^2}{1 + \delta} + 2H\dot{\delta} = (1 + \delta)\nabla^2 \Psi \quad (8.1)$$

となる。ここで半径 R の中の質量はこの進化において保存するとする。

$$M = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho = \frac{4\pi}{3} R^3 \bar{\rho}(1 + \delta) = \text{constant} \quad (8.2)$$

これらから半径 R の進化の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{R}}{R} &= H^2 + \dot{H} - \frac{1}{3}\nabla^2 \Psi \\ &= H^2 + \dot{H} - \frac{\delta \rho}{12\phi} [1 + 16\pi G_\varphi \phi] \end{aligned} \quad (8.3)$$

球対称崩壊 ($R = 0$) したときの線形密度揺らぎの値を δ_c として定義すると、 $\omega = -5000$ のとき $\delta_c = 1.702$ といった結果が得られた。

9 Press-Schechter mass function and Galaxy Number Count

Press-Schechter 理論では密度揺らぎの空間分布はガウシアン統計に従うと仮定し、 δ_c よりも大きい値の密度揺らぎをもつ領域では天体が形成されたと考える。このとき、Press-Schechter 質量関数は次のように与えられる。

$$\frac{dn(M, z)}{dM} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\rho}{M^2} \left[-\frac{\delta_c}{\sigma(M, z)} \frac{d \ln \sigma(M, z)}{d \ln M} \right] \exp\left(-\frac{\delta_c^2}{2\sigma^2(M, z)}\right) \quad (9.1)$$

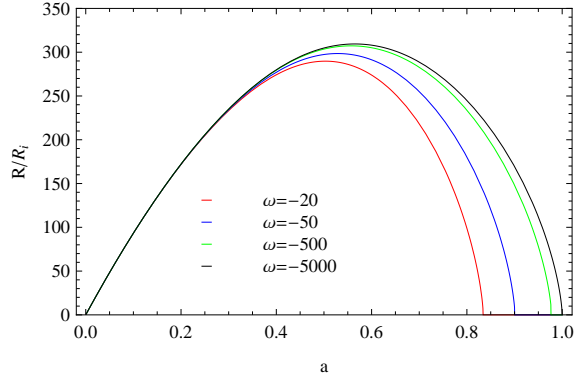


図 10 球対称崩壊における半径 R の進化

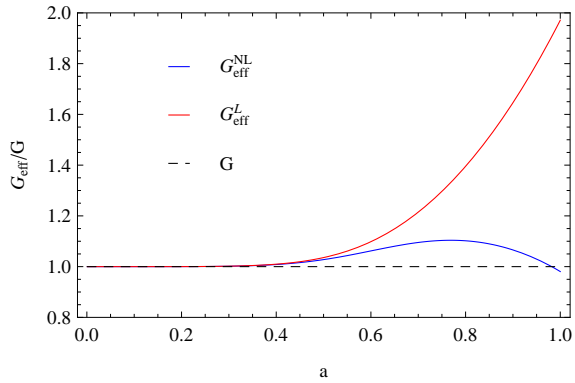


図 11 有効重力定数の変化

ここで $\sigma(M, z)$ は密度揺らぎの分散

$$\sigma^2(M, z) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk P_m(k, z) W(kR)^2 \quad (9.2)$$

であり、 M は半径 R 内のバックグラウンドの質量

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho R^3 \quad (9.3)$$

であり、 $P_m(k, z)$ は線形のパワースペクトルである。この Press-Schechter 質量関数を用いて、South Pole Telescope SZ Survey を仮定したときの予想される銀河団の数の赤方偏移分布 (4000 平方度) を書いたものが図 12 である。

10 CONCLUSION

ここではスカラー場の非線形項 $\square\phi(\nabla\phi)^2$ を Brans-Dicke 理論に加えた修正重力理論を考えた。この理論の特徴として、ラグランジアンにスカラー場の 2 階微分を含む項が存在するがスカラー場の方程式には 3 階微分の項が現れないこと、また、Ghost が存在せず安定であることが分かっている。また、太陽系スケールなどの小さいスケールにおいては、スカラー場の非線形項が効いてくることで、重力との結合が弱くなるため、一般相対性理論にほぼ一致するような理論となっている。本研究では、Ia 型超新星の観測からモデルパラメーター ω や α に制限をつけ、この観測と理論が矛盾しないようなパラメーター領域があることを示した。この Galileon 理論では、線形理論での密度揺らぎの成長率が Λ CDM モデルよりも大きくなるため、大規模構造を用いた観測も非常に有効である。また、球対称崩壊を考えるこ

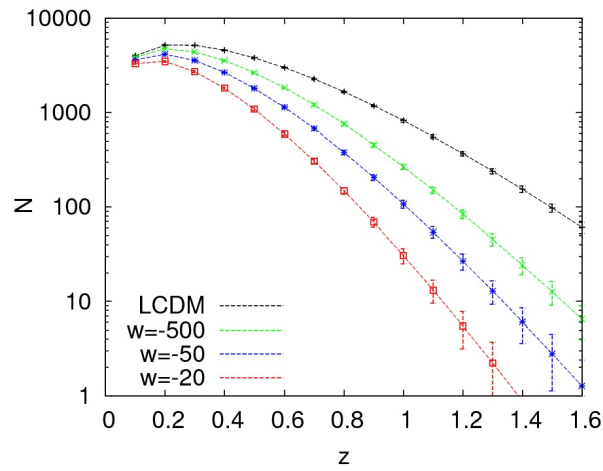


図 12 銀河団の数の赤方偏移分布

とで、非線形領域での進化を近似的に追うことができ、Press-Schechter 質量関数を用いることで銀河団の観測を用いた制限がこのモデルにおいては有効であることが分かった。

参考文献

- [1] A. Nicolis, R. Rattazzi, T. Trinchieri, arXiv:0811.2197
- [2] F. Silva, K. Koyama, arXiv:0909.4538
- [3] T. Kobayashi, H. Tashiro, D. Suzuki, arXiv:0912.4641
- [4] T. Kobayashi, arXiv:1003.3281